

# El costo de los ciclos económicos en Colombia: una nueva estimación<sup>\*</sup>

Mauricio A. Hernández M.<sup>†</sup>

Munir A. Jalil B.<sup>‡</sup>

Carlos Esteban Posada P.<sup>§</sup>

## Resumen

*Los ciclos económicos colombianos de la segunda mitad del siglo XX implicaron considerables variaciones en los agregados reales de la economía. A partir de un modelo con tecnología de producción AK y una función de producción de bienes de capital que presenta retornos decrecientes para la inversión, se calculó el costo de las fluctuaciones económicas en términos de consumo y bienestar de las familias. Según nuestros resultados, bajo estabilidad económica la tasa de crecimiento de largo plazo del consumo per cápita se habría incrementado entre 0,13 y 0,47 puntos porcentuales, pasando de 1,4% por año, en el escenario fluctuante, a una tasa en el intervalo 1,53% -1,87% anual. De acuerdo con diferentes niveles de la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo, la compensación necesaria para hacer que las familias obtuvieran un mismo bienestar bajo los dos escenarios (fluctuante y estable) equivaldría, en promedio, a 4,7% del consumo inicial.*

## Abstract

*Colombian economic cycles from the second half of the 20th century implied significant variations in real aggregates of the economy. Starting from a model with a technology of production AK and a production function of capital goods that presents diminishing returns to investment, we calculated the cost of economic fluctuations in terms of consumption and welfare of the households. According to our results, under economic stability the long term growth rate of per capita consumption would be increased between 0.13 and 0.47 percentage points. Finally, depending on the different levels of the intertemporal elasticity of substitution of consumption, the required compensation to make the households welfare on both paths (fluctuating and stable) equivalent would be, on average, 4.7% of initial consumption.*

**Clasificación JEL:** D61, E32.

**Palabras clave:** fluctuaciones, costo de los ciclos, bienestar

---

<sup>\*</sup> Borrador para comentarios. Las opiniones, cálculos y demás estimaciones contenidos en este documento son de la responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a sus directivas. Los autores agradecen la colaboración y los comentarios de Luis Eduardo Arango y Javier Gómez y la información estadística suministrada por Carlos Pombo y Luis H. Gutiérrez.

<sup>†</sup> Estudiante de Economía de la Universidad de Antioquia, pasante de investigación, Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. (mhernamo@banrep.gov.co).

<sup>‡</sup> Investigador, Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República. (mjalilba@banrep.gov.co).

<sup>§</sup> Investigador, Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República. (cposadpo@banrep.gov.co)

## I. Introducción

La trayectoria del crecimiento colombiano no ha sido constante. Los agregados reales de la economía en el siglo XX presentaron fluctuaciones significativas. Los ciclos económicos han sido uno de los rasgos característicos del desenvolvimiento de la economía colombiana (ver *gráfico 1*). A este respecto, Posada (1999) afirmó que fueron tres los factores que generaron las fluctuaciones en la segunda mitad del siglo XX: cambios en los términos de intercambio, crecimiento de la base monetaria e incremento del gasto público. Suescún (1997) reportó una correspondencia entre las bonanzas cafeteras y el comportamiento cíclico de la economía también en la segunda mitad del siglo XX. Con todo, Cárdenas (1992) observó que el carácter anti-cíclico de la política fiscal y la estabilización del precio interno del café explican por qué las fluctuaciones del consumo privado en Colombia no fueron tan fuertes como en otros países cafeteros.

Misas y Posada (2000) trataron de evaluar la importancia de las variables de oferta en las fluctuaciones económicas desde 1925 hasta 1998. Sus resultados indicaron que un choque positivo (y autónomo) en el producto, probablemente un indicador de impactos por el lado de la oferta agregada, fue el componente más importante en las fluctuaciones económicas<sup>1</sup> y un choque positivo en los términos de intercambio tuvo efectos positivos permanentes sobre el gasto público. Zuccardi (2002) encontró que, para el período 1983-2001, sólo las variables de oferta, producción y términos de intercambio, influyeron en el comportamiento de largo plazo del crecimiento, y las variables de demanda explicarían las fluctuaciones de corto plazo.

La *Tabla 1* muestra la desviación estándar relativa (desviación estándar de la serie dividida por la media), las autocorrelaciones de primer orden y la correlación contemporánea entre

---

<sup>1</sup> Algunos análisis basados en modelos de simulación numérica (calibración), siguiendo el enfoque de los “ciclos económicos reales”, tales como los de Hamann y Riascos (1998), Arango (1998) y Hamann (2002a y 2002b), han mostrado que la hipótesis según la cual los ciclos económicos colombianos obedecen a choques de oferta (específicamente, alteraciones aleatorias de la productividad) no podría rechazarse si se juzgara por la comparación entre los resultados generados por tales modelos y los comportamientos (medias, varianzas y correlaciones) de los componentes cíclicos de las principales variables agregadas de cuentas nacionales.

el producto, sus principales componentes y la PEA en Colombia, como un reflejo de la trayectoria de los ciclos económicos colombianos en la segunda mitad del siglo XX. La primera de estas medidas busca caracterizar la variabilidad de cada serie. Existe un rango muy cerrado en este criterio para todas las variables; la mayor parte de ellas (excepto para las exportaciones, las importaciones y la productividad del capital) se concentran en un intervalo de variación entre 0,5 y 0,65 con respecto a la media. Igualmente, se podría decir que la posición cíclica de las variables en cada período depende significativamente de los sucesos de un período atrás, a juzgar por la autocorrelación de primer orden de la mayor parte de las series, reflejando elementos de persistencia en las series. A su vez, la correlación contemporánea entre las variaciones del producto y sus componentes muestra una correspondencia moderada. Según esto, el consumo y las importaciones son los elementos que presentan una mayor consonancia con el componente cíclico del PIB y las exportaciones demuestran la mayor independencia.

*Tabla 1. Estadísticas de los ciclos económicos colombianos, 1950-2002*

Componente cíclico de las variables	Desviación estándar relativa*	Autocorrelación de primer orden	Correlación contemporánea con el producto
Producto (Y)	0,603	0.4728	1
Consumo (C)**	0,562	0.3806	0.9013
Inversión (I)	0,650	0.4102	0.6293
Gasto público (G)***	0,554	0.4677	0.4516
Exportaciones	0,846	0.0897	0.1778
Importaciones	0,917	0.5453	0.8239
PEA	0,490	0.1533	-0.1748
Capital físico (K)	0,648	0.6024	0.5855
Productividad del capital (Y/K)	0,065	0.5034	0.4783

\*La desviación estándar relativa corresponde a las series en niveles. Los demás cálculos se hicieron con los componentes cíclicos de las variables calculados mediante en filtro de Hodrick-Prescott.

\*\*Consumo de bienes durables y no durables

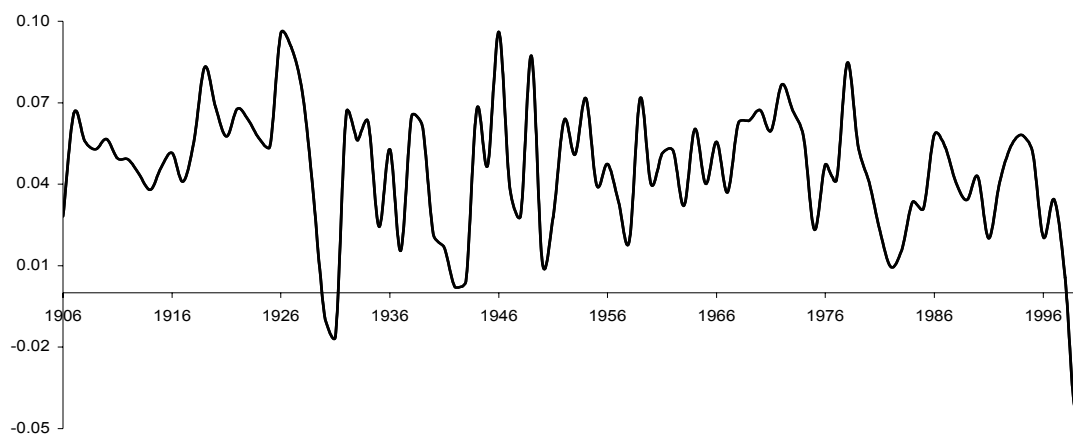
\*\*\*Datos entre 1970-2002

Fuente: las series son de GRECO (2002). Las especificaciones del cálculo de cada una de ellas se darán a lo largo del trabajo.

De la misma forma, si analizamos la serie del PIB anual desde 1905 hasta 2000 (*gráficos 1 y 2*), construida por GRECO (2002), podemos visualizar los ciclos de la economía colombiana a lo largo del siglo XX. El método más utilizado (y presentado aquí) para calcular los ciclos de una variable es el filtro de Hodrick-Prescott (filtro HP). Por medio de este recurso se puede obtener la tendencia del PIB. La diferencia entre el PIB y esta

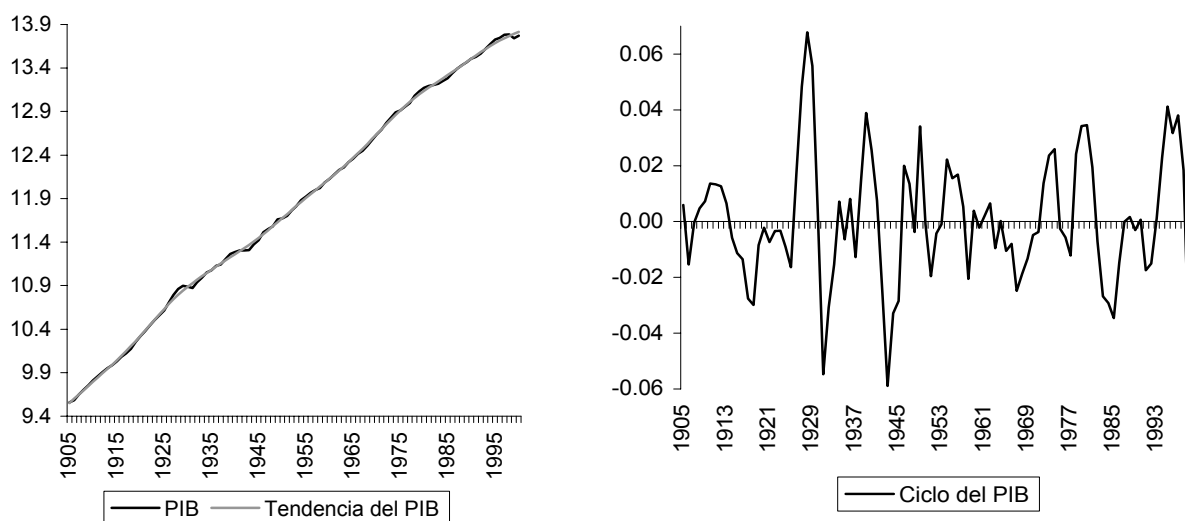
tendencia es igual al ciclo recorrido por el producto a través del tiempo (*gráfico 2*). Igualmente, con la serie trimestral disponible para el PIB entre 1977-2003,<sup>2</sup> podemos localizar los grandes puntos de corte en el ciclo económico colombiano en este período (*gráfico 3*). En este ejercicio se observan tres ciclos completos y el inicio de otro.

*Gráfico 1. Tasa de crecimiento del producto (1906-2000)*



Fuente: GRECO, 2002.

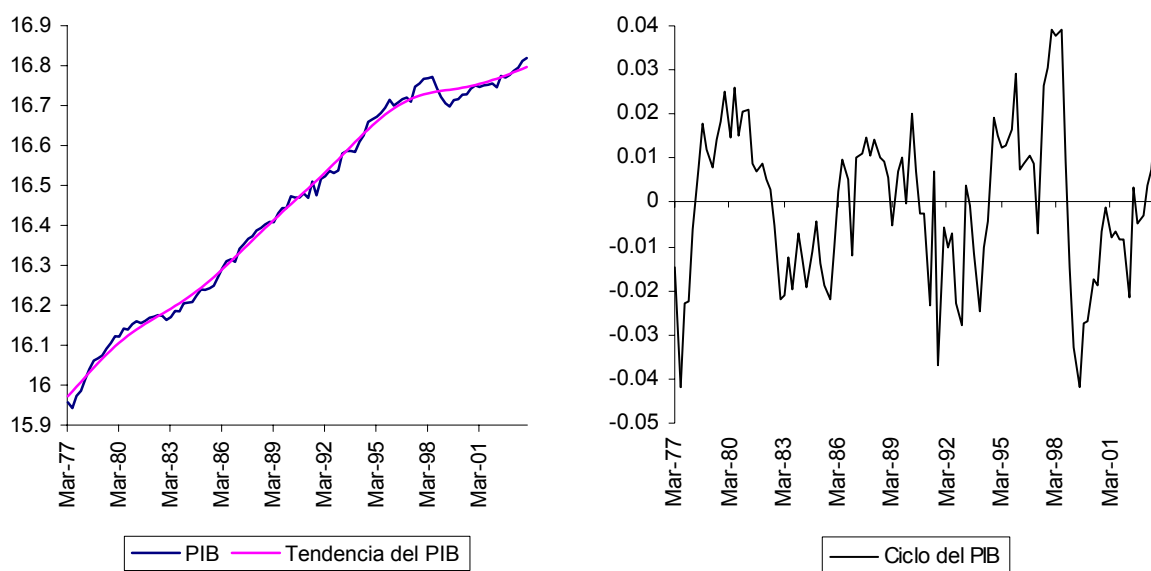
*Gráfico 2. Tendencia y ciclo del PIB anual (1905-2000)*



Fuente: GRECO (2002). Tendencia estimada a través del filtro de Hodrick-Prescott.

<sup>2</sup> Serie construida por el Departamento Nacional de Planeación para el período 1977-2003. La serie se desestacionalizó para realizar las pruebas correspondientes.

Gráfico 3. Tendencia y ciclo del PIB trimestral (1977-2003)



Fuente: DNP. Tendencia estimada a través del filtro de Hodrick-Prescott.

Sin duda, las características del ciclo colombiano dan lugar a preguntarse qué tan costosas han sido estas fluctuaciones para el bienestar de las familias, pues la trayectoria del crecimiento económico afecta definitivamente su senda de consumo y sus decisiones de inversión. Y aunque el país casi nunca presentó tasas negativas de crecimiento en el producto real total, lo cual sólo sucedió en 1931 y 1999, se sostiene aquí que una tasa positiva de crecimiento de largo plazo no es suficiente para garantizar un nivel máximo de bienestar para las familias. Los ciclos económicos podrían traer consigo altos costos en términos de bienestar.

No obstante, demostrar que los ciclos tienen un efecto significativo sobre el bienestar de las familias sería solamente una razón necesaria más no suficiente para recomendar políticas de intervención. En efecto, choques provenientes del lado de la oferta agregada, efectos neutralizantes de las anticipaciones de los agentes privados, problemas de información y los casos de países pequeños con sus economías abiertas dan lugar a la ausencia de bases

sólidas para establecer mecanismos estatales de estabilización y, por el contrario, pueden conducir a políticas “anti-cíclicas” de efectos desestabilizantes<sup>3</sup>.

En este orden de ideas se ubica el objetivo de este artículo. En su desarrollo se pretende calcular nuevamente el costo de los ciclos económicos en Colombia entre 1950 y 1998 y entre 1950 y 2002 siguiendo la metodología propuesta por Barlevy (2004). Los resultados encontrados sugieren un costo de las fluctuaciones en la tasa de crecimiento anual del consumo *per cápita* entre 0,13 y 0,47 puntos porcentuales, es decir, la tasa media anual de crecimiento de largo plazo, que fue 1,4%, se incrementaría a 1,53%, en el escenario más pesimista, y a 1,87%, en el mejor de los casos. En términos específicos, los agentes considerarían indiferentes las trayectorias observada (fluctuante) y estable si se les hubiera compensado con un consumo adicional equivalente, en promedio, a 4,7% del consumo observado en 1950.

El artículo está dividido en seis secciones además de esta introducción. En la primera (sección II) se busca ubicar este trabajo en su relación con otros estudios hechos en el país y en Estados Unidos. En la sección III se expone el modelo que será utilizado y se realizan algunas interpretaciones de los resultados analíticos. A continuación, sección IV, se realizan dos estimaciones del costo de los ciclos por medio de dos métodos diferentes. Luego, en la sección V se presentan las precisiones correspondientes a la aplicación del segundo de los métodos a partir de tres medidas diferentes para la volatilidad de la inversión. Seguidamente, en la sección VI, se utilizan los datos estimados en las secciones anteriores sobre el costo de los ciclos en términos de aumento de la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* para estimar la pérdida de bienestar del agente representativo. Por último, en la sección VII, se sintetiza y concluye.

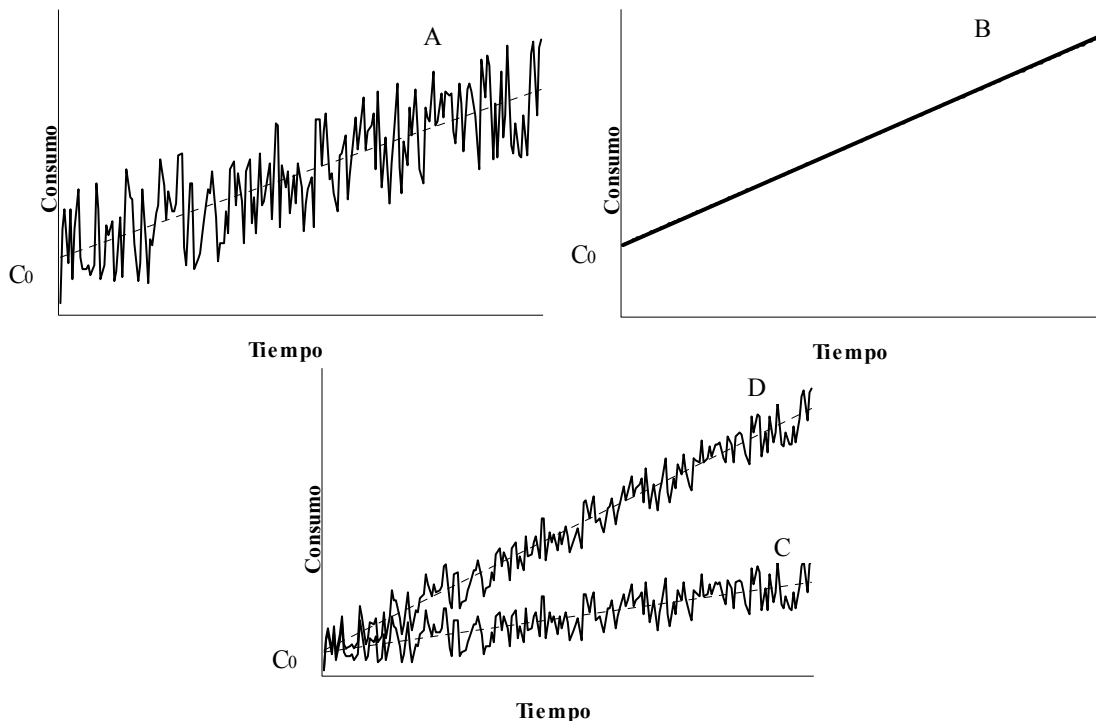
---

<sup>3</sup> Los capítulos 4 (“*Stabilization Policy – Can we?*”) y 5 (“*Stabilization Policy – Should we?*”) de Minford y Peel (2002) son especialmente útiles al respecto.

## II. Revisión de trabajos anteriores

De acuerdo con sus conclusiones los trabajos se dividen en dos tipos: aquellos que aseguran que los ciclos económicos traen efectos despreciables sobre el bienestar de los hogares y, de otro lado, los que apoyan la idea de que las fluctuaciones traen consecuencias considerables en el bienestar general. El estudio más famoso entre los primeros es el de Lucas (1987). El autor parte de un agente representativo averso al riesgo que debe elegir dos sendas diferentes en el consumo, una con fluctuaciones alrededor de su tendencia y otra estable. La conclusión de Lucas es que las fluctuaciones económicas no traen costos considerables en el bienestar de las familias. Para él, no es la desviación del producto con respecto a su tendencia lo que importa sino sólo el ritmo de crecimiento; a largo plazo este sí traería fuertes impactos sobre el nivel de bienestar de las familias.

Gráfico 4. Cambios en el bienestar según Lucas: estabilización versus crecimiento



Para Lucas los consumidores aversos al riesgo mejoran su bienestar si se pasa de A a B; pero la mejora en bienestar es pequeña. Lo que explica una mejora grande de bienestar es pasar de C a D (lo que importa es el crecimiento, no el ciclo).

Para medir esta pérdida de bienestar, Lucas se preguntó: ¿a qué fracción constante del consumo de cada año el consumidor renunciaría para evitar las fluctuaciones? Suponiendo una aversión al riesgo bastante alta, el cálculo arrojó resultados mínimos: 0,17%. Es decir, para el período de posguerra, el agente estaría dispuesto a pagar 0,17% del consumo global para eliminar completamente la variabilidad del mismo; éste sería el mejoramiento en el nivel de bienestar gracias a una estabilización de las condiciones económicas. Por otra parte, estudiando problemas de crecimiento, Lucas calculó que el individuo renunciaría incluso hasta un 20% de su consumo total para incrementar la tasa promedio de crecimiento en un punto porcentual. Así, Lucas estaría comprobando, para el caso de Estados Unidos, que el crecimiento importa pero los ciclos de negocios no. Por lo tanto, la política económica no debería concentrarse en los fenómenos de corto plazo.

Para el caso colombiano, Gómez (1992) hizo una medición del costo de las fluctuaciones para el período 1965-1989 siguiendo la ruta abierta por Lucas (1987). La metodología consistió en hallar una tasa de compensación (como porcentaje del consumo) que se le sume al consumo del individuo en todos los momentos y realizaciones y lograr que éste iguale la utilidad en los dos escenarios: economía fluctuante y estabilidad.<sup>4</sup> Según este procedimiento, el costo de las fluctuaciones aumenta cuanto mayores sean la aversión al riesgo del agente y las fluctuaciones en el consumo. Gómez calculó un costo de la inestabilidad del consumo igual a un 2,5% del mismo (p. 198, cuadro 3), utilizando una

---

<sup>4</sup> Las siguientes son las ecuaciones que hacen parte de la modelación enunciada:

La función de utilidad:  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} [c_t^{1-\gamma} - 1]$ , siendo  $\gamma$  la aversión al riesgo,  $c_t$  el consumo y  $\beta$  el factor de descuento.

El patrón original de consumo  $c_t = (1 + \mu)^t z_t$ , siendo  $\mu$  la tasa de crecimiento tendencial del consumo y  $z_t$  una variable aleatoria, con  $c_0 = 1$ . En un ambiente estable el plan de consumo es  $c_t = (1 + \mu)^t E(z_t)$ .

Algebraicamente, la compensación a la que se refiere el enunciado anterior queda expresada así:

$$E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} \left[ \left( (1 + \lambda)(1 + \mu)^t z_t \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} \left[ \left( (1 + \mu)^t E[z_t] \right)^{1-\gamma} - 1 \right].$$

Despejando para  $\lambda$ , se tiene que:

$$\lambda = \frac{1}{2} \gamma \sigma_y^2, \text{ siendo } y = \frac{z_t}{E[z_t]}. \lambda \text{ es la tasa de compensación o el costo de las fluctuaciones.}$$



aversión al riesgo similar a la propuesta por Lucas ( $\sigma = 20$ ) y una desviación estándar del consumo con respecto a su tendencia ( $\sigma_y$ ) igual a 0,05.

Siguiendo este mismo método de aproximación, aunque con algunas variaciones en la especificación de la senda del consumo, Cárdenas (1992) encontró resultados similares para el período 1925-1990. Dado un coeficiente de aversión al riesgo igual a 20, la eliminación de las fluctuaciones alrededor de la tendencia del consumo aumentaría éste último en un 3,89% (utilizando una especificación para el consumo estacionaria en tendencia, bajo la cual los choques tienen efectos transitorios) o en un 5,57% (utilizando una especificación estacionaria en diferencias, la cual acumula los choques a través del tiempo). El autor también hizo el cálculo para el período 1965 – 1989 para el caso del consumo de bienes no durables; aquí los resultados son más pequeños: 2,73% ó 0,70%, respectivamente, de acuerdo con cada especificación de la senda del consumo.

En el apartado final de su estudio, Cárdenas utilizó un modelo ARIMA, estimado para las series de consumo en Colombia, con el fin de calcular el costo de las fluctuaciones. El proceso consistió en simular 10.000 series diferentes de consumo generadas por este proceso ARIMA y luego calcular la utilidad intertemporal promedio correspondiente a las series resultantes en la estimación. Seguidamente dedujo la utilidad que es lograda cuando los términos de perturbación del modelo son cero (es decir, cuando sólo se tienen en cuenta los términos autorregresivos del ARIMA). Con estas dos utilidades se halla el costo de la variabilidad del consumo como porcentaje de éste. Según esto, con un coeficiente de aversión igual a 20, para lograr la estabilidad en su senda, el consumidor representativo estaría dispuesto a sacrificar 6,1% de su consumo para el período 1925-1990 (consumo privado total) ó 0,86% entre 1965-1989 (consumo de bienes no durables).

Las conclusiones de Gómez y Cárdenas están de acuerdo con la de Lucas en cuanto a que el crecimiento es más importante que la estabilidad. Sin embargo, el costo de las fluctuaciones encontrado por ellos para el caso colombiano es mucho mayor que el calculado por Lucas

para Estados Unidos y se encuentra en el rango estimado por nosotros, como se verá más adelante.

El estudio de Barlevy (2004) se aparta de manera significativa del enfoque de Lucas. Con sus cálculos, hechos para el período de posguerra en Estados Unidos, llegó a resultados sustancialmente diferentes a los de aquel. Concluyó que la eliminación de las fluctuaciones puede incrementar la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* de Estados Unidos entre 0,35 y 0,40 puntos porcentuales, sin afectar el nivel inicial del consumo; esto implicó un costo de las fluctuaciones 100 veces más grande que el sugerido por Lucas.

La valoración de estos impactos estuvo basada en un método *contrafactual*, es decir, se calculó el consumo logrado por el agente bajo un ambiente fluctuante (el real) y se comparó con el consumo logrado en un ambiente estable (simulado). Las conclusiones diferentes entre este estudio y el de Lucas se basan en que, según Barlevy, las oscilaciones de las variables reales tienen una vía de transmisión que pasa por la disminución del crecimiento. Incluso si las fluctuaciones agregadas tuviesen, *per se*, un modesto efecto sobre la tasa de crecimiento de la economía, esto podría tener un efecto significativo sobre el bienestar.<sup>5</sup>

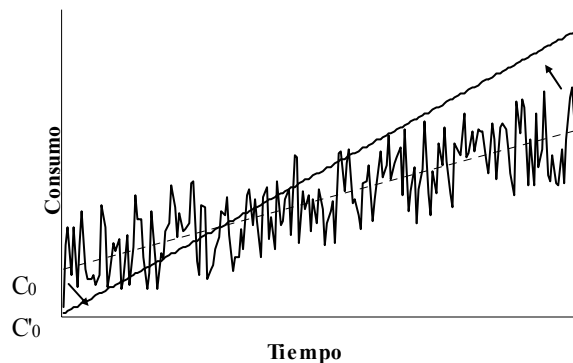
Trabajos anteriores para Estados Unidos (véase Barlevy, 2004, p. 965) han tratado de medir el costo de los ciclos económicos siguiendo esta vía pero con una limitación que Barlevy señala: utilizan una función para la inversión que presenta retornos constantes de escala. En estos intentos, los efectos de las fluctuaciones sobre el crecimiento de largo plazo son descritos mediante cambios en la cantidad de recursos que son asignados a las actividades que intensifican el crecimiento en equilibrio (suponen más inversión en el momento en que es eliminada la fluctuación). Así, si se eliminan las fluctuaciones se tendría un incremento en la inversión en actividades promotoras de crecimiento y el consumo crecerá a una tasa más alta en los períodos posteriores, pero habrá una menor cantidad de recursos destinados al consumo inicial, y esto ocasiona la disminución del nivel inicial de consumo. Por tanto,

---

<sup>5</sup> Es decir, se utiliza la idea intuitiva de Lucas según la cual una disminución en un punto porcentual de la tasa de crecimiento del consumo equivale a reducir el plan de consumo inicial en un 20%.

el efecto total de la reducción de las fluctuaciones sobre el bienestar resulta ser más bien pequeño (o ambiguo): la mayor utilidad del mayor crecimiento del consumo posterior es contrarrestada por la desutilidad en el menor consumo inicial.<sup>6</sup>

Gráfico 5. Efectos de la estabilización bajo rendimientos constantes de la inversión



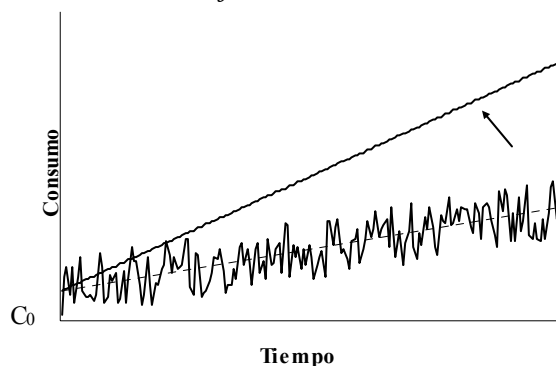
Otros autores que han tratado de medir el costo de los ciclos bajo rendimientos constantes de la inversión no han conseguido grandes variaciones en el bienestar de los consumidores. La estabilización eleva la tasa de crecimiento, pero esto produce una caída inicial en el consumo porque se hará más rentable aumentar de manera sustancial, desde el principio (cuando se estabiliza), la tasa de inversión.

Según Barlevy, se debe recurrir a modelaciones de este problema que involucren mecanismos limitantes de la inversión una vez eliminadas las fuentes de inestabilidad. Esto es, si se mide el costo de las fluctuaciones bajo el contrafactual de un escenario de estabilidad, *en donde la inversión inicial permanezca fija*, el aumento en el bienestar de las familias debido a la eliminación de las fluctuaciones será significativo (pues no habrá pérdidas de utilidad asociadas a la caída en el consumo inicial). Por lo tanto, la pregunta correcta para hallar los costos de las fluctuaciones debe ser la siguiente: ¿cuánto podría estar dispuesto a sacrificar un agente para obtener una senda de consumo que parta en el mismo nivel inicial pero que crezca más rápidamente al eliminar las fluctuaciones? La clave de Barlevy para encontrar valoraciones altas en el costo de los ciclos estuvo en el marco teórico utilizado. Recurrió a una tecnología *AK*, según la cual el crecimiento se basa

<sup>6</sup> Incluso el bienestar puede disminuir en este escenario. Si nos encontramos con un agente que valora mucho más el consumo presente que el futuro, descubriremos que su bienestar disminuirá ante la decisión de aumentar la inversión en el momento cero en detrimento del menor consumo. Por tanto, cuando una estabilización económica es explicada por medio de aumentos iniciales de inversión se tiene que los beneficios adicionales de este hecho son insignificantes o, paradójicamente, negativos.

en la acumulación de capital, y a una función para la producción de bienes de capital estrictamente cóncava, es decir, la tasa de crecimiento de la inversión presenta rendimientos decrecientes.<sup>7</sup>

*Gráfico 6. Efectos de la estabilización bajo rendimientos decrecientes de la inversión*



Bajo el planteamiento de Barlevy, al estabilizarse la economía, la tasa de inversión inicialmente no va a aumentar sustancialmente (gracias al supuesto sobre la función de inversión); por tanto, el consumo se alejará cada vez más del consumo tendencial correspondiente a la senda sin estabilización.

Así, Barlevy logró demostrar que los ciclos de negocios podrían resultar altamente costosos, si bien dejó claro que sus resultados no son, necesariamente, una defensa de la política macroeconómica de estabilización.

### III. El modelo

El modelo, una versión simplificada de Barlevy (2004), cuenta con un agente representativo que sólo deriva utilidad del consumo (descontada en el tiempo, el cual es discreto) y que tiene acceso a la tecnología que convierte capital en consumo y producción en nuevos bienes de capital. La fuente de fluctuaciones en esta economía son choques de

<sup>7</sup> La intuición acerca de la razón de los retornos decrecientes de la inversión se basa en las decisiones de los agentes: supóngase un momento cero cuando ya han decidido óptimamente los niveles de consumo e inversión bajo un ambiente de fluctuaciones y en el cual sucede una estabilización del ambiente económico (es decir, se sabe que no habrá más cambios y que se continuará con un nivel constante de la productividad en el tiempo). Como la inversión tiene rendimientos decrecientes y la decisión que se había tomado antes era óptima, no habrá motivos para que el agente cambie su decisión y restrinja su consumo a favor de la inversión (pues de aumentar esta, tendría un rendimiento negativo en el margen), por lo cual será posible partir del mismo nivel de consumo que se había elegido anteriormente en el ambiente fluctuante. Es decir, la importancia de los rendimientos decrecientes de la inversión se basa en la restricción efectiva que impone sobre los agentes para que no inviertan más de lo que ya era óptimo y provoquen así resultados ambiguos sobre el bienestar.

productividad (es decir, aleatoriedad del factor de productividad,  $A_t$ ). Así mismo, el comportamiento de  $A_t$  debe ser tal que, si existe un nivel  $x$  de productividad, se da que  $\text{Prob}[A_{t+1} \leq x | A_t]$  es débilmente decreciente en  $A_t$ . Esto significa que una productividad alta alcanzada hoy viene acompañada de una productividad futura esperada mayor y más cercana al mencionado nivel e involucra mecanismos de persistencia en su comportamiento.

La senda del producto (y del consumo) en el tiempo depende de la evolución del acervo de capital. El agente tiene una cantidad inicial de capital  $K_0$  y los valores iniciales para  $A_0$  y  $Y_0$  están dados. En cada período existe una depreciación  $\delta$  del capital y cada vez el agente decide cuánto invertir y cuánto consumir. La senda de consumo en el tiempo y, por tanto, su tasa de crecimiento son endógenas.<sup>8</sup> Sean las siguientes funciones iniciales:

- Función de utilidad  $U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma}$  (1)
- Tecnología de producción  $Y_t = A_t K_t$  (2)
- Tecnología de producción de bienes de capital  $\Phi(I_t, K_t) = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) K_t$  (3)

Siendo:

$\beta$ : factor de descuento de la utilidad

$\gamma > 0$ : Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo

$Y_t$ : producto de la economía en el período t.

$A_t$ : factor tecnológico en el período t. Sigue un proceso markoviano.

$K_t$ : acervo de capital en el período t

$I_t$ : nivel de inversión bruta en el período t (inversión antes de la depreciación y del costo de transformar la producción no consumida en adición al acervo de capital).

$\phi$ : función cóncava de la inversión.

---

<sup>8</sup> En este aspecto se diferencia de Lucas. La senda de consumo de esta última formulación contiene una tasa de crecimiento constante que es elegida exógenamente y sostiene un término de perturbación que se simula por medio de números aleatorios.

En la ecuación (2), el acervo de capital y el producto no guardan una relación lineal constante en el tiempo. Es una función estocástica, pues téngase en cuenta que la variable  $A_t$  está expuesta a choques exógenos aleatorios de productividad o de política económica. Entonces, la cantidad de producto que es producida con una unidad de capital varía en el tiempo, dadas las condiciones de productividad asociadas a cada momento.

La función de producción de bienes de capital (3) tiene estas propiedades:

- Función homogénea de grado uno.
- $\frac{\partial \phi}{\partial I} > 0$  y  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial I^2} < 0$ , es decir, la producción del capital adicional es una función creciente de la inversión, pero ésta última presenta rendimientos decrecientes: cada unidad adicional de inversión aporta menos en la producción del capital adicional. O lo que es lo mismo, la función  $\phi(\cdot)$  es cóncava en el plano  $\phi, I$ .<sup>9</sup> Esto significa que la cantidad de capital adicional disponible en un período de producción no será igual, *per se*, a la cantidad no consumida del producto en el período anterior, como sucede en los modelos macroeconómicos usuales.
- Los retornos decrecientes disminuyen la repuesta de la inversión a cambios en  $A_t$ .
- En cada período de producción no se gasta la totalidad del capital; sólo se deprecia una proporción  $\delta$ . Por lo tanto, el acervo de capital disponible en un período dado sería igual a la cantidad no depreciada del capital en el período anterior más la nueva producción de capital. De este modo, la senda para el acervo de capital sería la siguiente:

$$K_{t+1} = K_t - \delta K_t + \Phi(I_t, K_t), \quad \text{siendo } \Phi(I_t, K_t) = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)K_t.$$

$$K_{t+1} = K_t - \delta K_t + \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)K_t$$

$$K_{t+1} = \left[1 + \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) - \delta\right]K_t \quad (4)$$

<sup>9</sup> En la formulación de esta función está la clave para calcular costos de los ciclos económicos de mayor magnitud. Con los supuestos que recaen sobre ella es posible controlar la senda de consumo y hacer que, en condiciones estables, parta de la misma situación de la que partiría en condiciones fluctuantes, evitando la reducción del consumo del período inicial del escenario estable (a favor de mayor inversión) y garantizando su mayor crecimiento posterior (y con ello de bienestar) en la senda completa.

Haciendo reemplazos sucesivos hasta  $K_0$  resulta que:

$$K_t = \left[ \prod_{s=0}^{t-1} \left( 1 + \phi \left( \frac{I_s}{K_s} \right) - \delta \right) \right] K_0 \quad (5)$$

Igualmente, para hallar la senda de consumo, debemos partir de la siguiente identidad:

$Y_t \equiv C_t + I_t$ , es decir, la economía es cerrada y no existe gobierno (o el consumo de éste se encuentra contabilizado en  $C_t$ ). Además, definamos las siguientes proporciones:  $C_t/Y_t = c_t$  y  $I_t/Y_t = i_t$ , por lo tanto,  $c_t = 1 - i_t$ . Nótese que  $c_t, i_t$  no son constantes; estas variables resultan del proceso de maximización del agente en cada período que Barlevy (2004, p. 969) define de la siguiente forma:

$$V(K_0, A_0) \equiv \max_{c_t} E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \right]$$

$$\text{s.a.} \quad 1. \quad K_{t+1} = \left[ 1 + \phi \left( \frac{I_t}{K_t} \right) - \delta \right] K_t$$

2.  $K_0, A_0$  y la ley de movimiento de  $A_t$ .

La solución de este problema se encuentra en el apéndice de Barlevy (2004). Una conclusión que se puede derivar de la solución es la siguiente: ante las fluctuaciones de  $A_t$  el agente elegirá variar su tasa de ahorro (y, por ende, su tasa de inversión,  $i_t$ ) conjuntamente, y en relación positiva, con  $A_t$ . Así mismo, dado que el complemento de la tasa de inversión es la tasa de consumo,  $c_t$ , ésta también será condicionada por las percepciones del agente respecto a los cambios en el nivel de productividad de la economía, es decir, dado que existe aleatoriedad en el comportamiento de  $A_t$ , el agente variará su tasa de consumo en relación inversa a los cambios presentados en  $A_t$ , buscando siempre suavizar su senda de consumo.

Para hallar la senda de consumo procedamos de la siguiente forma:

$$C_t = c_t Y_t$$

$$C_t = c_t A_t K_t$$

$$C_t = c_t A_t \left[ \prod_{s=0}^{t-1} \left( 1 + \phi \left( \frac{I_s}{K_s} \right) - \delta \right) \right] K_0$$

$$C_t = \left[ \prod_{s=0}^{t-1} \left( 1 + \phi(i_s A_s) - \delta \right) \right] \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} C_0$$

$$C_t = \left[ \prod_{s=0}^{t-1} \left( 1 + \phi(i_s A_s) - \delta \right) \right] \left( 1 + \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} - 1 \right) C_0$$

Sean  $\lambda_s = (1 + \phi(i_s A_s) - \delta)$ ,  $\varepsilon_t = \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} - 1$ ; se tiene que:

$$C_t = \left[ \prod_{s=0}^{t-1} (\lambda_s) \right] (1 + \varepsilon_t) C_0 \quad (6)$$

Siendo:

$\lambda_s$ : 1+ tasa de crecimiento del acervo de capital

$\varepsilon_t$ : Desviación del consumo con respecto a su senda

$C_0$ : Nivel inicial de consumo

La ecuación (6) representa la senda del consumo. Nótese que si  $\lambda_s = \lambda$  en todo período de tiempo, la ecuación (6) se convertiría en  $C_t = \lambda^t (1 + \varepsilon_t) C_0$  (la propuesta de Lucas en su ensayo original, siendo  $\lambda$  y  $\varepsilon_t$  exógenas; la diferencia radica en que ahora  $C_t$  es endógena como una respuesta óptima al ambiente económico incierto más que a una especificación exógena.).

### ***Estabilidad: utilidad y maximización***

Cuando  $A_t$  fluctúa en el tiempo, el agente elegirá variar su tasa de acumulación ( $I/K$ ) en el mismo sentido, pues,  $I_s/K_s = i_s A_s$ . Así, la tasa de acumulación es función positiva de  $A_t$ .



Esto implica que las tendencias del crecimiento para la inversión y el producto serán más altas cuando estas variables estén por encima de su tendencia previa (es decir, cuando han sucedido choques positivos de productividad). La esencia de estas afirmaciones se encuentra en la siguiente proposición.

*Proposición*

Si  $\text{Prob}[A_{t+1} \leq x | A_t]$  es débilmente decreciente en  $A_t$ , entonces,  $i_t A_t = I_t / K_t$  es incremental en  $A_t$ .<sup>10</sup>

*La existencia de un ambiente estable*

- Bajo un ambiente fluctuante la productividad puede estar expuesta tanto a choques positivos como negativos que se anulan entre si; esto es, su senda a través del tiempo puede describirse como ondas que se desplazan alrededor de un valor específico con cierta persistencia. De ahí que se pueda afirmar que el valor que toma la productividad en un ambiente estable viene dado por  $A^* = E(A_t)$ , el valor medio de la senda fluctuante o su valor tendencial sin estabilización.

- Además, sea la siguiente definición para la razón inversión/producto en estabilidad:  $i^* = E(i_t A_t) / A^*$  o, lo que es lo mismo,  $i^* A^* = E(i_t A_t)$ . Esta igualdad es recursiva por la siguiente razón. Por definición, la esperanza de la multiplicación de dos variables aleatorias viene dada por  $E(i_t A_t) = E(i_t)E(A_t) + \text{cov}(i_t, A_t)$ . Esto es,  $i^* A^* = E(i_t)A^* + \text{cov}(i_t, A_t)$  y, despejando,  $E(i_t) = i^* - [\text{cov}(i_t, A_t) / A^*]$ . Es decir, siempre que la covarianza entre la razón inversión/producto y la productividad sea positiva se tiene que la tasa de inversión bajo estabilidad,  $i^*$ , es superior al promedio de la tasa de inversión bajo el ambiente fluctuante. Esta covarianza debe ser positiva, pues el agente está dispuesto a otorgar una mayor cantidad de recursos para la inversión cada vez que la productividad alcance niveles más altos (según la proposición enunciada anteriormente). Esto es importante pues muestra un

---

<sup>10</sup> La prueba de esta proposición se encuentra en Barlevy (2004, p. 987)

camino por el cual se puede explicar cómo la tasa de acumulación en un escenario estable es mayor que la tasa que se obtiene bajo un ambiente fluctuante.

- Así mismo, como  $C_0 = c^* A^* K_0 = (1 - i^*) A^* K_0 = (A^* - i^* A^*) K_0 = [A^* - E(i_t A_t)] K_0$ , el consumo inicial es función negativa de la tasa de inversión elegida por el agente.

### *Implicaciones para el agente de pasar de un ambiente estocástico a uno estable*

1. Bajo un ambiente estable, el agente elegirá una senda de consumo que no fluctúa alrededor de su tendencia. El individuo, siempre que  $A_t = A^*$ , destinará un  $c^*$  constante en el tiempo como proporción del producto para consumir. Entonces  $\varepsilon_t = c_t A_t / c_0 A_0 - 1 = \varepsilon_t^* = c^* A^* / c^* A^* - 1 = 0$ , es decir, el consumo no se desviará nunca de su senda. Lucas sólo se interesó por explicar este primer tipo de efecto y llegó a resultados de magnitud despreciable. Además, él introdujo las fluctuaciones por medio de perturbaciones idéntica e independientemente distribuidas (*iid*),<sup>11</sup> mientras que aquí existe correlación serial entre las perturbaciones inducidas por  $A_t$  y las respuestas de los agentes en sus decisiones de inversión.

2. Como  $i_t$  es estable cuando la productividad,  $A_t$ , lo es, el agente elegirá una senda de consumo con tendencia determinística, no estocástica.

En conclusión, uniendo las dos implicaciones anteriores, la eliminación de las fluctuaciones en la productividad agregada descarta:

2.a. Las fluctuaciones *alrededor* de la senda de consumo.

---

<sup>11</sup> Según Reis (2005) el supuesto de choques sobre el consumo serialmente incorrelacionados es rechazado por los datos de Estados Unidos. Por este motivo, la vía que toma Reis para evitar subvalorar el costo de las fluctuaciones es la construcción de las propiedades del proceso estocástico que sigue el consumo por medio de dos aproximaciones: una de origen estadístico y otra con una metodología económica. La primera alternativa muestra que el consumo es muy persistente y que, dado este comportamiento, las estimaciones de Lucas para el costo de las fluctuaciones son sesgadas hacia abajo. En la segunda vía, bajo la cual las fluctuaciones del consumo son respuestas óptimas a choques, se considera la posibilidad de que las fluctuaciones afecten el nivel y la tasa de crecimiento del consumo por medio de su impacto sobre el ahorro precautelativo y la inversión. Los resultados de Reis reflejan que el costo de las fluctuaciones (sin diferenciar si provienen de choques de productividad o monetarios y si corresponden a los ciclos económicos o a la incertidumbre de largo plazo) se encuentra entre 0,5% y 5% del consumo per cápita.

2.b. Las fluctuaciones *en* la senda de consumo.

El resultado de la eliminación de la segunda fuente de fluctuaciones (no tomada en cuenta en el análisis de Lucas y de los estudios que siguieron esta vía) puede representar un mayor impacto sobre el bienestar del agente, pues este tipo de fluctuaciones genera un efecto permanente sobre la senda de consumo.

3. El agente puede mantener una pendiente diferente en el perfil de consumo con respecto a un ambiente estocástico.

Las causas para los cambios en el perfil del consumo son excluyentes:

3.a. Cambios en la *volatilidad* de la inversión (aquí  $i$ , es decir, la tasa de inversión promedio, no varía).

3.b. Cambios en el *nivel* de la inversión (aquí cambia  $i$ , esto es, se dan cambios en el promedio de inversión).

La tasa de crecimiento de la inversión (y del consumo) será mayor cuando se eliminan las fluctuaciones y se obliga al agente a mantener un nivel de inversión igual a  $i^* = \frac{E(i_t A_t)}{A^*}$ , es

decir, cuando se escoge 3.a. en vez de 3.b.; veamos por qué:

$$\lambda_t = 1 + \phi(i^* A^*) - \delta = 1 + \phi[E(i_t A_t)] - \delta > 1 + E[\phi(i_t A_t)] - \delta. \quad ^{12}$$

Entonces, la eliminación de la volatilidad traerá mayor crecimiento del consumo cuando la cantidad promedio de recursos dejada inicialmente para inversión permanece invariable (cuando no cambia el nivel). Cuando eliminamos las fluctuaciones y forzamos al agente a mantener la misma tasa de inversión promedio obtenemos una senda de consumo que parte del mismo nivel pero que crece más rápidamente. Al contrario, en los casos en los que se supone  $\phi(\cdot)$  lineal (sin rendimientos decrecientes) se permite que el nivel de inversión aumente una vez se tiene el ambiente estable, reduciéndose así el nivel de consumo inicial.

---

<sup>12</sup> La función  $\phi(\cdot)$  es cóncava, por lo tanto, dado un intervalo para  $i_t A_t$  —que comprende los valores que puede tomar la razón inversión/capital bajo un ambiente fluctuante—, se debe cumplir que la función evaluada en el valor medio del intervalo para  $i_t A_t$  arroja un mayor valor que si se calcula el valor promedio que toma la función en este intervalo de  $i_t A_t$ .

En este último caso, los costos de bienestar son pequeños porque el mayor bienestar ganado por el más alto crecimiento de la inversión es contrarrestado por el menor consumo inicial del agente.

#### **IV. Estimaciones del costo de los ciclos económicos utilizando tasas de crecimiento**

En esta sección se presentan los resultados de esta investigación con respecto al costo de las fluctuaciones en Colombia siguiendo la metodología de Barlevy (2004), la cual está basada en los efectos indirectos que presentan estas sobre el consumo, pasando primero por su influencia en el crecimiento. Esta sección está dividida en dos diferentes aproximaciones a la medición del costo. En primer lugar, se utiliza un modelo de *panel* para el crecimiento del PIB *per cápita* cuyas variables explicativas son la volatilidad agregada y la tasa de inversión de la economía; éste será llamado método 1. En la segunda parte, se utiliza un modelo que involucra retornos decrecientes de la inversión para modelar la distribución del crecimiento del consumo *per cápita*, llamado método 2.

##### *A. Efectos directos de la volatilidad agregada en el crecimiento de la economía: método 1*

Esta forma de abordar el cálculo no tiene en cuenta el papel que desempeñan los retornos decrecientes en el logro de la medición del costo de los ciclos y provee una aproximación menos formal de los resultados que abordará el estudio más completo que involucra los supuestos dados en el modelo sobre el comportamiento de la inversión. Esta aproximación está construida para el período 1950-1997, pues se quiso descartar la crisis de 1999 que en este ejercicio implicaría grandes consecuencias sobre los resultados finales.

La descripción del método es la siguiente. Si la tasa promedio de crecimiento de la economía puede expresarse como  $E(\lambda) = f(X, \sigma)$ , siendo  $X$  un vector que representa todas las demás variables que afectan el crecimiento promedio y  $\sigma$  una medida de volatilidad agregada en el mismo período y si, además, en  $X$  se incluye como variable explicativa el nivel promedio de inversión, podemos calcular la tasa de crecimiento promedio cuando

$\sigma = 0$  (y permanece fijo el nivel inicial de inversión). Este procedimiento permitiría una medición directa de los costos de las fluctuaciones en términos de crecimiento.

Los modelos de este estilo han sido estimados mayormente para grupos de países y son de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta \ln y_{it} &= \mu \sigma_{it} + \theta X_{it} + \varepsilon_{it}, \\ \varepsilon_{it} &\sim N(0, \sigma_i^2), \end{aligned} \quad (7)$$

Donde  $\Delta \ln y_{it}$  denota la tasa de crecimiento del producto *per capita* real en el país  $i$  y el año  $t$ . Este modelo fue estimado mediante un panel de datos por Ramey y Ramey (1995), para el caso de 92 países, 24 de estos pertenecientes a la OCDE. Esta notación supone que, en algún año, la tasa de crecimiento en cada país varía con respecto a su media histórica ( $\mu \sigma_i + \theta X_i$ ) por un término de error normalmente distribuido; además, la media histórica depende linealmente de la desviación estándar,  $\sigma_i$ , del término de error para el país en cuestión. Si la tasa de crecimiento del producto es cóncava en la inversión,  $\mu$  podría ser negativa (Barlevy, 2004, p. 972).

En este ensayo, como fue el caso en Barlevy (2004), se construyó un *panel* de acuerdo con los períodos presidenciales desde 1950 con datos anuales.<sup>13</sup> Según esto, se está suponiendo que las elecciones son uno de los determinantes de las fluctuaciones. Además, como en este caso el modelo a estimar es para un solo país, no es necesario involucrar variables de diferenciación económica entre naciones en el conjunto de variables explicativas  $X$  de la ecuación (7). Así, las variables incluidas en  $X$  quedaron reducidas a la razón Inversión bruta/ PIB real total (a modo de tasa de inversión). Igualmente, la variable  $\sigma_i$  es la desviación estándar de la diferencia entre las tasas de crecimiento del producto *per cápita* de cada año y la media del período presidencial correspondiente.

---

<sup>13</sup> Barlevy (2004) dividió sus datos trimestrales en episodios de cuatro años entre elecciones presidenciales. El período de estimación fue 1953:1 a 2000:4. El parámetro  $\mu$  fue igual a -0,3484 (aunque estadísticamente no significativo) reflejando que la volatilidad agregada reduce el crecimiento en cerca de 0,35 puntos porcentuales.

Tabla 2. Efectos directos de la volatilidad agregada sobre el crecimiento de la economía colombiana. Método 1: estimación de panel (1950-1997)

Variable dependiente: crecimiento del PIB real <i>per cápita</i> en Colombia	
Constante	0,0118335 (0,0187127) <sup>(a)</sup>
Tasa de inversión	0,0669626 (0,0887899)
$\sigma_i$	-0,4289012 (0,6077658)
Número de observaciones:	48
Variable de agrupamiento:	Período presidencial
Número de <i>paneles</i> :	12

Fuente de las series: el PIB real *per cápita* es calculado dividiendo el PIB real total por los datos de Población. Las series de PIB real y población son extraídas de las bases de datos del grupo GRECO del Banco de la República en el CD que acompaña la publicación *El Crecimiento Económico Colombiano en el siglo XX*. Los datos de población corresponden a Flórez (2000).<sup>14</sup>

<sup>(a)</sup> Los valores entre paréntesis indican la desviación estándar del estimador.

Entre 1950 y 1997 se presentaron 12 períodos presidenciales, cada uno de cuatro años. El método de estimación fue un *panel* con efectos aleatorios (mínimos cuadrados generalizados), pues no se pudo rechazar la hipótesis de que la diferencia en los coeficientes no es sistemática por medio del *test* de Hausman, lo cual estuvo a favor del mecanismo de estimación seleccionado. El “individuo” está representado por cada período presidencial. Se utilizaron entonces 48 observaciones y 12 *paneles*.<sup>15</sup> Los resultados de esta estimación se reportan en la *Tabla 2*.

El valor de  $\mu$  (el coeficiente de  $\sigma_i$ ) fue negativo, aunque no se pudo rechazar la hipótesis de que sea diferente de cero.<sup>16</sup> El valor puntual del coeficiente de sigma en la ecuación (7) fue de -0,43, levemente superior al calculado por Barlevy para Estados Unidos, significando un costo para el consumo de 8.6% (por cada punto porcentual en que se afecte

<sup>14</sup> Todas las series estadísticas utilizadas en este ensayo que tengan como fuente GRECO (2002), a menos que se indique otro recurso, corresponden al medio magnético que acompaña la publicación mencionada.

<sup>15</sup> Con respecto a la época del Golpe de Estado y de la Junta Militar, se supuso no se alteró la periodicidad normal de cuatro años para los períodos presidenciales, quedando 1950-1954 y 1954-1958, como dos períodos normales.

<sup>16</sup> Ninguno de los coeficientes es estadísticamente significativo lo que podría estar relacionado con la utilización de los períodos presidenciales como *proxies* de los determinantes de la volatilidad agregada. Sin embargo, los resultados obtenidos permiten llevar a cabo una interpretación de sus signos y magnitudes.

la tasa de crecimiento se tiene una disminución en el consumo global de 20%, según el análisis de Lucas explicado al inicio y también de acuerdo con los resultados de Cárdenas para el caso colombiano). Es entendible que el estimador de  $\mu$  para el caso colombiano sea más grande, puesto que nuestra economía tiene un componente de volatilidad superior al presentado en Estados Unidos. Por lo tanto, el estimador moderadamente mayor al reportado por Barlevy es apenas consecuente con los estudios sobre los ciclos en Colombia. En fin, eliminando las fluctuaciones y dejando la inversión fija, la tasa de crecimiento del PIB real *per cápita* sería mayor en 0,43 puntos porcentuales.

B. Utilización de una distribución markoviana para el consumo y retornos decrecientes de la inversión: método 2

Antes de empezar el cálculo del costo de los ciclos económicos por medio del método 2, se debe explicar en qué consistirá el procedimiento a emplear, el cual se dividirá en dos etapas. La primera de ellas pretende encontrar una relación entre la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad y el grado de retornos decrecientes para la inversión,  $\psi$ , por medio de un modelo markoviano. Para llegar a esta relación se parte de la senda de consumo especificada más arriba (en el modelo presentado) y se estiman sus componentes de crecimiento y volatilidad. El objetivo final de esta etapa será arrojar un intervalo para el costo de los ciclos, de acuerdo con un rango para  $\psi$ , coherente con el resultado obtenido mediante el modelo de *panel* anterior. Esta es la intención del presente literal (cuya interpretación gráfica se encuentra en la parte inferior del *gráfico 7*).

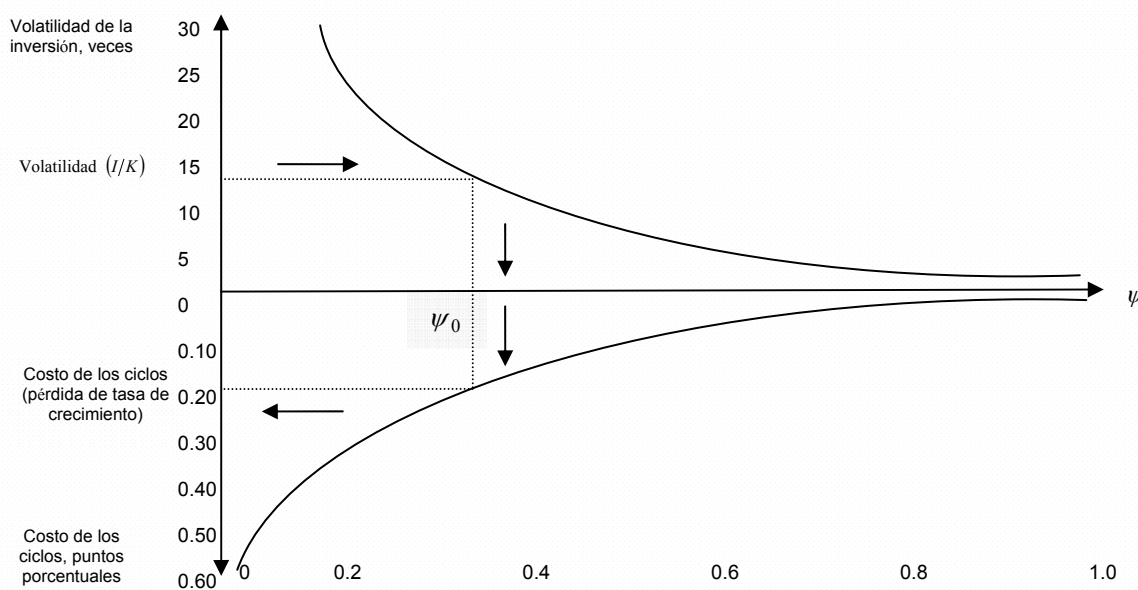
La segunda etapa, que será desarrollada en la sección V, puntualiza el grado de retornos decrecientes por medio de la volatilidad de la inversión. Esta última es interpretada como la relación entre máximo valor de la razón inversión/capital con respecto a su valor más bajo.<sup>17</sup> El proceso de determinación es el siguiente. Primero, el nivel de variabilidad para la

---

<sup>17</sup> Esta relación se entiende así:  $\frac{\max(I/K)}{\min(I/K)} = \text{número de veces.}$

razón inversión/capital indicará el grado de retornos decrecientes aceptable para la economía colombiana (es decir, se tendrá un valor específico para  $\psi$ , según se muestra en las flechas de la parte superior del *gráfico 7*). Luego, una vez obtenida una estimación puntual del parámetro  $\psi$ , se podrá regresar a la relación encontrada en la primera etapa (entre la tasa de crecimiento bajo estabilidad y el grado de retornos decrecientes) y calcular el costo (puntual) de los ciclos.

*Gráfico 7. Orden de determinación del costo de los ciclos en el método 2 de estimación*



\* Las flechas indican el orden de determinación.

No obstante, no se tendrá un valor absoluto para el costo final, pues todo dependerá del método de estimación para la volatilidad de la inversión. Esta última puede ser calculada por medio de tres aproximaciones diferentes, sin garantizar que coincidan sus valores puntuales. La primera de ellas está basada en la observación de los datos reales de la relación  $I/K$ . La segunda aproximación está fundada en la capacidad de la  $q$  de Tobin para explicar la variabilidad de la inversión. Y una tercera vía consiste en utilizar una descomposición de la razón inversión/capital en dos fuentes de variabilidad: tasa de



inversión y productividad. Con cada una de estas aproximaciones se utilizará el orden de determinación explicado en el párrafo anterior y en el *gráfico 7*.

Ahora bien, para llevar a cabo la estimación de la primera etapa, se debe especificar la forma funcional de la inversión, es decir, se debe encontrar una función cóncava que cumpla los requisitos fijados en el modelo. Así, el grado de retornos decrecientes de la inversión, determinada ésta por la función  $\phi(I/K)$ , se supone dado por una función de la razón inversión/capital:

$$\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) = \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^\psi = (i_t A_t)^\psi \quad (8)$$

Donde  $\psi$  es un parámetro específico a Colombia que se encuentra en el intervalo  $(0,1]$ . Del valor de este parámetro va depender el grado de rendimientos decrecientes para la inversión: mientras más cercano a cero sea este valor, mayor grado de retornos decrecientes se tendrá. El propósito de este literal es encontrar el costo de las fluctuaciones por medio de dos recursos: las series de datos para las tasas de crecimiento del consumo real *per cápita* y la especificación para la función decreciente de la inversión. El procedimiento consiste en encontrar la tasa esperada de crecimiento que se tendría en el caso en que no existieran fluctuaciones.

Del modelo presentado en la sección III y reemplazando según (8), se tiene que la tasa de crecimiento de la ecuación (6) se puede escribir como  $\lambda_t = 1 + \phi(i_t A_t) - \delta = 1 + (i_t A_t)^\psi - \delta$ , la cual es la especificación de la tasa de crecimiento involucrando los supuestos de retornos decrecientes para la inversión. De esta ecuación se puede despejar  $i_t A_t = [\lambda_t - 1 + \delta]^{1/\psi}$  y del supuesto de estabilidad para la inversión y la productividad  $i^* A^* = E(i_t A_t)$ ; por lo tanto la senda de crecimiento (la tasa de crecimiento esperada) bajo estabilidad es:

$$\begin{aligned} E(\lambda_t) &= 1 + \phi[E(i_t A_t)] - \delta = 1 + [E(i_t A_t)]^\psi - \delta \\ E(\lambda_t) &= 1 + \left[ E\left( (\lambda_t - 1 + \delta)^{1/\psi} \right) \right]^\psi - \delta \end{aligned} \quad (9)$$

De la ecuación (9) se concluye que el problema yace en la estimación de  $\psi$ . Para este objetivo se puede recurrir a la condición de primer orden en la solución del problema de maximización del consumidor<sup>18</sup>

$$\phi'(i_t A_t) = \left[ \frac{E(\beta V_k(K_{t+1}, A_{t+1}))}{U'(C_t)} \right]^{-1} = q^{-1} \quad (10)$$

Siendo  $V_k(\cdot) = \frac{a(A_t)K_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ;  $a$ : constante.

En la ecuación (10) el término entre corchetes es la  $q$  marginal de Tobin: la proporción entre el valor marginal de una unidad de capital y el valor de una unidad adicional de inversión. En este análisis, como las funciones de producción son homogéneas de grado 1, la  $q$  marginal es igual a la  $q$  promedio.<sup>19</sup> De (10) se puede obtener la siguiente regresión,<sup>20</sup>

$$\ln\left(\frac{I_t}{K_t}\right) = \text{constante} + \frac{1}{1-\psi} \ln q, \quad (11)$$

donde  $\frac{1}{1-\psi}$  es la elasticidad de la inversión con respecto a la  $q$  de Tobin. Además, como

el parámetro de interés  $\psi$  está entre cero y uno, se tiene que  $\frac{1}{1-\psi} > 1$ .

Sin embargo, a falta de datos consolidados para la  $q$  de Tobin, no es posible calcular  $\psi$  por esta vía y se debe encontrar un rango aproximado para hacer los análisis posteriores. Para efectos de este ensayo se ha establecido un rango entre 0,15 y 0,30 del parámetro  $\psi$  que implica una elasticidad de la inversión respecto a la  $q$  de Tobin entre 1,18 y 1,43.<sup>21</sup>

<sup>18</sup> Resuelto en el apéndice de Barlevy (2004, p. 987).

<sup>19</sup> Esta conclusión se encuentra en el trabajo de Hayashi (1982) para el caso determinístico y en el trabajo de Abel y Eberly (1994) para el caso estocástico, citados en Birchenall (1997, p. 17).

<sup>20</sup> Como  $\phi(I_t/K_t) = (I_t/K_t)^\psi$ ,  $\phi'(I_t/K_t) = \psi(I_t/K_t)^{\psi-1}$ , es la derivada con respecto a  $I/K$ . Por lo tanto,  $\psi(I_t/K_t)^{\psi-1} = q^{-1}$  o, en logaritmos, se tiene que  $\ln \psi + (\psi - 1) \ln(I_t/K_t) = -\ln q$ . Luego,  $\ln(I_t/K_t) = -\ln \psi + 1/(\psi - 1) \ln q$ . Más adelante también se utilizará la siguiente razón:  $(I_t/K_t)/(I_s/K_s) = (i_t A_t)/(i_s A_s) = (q_t/q_s)^{1-\psi}$ .

<sup>21</sup> La razón principal para que otorguemos alguna validez a estos valores, como se mostrará más adelante, es que arrojan un intervalo para el costo de los ciclos que contiene el valor encontrado en la estimación del método 1 (0,43 puntos porcentuales).

Retomando el hilo principal, son dos los recursos de los que se valdrá esta etapa para medir el costo de los ciclos. La primera parte ya quedó finalizada con la elección de los valores que tomará el parámetro  $\psi$  y el cual define el grado de retornos decrecientes de la inversión. Ahora veamos cómo será la notación para la distribución del consumo. La

ecuación (6),  $C_t = \left[ \prod_{s=0}^{t-1} (\lambda_s) \right] (1 - \varepsilon_t) C_0$ , puede describirse en logaritmos de la siguiente

forma:  $\ln C_t = \sum_{s=0}^{t-1} \ln \lambda_s + \ln(1 - \varepsilon_t) + \ln C_0$ . En primeras diferencias (como aproximación a

la tasa de crecimiento del consumo *per cápita*) este modelo sería expresado así:

$\Delta \ln C_t = \left( \sum_{s=0}^{t-1} \ln \lambda_s + \ln(1 - \varepsilon_t) + \ln C_0 \right) - \left( \sum_{s=0}^{t-2} \ln \lambda_s + \ln(1 - \varepsilon_{t-1}) + \ln C_0 \right)$ , resultando por

último la siguiente expresión  $\Delta \ln C_t = \ln \lambda_{t-1} + \Delta \ln(1 - \varepsilon_t)$ .

Recordemos, sin embargo, que  $\lambda_t$  depende del nivel de productividad,  $A_t$ , y que ésta sigue un proceso de Markov en  $N$  estados; por lo tanto, el consumo tampoco será determinístico y su tasa de crecimiento seguirá también un proceso estocástico. La distribución de  $\lambda_t$  (sus valores para cada estado, la matriz de transición, matriz  $N \times N$ , y sus respectivas probabilidades ergódicas) será hallada a través de una regresión *switching* estimada por máxima verosimilitud. Así, la función estocástica para el consumo es:

$$\Delta \ln C_t = \ln \lambda_{t-1} + \Delta \ln(1 - \varepsilon_t) + \eta_t \quad (12)$$

donde  $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

Los términos a estimar serán  $N$  tasas de crecimiento, una matriz de transición  $N \times N$  (y con esta las probabilidades ergódicas),  $(N-1)$  primeras diferencias del choque  $\varepsilon_t$  ( $\Delta \ln(1 - \varepsilon_t)$ )<sup>22</sup> y la varianza del término de perturbación,  $\eta_t$ . Con estas estimaciones y con los valores para

<sup>22</sup> Si estas primeras diferencias son positivas, significa que el consumo crece más rápidamente cuando está por encima de su tendencia; cuando son negativas, significa que crece con mayor rapidez cuando esta por debajo de su nivel natural y crece más lentamente (o decrece) cuando el nivel de productividad es alto y se encuentra por encima de su tendencia.

$\psi$  se puede hallar la tasa de crecimiento esperada correspondiente al escenario de estabilidad descrita en la ecuación (9). Para el caso de este artículo, se desarrolló un modelo con dos regímenes (auge y recesión) para el crecimiento del consumo *per cápita*.<sup>23</sup>

Los datos del consumo real entre 1950 y 2000 son calculados por GRECO (2002); para 2001 y 2002 se utilizaron los datos publicados en la página *Web* del Banco de la República para el consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975. La población total corresponde a los datos oficiales del DANE dados por GRECO (2002); para encontrar la población en el período restante 1998-2002 se extendió la tasa de crecimiento que se tenía para el período 1986-1997 (2,01% anual). Además, se fijó una tasa de crecimiento de 1,4% anual para el consumo *per cápita*, como aproximación a su tasa de largo plazo.<sup>24</sup> La estimación de la regresión *switching* se lleva a cabo a través de la función de verosimilitud construida por Barlevy (2004). El proceso de estimación es similar al descrito para el caso de series de tiempo por Hamilton (1994). Es de anotar que, dentro de la función de verosimilitud, la tasa de crecimiento anual de largo plazo para el consumo *per cápita* (0,014) es usada para hallar las desviaciones con respecto a la media ( $0,014 \pm \lambda_i$ ).

La *Tabla 3* muestra los resultados encontrados. Las desviaciones estándar mostradas en la última columna, correspondientes únicamente a los parámetros estimados en el programa diseñado —dos probabilidades de transición:  $p_{10}$  y  $p_{01}$  ( $p_{00}$  y  $p_{11}$  son halladas por complemento), la tasa de crecimiento en recesión (la otra tasa es calculada por medio de ésta y con las probabilidades), el término de perturbación y sigma—, confirman que todos los resultados son significativos al 95%. Existen dos estados, el estado cero representa un escenario de recesión económica y el estado uno denota una situación de auge. Los primeros resultados mostrados corresponden a la matriz de transición, donde cada  $p_{ij}$  denota

<sup>23</sup> También se probó con un modelo de tres regímenes, con recesión, crecimiento sostenido y auge, pero los resultados no fueron satisfactorios para el contexto colombiano. También en Misas y Ramírez (2005, p. 6) se afirma que el modelo con tres regímenes no es apropiado para la economía colombiana, pues los datos no apoyan este tipo de modelaciones.

<sup>24</sup> Para el período 1950-2002 la media del crecimiento anual del consumo *per cápita* es de 1.25% y la mediana 1.4%. Si se excluye el año 1999 la media es 1,4% también. Por lo tanto, se fijó este valor como tasa tendencial del crecimiento. Sobre ésta será evaluada la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad, es decir, será el valor base para los cálculos de los efectos del crecimiento.

la probabilidad de que un estado  $i$  sea seguido por el estado  $j$ . Por ejemplo, se nota que los dos estados tienden a ser muy persistentes, pues en la diagonal ( $p_{00}, p_{11}$ ) los valores son muy cercanos a 1, es decir, la probabilidad de que un período de recesión (expansión) sea seguido por otro lapso de desaceleración (aceleración) es muy alta.

*Tabla 3. Estimación de Máxima Verosimilitud para un modelo de Markov del crecimiento del consumo per cápita. Dos regímenes*

	<i>Coefficientes</i>	<i>Desviaciones estándar</i>
<i>Matriz de transición</i>		
$p_{00} =$	0,7111	----
$p_{01} =$	0,2889	0,13790
$p_{10} =$	0,1638	0,0758
$p_{11} =$	0,8362	----
<i>Tasas de crecimiento</i>		
$0,014 - \ln \lambda_0 =$	-0,0013	0,0057 <sup>(a)</sup>
$0,014 + \ln \lambda_1 =$	0,0227 <sup>(b)</sup>	
<i>Primera diferencia de los choques</i>		
$\Delta \ln(1 - \varepsilon_{01}) =$	-0,0498	0,0062
<i>Varianza del término de perturbación</i>		
$\sigma^2 =$	0,0005	0,0001
<i>Probabilidades ergódicas <math>P_0</math> y <math>P_1</math></i>		
	Estado	Prob
	0	0,362
	1	0,638
<i>Duración de los estados <math>l_0</math> y <math>l_1</math></i>		
	Estado	Longitud (años)
	0	3,5
	1	6,1
<i>Logaritmo de la verosimilitud</i>		
$F = -100,8811$		

Fuentes:

*Consumo real:* 1950-2000, datos de GRECO (2002); para 2001 y 2002 se utilizaron los datos publicados en la página Web del Banco de la República para el consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975.

*Población total:* 1950-1997 datos oficiales de DANE dados por GRECO (2002); para 1998-2002 se extendió la tasa de crecimiento del período 1986-1997 (2,01% anual).

<sup>(a)</sup>Corresponde a la desviación estándar del parámetro  $\ln \lambda_0$ .

<sup>(b)</sup>Siendo  $\ln \lambda_1 = (p_1/p_0) \ln \lambda_0$

Además, la *Tabla 3* presenta la variación en la tendencia del consumo en cada estado. Esta tasa varía entre -0,13%, para el caso de un período de recesión, y 2,27%, en estado de auge ( $\ln \lambda_t$  corresponde a  $\ln[1 + \phi(i_t, A_t) - \delta]$  en el modelo). Seguidamente se presenta el estimador para la primera diferencia de los choques ( $\Delta \ln(1 - \varepsilon_{01})$ ); su valor negativo implica que cuando la productividad es alta, el consumo (en nivel) disminuye, debido a la relación positiva entre productividad e inversión. Por último se presenta la varianza del término de perturbación  $\eta_t$ .

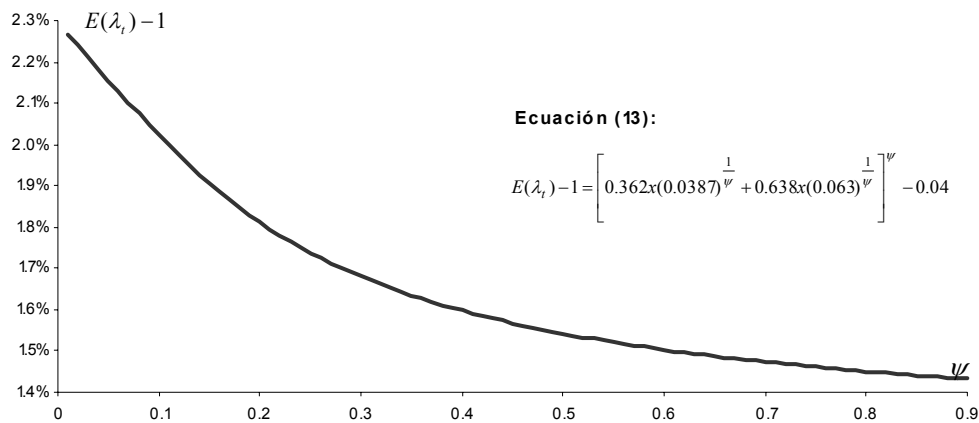
A continuación se muestran los cálculos que se pueden llevar a cabo con estas estimaciones. En primer lugar está el vector de probabilidades ergódicas (es el vector propio de la matriz de transición asociada al valor propio unitario) que representa la distribución de las tasas de crecimiento  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$ . Además, se halla la longitud del ciclo dada por esta estimación. La longitud del estado  $i$  es igual a  $l_i = 1/(1 - p_{ii})$ . El ciclo del consumo sería cercano a nueve años y medio: 6,1 años de expansión y 3,5 años de recesión. Este resultado está cercano a los ocho años recomendados (para el PIB) en diversos estudios hechos hasta el momento en Colombia: cuatro años de expansión y cuatro años de recesión (véase Posada, 1999, p. 7; Avella y Ferguson, 2003, p. 58; Gómez y Posada, 2004; p.3). Finalmente, con los valores estimados en el modelo anterior y estableciendo  $\delta = 0,04$  como la tasa de depreciación característica a Colombia, según estimaciones de GRECO (2002, p.97), se tiene que la ecuación (9), la cual calcula la tasa esperada de crecimiento bajo el escenario de estabilidad, es<sup>25</sup>:

$$E(\lambda_t) = 1 + \left[ 0.362x(0.0387)^{\frac{1}{\psi}} + 0.638x(0.063)^{\frac{1}{\psi}} \right]^{\psi} - 0.04 \quad (13)$$

<sup>25</sup> La ecuación (13) está construida por medio de las probabilidades ergódicas reportadas en la *Tabla 3* (0,362 y 0,638), las cuales implican que el número encontrado sea un valor esperado. A su vez, las tasas de crecimiento (0,0387 y 0,063), corresponden a la expresión  $\lambda_t - 1 + \delta$  (que señala retornos decrecientes para la inversión) donde  $\lambda_t$  es el valor exponencial de las tasas de crecimiento reportadas en la tabla. Por ejemplo,  $0,0387 = \exp(-0,0013) - 1 + 0,04$ .

El *gráfico 8* muestra la relación entre los valores de  $\psi$  y la tasa de crecimiento esperada formalizada por la ecuación (13). La conclusión ya se había anunciado: a mayor grado de retornos decrecientes en la inversión (menor  $\psi$ ), mayor es el aumento presentado en la tasa de crecimiento, con respecto a la tasa 1,4%, fijada como valor base de la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* de largo plazo. En este estudio se consideró un intervalo entre 0,15 y 0,30 del parámetro  $\psi$ ; con estos valores se tiene una tasa de crecimiento esperada entre 1,68% y 1,90%, lo cual equivale a una diferencia positiva en la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* entre 0,28% y 0,50%, intervalo que contiene la cifra 0,43%, estimada mediante la modelación de *panel* del literal anterior. Por lo tanto, la evidencia con las tasas de crecimiento parece mostrar que el impacto de las fluctuaciones está entre 0,3 y 0,5 puntos porcentuales de la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* y entre un 6% y un 10% del consumo total de las familias.

*Gráfico 8. Relación entre el parámetro que determina el grado de retornos decrecientes de la inversión y la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad*



## V. Revisión del costo de los ciclos teniendo en cuenta la volatilidad de la inversión

En el literal anterior se encontró un intervalo de datos para el posible costo de los ciclos económicos. Sin embargo, todavía falta ver si estos valores encontrados, que exigen una determinada volatilidad en las tasa de crecimiento del consumo, son coherentes con la

volatilidad observada de la inversión.<sup>26</sup> Ya se había anunciado que esta etapa consiste en encontrar el valor de  $\psi$  puntual que corresponda a los niveles de volatilidad medidos en este apartado. Siguiendo con la modelación que se hacía de dos regímenes, se debe encontrar la volatilidad necesaria en la inversión de acuerdo con el grado de retornos decrecientes. En este escenario se tienen dos tasas de crecimiento: una en recesión ( $\lambda_0$ ) y otra, la más alta, en expansión ( $\lambda_1$ ). También, se tienen dos niveles de productividad, así: sea  $i_0 A_0$  el valor de  $I/K$  cuando la productividad toma su valor más bajo (correspondiente a  $\lambda_0$ ) e  $i_1 A_1$  el valor del ratio  $I/K$  en el escenario inverso. Por lo tanto, analíticamente, las relaciones antes dichas se pueden expresar como sigue:

Recesión	Expansión
$\lambda_0 = 1 + \phi(i_0 A_0) - \delta$	$\lambda_1 = 1 + \phi(i_1 A_1) - \delta$
$\Rightarrow \phi(i_0 A_0) = \lambda_0 - 1 + \delta$	$\Rightarrow \phi(i_1 A_1) = \lambda_1 - 1 + \delta$
$\Rightarrow i_0 A_0 = (\lambda_0 - 1 + \delta)^{1/\psi}$	$\Rightarrow i_1 A_1 = (\lambda_1 - 1 + \delta)^{1/\psi}$

De este modo, la razón entre el valor más alto de la inversión y su valor más bajo es

$$\frac{(I/K)_1}{(I/K)_0} = \frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi}, \quad \lambda_1 > \lambda_0 \quad (14)$$

Reemplazando en la ecuación (14) los valores presentados en la Tabla 3 para  $\lambda_1$  y  $\lambda_0$ , se puede encontrar la volatilidad que es necesaria en la inversión para que sea coherente con las fluctuaciones que estas tasas de crecimiento involucran. La función que resulta con estos valores es:

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = (1.62682769)^{1/\psi} \quad (15)$$

El *gráfico 9* señala la volatilidad que es necesaria en la inversión de acuerdo con el grado de retornos decrecientes y condicionada a las tasas de crecimiento encontradas en el

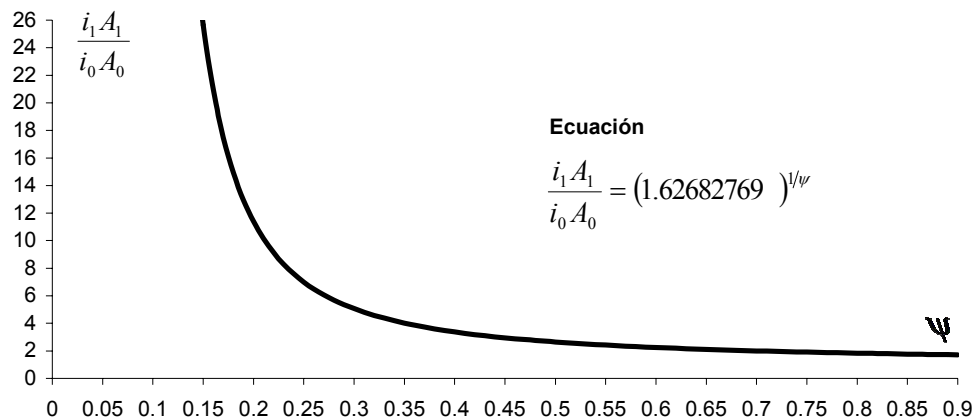
---

<sup>26</sup> Esta duda tiene sentido pues siempre la volatilidad de la inversión es mayor que la volatilidad del producto y del consumo.



modelo markoviano de dos regímenes. Por ejemplo, si  $\psi$  es 0,15, la razón entre el máximo y el mínimo valor de la ratio inversión/capital debería ser de 25,64 veces. Y si  $\psi$  es 0,30, este valor se reduciría a 5,06. Como se nota, cuanto mayor sea el grado de retornos decrecientes de la inversión mayor será la volatilidad de ésta para estar acorde con las fluctuaciones en la tasa de crecimiento.<sup>27</sup> Por lo tanto, existe un *trade off* entre encontrar altos costos de los ciclos (pequeños valores del parámetro  $\psi$ ) y hacer empíricamente probable la volatilidad de la inversión necesaria para ese costo (valores altos para  $\psi$ ). En este orden, se deben establecer los valores de  $\psi$  que concilien las dos condiciones anteriores: que generen costos en los ciclos sin exigir volatilidades improbables en la inversión.

Gráfico 9. Grado de rendimientos decrecientes correspondiente a cada nivel de volatilidad de la inversión



Un primer camino para evaluar la volatilidad empírica de la razón inversión/capital consiste en escoger el mayor y el menor número observados de esta relación en el período 1950-2000.<sup>28</sup> El mayor número reportado en este período es 0,10 y el menor es 0,04; entonces, la relación especificada en el lado izquierdo de la ecuación (14) reporta una diferencia entre

<sup>27</sup> En la ecuación (14) se puede probar fácilmente que  $\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \infty$ .

<sup>28</sup> Los datos son tomados de GRECO (2002).

la cima y el valle de 2,5 veces. Con este valor,  $\psi$  debería ser igual a 0,53<sup>29</sup> y el costo de los ciclos, calculado en la ecuación (13), se reduciría a 0,13 puntos porcentuales, con un efecto sobre el nivel del consumo total de 2,6%.<sup>30</sup>

Como una segunda vía de aproximación a la volatilidad de la inversión, se consideró el siguiente sistema de dos ecuaciones, cuya solución nos aporta otro valor probable de  $\psi$  para Colombia.

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} = (1.62682769)^{1/\psi} \quad (16.A)^{31}$$

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi} = 2^{1/1-\psi} \quad (16.B)^{32}$$

La ecuación 16.B se basa en el postulado según el cual la respuesta de la inversión ante cambios en el valor de la  $q$  de Tobin también depende del grado de retornos decrecientes. Es decir, el valor de  $\psi$  debe ser aquel que reconcilie los datos de la  $q$  de Tobin con los datos de volatilidad de inversión. Se supuso que  $q_1 = 1,4$  fue el valor más alto de la  $q$  de Tobin en el período 1950-2002 y  $q_0 = 0,7$  el valor mínimo.<sup>33</sup> El *gráfico 10* ilustra la solución a este sistema. En el apéndice A1 se encuentra la solución analítica. Los resultados ya no son tan despreciables sobre el crecimiento, pero se encuentran fuera del rango que se utilizó para  $\psi$  (entre 0,15 y 0,30). El valor solución para  $\psi$  es igual a 0,41, el costo es de 0,19

---

<sup>29</sup> Despejando en la ecuación (15).  $\psi = \frac{\ln((\lambda_1 - 1 + \delta)/(\lambda_0 - 1 + \delta))}{\ln(i_1 A_1 / i_0 A_0)} = \frac{\ln 1.63}{\ln 2.5} = 0.53$

<sup>30</sup> Recuérdese el orden de determinación establecido en el *gráfico 7*. Esta aproximación, la más sencilla de todas, tiene dificultades para generar altos niveles de volatilidad de la inversión. Por este motivo, reporta un costo de los ciclos muy alejado, hacia abajo, al entregado por el método 1.

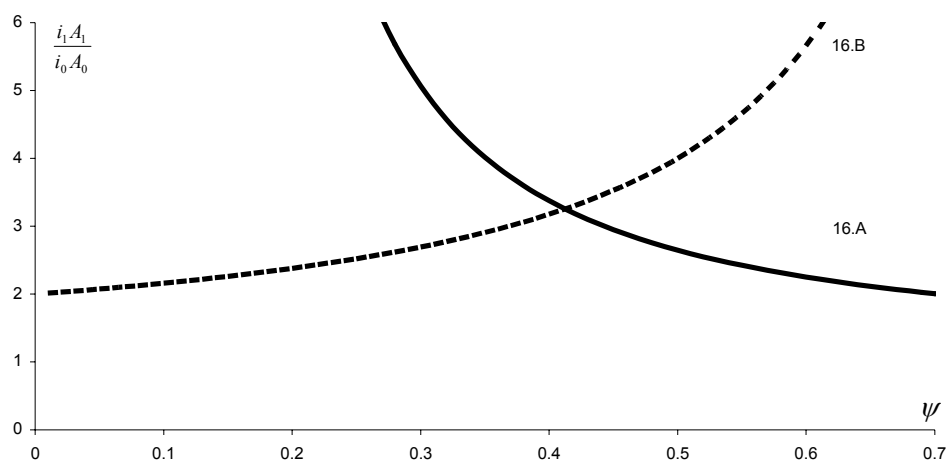
<sup>31</sup> Ecuación (15)

<sup>32</sup> Véase pie de página 20.

<sup>33</sup> Estos valores de la  $q$  de Tobin corresponden a los extremos de los promedios simples calculados por Gutiérrez y Pombo (2005) para el período 1998-2002, correspondiendo el máximo valor al inicio del período y el mínimo al año 2002. Se optó por utilizar los promedios simples, en vez de unos promedios ponderados por el total de activos de cada empresa, porque los primeros, al contrario de la segunda alternativa, contuvieron el valor unitario en el valor medio del intervalo señalado y dan la posibilidad de explicar mayor volatilidad en la ecuación 16.2. El máximo y el mínimo valor de los promedios ponderados correspondieron a 1.07 y 0.73, respectivamente.

puntos porcentuales (ecuación 13), es decir, la tasa de crecimiento del consumo *per cápita* se incrementaría de 1,4% a 1,69% y el costo sobre el nivel de consumo total es de 3,8%.

Gráfico 10. Solución gráfica al sistema de ecuaciones correspondientes a una medida de la volatilidad de la inversión por medio de la *q* de Tobin



\*El gráfico muestra el valor de  $\psi$  correspondiente a la segunda vía de estimación de la volatilidad de la inversión. Esta gráfica no debe entenderse como modelación de las otras dos aproximaciones; es exclusiva a la utilización de la *q* de Tobin.

Una tercera vía para calcular la volatilidad de la razón inversión-capital consiste en descomponer la tasa de variación de la inversión,  $i_1 A_1 / i_0 A_0$ , de la siguiente forma:

- $i_1 / i_0$  (volatilidad de la relación  $I/Y$ ), y
- $A_1 / A_0$  (que es la volatilidad de la razón  $Y/K$ , o de la productividad agregada del capital).

Respecto a la primera parte de esta descomposición, en el período comprendido entre 1950 y 2002, la máxima tasa de inversión fue 30% y la mínima 14%. Por lo tanto, la razón  $i_1 / i_0$  sería igual a 2,14. En cuanto a la productividad agregada, existe el problema de que tradicionalmente es medida utilizando modelos que involucran capital y trabajo, y el modelo utilizado aquí sólo involucra el primero de estos factores. Por eso, la solución que propone Barlevy (2004) es transformar la función de producción utilizando la notación de

Paul Romer para economías externas de escala:  $Y_{it} = Z_t (K_t L_{it})^\alpha K_{it}^{1-\alpha}$ ; siendo  $Z_t$  el nivel de productividad común a todas las firmas,  $K_t = \sum_i K_{it}$  el capital total, igual a la suma del capital de cada firma  $i$ ,  $L_t = \sum_i L_{it}$  el trabajo total, igual a la suma del trabajo de cada firma  $i$ , y  $\alpha$  la participación del trabajo en el producto. El producto total,  $Y$ , también es la suma de las producciones individuales.

Esta función permite que la tecnología de cada firma exhiba retornos constantes a escala en sus propios factores; por lo tanto, permite que el problema de la firma bajo condiciones de competencia esté bien definido. Pero existen rendimientos crecientes de escala en el nivel agregado por la externalidad que genera el capital total de la economía. Veamos el producto agregado:

$$Y_t = \sum_i Y_{it} = Z_t \sum_i [(K_t L_{it})^\alpha K_{it}^{1-\alpha}]$$

$$Y_t = Z_t (K_t L_t)^\alpha K_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = (Z_t L_t^\alpha) K_t, \text{ sea } A_t = (Z_t L_t^\alpha)$$

Por tanto,  $Y_t = A_t K_t$ ; en el nivel agregado, la función de producción es la misma que la utilizada en este artículo.

Para ver a qué es igual la razón  $A_1/A_0 = Z_1 L_1^\alpha / Z_0 L_0^\alpha$ , definamos las variables (de acuerdo con las relaciones establecidas bajo un modelo markoviano de dos regímenes). Sea  $Z_0 = (1-\pi x) \bar{Z}$ , el valor de la productividad común bajo el escenario recesivo, y  $Z_1 = (1+x) \bar{Z}$ , su valor más alto. Similarmente para  $L$ ,  $L_0 = (1-\pi x) \bar{L}$  y  $L_1 = (1+x) \bar{L}$ . Siendo  $\pi = p_1/p_0$  la razón de las probabilidades ergódicas halladas en la estimación anterior,  $x$  la desviación de la variable correspondiente con respecto a su tendencia (hacia estados recesivos o expansivos),  $p_0$  la probabilidad de que se den  $Z$  y  $L$  en un estado

recesivo y  $p_1$  la probabilidad inversa. La ventaja de esta notación está en que los promedios de  $Z$  y de  $L$  serán  $\bar{Z}$  y  $\bar{L}$ , respectivamente.<sup>34</sup> Además, las varianzas, desviaciones estándar y desviaciones estándar relativas con respecto a la media para  $Z$  y  $L$  son:

$$\begin{aligned} \text{var}(Z_t) &= \frac{p_1}{p_o} \left( x \bar{Z} \right)^2 & \text{var}(N_t) &= \frac{p_1}{p_o} \left( x \bar{N} \right)^2 \\ S.E.(Z_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \bar{Z} & S.E.(N_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \bar{N} \\ sd(Z_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x & sd(N_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \end{aligned}$$

Como  $sd = \sqrt{p_1/p_o} x$  se tiene que  $x = \sqrt{p_o/p_1} sd$  y  $p_1/p_o x = \sqrt{p_1/p_o} sd$ , así,

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{1+x}{1-p_1/p_o x} = \frac{1+\sqrt{p_o/p_1} sd}{1-\sqrt{p_1/p_o} sd}, \text{ entonces}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_1}{Z_0} \left( \frac{N_1}{N_0} \right)^\alpha = \left[ \frac{1+\sqrt{p_o/p_1} sd}{1-\sqrt{p_1/p_o} sd} \right]^{1+\alpha},$$

es la variabilidad de la productividad.

Las probabilidades ergódicas ya las conocemos; sólo falta encontrar un valor apropiado para  $sd$  y para  $\alpha$ . Para medir la desviación estándar relativa se consideró la serie de la Población Económicamente Activa (PEA) entre 1950 y 2002.<sup>35</sup> A esta serie se le encontró la desviación estándar y la media; la razón entre estas dos se consideró el estimativo para  $sd$ . El resultado fue 49% (véase *tabla 1*), un poco más de ocho veces superior al estimado

<sup>34</sup> En el apéndice está la prueba de esta afirmación y además se encuentran las varianzas de estas igualdades.

<sup>35</sup> Los datos de la PEA hasta el 2000 son de GRECO (2002). Para 2001 y 2002 la PEA se calculó por medio de la tasa bruta de participación dada por la OIT (página de CEPAL-CELADE), siendo  $PEA = Población Total * Tasa Bruta de Participación$ . Para la fuente de población total en 2001 y 2002, véase *Tabla 3*.

para Estados Unidos (6%). Igualmente, el parámetro  $\alpha$  fue fijado en 0,6 (GRECO, 2002, p. 97). Así, la fluctuación de la productividad, calculada de esta forma, sería igual a:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_1}{Z_0} \left( \frac{N_1}{N_0} \right)^\alpha = \left[ \frac{1 + \sqrt{0,62/0,638sd}}{1 - \sqrt{0,638/0,362sd}} \right]^{1,6} = \left( \frac{1,369}{0,349} \right)^{1,6} = (3,92)^{1,6} = 8,9$$

De lo anterior, la razón total entre el valor más alto de la ratio inversión/capital con respecto a su valor más bajo es  $i_1 A_1 / i_0 A_0 = (i_1 / i_0) (A_0 / A_1) = 2,14 * 8,9 = 19,06$ . Esta volatilidad de la inversión se encuentra considerada en el intervalo de  $\psi$  escogido para evaluar los resultados de la *Tabla 3*, pues, cuando  $\psi = 0,30$ ,  $i_1 A_1 / i_0 A_0$  es 5,064 y para  $\psi = 0,15$ , es 25,64 (ecuación 15). Específicamente, 19,06 es el valor correspondiente a  $\psi = 0,165$ .<sup>36</sup> Con este valor, el costo de los ciclos equivale a 0,474 puntos porcentuales en el crecimiento del consumo anual *per cápita* (ecuación 13), es decir, se pasaría de tener una tasa anual de 1,4% de largo plazo en el consumo *per cápita* a una equivalente a 1,874%. Y el efecto sobre el nivel de consumo global de las familias equivaldría a un incremento de 9,5%. Un aspecto positivo de esta aproximación es que da como resultado un costo similar al encontrado en el modelo de *panel* con datos de crecimiento; éste correspondía a 0,43 puntos porcentuales.<sup>37</sup>

$$^{36} \psi = \frac{\ln((\lambda_1 - 1 + \delta) / (\lambda_0 - 1 + \delta))}{\ln(i_1 A_1 / i_0 A_0)} = \frac{\ln 1.63}{\ln 19.06} = 0.165$$

<sup>37</sup> La metodología presentada hasta ahora para estimar el costo de los ciclos está construida de acuerdo con la propuesta de Barlevy (2004); no obstante, la utilización de datos *per cápita* en un modelo que involucra acumulación de capital y que no tiene en cuenta la tasa de crecimiento de la población puede llegar a resultados demasiado imprecisos. Por este motivo, todo el procedimiento desarrollado en los apartados IV y V se repitió usando tasas de crecimiento del PIB y del consumo agregados (los resultados presentados en el texto corresponden a PIB y consumo, ambos, *per cápita*). Para ventaja de las estimaciones presentadas hasta el momento, los datos utilizados parecen mostrar una tendencia similar.

El método 1 arrojó un efecto de la volatilidad agregada sobre el crecimiento de 0,48 puntos porcentuales, cercano al obtenido con los datos *per cápita* del PIB (0,43 puntos porcentuales). A su vez, el método 2 también resultó en costos un poco más altos. En su primera alternativa, cuando la volatilidad de la razón inversión/capital es medida directamente de sus datos, el costo resultó de 0,24 puntos porcentuales. Luego, por medio de la utilización de la  $q$  de Tobin, el costo ascendió a 0,37 puntos porcentuales (pues la volatilidad medida por esta vía es mayor). Finalmente, cuando se utiliza la descomposición de la razón  $I/K$  para medir su volatilidad, el costo es de 0,81 puntos porcentuales.

De esta manera, el rango para el costo de los ciclos evidenciado por la utilización de datos agregados va desde 0,24 a 0,81 puntos porcentuales (aumentándose la tasa promedio de crecimiento del producto agregado de la segunda mitad del siglo XX de 4% a 4,24%, en el lado inferior, o a 4,81%, utilizando el valor máximo del intervalo), mientras con los datos *per cápita* se tenía un intervalo de costos entre 0,13 y 0,47 puntos. Así mismo, el costo sobre el nivel global de consumo, que antes estaba entre 2,6% y 9,5%, ahora está entre 4,8% y 16,2%.

## VI. Medición de la pérdida de bienestar del agente por los ciclos económicos

Hasta ahora se han presentado los resultados correspondientes al efecto de los ciclos económicos en términos de un impacto sobre la tasa de crecimiento del consumo anual *per cápita*. Los cálculos de esta sección permitirán medir la pérdida de bienestar del consumidor cuando se está en un escenario fluctuante, con respecto al ambiente estable, involucrando la función de utilidad referida en este estudio (ecuación 1) y por medio de dos sendas de consumo: una, creciendo a un ritmo más alto (a causa de la estabilidad) y, la otra, creciendo más lentamente (a causa de las fluctuaciones). Esto es, se medirá la variación del bienestar del agente bajo dos sendas, una creciendo más rápidamente que otra; por tanto, la única característica que explica la diferencia en el bienestar de las familias será la pendiente diferencial en sus sendas de consumo, sin que ninguna de las dos esté expuesta a fluctuaciones.<sup>38</sup>

Se tendrán dos formas de medición de este costo de bienestar. La primera de ellas consiste en encontrar la razón entre la utilidad lograda por el agente bajo estas dos sendas diferentes de consumo: una que aumenta según la tasa de crecimiento anual del consumo *per cápita* estimada para el escenario de estabilidad y otra que crece a la tasa media observada. El segundo mecanismo pretende encontrar una tasa de compensación (como porcentaje del consumo inicial) que se le asigne al agente en un momento cero, bajo un escenario de fluctuaciones, para hacer que éste sea indiferente entre las dos sendas anteriores de consumo.

En las dos aproximaciones, dada la función de utilidad de la forma *CRRA*, los resultados van a depender de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo,  $\gamma$ . Cuando esta es igual a uno se tiene una función de utilidad logarítmica. A su vez, para diferentes niveles

---

<sup>38</sup> La fluctuación del consumo se tuvo en cuenta para calcular el costo en términos de tasa de crecimiento. Por lo tanto, en este apartado podemos ignorar la diferencia original entre sendas de consumo fluctuante y estable, y concentrarnos en dos sendas invariables, que se diferencian únicamente por su pendiente (su tasa de crecimiento). En este punto pierde su relevancia la aversión al riesgo porque la comparación se hace entre sendas sin fluctuaciones en su recorrido.

de sustituibilidad, la función retoma su forma original y debe ir reportando magnitudes de pérdida de bienestar que se relacionan positivamente con este parámetro, pues para valores superiores de éste, la utilidad marginal del consumo es más alta y la utilidad total crece más rápidamente cuando se presentan incrementos en el consumo.<sup>39</sup>

Sean  $C_t$  el consumo agregado y  $C_0=7.645$  el consumo inicial o valor en pesos de 1975 del consumo *per cápita* en 1950 (año inicial o año cero). Sin estabilizar, la tasa media de crecimiento anual del consumo *per cápita* es igual a 1,4%; por lo tanto, la función de utilidad es:

$$U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \ln C_0 (1 + 0,014)^t, \text{ para el caso logarítmico}$$

$$U(\{C_t\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \frac{(C_0(1 + 0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{1 - 1/\gamma}, \text{ para } \gamma \neq 1.$$

Bajo estabilidad, la tasa media de crecimiento anual del consumo *per cápita* se ubica en un intervalo entre 1.53% y 1.87%. El punto medio de este intervalo es 1.7%, tasa con la cual se harán los cálculos. Entonces, la función de utilidad alternativa estaría formada por:

$$U'(\{C_t'\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \ln C_0 (1 + 0,017)^t, \text{ para el caso logarítmico}$$

$$U'(\{C_t'\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \frac{(C_0(1 + 0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{1 - 1/\gamma}, \text{ para } \gamma \neq 1.$$

---

<sup>39</sup> Para una función de utilidad  $U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma}$  se tiene que  $\frac{d(dU/dC)}{d\gamma} > 0$ , es decir, al aumentar la elasticidad de sustitución intertemporal, el incremento en el bienestar derivado del aumento en el consumo es mayor, porque las unidades adicionales de consumo reportan mayor utilidad. Es decir, como nuestro problema implica que existe una senda en la cual hay más consumo (pues su tasa de crecimiento estimada bajo estabilidad es mayor) y otra para la cual el consumo se encuentra siempre en un nivel inferior (creciendo a la tasa observada), cada vez que se tomen en cuenta mayores niveles de  $\gamma$  se tendrán mediciones de ganancia de bienestar de mayor magnitud.



La razón entre la función de utilidad bajo un ambiente estable, donde el consumo crece a una tasa superior, y la función de utilidad bajo el escenario real, con el consumo creciendo a la tasa media observada, es la pérdida de bienestar.

Tomando una tasa de descuento igual a la tasa de interés real de largo plazo (segunda mitad del siglo XX) para Colombia,  $r = 5,5\%$  (GRECO, 2002), el factor de descuento,  $\beta$ , sería igual a 0,95  $\left(\beta = \frac{1}{1+r}\right)$ . Igualmente, la aproximación de la suma de términos hasta el infinito en las funciones de utilidad por medio de la suma de los primeros 53 términos tiene sentido puesto que, dado un factor de descuento igual a 0,95, esta representa aproximadamente 99% del total de la suma cuando el horizonte tiende a infinito. Con lo anterior, el cálculo quedaría así:

$$\frac{U(\{C_t\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} 0.95^t (\ln 7645)(1 + 0,017)^t}{\sum_{t=0}^{52} 0.95^t (\ln 7645)(1 + 0,014)^t} - 1, \text{ cuando } \gamma = 1$$

Pérdida de bienestar = (17)

$$\frac{U(\{C_t\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} 0.95^t (7645(1 + 0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} 0.95^t (7645(1 + 0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1}, \text{ cuando } \gamma \neq 1$$

A su vez, la tasa de compensación en el consumo inicial de los individuos,  $\mu$ , va depender de estos mismo resultados, pues ahora lo que se debe encontrar es aquella tasa (como porcentaje del consumo inicial) que haga cero la ecuación (17);<sup>40</sup> así se tiene que:

$$\mu = \left( \frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1 + 0,017)^{t-1/\gamma}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1 + 0,014)^{t-1/\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \quad (18)$$

<sup>40</sup> Para  $\gamma = 1$  se consideró, en la práctica, un valor muy cercano a 1 en la ecuación (18). El procedimiento completo para encontrar esta ecuación se presenta en el apéndice A3.

*Tabla 4. Pérdida de bienestar del agente por las fluctuaciones económicas según diferentes niveles de elasticidad de sustitución intertemporal del consumo,  $\gamma$*

Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo <sup>(a)</sup>	Pérdida de bienestar (ecuación 17)	Tasa de compensación del consumo inicial, $\mu$
0,75	0,07%	4,35%
1	0,49%	4,61%
1,25	1,12%	4,77%
1,5	1,68%	4,88%
1,75	2,14%	4,97%
2	2,51	5,03%

<sup>(a)</sup>Los valores de la elasticidad que se muestran aquí fueron seleccionados porque eran consistentes con el requisito de concavidad en la función de utilidad.

Los resultados de estos cálculos se presentan en la *Tabla 4*. El costo en bienestar de las fluctuaciones económicas para el agente (segunda columna) va desde 0,07%, para el caso de una elasticidad de sustitución intertemporal igual a 0,75, hasta 2,51%, cuando la elasticidad es 2. La interpretación de estos resultados permite concluir que el agente recibiría en promedio un 1,34% más de utilidad cuando la senda de consumo crece 0,30 puntos porcentuales por encima de la media en la tendencia observada bajo el escenario fluctuante, demostrando que el agente podrá mejorar su bienestar significativamente en el caso de una estabilización económica.

Así mismo, los resultados correspondientes a la tasa de compensación (columna tres) muestran que las familias deberían recibir un monto de consumo adicional, por una sola vez, equivalente a una cifra en el rango 4,35% - 5,03% (en promedio 4,7%) de su consumo inicial para hacerlas indiferentes entre una senda de consumo creciendo en promedio más lentamente (en el escenario fluctuante) y una trayectoria estable creciendo a un mayor ritmo.

## VII. Síntesis y conclusiones

En este trabajo se consideraron dos métodos de estimación para el costo de los ciclos económicos colombianos. El primer método se realizó con un modelo de *panel* con datos de crecimiento para el PIB *per cápita* y considerando los períodos de elección presidencial como elementos que resumen de manera aproximada los factores causantes de la volatilidad agregada. Este método arrojó un resultado según el cual los ciclos económicos tuvieron un costo cercano a 0,43 puntos porcentuales en la tasa de crecimiento anual del PIB *per cápita* en el largo plazo. El segundo de los métodos estuvo dividido en dos etapas: estimación del modelo markoviano y reestimación del costo por medio de unas medidas de la volatilidad de la inversión. Considerando un intervalo entre 0,15 y 0,30 para el parámetro  $\psi$  asociado a la existencia de rendimientos decrecientes de la función de producción de bienes de capital, el segundo de los métodos señaló un costo que osciló entre 0,28 y 0,50 puntos porcentuales del crecimiento anual del consumo *per cápita*.

No obstante, todavía faltaba reestimar el costo de los ciclos para un valor específico del parámetro  $\psi$ . Para esto se tenía que determinar la volatilidad empírica de la inversión compatible con el grado de retornos decrecientes. Aquí se tenía un costo de oportunidad, pues la escogencia de volatilidades de la inversión de menor cuantía implicaba reducir el grado de retornos decrecientes de la inversión (mayor  $\psi$ ) y, con ello, correr el riesgo de subestimar el costo de los ciclos.

Para medir la volatilidad de la inversión se utilizaron tres métodos de aproximación. En primer lugar, se consideró la serie de  $I/K$  y se escogió de allí el mayor y el menor valor para calcular la proporción entre la cima y el valle; este fue el nivel de volatilidad más bajo. Una segunda vía consistió en la utilización de la  $q$  de Tobin, y se procedió con el mismo método anterior, es decir, se obtuvo también una razón entre su máximo y su mínimo valor. La tercera aproximación considerada, que utilizó el modelo de Paul Romer para hacer compatible el modelo  $AK$  con cifras de población laboral, arrojó resultados que se aproximaron a los estimados en el modelo de *panel* y señaló el nivel más alto de

volatilidad. Según esto, la razón entre el mayor y el menor valor de la razón inversión-capital varía entre 2,5 y 19,06, el parámetro  $\psi$  entre 0,165 y 0,53, y el costo de los ciclos entre 0,13 y 0,47 puntos porcentuales en la tasa anual de crecimiento de largo plazo, según el orden de determinación fijado en el *gráfico 7*.

Finalmente se realizó la medida para la pérdida de bienestar de las familias utilizando la función de utilidad *CRRRA* con diferentes niveles de elasticidad intertemporal de sustitución. Los resultados por este lado mostraron efectos significativos de los ciclos en el bienestar. De manera específica, habría que compensar a las familias con un consumo adicional (por una sola vez) equivalente, en promedio, a 4,7% del consumo de 1950 para que les fuera indiferente la senda de consumo observada y una estable.

En resumen, puede decirse que los ciclos económicos colombianos de la segunda mitad del siglo XX tuvieron un costo, en términos de pérdida de tasa de crecimiento anual del PIB real *per cápita*, equivalente a una cifra ubicada en el rango 0,13 – 0,47 puntos porcentuales (un rango en el cual se encuentran las estimaciones de los diferentes métodos utilizados por nosotros); esto significa que en ausencia de fluctuaciones económicas la tasa de crecimiento del PIB *per cápita* no habría sido la observada, 1,43%, sino que hubiera estado entre 1,56% y 1,9%; y la del consumo *per cápita* no hubiera sido 1,4%, sino una en el intervalo 1,53% - 1,87%.

## Apéndice

### A1. Solución analítica al sistema (16)

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} = (1.62682769)^{1/\psi} \quad (16.A)$$

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi} = 2^{1/1-\psi} \quad (16.B)$$

Por igualación:

$$\left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} = \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\psi} \ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) = \frac{1}{1-\psi} \ln \left( \frac{q_1}{q_0} \right)$$

$$\Rightarrow (1-\psi) \ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) = \psi \ln \left( \frac{q_1}{q_0} \right)$$

$$\Rightarrow \psi \ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) + \psi \ln \left( \frac{q_1}{q_0} \right) = \ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)}{\ln \left( \frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) + \ln \left( \frac{q_1}{q_0} \right)}$$

Para los valores considerados en este trabajo, la solución es:

$$\psi = \frac{\ln(1.62682769)}{\ln(1.62682769) + \ln(2)} = 0.412477147$$

*A2. Medias y varianzas de los términos de productividad y población especificados en un modelo de Markov de dos estados*

Los resultados encontrados para  $Z$  son equivalente para  $N$ .

La media:

$$E(Z) = p_0 Z_0 + p_1 Z_1 = p_0 \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} x \right) \bar{Z} + p_1 (1 + x) \bar{Z} = (p_0 - p_1 x + p_1 + p_1 x) \bar{Z} = ((1 - p_1) + p_1) \bar{Z}$$

$$\Rightarrow E(Z) = \bar{Z}$$

La varianza:

$$Var(Z) = \left( Z_0 - \bar{Z} \right)^2 p_0 + \left( Z_1 - \bar{Z} \right)^2 p_1 = \left( -\frac{p_1}{p_0} x \bar{Z} \right)^2 p_0 + \left( x \bar{Z} \right)^2 p_1 = \left( x \bar{Z} \right)^2 \left( \frac{p_1^2}{p_0} + p_1 \right)$$

$$= \left( x \bar{Z} \right)^2 \left( \frac{p_1^2 + p_0 p_1}{p_0} \right) = \left( x \bar{Z} \right)^2 \left( \frac{p_1^2 + (1 - p_1) p_1}{p_0} \right)$$

$$\Rightarrow Var(Z) = \left( x \bar{Z} \right)^2 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)$$

La desviación estándar y la desviación estándar relativa:

$$S.E.(Z) = \sqrt{\frac{p_1}{p_0} x \bar{Z}} \text{ y } sd(Z) = \sqrt{\frac{p_1}{p_0} x}$$

A3. Solución para  $\mu$  en la ecuación (18)

Como se dijo en el texto principal, la tasa de compensación es aquella que hace al agente indiferente entre las dos sendas de consumo consideradas. Por lo tanto, la ecuación (17) debe ser cero.

$$\frac{U'(\{C_t'\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1} - 1 = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1} = 1$$

Y despejando para  $\mu$

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 52 = \sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 52$$

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} = \sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0(1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma}$$

$$C_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma} = (C_0(1+\mu))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}$$

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma} = (1+\mu)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}$$

$$(1+\mu)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left( \frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}} \right)$$

$$\mu = \left( \frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \quad (18)$$

## A4. Series estadísticas y otros cálculos utilizados en el trabajo de investigación

Tabla A1. Series estadísticas

<i>Año</i>	<i>Producto</i>	<i>Inversión</i>	<i>Consumo</i>	<i>Capital físico</i>	<i>PEA</i>
1950	117454,29	26917,00	86382,67	358871,00	4019784,22
1951	120741,68	25158,00	86818,21	373007,73	4076022,68
1952	128407,88	26380,00	92480,18	388016,63	4156676,76
1953	134953,19	27967,00	97939,26	404218,53	4238926,78
1954	144625,39	35628,00	106749,47	427349,63	4322804,32
1955	150362,22	37762,00	110916,84	451758,59	4408341,58
1956	157506,80	39006,00	113084,33	476518,84	4503002,59
1957	162822,99	38920,00	115582,40	500440,63	4599696,28
1958	165915,84	32271,00	117539,18	517430,70	4698466,29
1959	177806,25	33723,00	123565,41	535637,14	4799357,20
1960	184931,72	39337,00	129322,94	559191,45	4902414,55
1961	194432,36	43889,00	137703,88	586776,29	5030150,12
1962	204612,91	38185,00	149080,31	608067,09	5161213,92
1963	211178,39	38689,00	156581,56	629317,04	5295692,67
1964	223915,01	44018,00	170728,66	655461,54	5433675,36
1965	232906,36	43589,00	168722,53	680584,54	5568284,48
1966	245865,31	54757,00	184263,97	716409,58	5740427,74
1967	254984,65	43058,00	186751,85	740001,02	5917892,81
1968	270928,34	54000,00	198002,94	774010,13	6100844,19
1969	288101,96	54345,00	213687,73	807634,81	6289451,52
1970	307496,00	63148,00	226529,00	849357,13	6483889,62
1971	325825,00	65844,00	242810,00	892812,10	6748479,15
1972	350813,00	64244,00	258195,00	933611,50	7023865,85
1973	374398,00	70073,00	270549,00	979256,45	7310490,31
1974	395910,00	83967,00	286171,00	1037759,84	7569117,73
1975	405108,00	68838,00	293239,00	1079952,66	7836894,76
1976	424263,00	75245,00	314234,00	1127466,61	8104742,56
1977	441906,00	87468,00	326831,00	1185914,09	8381744,81
1978	479335,00	93516,00	354067,00	1249195,86	8668214,38
1979	505119,00	93220,00	367061,00	1310719,56	8964474,86
1980	525765,00	103358,00	384539,00	1380806,43	9270860,86
1981	537736,00	117037,00	393952,00	1462712,65	9568054,44
1982	542836,00	123279,00	400255,00	1548900,49	9874775,07
1983	551380,00	120628,00	407095,00	1630471,44	10191328,17
1984	569855,00	113521,00	418556,00	1703056,72	10518028,92
1985	587561,00	102574,00	426474,00	1762896,21	10855202,64
1986	621781,00	107038,00	444638,00	1825816,83	11234239,67
1987	655164,00	116901,00	461568,00	1896998,49	11626511,75
1988	681791,00	126264,00	472655,00	1975763,47	12032481,01
1989	705068,00	117013,00	489050,00	2043217,97	12452625,72
1990	735259,00	115641,00	502475,00	2107457,75	12887440,85



*Series estadísticas (continuación)*

1991	749976,00	105537,00	509359,00	2159849,51	13319165,80
1992	780312,00	150902,00	522028,00	2256251,37	13765353,39
1993	822335,00	208549,00	554223,00	2408528,07	14226488,11
1994	870151,00	264258,00	590160,00	2613100,51	14678599,88
1995	915420,06	235702,87	615591,00	2784661,84	15145079,57
1996	934239,77	207371,53	619055,06	2923221,55	15614633,87
1997	966286,94	206034,33	635494,62	3056060,28	16098746,12
1998	971678,31	191056,02	621776,94	3169852,85	16597867,67
1999	930398,29	129684,99	590458,66	3218882,87	17112463,86
2000	956445,73	145668,03	616444,96	3282215,19	17643014,47
2001	970520,00		631647,89		19330316,86
2002	989246,98		647678,57		19889078,07

Fuentes:

Producto: los datos entre 1950 y 2000 son calculados por GRECO (2002). Para 2001 y 2002 se utilizaron las tasas de crecimiento del PIB publicadas por el DANE.

Inversión: GRECO (2002)

Consumo: los datos entre 1950 y 2000 son calculados por GRECO (2002). Para 2001 y 2002 se utilizaron las tablas de publicación del Banco de la República para el consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975.

Capital físico: GRECO (2002).

PEA: los datos entre 1950 y 2000 son de GRECO (2002). Para 2001 y 2002 se tomó la tasa bruta de participación dada por OIT (44,02% y 44,4%).

*Tabla A2. Cálculos de la  $q$  de Tobin mencionados en el texto*

<b>Resumen</b>	<b>1998</b>	<b>1999</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>
<i>Promedio Ponderado*/</i>	1,067	0,890	0,786	0,787	0,725
<i>Promedio Simple</i>	1,355	1,200	1,019	0,838	0,716
<i>Mediana</i>	0,906	0,837	0,807	0,717	0,684
<i>Mínimo</i>	0,193	0,234	0,091	0,250	0,220
<i>Máximo</i>	24,372	21,922	9,418	5,515	1,487
<i>Empresas</i>	101	86	73	61	54
<i>Desviación Estándar</i>	0,020	0,018	0,017	0,022	0,029

\*/ Ponderado por activos totales de cada empresa

Fuente: Supervalores, Bolsa de Valores de Colombia. Tomado de Gutiérrez y Pombo (2005)

## Referencias

Arango, Luis Eduardo (1998). “Temporary and Permanent Components of Colombia’s Output”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 96, junio.

Avella, Mauricio, y Leopoldo Fergusson (2003). “El ciclo económico. Enfoques e ilustraciones. Los ciclos económicos de Estados Unidos y Colombia”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 284, diciembre.

Barlevy, Gadi (2004). “The cost of business cycles under endogenous growth”. *American Economic Review*, Vol 94. No. 4.

Birchenall, Javier A. (1997). “Inversión bajo incertidumbre en la industria colombiana”. *Archivos de Economía* (DNP). Documento 64, agosto.

Cárdenas, Mauricio (1992). “Estabilización vs. Crecimiento: ¿Qué preferimos los colombianos?”. *Coyuntura Económica*. Vol. XXII. No. 2.

Flórez, Carmen Elisa (2000). *Las transformaciones sociodemográficas en Colombia durante el siglo XX*. Banco de la República—TM editores.

Gómez, Javier G. (1992). “Una nota sobre el costo de las fluctuaciones económicas”. *Ensayos sobre Política Económica*. No. 21.

Gómez, Wilman, y Carlos Esteban Posada (2004). “Un choque del activo externo neto y el ciclo económico colombiano, 1994-2001”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 285, abril.

GRECO (2002). *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX*. [Texto y Anexo estadístico]. Fondo de Cultura Económica.

Gutiérrez, Luis H., y Carlos Pombo. “Corporate valuation and governance: evidence from Colombia”. *Borrador de Investigación*. No. 71, Facultad de Economía, Universidad del Rosario.

Hamann, Franz (2002a). “Sovereign Risk and Macroeconomic Fluctuations”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 225, noviembre.

Hamann, Franz (2002b). “Sovereign Risk and Real Business Cycles in a Small Open Economy”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 226, noviembre.

Hamann, Franz, y Alvaro Riascos (1998). “Ciclos económicos en una economía pequeña y abierta. Una aplicación para Colombia”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 89, abril.

Hamilton, James (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Imrohorglu, Ayse (1989). “Cost of business with indivisibilities and liquidity constraints”. *The Journal of Political Economy*. Vol. 97, No. 6.

Lucas, Robert (1987). *Modelos de ciclos económicos*. Alianza universidad. Capítulo III.

Minford, Patrick, y David Peel (2002). *Advanced Macroeconomics. A Primer*, Edward Elgar Publishing.

Misas, Martha, y Carlos Esteban Posada (2000). “Crecimiento y ciclos económicos en Colombia en el Siglo XX: el aporte de un VAR estructural”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 155, agosto.

Misas, Martha, y María Teresa Ramírez (2005). “Depressions in the Colombian economic growth during the XX century: A Markov Switching Regime Model”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 340, junio.

Posada, Carlos Esteban (1999). “Los ciclos económicos colombianos en el siglo XX”. En: *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 126, julio.

Ramey, Garey, y Valerie Ramey (1995). “Cross-country evidence on the link between volatility and growth”. *NBER*, Working Papers 4959, National Bureau of Economic Research.

Reis, Ricardo (2005). “The time-series properties of aggregate consumption: Implications for the costs of fluctuations”. *NBER*, Working Papers 11297, National Bureau of Economic Research.

Suescún, Rodrigo (1997). “Commodity Booms, Dutch Disease, and Real Business Cycles in a Small Open Economy: The case of Coffee in Colombia”. *Borradores de Economía* (Banco de la República). No. 73, junio.

Zuccardi, Igor Esteban (2002). “Crecimiento y ciclos económicos. Efectos de los choques de oferta y demanda en el crecimiento colombiano”. *Archivos de Economía* (DNP). Documento 187, mayo.