

**BANCO DE LA REPUBLICA  
SUBGERENCIA MONETARIA Y DE RESERVAS**

**ANALISIS DE EFICIENCIA DE LOS PORTAFOLIOS  
PENSIONALES OBLIGATORIOS EN COLOMBIA**

**DIEGO JARA PINZON<sup>1</sup>  
CAROLINA GOMEZ RESTREPO  
ANDRES PARDO AMEZQUITA**

**Septiembre de 2005**

**RESUMEN**

Gran parte del futuro del ahorro pensional colombiano depende de las decisiones de inversión tomadas por las Administradoras de los Fondos de Pensiones Obligatorias. Estas decisiones de portafolio deben obedecer las restricciones de inversión definidas por la Superintendencia Bancaria. Desde el punto de vista del futuro pensionado es de natural interés analizar la eficiencia financiera de estos portafolios. En el presente trabajo se realiza tal análisis usando el marco clásico de frontera eficiente dentro del espacio media-varianza. Para tal fin, se selecciona un conjunto de activos en los que las AFP pueden invertir y se exhibe una metodología para determinar la distribución conjunta de sus retornos. Los resultados permiten resaltar varios puntos: primero, los portafolios de las AFP se encuentran por debajo de la frontera eficiente aquí construida; segundo, todos los portafolios eficientes tienen exposición a activos externos de 20%, que es la máxima permitida por la Superintendencia Bancaria; tercero, la única restricción de inversión que ocasiona una reducción considerable de eficiencia potencial es la de 20% a activos externos; cuarto, la mayoría de portafolios eficientes, incluyendo aquellos con riesgo similar al de los fondos de pensiones, tienen exposición cambiaria de 20%, que también es la máxima permitida. Estas conclusiones son robustas a cambios razonables en los parámetros usados, en los supuestos del modelo, y en el período de muestra usada.

Los resultados del ejercicio generan algunas inquietudes. Según el análisis mostrado, las AFP no escogen portafolios eficientes, lo cual no implica que se comporten irracionalmente. Es posible que éstas maximicen una función objetivo diferente a la presentada en el estudio, al considerar otros elementos de mercado, regulación y estructura corporativa. En esta dirección, cabe preguntarse: i) ¿Cuál es el objetivo de la regulación de los fondos de pensiones obligatorias? ii) ¿La regulación actual satisface este objetivo? iii) ¿En particular, cómo afectan la estructura de comisiones y la rentabilidad mínima el comportamiento de inversión de las AFP? iv) ¿Cómo difiere este comportamiento de los objetivos del ahorrador colombiano? La relevancia de estas preguntas depende de una generación de respuestas concretas. La búsqueda de éstas se deja para estudios posteriores.

---

<sup>1</sup> Los autores agradecen a Juan Mario Laserna, Hernando Vargas, Camilo Zea, Ana Fernanda Manguashca, Felipe Gómez, Gabriel Piraquive, Mateo Ossa, Eduardo Orejuela, Luis Fernando Alarcón y Rodrigo Galarza por su colaboración con valiosos comentarios.

Subgerencia Monetaria y de Reservas del Banco de la República. [djarapin@banrep.gov.co](mailto:djarapin@banrep.gov.co), [mgomezre@banrep.gov.co](mailto:mgomezre@banrep.gov.co), [apardo06@gsb.columbia.edu](mailto:apardo06@gsb.columbia.edu).

**Nota:** Las opiniones y resultados expuestos en este documento son de exclusiva responsabilidad de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a los miembros de su junta directiva.

## 1. INTRODUCCION

Desde la aprobación de la Ley 100 de 1993 y su subsecuente implementación en 1994, las nuevas administradoras de los fondos de pensiones (AFP) han enfrentado el problema típico de administradores de dinero de decidir la (o una) composición óptima del portafolio de inversión. Tal objetivo está directamente restringido por dos factores regulatorios definidos por la Superintendencia Bancaria: el universo de activos admisibles y la imposición de límites individuales por instrumento, emisor y emisión. Asimismo, otros factores de mercado y regulación juegan papeles importantes en la escogencia del portafolio: el entorno del mercado (existencia y oferta de activos, liquidez de éstos y profundidad de los mercados), y la estructura de costos y utilidades bajo la cual operan las AFP. Esta última depende en particular de la estructura de comisiones y la rentabilidad mínima (por ley, las AFP deben garantizar un mínimo rendimiento de los fondos, definido actualmente en términos del rendimiento agregado del sistema y de un portafolio de referencia construido por la Superintendencia Bancaria).<sup>2</sup>

En la actualidad hay seis AFP, manejando un total de aproximadamente US\$13 mil millones<sup>3</sup>. El crecimiento del valor de los mismos se muestra en el Figura 1. Los portafolios actuales tienen una exposición (neta) de más de 50% a la República de Colombia, y más del 90% a Colombia (sector público y privado). Basados en el concepto de diversificación, es natural llegar a las siguientes preguntas: es eficiente la inversión de los fondos desde un contexto riesgo-retorno? En qué dirección deben moverse las inversiones para volverse más eficientes? Qué efecto tiene el régimen de inversión sobre la frontera eficiente? Cabe aclarar que estas preguntas no consideran las preferencias del ahorrador colombiano o las de los administradores de los fondos (que en principio pueden ser muy distintas). Es decir, la eficiencia de portafolios puede no ser un objetivo a maximizar por parte de las AFP (o incluso del ahorrador).

En este reporte se analiza la eficiencia de los portafolios de los fondos teniendo en cuenta el universo de activos admisibles y los límites de inversión establecidos en la regulación. Para tal fin, se definen los siguientes objetivos: primero, crear la frontera eficiente para el entorno expuesto; segundo, ubicar los portafolios de las AFP con respecto a esta frontera; y tercero, medir la sensibilidad de la frontera con respecto a los límites de inversión, a los modelos usados y a las series de tiempo usadas.

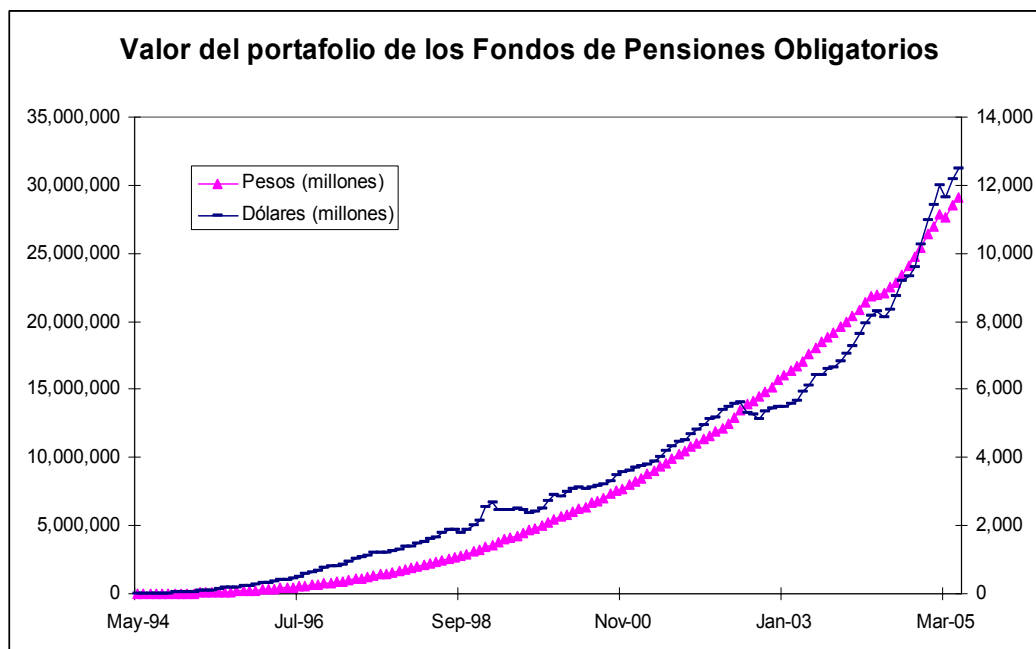
Este estudio presenta debilidades potenciales de dos tipos: supuestos de fricciones del mercado (costos de transacción, tamaño del mercado, etc.) y supuestos de modelo (confiabilidad de los datos, validez de algunas teorías económicas, etc.). Por lo tanto, el ejercicio se enfoca en buscar conclusiones que no sean sensibles a alteraciones de los insumos del modelo.

---

<sup>2</sup> Asimismo, las decisiones macro de inversión de los fondos pueden obedecer a incentivos derivados de la estructura financiera colombiana y en particular de la estructura corporativa de las AFP; en particular éstas pueden ser afectadas por la relación de las AFP con los bancos matriz, y con el resto del mundo financiero. Es posible que ocasionalmente las juntas directivas de las AFP sigan motivaciones desligadas parcialmente de un análisis netamente financiero que busque optimizar la rentabilidad del ahorro de los afiliados.

<sup>3</sup> Información a Mayo de 2005.

Figura 1. Crecimiento de los fondos pensionales obligatorios



La composición de los portafolios eficientes depende fuertemente de los supuestos usados, de las series de tiempo y de la determinación de la distribución de los retornos de los activos; sin embargo, el estudio encuentra resultados robustos a cambios en estos parámetros. Primero, todos los portafolios en la frontera eficiente tienen exposición máxima permitida a activos emitidos por entidades del exterior (en la actualidad, 20%). Segundo, sólo un elemento del régimen actual de inversión es influyente en el movimiento de la frontera: la restricción de 20% en activos externos. Es decir, la diferencia entre la frontera de la regulación actual y la frontera sin considerar los límites de inversión es explicada casi totalmente por el límite de activos externos. Para niveles de riesgo similares al tomado por las AFP, esta diferencia es aproximadamente 1%, medida como pérdida en rentabilidad real esperada. Tercero, en su mayoría los portafolios eficientes tienen exposición cambiaria igual a la máxima permitida (20%).<sup>4</sup> Dada la baja exposición de las AFP a activos externos (11%) y a moneda externa (8%), es de esperarse que sus portafolios sean ineficientes dentro del marco usado en el estudio. Usando los parámetros del caso base, esta ineficiencia se cuantifica como una pérdida de 1% de retorno real esperado con respecto al portafolio eficiente con un nivel similar de riesgo. Por otro lado, se observa que los portafolios de los distintos fondos se ubican en posiciones relativamente cercanas. Es decir, gráficamente se puede observar un comportamiento semejante a un efecto “manada”.

Vale la pena notar que estos resultados no se deben tomar como implicaciones respecto a la racionalidad del comportamiento de las AFP. Por el contrario, deben interpretarse como indicaciones de que los fondos tienen como objetivo un problema matemático

<sup>4</sup> Esto es interesante si se nota que un activo en moneda externa cuya exposición cambiaria está cubierta tiene en esencia el mismo retorno esperado, pero menor volatilidad, que el mismo activo descubierto (puesto que la medición de retornos se hace en pesos colombianos). Esto refleja el poder de la diversificación.

distinto al de encontrar portafolios eficientes en el espacio puro de riesgo-retorno. La diferencia posiblemente se deriva de los distintos incentivos y restricciones a los que se enfrentan en realidad.

Estos resultados abogan por una diversificación global de los portafolios de los fondos. Existen muchos ejemplos de estudios con la misma observación general. Por ejemplo, en Dodd y Spiegel (2004) los autores basan sus recomendaciones para portafolios en países emergentes en la diversificación de los mismos, y en Solnik y McLeavey (2004) se enfatiza el punto de diversificación global (en contraste con diversificación internacional). Asimismo, aquí vale la pena mencionar el punto del sesgo doméstico (“*home bias*”), expuesto por ejemplo por Tesar y Werner (1992), en donde exponen que este sesgo no es explicado por costos de transacción o información incompleta. Finalmente, con una perspectiva distinta, Berstein y Chumacero (2003) realizan un estudio de cuantificación del costo financiero causado por las restricciones de inversión para los fondos de pensiones obligatorias en el caso chileno, y concluyen que éstas han causado al menos 10% de pérdida en rentabilidad acumulada en un periodo de 22 años.

El documento se compone de cinco secciones incluyendo esta introducción. En la segunda sección se describe la regulación que enfrentan las AFP; en la tercera se describe el modelo planteado, y los datos y supuestos usados para pasar del entorno del mercado y de la regulación al análisis teórico; en la cuarta se exhiben los resultados; finalmente, en la quinta sección se presentan las conclusiones del estudio.

## **2. ENTORNO DE INVERSIÓN DE LOS FONDOS DE PENSIONES**

### **2.1 Marco Regulatorio**

La Superintendencia Bancaria determina el tipo de activos en los cuales las AFP pueden invertir los recursos de los fondos de pensiones, con el propósito de que los mismos cuenten con la requerida seguridad, rentabilidad y liquidez. Para ello define el universo de inversiones admisibles, establece límites máximos por tipo de instrumentos y acota el riesgo crediticio definiendo calificaciones mínimas por emisor y emisión. El universo de inversiones admisibles y los límites máximos por tipo de instrumento se resumen en la Tabla 1.

Las inversiones en activos emitidos en el mercado local deben contar con una calificación crediticia de al menos “*BBB-*” tratándose de títulos de largo plazo o “*3*” para títulos de corto plazo. Las inversiones en activos emitidos por emisores externos deben contar con una calificación crediticia de al menos “*BBB-*” según la escala de Standard & Poors y Fitch o “*Baa*” en el caso de Moody’s. En el caso de inversiones de corto plazo la calificación mínima requerida es “*A3*”, “*F3*” y “*P3*”<sup>5</sup>. En este punto vale la pena resaltar que la regulación exige grado de inversión para todas las inversiones en títulos de deuda pública soberana, con excepción de Colombia cuya calificación crediticia es inferior.

---

<sup>5</sup> Dicha calificación se exige para las inversiones de renta fija de los fondos de inversión internacionales, se considera para avalar el riesgo soberano de títulos de deuda pública y los depósitos a término en entidades bancarias.

**Tabla 1. Límites de Inversión de los Fondos de pensiones, Septiembre de 2005**

<b>Inversión admisible</b>	<b>Límite Mínimo</b>	<b>Límite máximo</b>
Títulos de deuda publica (interna y externa)	0%	50%
Títulos emitidos por FOGAFIN y FOGACOO	0%	10%
Títulos de renta fija emitidos por el sector corporativo local	0%	30%
Títulos de renta fija emitidos por el sector financiero local	0%	30%
Títulos renta variable emitidos en el mercado local	0%	30%
Títulos y bonos hipotecarios	0%	40%
Títulos derivados de procesos de titularización de activos diferentes de cartera hipotecaria	0%	30%
Títulos derivados de procesos de titularización de cartera hipotecaria	0%	20%
Depósitos a la vista (m/l y m/e)	0%	2%
Operaciones reporto activas	0%	3%
Operaciones reporto pasivas (únicamente para atender solicitudes de retiro)	0%	1%
Títulos emitidos por entidades del exterior:	0%	20%
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Títulos de renta fija emitidos por gobiernos, bancos centrales, bancos comerciales o de inversión, sector corporativo y multilaterales.</li> <li>• Fondos de inversión internacionales<sup>6</sup>.</li> <li>• Participación fondos índice<sup>7</sup>.</li> </ul>		
Exposición a monedas externas	0%	20%
Operaciones de derivados sólo para cubrir riesgo de variaciones de tasa de interés, tipo de cambio y precio de acciones.	0%	100%

Las inversiones en títulos de un mismo emisor están acotadas a un 10% del valor del fondo, con excepción de las realizadas en títulos de deuda pública emitidos o garantizados por la Nación, títulos emitidos por el Banco de la República y operaciones de reporto activas celebradas a través de la cámara de compensación agropecuaria. Así mismo, las inversiones en títulos de una misma emisión están acotadas a un 30%, con excepción de los títulos de deuda pública emitidos o garantizados por la Nación, los títulos emitidos o avalados por FOGAFIN y FOGACOO y los títulos emitidos por el Banco de la Republica, y a un 10% en el caso de BOCEAS. Finalmente, el límite individual de inversión por emisor y los de concentración de propiedad accionaria se reducen al 5% cuando correspondan a títulos emitidos, avalados, aceptados, garantizados u originados por entidades vinculadas con la AFP.

<sup>6</sup> Siempre y cuando: i) la clasificación de categoría de riesgo del país donde este constituido el fondo y su administradora sea por lo menos "A" (escala Standard & Poors), el fondo y la administradora estén supervisados por organismos reguladores, la sociedad administradora acredite un mínimo de US\$ 10.000 millones en activos administrados por cuentas de terceros y un mínimo de 5 años de operación en la administración de dicho tipo de activos, el fondo debe contar con una adecuada diversificación no teniendo mas del 10% de acciones de un mismo emisor de R.V. ni más del 30% de acciones de circulación de una misma entidad.

<sup>7</sup> Fondos índice que sigan exclusivamente los siguientes índices: S&P 500, S&P Europe 350, S&P Asia Pacific 100, S&P Global 100, S&P Barra Value, S&P Bbarra Growth, MSCI EAFE, MSCI Europe, MSCI Pacific, Rusell 2000, Rusell 2000 value, Rusell 2000 Growth, Nasdaq Composite Index, PSE TSh 100, Dow Jones Industrial average.

Otros aspectos de la regulación financiera relevantes para las AFP son la rentabilidad mínima, mediante la cual se exige a las administradoras un mínimo de rendimiento incluso si esto implica sacrificar capital propio, y la estructura de comisiones mediante la cual las AFP se recapitalizan. Estos puntos no son considerados en este estudio, pero vale la pena señalar que ellos pueden tener efectos importantes en las decisiones de inversión de los fondos.

## **2.2 Mercado**

El mercado de capitales en Colombia es aún incipiente, lo cual impone restricciones adicionales al régimen de inversión de las AFP. La poca profundidad del mercado accionario y de renta fija del sector corporativo junto con la poca profundidad del mercado de derivados financieros requerido para el cubrimiento de la exposición cambiaria, acotan las posibilidades de inversión de los fondos y puede ocasionar un favorecimiento natural de títulos de deuda pública local. Adicionalmente el tamaño relativo de los fondos de pensiones frente a otros agentes del mercado puede interpretarse como un oligopsonio, con los efectos sobre precios y liquidez que esto trae consigo.

A manera de ilustración, durante el mes de febrero de 2005 los fondos de pensiones realizaron el 17% del total de transacciones de compra de acciones y el 6% del total de transacciones de venta de acciones de la Bolsa de Valores de Colombia. Durante el mismo mes realizaron el 5% de las operaciones de renta fija realizadas a través del MEC. Se estima que el saldo de las operaciones cobertura de los FPO a diciembre de 2004 representaban el 22% de las ventas forward y el 8% de las compras forward. A la misma fecha, los fondos de pensiones poseían el 12,62% del saldo total de TES existentes en el mercado.

## **3. MODELO, METODOLOGIA Y SUPUESTOS**

Se define un portafolio eficiente como aquél que maximiza el retorno esperado para un nivel dado de varianza. La frontera eficiente es el conjunto de portafolios eficientes. El estudio clásico de optimización de portafolios reduce el análisis al espacio media-varianza, en donde se da por entendido que entre dos portafolios con el mismo retorno esperado un agente racional prefiere el de menor varianza<sup>8</sup>; es decir, el agente debe escoger un portafolio eficiente.

Para el análisis se supone perfectamente especificado el conjunto de activos admisibles. Además, se requiere conocer los primeros dos momentos del vector de retornos de los activos a algún horizonte de inversión; es decir, se suponen dados el vector de medias y

---

<sup>8</sup> A pesar de ser una premisa meritoria desde una instancia intuitiva y ser comúnmente aceptada en la comunidad financiera, se debe resaltar que no hay un fundamento financiero que permita establecer esta escogencia como una que determinaría todo agente racional en toda situación. De hecho, esta medida de preferencias ignora elementos de la distribución de los retornos que pueden ser significativas para un agente optimizador (elementos como asimetrías, tamaño de colas, etc). Cabe resaltar que bajo ciertas condiciones (por ejemplo cuando se supone la normalidad multidimensional de la distribución de los retornos, o cuando se limita el análisis a agentes con funciones de utilidad cuadráticas) este esquema sí resulta en una escogencia óptima de portafolios.

la matriz de varianza-covarianza de los retornos de los activos. Generalmente este es el punto en el que la teoría y la práctica divergen, principalmente en la determinación de los retornos esperados. En primera instancia normalmente se usan los retornos históricos, pero pocos administradores de portafolios se sienten cómodos proyectando a futuro los retornos pasados (cuestión que es más fácilmente digerida en la parte de volatilidades). Por lo tanto casi inevitablemente los retornos esperados surgen de un modelo (o modelos) que pronostiquen los mismos.<sup>9</sup>

El objetivo buscado es generar la frontera eficiente del universo de activos dado, considerando las restricciones regulatorias a las que se enfrentan los fondos de pensiones. Para tal análisis se necesita especificar el horizonte de inversión, la unidad de denominación de los activos, el conjunto de activos transables, las restricciones de inversión en estos activos, y dos características de la distribución conjunta de los retornos de los activos: el retorno esperado, y la matriz de varianza-covarianza de los retornos. Para tal fin es necesario simplificar el problema real.

### **3.1 Horizonte de inversión**

Para el análisis, se supone que no se puede rebalancear el portafolio antes de un horizonte de inversión dado, por simplicidad y consistencia. En este estudio se usa un horizonte de 1 año. Este horizonte es suficientemente largo para capturar parcialmente el objetivo de inversión de largo plazo de los fondos de pensiones, y suficientemente corto para permitir inversión con rebalanceo periódico (cada año) y para minimizar la incertidumbre inherente a la estimación de valores esperados a plazos mayores.

En la práctica, los fondos de pensiones deben enfrentar un objetivo de inversión de largo plazo puesto que sus portafolios deben ser administrados por varias décadas (sin retiros de capital de las cuentas de ahorro pensional). Pero las AFP pueden rebalancear sus portafolios constantemente y sus inversiones están influenciadas por el estado actual y el sentimiento coyuntural de los mercados financieros.<sup>10</sup> El horizonte planteado para el análisis no se ve afectado por este punto: el manejo de portafolios de las AFP debe partir de un manejo pasivo, tal como se plantea con el horizonte de un año, posiblemente mediante la determinación de un benchmark; el manejo activo, tal como puede evidenciarse en la práctica, debe definirse como desviaciones de corto o mediano plazo alrededor del manejo pasivo. El estudio de eficiencia es efectivamente un análisis sobre el manejo pasivo, y éste es el que se tiene en mente al definir el horizonte de inversión.

### **3.2 Numerario**

Un punto de gran relevancia es la unidad en que se miden los retornos. Para esto es crucial entender cómo se define el “pasivo pensional” de los fondos de pensiones bajo un régimen de ahorro individual. Se supone que bajo condiciones normales el futuro

---

<sup>9</sup> El desarrollo formal de esta teoría está ampliamente expuesto en la literatura económica. Específicamente referimos al lector a C. Huang y R. Litzenberger en su libro “Foundations for Financial Economics”.

<sup>10</sup> Como caso contrario, los fondos de pensiones chilenos han tenido acceso en los últimos años a proyectos de inversión de largo plazo: inversión en infraestructura, inversión en vivienda, inversión en proyectos de gran envergadura, etc.

pensionado residirá en Colombia y por lo tanto tendrá que hacer uso de la moneda legal colombiana para satisfacer sus necesidades de consumo futuro. Así, resulta razonable suponer que dicho “pasivo pensional” debe estar ligado a las preferencias de consumo (futuro) del afiliado en el momento en que decida pensionarse. Se entiende que el futuro pensionado desea, como mínimo, mantener su poder adquisitivo constante de tal forma que en el futuro pueda comprar una canasta de bienes y servicios similar a la que podría comprar hoy con el saldo de recursos en su cuenta de ahorro individual. En este caso, los retornos deben ser medidos en pesos reales, por lo cual se usa como numerario base la Unidad de Valor Real, UVR.<sup>11</sup>

La definición de un numerario es relevante para el estudio de media-varianza pues éste tiene un impacto importante en la volatilidad de los activos (la matriz de varianza-covarianza depende de la unidad en que se miden los retornos); específicamente, los retornos de los activos denominados en moneda extranjera presentan una alta volatilidad al ser convertidos a pesos, debido al movimiento de la tasa de cambio peso/dólar.

### 3.3 Universo de activos y límites de inversión

Para el análisis se usan las clases de activos que se presentan a continuación como representantes de los activos a los que tienen acceso los fondos. En el Apéndice A se encuentra la lista específica de activos usados en el estudio y las fuentes de las series de tiempo de precios usadas. Se respetan los máximos niveles de inversión en un activo dados por el régimen de inversión, los cuales se presentan frente a los activos respectivos:

- Deuda Interna Pública Colombiana: 60% (el 50% establecido en la regulación se incrementa en 10% al incluir los títulos de FOGAFIN y FOGACOO, los cual se hace dada la falta de una serie confiable de precios de estos)
- Deuda Interna Privada Colombiana: 60% (30% del sector real y 30% del sector financiero)
- Depósitos a la vista en pesos: 2%
- Fondos Comunes Ordinarios<sup>12</sup>: 5%
- Acciones Locales Colombianas: 30%
- Deuda Externa Pública Colombiana: 50%
- Deuda Interna Pública de otras naciones (con calificación de riesgo de al menos BBB-): 20%
- Deuda Externa Pública de otras naciones (con calificación de riesgo de al menos BBB-): 20%
- Deuda Corporativa Externa (con calificación de riesgo de al menos BBB-): 20%
- Acciones externas (representadas por índices accionarios): 20%
- *Forwards* Peso/Dólar

---

<sup>11</sup> El rendimiento en moneda extranjera también puede ser relevante para las preferencias del futuro pensionado ya que es factible que sus necesidades de consumo futuro contengan tanto bienes y servicios transables como no transables. Sin embargo la preservación del poder adquisitivo por medio de la UVR captura la posibilidad de consumir bienes transables puesto que la variación del peso con respecto al dólar eventualmente se ve reflejada en la tasa de inflación.

<sup>12</sup> Estos instrumentos se pueden comportar más como instrumentos a la vista que como acciones, por lo que se consideran como un rubro aparte.



Adicionalmente se respetan los límites de inversión en sumas de activos como se presenta a continuación:

- Deuda Interna Pública Colombiana y Deuda Externa Pública Colombiana: 60% (de nuevo, aquí se incluyen los títulos FOGAFIN y FOGACOOB)
- Suma de activos emitidos por agentes externos: 20%
- Acciones Locales Colombianas y Fondos Comunes Ordinarios: 30%
- Suma de activos denominados en moneda externa sin cobertura de exposición cambiaria<sup>13</sup>: 20%

Finalmente, se imitan los límites inferiores de inversión establecidos en la regulación:

- Inversión en cada activo debe ser mayor o igual a cero (con esto se captura el impedimento de tomar posiciones cortas en algún activo).
- Suma de activos denominados en moneda extranjera no cubiertos debe ser mayor o igual a cero (con esto se captura el impedimento de operar derivados de moneda extranjera para fines distintos a coberturas). Es decir, la compra de pesos mediante *forwards* debe estar entre  $\max(0, X-20\%)$  y  $X$ , donde  $X$  es el porcentaje del portafolio en moneda externa.

### 3.4 Volatilidad y Covarianzas

El comovimiento futuro de los retornos de los activos utilizados es basado en su comovimiento pasado. Es decir, se usa la matriz de varianza-covarianza histórica. Esta metodología es relativamente simple, pero poderosa y extensamente usada en la práctica. Se opta por la estimación simple dado que otros métodos de mayor precisión (por ejemplo, estimaciones econométricas con modelos GARCH) no generarían un valor agregado significativo en el estudio presente.

Inicialmente se calculan los retornos en pesos a partir de los retornos en la moneda original, como se muestra a continuación; luego se traducen en retornos en UVR, que es el numerario escogido, como se muestra al final de la sección.

Los retornos diarios en pesos colombianos de los activos e índices denominados en moneda externa se calculan utilizando la tasa de cambio diaria promedio de la moneda contra el peso. De esta forma, si en el día  $t$  el retorno diario en moneda externa del activo es  $r_t$  y la variación diaria de la tasa de cambio es  $e_t$ , entonces el retorno diario en pesos está dado por la expresión  $(1+r_t)(1+e_t)-1$ . El cálculo de  $e_t$  se obtiene con el retorno diario del dólar contra la moneda disponible en Bloomberg (denominado  $e_t^*$ ), y con el retorno diario del dólar contra el peso (denominado  $e_t^{**}$ ) usando el promedio diario transado en el

---

<sup>13</sup> Se entiende que un activo denominados en moneda externa tiene su exposición cambiaria cubierta si existe un contrato de venta futura de la moneda del activo por pesos colombianos por una cantidad igual al valor de mercado del monto del activo.

sistema SET-FX. A partir de esto se escribe el retorno diario en pesos del activo como  $\frac{(1+r_t)(1+e_t^{**})}{(1+e_t^*)} - 1$ .

Adicionalmente, para cada uno los activos denominados en moneda extranjera se construye una segunda serie de retornos diarios en pesos que representa el activo cubierto (definido como la pareja activo y forward de venta de dólares por pesos). Para generar las series cubiertas de activos denominados en moneda extranjera distinta al dólar, primero se calculan los retornos diarios en dólares usando las tasas de cambio correspondientes disponibles en Bloomberg.<sup>14</sup> Dado que el contrato de venta futura de dólares de mayor liquidez en el mercado es el de 1 mes, se utiliza la serie de tasas *forward* peso-contradólar disponible en Bloomberg. Esta metodología supone que una vez el activo en moneda extranjera es comprado, inmediatamente se hace cubrimiento con un contrato *forward* a 1 mes, el cual se renueva sucesivamente cada mes. La variación diaria de la tasa de cambio implícita por el contrato *forward* se obtiene de la siguiente manera: si al comienzo del mes  $j$  la tasa *spot* es  $S_j$ , la tasa *forward* a 1 mes es  $F_j$ , y el número de días hábiles durante ese mes es  $n_j$ , entonces la tasa de variación diaria de la tasa de cambio durante el mes  $j$  está dada por la siguiente expresión:

$$\delta_j = \left( \frac{F_j}{S_j} \right)^{\frac{1}{n_j}} - 1.$$

Por consiguiente, esta devaluación diaria es constante durante el mes y sólo cambia al final de cada mes de cubrimiento. Luego la tasa de retorno diario en pesos del activo cubierto está dada por la expresión  $(1+r_i)(1+\delta_i)-1$ , donde el retorno diario en dólares está dado por  $r_i$ , para todo día  $i$  durante el mes  $j$ .

Hay otras alternativas para capturar el efecto de cobertura cambiaria en lugar de crear series cubiertas para cada activo. Se puede usar una serie de tiempo adicional de *forwards*, o usar múltiples series de monedas extranjeras. Sin embargo, estos dos métodos pueden tener complicaciones adicionales, a saber:

- Los contratos *forward* no son activos en el sentido tradicional al no requerir inversión inicial. Esta posibilidad de apalancamiento se enfrenta al problema de asignación de recursos a cada activo disponible en el análisis de media-varianza, y dificulta la interpretación de asignación de recursos a los *forward*.<sup>15</sup>
- Al no hacer rebalanceo diario es natural usar activos en monedas varias y no las monedas como activos.

<sup>14</sup> El uso de tasas de cambio diarias para convertir los retornos de activos denominados en moneda extranjera al dólar, antes de aplicar el cubrimiento peso-dólar con *forwards*, puede parecer inconsistente con el objetivo de cubrimiento pues se le agrega volatilidad cambiaria a estos activos; sin embargo, el acceso que los fondos colombianos tienen a esos contratos, distintos a los de peso-dólar, puede ser muy limitado (especialmente porque las monedas extranjeras utilizadas en las series corresponden a las de países emergentes). De esta forma se capturan parcialmente esas dificultades que enfrentan los fondos de pensiones. Adicionalmente, para algunas de estas monedas no hay disponibilidad de series históricas de tasas *forward* a un mes con más de 2 años de antigüedad.

<sup>15</sup> No es claro cómo interpretar una asignación del - por ejemplo - 20% del portafolio a contratos derivados, dado que estos no requieren inversión inicial.

- Puesto que el valor inicial de un *forward* es cero, el retorno diario de esta serie puede presentar problemas de definición.<sup>16</sup>

Teniendo en cuenta esto puntos, se ve que el enfoque propuesto logra capturar los efectos de cobertura de los activos denominados en moneda externa sin perder generalidad.

Como se explicó anteriormente, el análisis de frontera eficiente se hace en términos reales, para lo cual se utiliza la serie de Unidades de Valor Real (UVR). La metodología de cálculo de la UVR hace que su nivel sólo refleje el verdadero nivel de inflación mensualmente y no diariamente. Por esto se construye una nueva base de datos con retornos mensuales para cada uno de los activos denominados en UVR. De esta forma el efecto inflación y su volatilidad se capturan totalmente en términos mensuales.

Para ser consistentes con el horizonte de inversión propuesto, se debe calcular la matriz de varianza-covarianza anualizada a partir de la matriz de varianza-covarianza generada por los retornos reales mensuales. Para esta transformación se supone que los retornos conjuntos en distintos meses son independientes e idénticamente distribuidos. Al denotar por  $R_i$ ,  $\rho_i$  y  $\mu_i$  los retornos anualizado, mensual y esperado mensual para el activo  $i$ , respectivamente, entonces la covarianza anualizada del activo  $i$  con el activo  $j$  queda dada por la siguiente expresión (ver Apéndice A):

$$Cov(R_i, R_j) = [1 + \mu_i + \mu_j + Cov(\rho_i, \rho_j) + \mu_i \mu_j]^{12} - [(1 + \mu_i)(1 + \mu_j)]^{12}$$

### 3.5 Retornos Esperados

Es tentador por su naturaleza simple recurrir a la historia para estimar el retorno esperado de los activos, así como se hace con los momentos de segundo orden (la matriz de Varianza-Covarianza). Sin embargo, es más atrevido suponer que en el futuro los retornos se comportarán como en el pasado. Esta práctica es comúnmente utilizada cuando existe un período largo de datos (como en el caso de las acciones en los Estados Unidos); sin embargo, aún en ese caso es difícil argüir a favor de este método desde un punto de vista fundamental (hoy vivimos en un mundo muy distinto al que teníamos hace 50 años). Para subsanar este problema, se establece un método de proyección a futuro (*forward-looking*) que no depende directamente de la serie de tiempo usada.

El retorno esperado depende de la probabilidad subyacente usada en el cálculo de la esperanza. Sin embargo, distintos agentes pueden diferir en la distribución de los retornos. La intención es representar las expectativas del mercado como agente macro en este estudio, pero se enfatiza la necesidad de un elemento subjetivo en el análisis. Por medio de los modelos presentados se intenta minimizar la presencia de éste.

### Títulos de renta fija

Para el caso de títulos de deuda de un mismo emisor se definen las siguientes variables:

- $h$ : Horizonte de inversión (en el estudio este valor es  $h=1$  año).

---

<sup>16</sup> Cómo calcular la variación porcentual del valor de un activo cuando su valor inicial es cero?

- $r_T$ : Retorno del activo con duración  $T$  en su respectiva moneda en  $h$  años (en este estudio, es el retorno anual).
- $q$ : Retorno de un bono cero cupón del mismo emisor y en la misma moneda con vencimiento  $h$  (es decir, a 1 año; nótese que  $q=r_h=r_1$ ).
- $\rho$ : Tasa logarítmica de mercado del mismo bono cero cupón con vencimiento  $h$ .
- $\lambda$ : Probabilidad de cesación de pagos (*default*) por parte del emisor en la moneda de emisión a un horizonte  $h$ .
- $C$ : Tasa de recuperación del principal en caso de *default*. En general,  $C$  es una variable aleatoria que depende del estado del mundo en el momento de incumplimiento. Por simplicidad (y siguiendo el enfoque estándar) se trabaja con  $C$  constante para cada una de las calificaciones de riesgo crediticio.
- $f(h,T)$ : Tasa cero cupón logarítmica *forward* observada hoy, para el plazo comprendido entre el tiempo  $h$  y el tiempo  $T$ .
- $E$ : Operador de esperanza del mercado.

El retorno del bono cero cupón de 1 año cumple:

$$q = \begin{cases} e^\rho - 1, & \text{en caso de } default \\ Ce^\rho - 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$E[q] = e^\rho (1 - \lambda + \lambda C) - 1$$

En general, para el activo con vencimiento  $T$  se tiene (ver Apéndice A):

$$E[r_T] \cong E[q] + e^\rho (T-1)(1-\lambda) \underbrace{(f(1,T) - E[\rho_T(1) | ND])}_{v(0,1) \equiv v},$$

donde  $E[\rho_T(1) | ND]$  es el valor esperado de la tasa logarítmica del bono con vencimiento  $T$  en 1 año dado que no hubo *default* y  $v$  es la prima de riesgo que exige el mercado para invertir en el activo de más largo plazo, que puede incluir un elemento de liquidez, uno de término, y uno crediticio.<sup>17</sup> El término  $(T-1)$  captura parcialmente el elemento de término. Se debe notar que este cálculo de retorno esperado se hace en moneda local.

### Prima de riesgo ( $v$ )

La escasa literatura en este tema y el frágil poder de conclusión de la bibliografía existente dificulta la determinación del término  $v$ . Sin embargo, la expresión resultante para  $E[r_T]$  - que describe el retorno esperado como una "tasa libre de riesgo" más una prima de riesgo - ayuda a eliminar parte de la incertidumbre idiosincrática representada por el emisor. El problema puede simplificarse arguyendo que la prima de liquidez puede anularse, dado que los bonos de largo plazo son modelados con precios de índices, y los cero cupón de corto plazo con bonos representativos similares a los usados en los índices.<sup>18</sup> Más aún, Fama y Bliss (1987) concluyen que en el mercado de Estados Unidos,

<sup>17</sup> Para ser específicos, este no es un riesgo de incumplimiento, dado que los dos bonos son del mismo emisor y se tendrán por el mismo período. Es el riesgo de un cambio en la calidad crediticia del emisor en un tiempo  $h$ , lo cual afectaría al bono de largo plazo, pero no al de corto plazo.

<sup>18</sup> Como referencia, Strebulaev (2002) rechaza la existencia de una prima de liquidez en el mercado de bonos del gobierno de Estados Unidos. En contraste, Longstaff (2002) concluye que tal prima sí existe,

el retorno esperado de bonos de gobierno a un horizonte fijo no depende del término de los bonos.

Con base en estos estudios, se asigna un valor de 5 puntos básicos a  $v$  para títulos de deuda con calificación crediticia de AAA. Para capturar el término crediticio, la prima incrementa dependiendo de la respectiva calificación crediticia del emisor. En la Tabla 2 se encuentran los valores asignados a los distintos niveles de riesgo crediticio. Vale la pena anticipar que posteriormente estos valores del caso base se varían controladamente con el fin de analizar la robustez de los resultados (ver siguiente capítulo).

#### Probabilidad de *default* ( $\lambda$ )

El modelo considera la probabilidad de *default* de los títulos de deuda en un horizonte de un año. Esta probabilidad se obtiene con la matriz de migración calculada por Moody's, la cual contiene probabilidades promedio anuales desde 1970 hasta 2004 (ver Tabla 2).

#### Tasa de recuperación del principal ( $C$ )

La tasa de recuperación se obtiene de un modelo de Moody's de regresión de la recuperación de principal contra la tasa promedio anual de *default*. Este modelo sólo está disponible para datos de 1983 a 2004. La diferencia de esta tasa para las distintas calificaciones de riesgo crediticio resulta intuitiva: dado que un emisor suspende el pago de su deuda durante el transcurso del siguiente año, a mayor calificación, mayor será la tasa de recuperación de principal en 12 meses (ver Tabla 2).

**Tabla 2. Prima de riesgo, probabilidad de *default* y tasa de recuperación según calificación crediticia**

Calificación	Prima de riesgo	P( <i>default</i> )	Tasa recuperación
Aaa	5 pb	0,00%	0,5200
Aa	10 pb	0,00%	0,5200
A	15 pb	0,02%	0,5186
Baa	20 pb	0,16%	0,5090
Ba	25 pb	1,16%	0,4400
B	-	6,03%	-
Caa	-	23,12%	-

Fuente: Moody's Default and Recovery Rates, 1920-2004 para Probabilidad de *default* y para tasa de recuperación (regresión según P(*default*)).

Prima de riesgo se mide en puntos básicos (no definida por Moody's).

#### Tiempo al vencimiento ( $T$ )

Para el término  $T$  se usa la duración de los índices usados.

#### **Títulos de renta variable**

Dada la extensa bibliografía de primas de riesgo en el caso accionario, para estos activos se usa un simple modelo de mercado:

$$E[r] = R + \psi$$

siendo del orden de 10 puntos básicos (aproximadamente constante en el término), al comparar STRIPs con bonos REFCORP, los cuales sólo difieren en su liquidez.

En donde  $R$  es una tasa de referencia a 1 año, y  $\psi$  es una prima de riesgo accionaria. En el presente análisis se usa el estudio sobre primas de riesgo accionarias realizado por el banco de inversión inglés HSBC. La Tabla 3 muestra sus resultados.

**Tabla 3. Primas de riesgo accionarias y tasas de referencia a 1 año**

	IGBC	US	EUR	ASIA
<b>Prima</b>	7.5%	3.5%	3.8%	5.1%
<b>Tasa Referencia</b>	TES	UST	UST	UST

Fuente: HSBC.

Nótese que las primas para US, EUR y ASIA son en dólares.

## Datos estáticos

Para el cálculo de retornos esperados se toman datos de mercado prevalecientes al 25 de mayo de 2005. Para el caso de los títulos de renta fija, el retorno esperado de cada índice (término  $E[r_T]$ ) requiere de las tasas de mercado de los instrumentos con duración de 1 año (término  $\rho$ ). Para el caso de títulos de renta variable tan sólo se utilizan las tasas de TES a 1 año (para acciones locales) y de Bonos del Tesoro Americano a 1 año (para acciones externas). El Apéndice B describe más detalladamente cada uno de los activos y tasas utilizados en esta sección.

## Corrección de unidad de medición

Los retornos esperados descritos se calculan inicialmente en las monedas de origen. Según la determinación del numerario, estos se deben cambiar a retornos esperados en pesos reales, lo cual se logra en dos pasos. Primero se calcula la apreciación esperada del tipo de cambio (moneda de origen contra peso) mediante dos métodos. El primero supone que la paridad descubierta de tasas de interés se cumple; este método simple es el caso base. El otro método toma los pronósticos de tasa de cambio a un año publicados por JPMorgan el 25 de mayo de 2005 en el documento “Exchange Rate Outlook”.<sup>19</sup> Es importante mencionar por anticipado que los resultados centrales mostrados en el siguiente capítulo no se ven afectados al cambiar del primer método al segundo. Segundo, se especifica la inflación esperada en Colombia usando la Encuesta de Expectativas de Abril de 2005 del Banco de la República.<sup>20</sup>

Con estos elementos, el retorno real esperado en pesos,  $E[R]$ , está dado aproximadamente (en primer orden) por la expresión  $E[R] \approx E[r] + E[e] - E[\pi]$ <sup>21</sup>, donde  $r$  es el retorno nominal en moneda de origen del activo,  $e$  es la apreciación del tipo de cambio, y  $\pi$  es la inflación colombiana (dada por el “retorno” de la UVR).

<sup>19</sup> Estos datos se comparan con los pronósticos publicados por Lehman Brothers y Merrill Lynch y se evidencia la dispersión entre distintas instituciones – posiblemente causado por supuestos iniciales muy disímiles. Esto refuerza la idea de que no hay uniformidad en el cálculo de la prima de riesgo de tasa de cambio, y justifica parcialmente el uso de la devaluación implícita de los *forward* como caso base.

<sup>20</sup> La expectativa de inflación en 12 meses usada es de 5.08%.

<sup>21</sup> El retorno real,  $1+R$ , se define como  $(1+r)(1+e)/(1+\pi) \approx 1+r+e-\pi$ . Por lo tanto  $E[R] \approx E[r] + E[e] - E[\pi]$ .

### 3.6 Resumen de simplificaciones y debilidades del modelo

El modelo presentado no captura algunas características propias del mercado de capitales, tales como costos de transacción y liquidez (*bid-offer spreads*), anomalías del mercado que aumentan o reducen el valor de los activos utilizados como referencia<sup>22</sup>, profundidad de los mercados, o costos de entrada a otros mercados.<sup>23</sup>

De igual forma, es posible que el modelo haga algunos supuestos que no sean teóricamente robustos, tales como el supuesto de cumplimiento de la paridad descubierta de tasas de interés (es decir, suponer que la prima de riesgo de tasa de cambio sobre la tasa *forward* sea cero), la magnitud de la prima de riesgo  $v$  para activos de renta fija definida en la descripción del modelo, la confiabilidad de las tasas de *default* y de recuperación del principal, o el tamaño de las muestras.<sup>24</sup>

Cambios en los parámetros del modelo tienen un impacto sobre la distribución planteada para los retornos, y en particular sobre los retornos esperados. Así, se puede alterar la medida de eficiencia de los fondos de pensiones al suponer parámetros distintos. El interés del estudio es obtener conclusiones que sean robustas ante dichos cambios. Con tal fin, se hacen pruebas de robustez al modelo para obtener resultados concluyentes. La sección de resultados elabora este punto.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Entorno actual (caso base)

La Figura 2 muestra dos curvas: la exterior es la frontera eficiente generada al ignorar los límites de inversión para los portafolios admisibles, y la interior es la frontera eficiente dada la regulación vigente. Los puntos que aparecen bajo la frontera representan la ubicación actual de los 6 fondos de pensiones privados y del total del sistema, dados los supuestos de nuestro estudio. Como se puede apreciar, los fondos de pensiones están (en promedio) aproximadamente 1 punto porcentual por debajo del portafolio eficiente con igual nivel de riesgo. Esta diferencia representa \$280 mil millones (unos US\$130 millones) en utilidades esperadas que las AFP dejan de percibir por la ineficiente asignación de recursos. Por otro lado, la distancia vertical entre las dos fronteras es aproximadamente 1%. Es decir, los límites de inversión impuestos por la Superintendencia Bancaria causan pérdidas de \$280 mil millones (unos US\$130 millones) en utilidades esperadas potenciales. Se deben enfatizar dos puntos: primero,

---

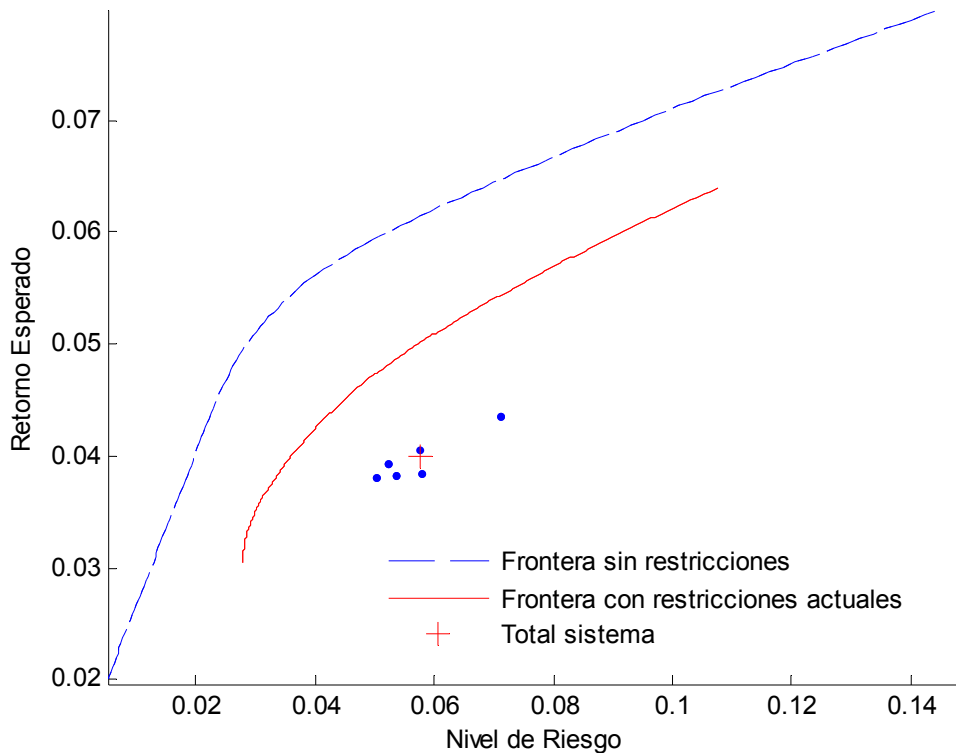
<sup>22</sup> Por ejemplo, los AFORES (Administradores de Fondos para Retiro) mejicanos, que han sido extremadamente activos en bonos soberanos mejicanos y títulos de deuda pública local a corto plazo, han sido unos de los principales responsables de que los títulos mejicanos denominados en dólares se operen inclusive a tasas sub-LIBOR, lo cual contradice el riesgo que implica un emisor con la calificación crediticia de Méjico. Situaciones similares se presentan en el mercado de deuda corporativo colombiano, causadas por la falta de oferta.

<sup>23</sup> Estos costos no sólo incluyen comisiones, tarifas o impuestos propios de otros mercados, sino también los costos de investigación de inversiones de las AFP para adquirir conocimiento y hacer seguimiento de nuevos mercados internacionales.

<sup>24</sup> No se usan series de tiempo más largas pues no existen o no están disponibles.

estas cantidades son dadas por el caso base y pueden cambiarse al alterar los supuestos del modelo; segundo, las cantidades plasmadas representan costos en términos de retornos proyectados a futuro, y no ofrecen información con respecto a los rendimientos pasados de los fondos.

**Figura 2. Fronteras Eficientes con y sin restricciones. Retornos en UVR. Mayo de 2005.**



En la figura puede sospecharse la existencia de un efecto manada, evidenciada por la cercanía en el plano de los puntos representantes de los portafolios de distintas AFP. Sin embargo, la determinación matemática de tal efecto no es un objetivo del presente análisis, y se deja para estudios posteriores.

La Tabla 4 muestra que todos los portafolios eficientes tienen 20% de exposición a activos emitidos por entidades del exterior (ésta es la máxima proporción permitida), comparado con un 11.3% que registraban los fondos de pensiones a febrero de 2005. Adicionalmente, en las Tabla 4 y Tabla 5 se observa que los portafolios eficientes con nivel de riesgo similar al de los fondos de pensiones en la actualidad tienen exposición máxima permitida (20%) a moneda extranjera, comparado con un 8.2% de los fondos de pensiones. Para niveles bajos de riesgo la porción del portafolio eficiente que está expuesta a moneda externa tiende a ser menor.

En cuanto a la relación riesgo-retorno, en la Tabla 5 se aprecia que la razón de Sharpe para el portafolio eficiente con nivel de riesgo similar al del agregado de los fondos de pensiones es del orden de 64%, más de 14 puntos porcentuales superior al portafolio más eficiente entre los fondos privados. Nótese también que el fondo cuyo retorno esperado es



máximo entre los fondos (y a su vez el que toma mayor riesgo) no es el más eficiente según usando la medida de razón de Sharpe.

La Tabla 6 describe las asignaciones óptimas (en distintas clases de activos) de los portafolios eficientes, ordenados por nivel de riesgo. La optimización asigna un alto porcentaje a activos de deuda de gobiernos externos denominada en moneda local. Es decir, el universo de activos usado muestra oportunidades de inversión y diversificación en mercados externos que no son aprovechadas por los fondos de pensiones. La explicación de este comportamiento es un análisis que se deja para un siguiente estudio. Por el momento se listan dos conjeturas factibles: primera, las diferencias entre los incentivos financieros de las AFP y el objetivo de invertir los ahorros de los afiliados eficientemente; segunda, la posible existencia de un efecto manada que afecta el incentivo por redistribuir los riesgos de los portafolios de cada AFP.

**Tabla 4. Proporciones óptimas para activos en moneda externa dada la regulación vigente**

Nivel de Riesgo	Retorno Esperado	Inversiones en m/e	% con cobertura cambiaria	% sin cobertura cambiaria	Emisor Colombia	Otros emisores
2.79%	3.05%	22.62%	16.62%	6.00%	2.62%	20.00%
4.28%	4.39%	29.65%	19.03%	10.62%	9.65%	20.00%
5.78%	5.01%	27.07%	20.00%	7.07%	7.07%	20.00%
6.50%	5.25%	25.31%	20.00%	5.31%	5.31%	20.00%
8.04%	5.70%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%
9.49%	6.09%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%

**Tabla 5. Retorno esperado, riesgo, razón de Sharpe<sup>25</sup> y probabilidad de pérdida real de los fondos de pensiones a Mayo de 2005**

	FONDO A	FONDO B	FONDO C	FONDO D	FONDO E	FONDO F	Total	Portafolio eficiente	Port eficiente sin restricciones
<b>Retorno Esperado</b>	4,06%	3,84%	3,81%	4,35%	3,93%	3,80%	4,00%	5,01%	6,14%
<b>Nivel de Riesgo</b>	5,78%	5,80%	5,35%	7,13%	5,23%	5,05%	5,76%	5,76%	5,76%
<b>Razón de Sharpe</b>	47,80%	43,86%	47,00%	42,79%	50,37%	49,62%	46,93%	64,44%	84,04%
<b>P(Pérdida)</b>	24,14%	25,41%	23,83%	27,11%	22,62%	22,59%	24,38%	19,24%	14,34%

La P(Pérdida) es la probabilidad de que el portafolio genere retornos reales negativos. Se asume que los rendimientos son normalmente distribuidos.

**Tabla 6. Proporciones óptimas por clases de activos**

Nivel de Riesgo	TES	Corporativos Colombia	IGBC	Colombia deuda externa	Gobiernos extranjeros deuda externa	Gobiernos extranjeros deuda local	Corporativos externos	Acciones externas	FCO	TIB	% con cobertura cambiaria
2.79%	57.38%	13.00%	0.00%	2.62%	2.48%	16.62%	0.00%	0.90%	5.00%	2.00%	6.00%
4.28%	15.36%	44.92%	7.57%	9.65%	0.00%	18.31%	0.00%	1.69%	2.51%	0.00%	10.62%
5.78%	3.47%	54.64%	14.81%	7.07%	0.00%	15.13%	0.00%	4.87%	0.00%	0.00%	7.07%
6.50%	0.00%	56.94%	17.76%	5.31%	0.00%	13.45%	0.00%	6.55%	0.00%	0.00%	5.31%
8.04%	0.00%	56.40%	23.60%	0.00%	0.00%	10.28%	0.00%	9.72%	0.00%	0.00%	0.00%
9.49%	0.00%	51.14%	28.86%	0.00%	0.00%	8.10%	0.00%	11.90%	0.00%	0.00%	0.00%

<sup>25</sup> La razón de Sharpe se define como  $\frac{E[r] - r_f}{\sigma}$ ; donde  $E[r]$  es el retorno real esperado del portafolio,  $r_f$  es la tasa interbancaria real y  $\sigma$  es el nivel de riesgo del portafolio.

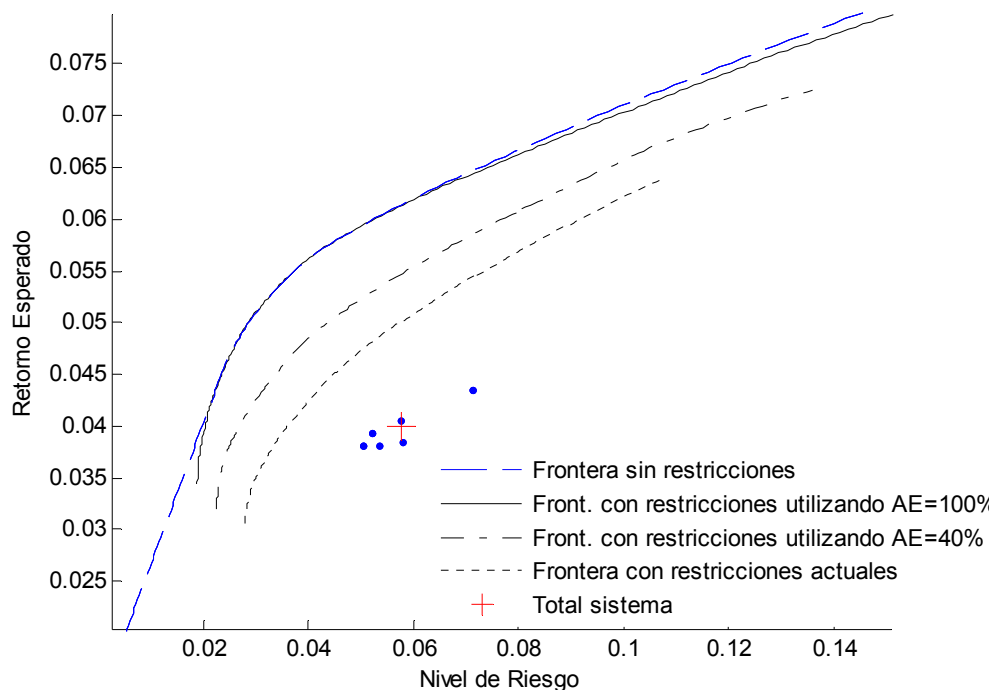
## 4.2 Efectos de cambios en la regulación

Se busca observar el efecto de relajar o eliminar las restricciones de inversión sobre la ubicación de la frontera eficiente en el plano media-varianza. Sólo para dos límites se notan cambios significativos: 20% en activos externos y 20% en exposición cambiaria.

La Figura 3 muestra cuatro curvas. La interna y externa son las mismas curvas del Figura 2. La segunda curva de abajo hacia arriba mantiene todas las restricciones actuales, excepto el límite de inversión en activos emitidos por entidades del exterior que se relaja a 40%. La tercera curva de abajo hacia arriba, la cual está prácticamente superpuesta a la curva sin restricciones, también mantiene todas las restricciones actuales, excepto el límite de inversión en activos externos que se elimina del todo.

Se puede observar que la frontera eficiente se mueve dramáticamente al variar el límite de inversión en activos externos. Además, al eliminar únicamente esta restricción, la nueva frontera es muy similar a la frontera sin restricciones. Esto sugiere que la restricción que limita inversión en activos externos es estricta y prácticamente es la única restricción estricta. La corta distancia que hay entre la frontera sin restricciones y la frontera sin límite de inversión en activos externos es explicada en su totalidad por el límite de exposición cambiaria, lo cual se verifica calculando de nuevo la frontera al liberar este límite de inversión. Esto indica que el límite de exposición cambiaria también restringe la eficiencia, pero en proporciones más reducidas.

**Figura 3. Fronteras eficientes con cambios en el límite de inversión en activos externos (AE). Retornos en UVR . Mayo de 2005.**



Las Tabla 7 y Tabla 8 muestran las exposiciones óptimas para activos en moneda externa (similar a la Tabla 4) con límite de inversión en activos externos igual a 40% y sin límite de inversión en esos activos, respectivamente. Una vez más, todos los portafolios eficientes tienen exposición máxima permitida a activos externos en el primer caso. Variando esta restricción, se verifica que dicho límite es plenamente estricto hasta 70% (es decir, a niveles de 70% todos los portafolios eficientes exhiben exposición de activos externos al máximo). Una vez el límite sobrepasa este nivel, no todos los portafolios óptimos siguen con exposición máxima a activos externos, pero varios de ellos presentan exposiciones elevadas. Esto se puede apreciar cuando el límite se elimina del todo (Tabla Tabla 8). Estas observaciones reflejan por un lado las correlaciones bajas entre activos externos y colombianos, y por otro los beneficios en términos del perfil riesgo-retorno que esta decorrelación puede traer a portafolios que aprovechen la posibilidad de redistribuir el riesgo mediante una apropiada diversificación. Adicionalmente, las Tabla 7 y Tabla 8 exhiben exposiciones cambiarias máximas permitidas para niveles intermedios y altos de riesgo.

**Tabla 7. Proporciones óptimas para activos en moneda externa con límite de inversión para activos externos de 40%**

Nivel de Riesgo	Retorno Esperado	Inversiones en M/E	% con cobertura cambiaria	% sin cobertura cambiaria	Emisor Colombia	Otros emisores
2.26%	3.20%	40.00%	12.67%	27.33%	0.00%	40.00%
3.96%	4.83%	47.06%	20.00%	27.06%	7.06%	40.00%
5.74%	5.46%	41.72%	20.00%	21.72%	1.72%	40.00%
7.19%	5.87%	40.00%	20.00%	20.00%	0.00%	40.00%
9.37%	6.42%	40.00%	20.00%	20.00%	0.00%	40.00%
11.50%	6.89%	40.00%	20.00%	20.00%	0.00%	40.00%

**Tabla 8. Proporciones óptimas para activos en moneda externa sin límite de inversión en activos externos**

Nivel de Riesgo	Retorno Esperado	Inversiones en M/E	% con cobertura cambiaria	% sin cobertura cambiaria	Emisor Colombia	Otros emisores
2.00%	3.92%	79.71%	5.32%	74.39%	0.00%	79.71%
4.03%	5.62%	96.38%	16.97%	79.41%	0.00%	96.38%
5.80%	6.14%	89.99%	20.00%	69.99%	0.00%	89.99%
8.00%	6.63%	83.23%	20.00%	63.23%	0.00%	83.23%
9.65%	6.96%	78.26%	20.00%	58.26%	0.00%	78.26%
11.48%	7.32%	72.90%	20.00%	52.90%	0.00%	72.90%

### 4.3 Robustez del Análisis

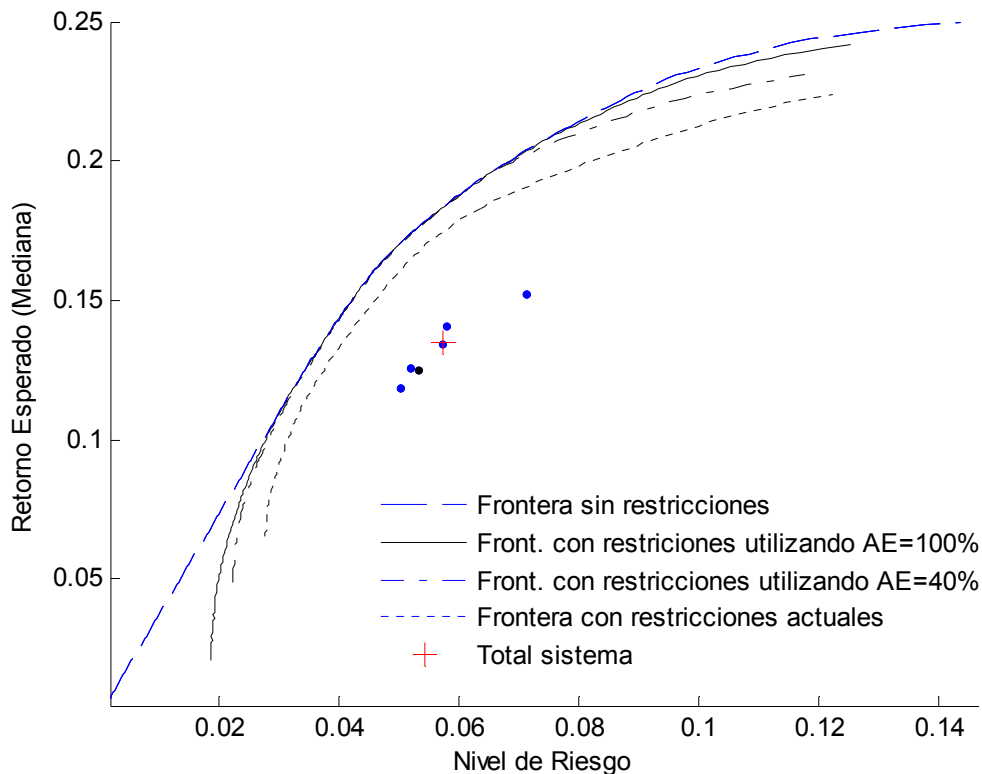
Se repite la generación de resultados produciendo cambios en los supuestos y datos de entrada del modelo: primero, se hace la estimación tradicional de retornos esperados usando medianas históricas de las series de tiempo de los activos; segundo, se varían controladamente los parámetros del modelo de retornos esperados, y las series de tiempo usadas; tercero, se repite el estudio cambiando la fecha para realizar el análisis.

## Retornos Esperados como Promedios Históricos

Al sustituir el modelo de retornos por la mediana de las series de tiempo de los retornos de los activos, los resultados obtenidos son bastante similares a los del escenario base. Con estos datos, el Figura 4 calcula de nuevo las cuatro fronteras eficientes que habían sido mostradas en el Figura 3. Una vez más se observa la tendencia de las fronteras a acercarse a la frontera sin restricciones a medida que la restricción en activos externos se flexibiliza. Sin embargo, las fronteras están ubicadas más. Esto se debe a que los retornos históricos favorecen más a los activos colombianos pues su rendimiento ha sido muy superior al de los activos externos en los últimos 5 años.

Igual que en el caso base, en este escenario todos los portafolios eficientes tienen exposición máxima permitida a activos externos y exposición cambiaria máxima permitida para niveles de riesgo similares al de los fondos de pensiones. Variando el límite de inversión en activos externos, el punto crítico para el cual todos los portafolios se encuentran al máximo permitido en activos externos es 44%, comparado con 70% en el escenario base. Esta diferencia se explica de nuevo por el extraordinario desempeño de los activos colombianos frente a los externos. A pesar de esto, en general los resultados principales (ineficiencia de los portafolios administrados, importancia del límite a activos externos, exposición de portafolios eficientes a activos externos y a moneda externa) son iguales a los expuestos en la sección 3.1. Vale la pena notar (gráficamente) que en este caso los portafolios de las AFP se encuentran más dispersos que en el caso base.

**Figura 4. Fronteras eficientes con cambios en el límite de inversión en activos externos (AE). Retornos en UVR. Retornos esperados corresponden a las medianas históricas. Mayo de 2005.**



## Cambios en los Parámetros del Modelo de Retornos Esperados

En la sección 3.6 se listaron posibles debilidades del modelo de retornos esperados. Con el fin de entender el potencial impacto de éstas, se repite la construcción de las fronteras eficientes efectuando cambios a los parámetros como se describe a continuación:

- *Primas de riesgo v*: para los activos de renta fija, la dependencia de la prima con respecto a la calificación crediticia se aumenta exponencialmente con distintos ritmos de crecimiento (comparado con la dependencia lineal del caso base). Asimismo las primas accionarias se permiten variar hasta 2% alrededor de los niveles dados en el caso base.
- *Probabilidades de default*: para los activos de renta fija, se usan matrices de migración para períodos de tiempo distinto al usado.
- *Tasa de recuperación de principal*: se usan similares a los usados por entidades financieras para valorar instrumentos como *credit default swaps*.
- *Proyecciones cambiarias*: se usan los pronósticos de tasas de cambio a 1 año calculados por algunos bancos de inversión (en contraste con las tasas *forward* usadas en el caso base) para determinar el valor esperado de las tasas de cambio.
- *Series de tiempo*: se varía el tiempo de muestreo.
- *vector de retornos esperados*: se realizan cambios sistemáticos a los retornos esperados encontrados en el caso base. En particular, se reducen los retornos esperados para aquellos activos que tienen rendimientos altos según el modelo.<sup>26</sup>

Se corre el modelo en múltiples oportunidades con estos cambios de manera escalada y se observa que los resultados más significativos del escenario base se preservan:

- i. El límite de inversión para activos externos es el más estricto; de hecho, es el único que tiene un efecto visible sobre la frontera eficiente.
- ii. La exposición a activos externos de todo portafolio eficiente es la máxima permitida.
- iii. Si este límite se incrementa a 40%, el punto ii. sigue cumpliéndose.
- iv. La exposición cambiaría de los portafolios eficientes con niveles altos y medios de riesgo (similares a los de los fondos de pensiones) es la máxima permitida.
- v. Los fondos de pensiones están significativamente debajo de la frontera eficiente.

---

<sup>26</sup> Por ejemplo, en el escenario base se obtiene una alta concentración en títulos de deuda pública de Malasia denominada en Ringgit. Para evitar un sesgo positivo del modelo a este tipo de activos, se reduce su retorno esperado considerablemente. Al hacer esto, la concentración de portafolios eficientes en Malasia se reduce significativamente, pero la participación en activos externos se redistribuye de tal manera que sigue estando al máximo permitido.

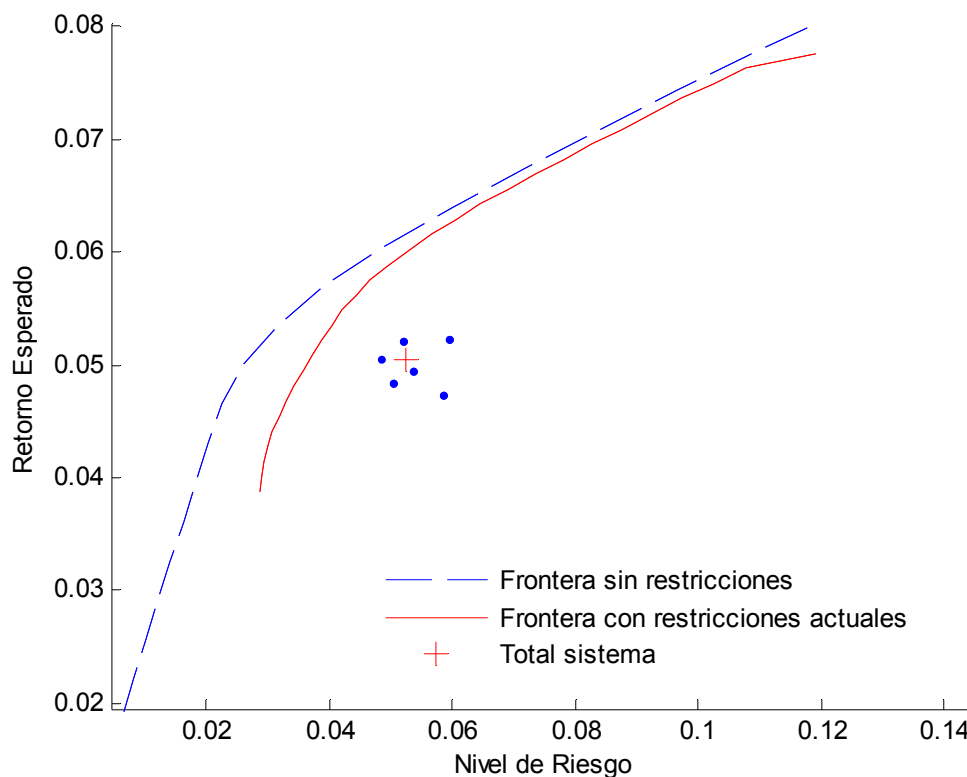
## Fecha del Estudio

Se repite el estudio tomando datos estáticos para Julio 1 de 2004, cortando las series de tiempo en esa fecha para el cálculo de la matriz de varianza-covarianza. En la Figura 5 se observan los resultados, resumidos en los siguientes tres puntos:

(i) La frontera eficiente generada con la regulación actual (la curva interna) está más cerca a la frontera sin restricciones que en el escenario base. Este hecho se explica por las bajas tasas de interés que prevalecían a nivel externo a mitad de 2004, en contraste con las altas tasas que aún prevalecían en los títulos locales. Esa coyuntura favorecía en mayor medida a los activos colombianos sobre los externos que en la situación actual.

(ii) Los niveles de retornos esperados del momento eran mayores que en la actualidad. De nuevo, el hecho de que la optimización favoreciera a los activos colombianos, cuyas tasas eran mayores en el momento, tendía a que las posibilidades de mayores rendimientos fueran mayores para el horizonte de inversión de ese momento.

**Figura 5. Eficientes con y sin restricciones. Retornos en UVR. Julio de 2004.**



El análisis vuelve a arrojar resultados contundentes a favor de la diversificación. La exposición a activos externos se encuentra una vez más al máximo permitido como se exhibe en la Tabla 9. Como puede esperarse, dados los niveles de tasas colombianas a mediados de 2004, al variar el límite de inversión en activos externos se encuentra que el

punto crítico para el cual todos los portafolios se encuentran al máximo es ahora de 25% comparado con 70% del escenario base.

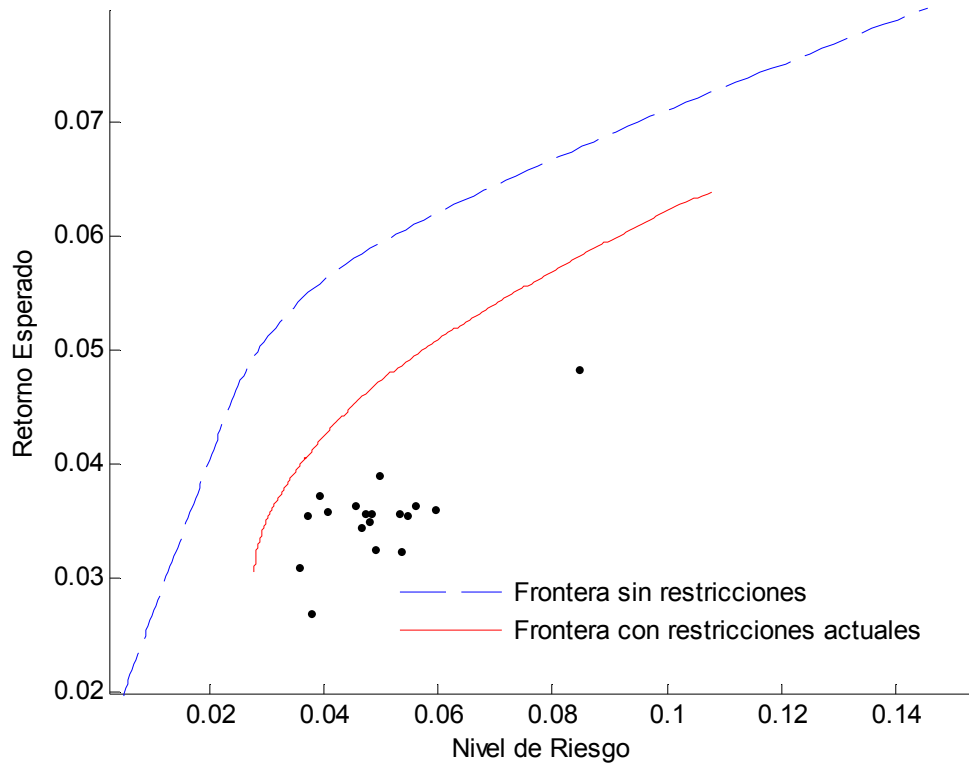
**Tabla 9. Proporciones óptimas para activos en moneda externa dada la regulación de Julio 1 de 2004**

Nivel de Riesgo	Retorno Esperado	Inversiones en M/E	% con cobertura cambiaria	% sin cobertura cambiaria	Emisor Colombia	Otros emisores
2.87%	3.88%	23.61%	18.60%	5.01%	3.61%	20.00%
4.15%	5.44%	25.12%	17.89%	7.23%	5.12%	20.00%
5.78%	6.16%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%
6.50%	6.43%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%
8.28%	6.96%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%
9.92%	7.41%	20.00%	20.00%	0.00%	0.00%	20.00%

#### 4.4 Fondos Voluntarios

Es interesante comparar el comportamiento de los fondos obligatorios con el de los fondos voluntarios de pensiones, los cuales no están sujetos a los límites de inversión impuestos por la Superintendencia Bancaria. En la Figura 6 se exhibe la posición en el plano riesgo-retorno de los 17 fondos de pensiones voluntarios que actualmente funcionan en el país, contra la ubicación de la frontera eficiente. Una vez más se muestran dos fronteras: la externa corresponde a la regulación sin límites de inversión (la cual es relevante para los fondos voluntarios), y la interna corresponde a la regulación de los fondos obligatorios. Se observa que los fondos voluntarios se ubican considerablemente por debajo de la frontera eficiente. Más contundentemente, éstos se encuentran por debajo de la frontera de los fondos obligatorios. Es interesante cuestionar el origen de esta amplia ineficiencia, ya que en el caso de los fondos voluntarios, las decisiones de inversión son en gran medida determinadas directamente por el ahorrador. Es decir, es natural preguntarse cómo se puede explicar el comportamiento aparentemente ineficiente del ahorrador (con la salvedad de que es posible que esto no implique decisiones ineficientes, ya que un inversionista puede tener parte de sus ahorros en estos fondos, y otra parte en inversiones alternas, de tal manera que la inversión agregada sea más eficiente). Esta pregunta puede generalizarse: cómo se distinguen las diferencias entre las preferencias teóricas del ahorrador colombiano (definidas por entes externos tales como el regulador), sus preferencias actuales y su comportamiento actual reflejado en sus inversiones? El estudio actual no pretende responder estas preguntas, pero se dejan planteadas para estudios posteriores. Por último, vale la pena apreciar que de la gráfica se aprecia que los fondos voluntarios parecen estar más dispersos que los obligatorios, lo cual sugiere que las estrategias de inversión entre ellos son disímiles.

**Figura 6. Fronteras eficientes de los fondos de pensiones voluntarias con y sin restricciones. Retornos en UVR . Mayo de 2005.**





## 6. CONCLUSIONES

En este estudio se construye la frontera eficiente del entorno de decisiones de inversión de los fondos de pensiones obligatorios, tomando en cuenta el universo de activos disponible para inversión y los límites de inversión. Es importante notar que muchos elementos importantes del problema real (fricciones del mercado, costos de transacción, costos de entrada a mercados nuevos, otros puntos de la regulación como la rentabilidad mínima) han sido ignorados, a pesar de que algunos de éstos (los relacionados con el entorno del mercado) pueden ser incluidos mediante alteraciones a las distribuciones de los retornos esperados. Sin embargo, la intención es obtener conclusiones generales. Así, el análisis busca características de clases de activos dentro de un marco de eficiencia de portafolios, que se pueden obtener estudiando el comportamiento de los fondos y el impacto de la regulación. Se opta por enfocar el análisis en cambios de los resultados al variar los parámetros y supuestos iniciales, y entender que los ajustes necesarios para acercarse a la realidad transaccional de los fondos están incluidos en estas pruebas de robustez. Se identifican varios puntos interesantes que se listan a continuación. Es de notar que, con excepción de las primeras dos, estas conclusiones se observan aún cambiando los supuestos y distribuciones usados en el estudio:

- Según el escenario base del estudio, los fondos de pensiones están aproximadamente un punto porcentual, en términos de rentabilidad esperada, por debajo de la frontera eficiente. Esta medida no ofrece conclusiones con respecto al proceso optimizador de los fondos, ya que es posible que las AFP enfrenten un problema matemático de optimización distinto al planteado en este estudio.<sup>27</sup> Esta “pérdida” de retorno es la proyección hecha a futuro por el modelo, y no se debe tomar como base de juicio de retornos realizados en el pasado.
- Según el escenario base, los límites de inversión conducen a que los portafolios eficientes actuales dejen de percibir aproximadamente otro punto porcentual en rendimientos esperados.
- El límite de inversión de 20% en activos emitidos por entidades del exterior impuesto por la Superintendencia Bancaria es el más estricto de todos. En aras de la eficiencia, las AFP deberían invertir los ahorros individuales de sus afiliados en activos externos al máximo permitido. Esta conclusión no es sorprendente, pues es de esperar que la correlación de activos externos con activos locales sea menor que aquélla entre activos netamente locales. El poder de la diversificación favorece la inversión en activos decorrelacionados.
- Más aún, la diferencia entre la frontera sin restricciones y aquélla con todas las restricciones excepto la de activos externos es muy pequeña, lo cual indica que la única restricción estricta es la de activos externos.

---

<sup>27</sup> Por ejemplo, la ley prescribe que todos los rendimientos generados deben ir a las cuentas privadas de ahorro, así que las AFP no obtienen beneficio directo por dichos retornos, excepto en capital propio que esté invertido igual que el fondo. Se podría pensar que el principal incentivo para lograr rendimientos más eficientes es la competencia comercial.

- Para niveles medios de riesgo, similares a los asumidos por los fondos de pensiones en la actualidad, la exposición a activos denominados en moneda externa debe dejarse descubierta. Es decir, para incrementar la eficiencia de la mayoría de portafolios, la exposición cambiaria debe ubicarse en el nivel máximo permitido por la regulación.
- En el plano media-varianza, los fondos de pensiones se ubican alrededor de niveles similares de riesgo y retorno esperado. Esta observación sugiere la presencia de un efecto “manada” entre los fondos de pensiones. Es natural intuir que dicho efecto se produce, o es exacerbado, principalmente por la existencia del requerimiento de rentabilidad mínima. Esta conjetura será objeto de análisis en un estudio posterior.
- Los fondos de pensiones obligatorias tienen una excesiva exposición al riesgo crediticio y de mercado colombiano. Nos atrevemos a listar varios factores como candidatos a explicar este fenómeno: los incentivos financieros impuestos a las AFP mediante la estructura de comisiones y el requerimiento y cálculo de la rentabilidad mínima; la natural existencia de un efecto de sesgo doméstico (“*home bias effect*”); un efecto “manada”, producto natural de la competencia en muchas industrias; el requerimiento de reportar rentabilidad absoluta sin ajustes por riesgo; los límites de inversión; el desconocimiento técnico de otros mercados internacionales admisibles; y finalmente, la noción de que los fondos de pensiones privados, dada su función social y su fuerza política, son demasiado grandes e importantes para dejarlos “caer”.<sup>28</sup>
- Los fondos de pensiones voluntarios, que reflejan decisiones de inversión de los ahorradores, son aún más ineficientes, considerando que sus restricciones son menos estrictas. Por otro lado, su ubicación dentro del plano media-varianza es más disperso que el de los fondos obligatorios. Es posible pensar que los fondos voluntarios se agrupan en distintos niveles de riesgo, lo cual asemeja un sistema de multifondos dentro del sistema voluntario.

Este estudio de frontera eficiente tiende a tener ciertas debilidades que son difíciles de subsanar dados algunos de los supuestos que se hacen. Sin embargo, el escenario base y las variaciones hechas permiten confiar en la robustez de las conclusiones expuestas.

Varias preguntas surgen a partir de ellas, que se dejan como temas de futuros estudios:

1. Qué efecto tiene el entorno de los fondos en el comportamiento de las AFP? Por entorno se entiende la regulación, el mercado y la estructura idiosincrática de los fondos

---

<sup>28</sup> Es decir, es posible que los fondos tengan algún tipo de garantía implícita por parte de la nación en cuanto a trato preferencial en caso de que el gobierno decreta una moratoria en el pago de la deuda pública. La presencia de esta fuente de riesgo moral implicaría que los fondos de pensiones están obteniendo retornos muy altos para el riesgo crediticio que están tomando. El riesgo de mercado sigue siendo elevado, pero la falta de medidas de riesgo para los portafolios de inversión le resta importancia a este hecho.

(por ejemplo, los intereses de sus juntas directivas y su relación con los intereses del ahorrador).

2. Cuál es el objetivo de la regulación de los fondos de pensiones obligatorias? Con la regulación actual se cumplen estos objetivos?
3. Cómo afectan la rentabilidad mínima y la estructura de comisiones al comportamiento de los fondos?
4. Cómo difieren las preferencias del ahorrador colombiano con las de las AFP? Es posible explicar estas diferencias con el entorno de los fondos?
5. Cómo se puede alinear los incentivos de las AFP con los objetivos del ahorrador colombiano?

Según este estudio, y con miras a obtener inversiones más eficientes para el ahorro pensional de Colombia, es natural suponer que aumentar el límite de inversiones en activos externos sería una medida adecuada. Sin embargo, en la actualidad los fondos de pensiones no se acercan al límite dado. Por lo tanto es prioritario entender por qué, para poder plantear sugerencias que sean más eficaces. Entre tanto, es inevitable cuestionar la falta de una medida de riesgo de mercado y crediticio para los fondos de pensiones. Este elemento puede ser más efectivo para acotar riesgos financieros y estimular inversiones eficientes que los límites de inversión presentes en la regulación actual.

## REFERENCIAS

- Berstein, S., y R. Chumacero. "Quantifying the Costs of Investment Limits for Chilean Pension Funds". The Pensions Institute. Discussion Paper PI-0403, Diciembre 2003.
- Bliss, R., y E. Fama. "The Information in Long-Maturity Forward Rates". The American Economic Review. Septiembre, 1987.
- Circular externa 013 de la Superintendencia Bancaria. Capítulo IV: Régimen de inversión de los recursos de los fondos de pensiones obligatorios. Marzo, 2004.
- Decreto 1592 de mayo 19 de 2004.
- Dodd, R., y S. Spiegel. "Up From Sin: A Portfolio Approach to Financial Salvation". Financial Policy Forum. Agosto, 2004.
- HSBC Global Research. "Global Equity Risk Premia: A simple, transparent and cost-effective approach" por Kevin Gardiner. 2005.
- Huang, Chi-fu y R. H. Litzenberger. "Foundations for Financial Economics". North-Holland. 1988.
- JPMorgan Global Foreign Exchange Research. "Exchange Rate Outlook" por John Normand y Lei Shen. Mayo, 2005 y Junio, 2004.
- Ley 100 de 1993 y sus respectivas modificaciones. "Sistema de Seguridad Social Integral". Diciembre, 1993.
- Lewis, K. "Puzzles in Internacional Financial Markets". Handbook of Internacional Economics, Volume 3. Capítulo 37. 1995.
- Longstaff, F. "The Flight-to-Liquidity Premium in U.S. Treasury Bond Prices," NBER working paper 9312. 2002.
- Moody's Report. "Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-2004". Enero, 2005.
- Solnik, B., y D. McLeavey. "The Case for International Diversification". International Investments, 5a. ed. Capítulo 9. Pearson Addison Wesley, 2004.
- Strebulaev, I. "Liquidity and Asset Pricing: Evidence from the US Treasury Market". London Business School working paper. 2002.
- Suescún, R. "Regulación de los Fondos Privados de Pensiones". Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Mayo, 2001.
- Tesar, L., e I. Werner. "Home Bias and the Globalization of Securities Markets". NBER Working Paper #4218. 1992.

## APENDICE A. DERIVACIONES ALGEBRAICAS

### A1. Matriz de Varianza-Covarianza anualizada

Se definen las siguientes variables:

$R_i$ : Retorno anual del activo  $i$ .

$\rho_i$ : Retorno mensual del activo  $i$ .

$\rho_{i,k}$ : Retorno mensual del activo  $i$  en el mes  $k$ .

$\mu_i$  y  $\mu_{i,k}$ : Valor esperado de  $\rho_i$  y de  $\rho_{i,k}$ , respectivamente.

Los retornos mensuales se suponen independientes e idénticamente distribuidos. Por definición,  $R_i$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$R_i = \prod_{k=1}^{12} (1 + \rho_{i,k}) - 1.$$

Por lo tanto su valor esperado es:

$$E[R_i] = (1 + \mu_i)^{12} - 1.$$

La covarianza del activo  $i$  con el activo  $j$  se calcula con la expresión

$$Cov(R_i, R_j) = E[R_i R_j] - E[R_i]E[R_j].$$

Sustituyendo términos y elaborando tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Cov(R_i, R_j) &= E \left[ \left( \prod_{k=1}^{12} (1 + \rho_{i,k}) - 1 \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^{12} (1 + \rho_{j,k}) - 1 \right) \right] - [(1 + \mu_i)^{12} - 1] \cdot [(1 + \mu_j)^{12} - 1] \\ &= E \left[ \prod_{k=1}^{12} (1 + \rho_{i,k}) \prod_{k=1}^{12} (1 + \rho_{j,k}) \right] - (1 + \mu_i)^{12} (1 + \mu_j)^{12} \end{aligned}$$

Por la hipótesis de independencia, se tiene:

$$\begin{aligned} Cov(R_i, R_j) &= \prod_{k=1}^{12} E[(1 + \rho_{i,k})(1 + \rho_{j,k})] - (1 + \mu_i)^{12} (1 + \mu_j)^{12} \\ &= (1 + E[\rho_i] + E[\rho_j] + E[\rho_i \rho_j])^{12} - (1 + \mu_i)^{12} (1 + \mu_j)^{12} \end{aligned}$$

Elaborando, se llega a

$$Cov(R_i, R_j) = (1 + \mu_i + \mu_j + Cov(\rho_i, \rho_j) + \mu_i \mu_j)^{12} - (1 + \mu_i)^{12} (1 + \mu_j)^{12}$$

### A2. Retorno esperado para activos de renta fija

Se definen las siguientes variables para un horizonte de inversión de 1 año, suponiendo el emisor de los bonos constante:

$r_T$ : Retorno en 1 año de un activo con duración  $T$ .

$\rho_T(t)$ : Tasa logarítmica de mercado del activo con duración  $T$  en el tiempo  $t$ .

$q$ : Retorno de un bono cero cupón con madurez 1 año ( $q = r_1$ ).

$\rho$ : Tasa logarítmica de mercado del bono cero cupón con duración 1 ( $\rho = \rho_1(0)$ ).

$P_T(t)$ : Precio del activo con duración  $T$  en el tiempo  $t$ .

$C$ : Tasa de recuperación del principal en caso de *default*.

$\lambda$ : Probabilidad de *default* en 1 año.

$f(1, T)$ : Tasa cero cupón logarítmica con vencimiento  $T$ , *forward* a 1 año.

### Caso 1: Bono de 1 año

El precio actual del bono cero cupón con duración 1 está dado por la siguiente expresión:

$$P_1(0) = e^{-\rho}$$

Por lo tanto, el retorno de este bono en 1 año es:

$$1 + r_1 = 1 + q = \begin{cases} \frac{1}{P_1(0)} = e^{\rho}, & \text{si no hay } default \\ \frac{C}{P_1(0)} = Ce^{\rho}, & \text{en caso de } default. \end{cases}$$

Se concluye que:

$$E[q] = e^{\rho} (1 - \lambda + \lambda C) - 1.$$

### Caso 2: Bono con duración $T$

El precio actual del bono con duración  $T$  está dado por la siguiente expresión:

$$P_T(0) = e^{-\rho_T(0)T}$$

El precio de este bono en 1 año es:

$$P_T(1) = e^{-\rho_T(1)(T-1)}$$

Además, la tasa *forward* logarítmica está definida por la expresión:

$$\rho_T(0)T = \rho + f(1, T)(T - 1),$$

que se puede sustituir en la expresión para  $P_T(0)$ . El retorno de este bono en 1 año es:

$$1 + r_T = \begin{cases} \frac{P_T(1)}{P_T(0)} = \exp[\rho + (T - 1)(f(1, T) - \rho_T(1))], & \text{si no hay } default \\ Ce^{\rho}, & \text{en caso de } default, \end{cases}$$

en donde se supone que el retorno en caso de *default* es el mismo para todos los bonos de este emisor. Usando la aproximación

$$\exp[(T - 1)(f(1, T) - \rho_T(1))] \approx 1 + (T - 1)(f(1, T) - \rho_T(1)),$$

se encuentra el valor esperado del retorno de este bono en 1 año:

$$\begin{aligned} E[r_T] &= \lambda Ce^{\rho} + (1 - \lambda)e^{\rho} [1 + (T - 1)(f(1, T) - \rho_T(1))] - 1 \\ &= E[q] + e^{\rho} (T - 1)(1 - \lambda)(f(1, T) - E[\rho_T(1) | ND]), \end{aligned}$$

donde  $E[\rho_T(1) | ND]$  es el valor esperado de la tasa logarítmica del bono con vencimiento  $T$  en 1 año dado que no hubo *default*. Esta es la expresión presentada en la sección 4.

## APENDICE B. SERIES UTILIZADAS

Datos utilizados para calcular retornos esperados en pesos nominales. Todos los datos se obtienen a Mayo 25 de 2005

Tipo de instrumento	Emisor doméstico	Emisor externo
Deuda pública interna	- TES TF de julio de 2006 con cupón (15%) y duración 0.97. - TES UVR: retorno a un año utilizando curva cero cupón de BVC. - TES IPC: retorno a un año utilizando curva cero cupón de BVC. Fuente: BVC	- Bono local con término cercano a un año. El retorno es expresado en dólares utilizando tasas de cambio forward. La duración se ajusta a un año con base en la pendiente de la curva <i>spot</i> de los <i>treasuries</i> . El retorno esperado en pesos se obtiene con la tasa forward peso/dólar a un año. Fuente: Bloomberg
Deuda pública externa	- Bono externo con término cercano a un año. En caso necesario, el retorno es expresado en dólares utilizando tasas de cambio forward. La duración se ajusta a un año con base en la pendiente de la curva <i>spot</i> de los <i>treasuries</i> . El retorno esperado en pesos se obtiene con la tasa forward peso/dólar a un año. Fuente: Bloomberg	
Deuda corporativa	- Promedio títulos corporativos colombianos con vencimiento entre 274 y 548 días. Fuente: BVC	-Tasa a un año de las curvas de rendimientos para grupos de deuda corporativa (USD Composite: AAA, AA, A, BBB, y EUR Composite: AA y BBB). El rendimiento es expresado en pesos utilizando tasas de cambio forward. Fuente: Lehman Brothers
Renta variable	- TES TF a un año más la prima de riesgo accionaria de HSBC (7.5%)	- Tasa bono del tesoro a un año más prima accionaria HSBC (3.5% - 5.1%)
Depósitos a la vista	TIB observada.	
Fondos Comunes Ordinarios	Tasa de retorno observada.	

Los retornos esperados en UVR se calculan utilizando la Encuesta de Expectativas de Inflación de abril 2005 del Banco de la República (5.08%).

Series utilizadas para calcular la matriz de varianza covarianza. Todas las series abarcan el período Julio 2000 a Mayo 2005.

Tipo de instrumento	Mercado doméstico	Mercado externo
Deuda pública interna	- Serie diaria TES TF largo plazo, TES TF corto plazo, TES IPC, TES UVR. Fuente: Porvenir Nota: los índices se construyen creando una canasta de títulos; se usan precios de cierre diarios.	- Índices de deuda pública local para España, EE.UU, Japón, Reino Unido y Alemania. Fuente: Lehman Brothers . Nota: Estos índices están denominados en dólares. - Government Bond Index - EM para México, Polonia, Malasia, Tailandia, República Checa. Fuente: JP Morgan. Nota: Estos índices están denominados en moneda local.
Deuda pública externa	-Índice EMBI Colombia. Fuente: JP Morgan.	- Índice EMBI para Bulgaria, Chile, Hungría, Malasia, Méjico, Polonia, Rusia, Sur Africa y

		Tailandia. Fuente: JP Morgan.
Deuda corporativa	- Índice de deuda corporativa. Fuente: Porvenir Nota: el índice se construye creando una canasta de títulos; se usan precios de cierre diarios usando transacciones observadas.	- Indices de deuda corporativa US Credit Aaa, Aa, A, Baa, Euro Agregate AA, BBB. Fuente: Lehman Brothers.
Renta variable	-IGBC empalmada. Fuente: BVC Nota: la serie se empalma con el índice de la Bolsa de Valores de Bogotá, antes de la fusión	- Índice S&P 500 Índice S&P Europe 350 Índice S&P Asia ex – Japan Fuente: Bloomberg
Fondos Comunes Ordinarios	Se construye un índice considerando la rentabilidad ponderada por monto de los fondos que registran menor volatilidad. Fuente: Superintendencia Bancaria Nota: Cálculos de los autores.	
Depósitos a la vista	- TIB	