Análisis de los Problemas del Subastador y del Participante en las Subastas Combinatorias Estáticas

Natalia Santamaría
n-santam@uniandes.edu.co
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes

15 de febrero de 2005

Resumen

En este documento se propone un modelo de estudio para analizar el problema que enfrenta un participante en las subastas combinatorias estáticas. El análisis se hace de forma explícita para una subasta de dos objetos y se presentan los resultados encontrados. Dichos resultados ilustran aspectos interesantes acerca del comportamiento de los participantes en este caso específico y plantean interrogantes para subastas con un mayor número de objetos.

1. Introducción

Las subastas son mecanismos de mercado que permiten la asignación eficiente de objetos o recursos para los cuales no existe un mercado convencional en el que el precio se encuentre determinado por la competencia entre compradores y vendedores. Generalmente, un solo vendedor se encuentra con n posibles compradores y la competencia entre ellos toma lugar bajo una serie de reglas bien definidas. En el caso de subastas de un objeto, bajo el supuesto de que los participantes son neutrales al riesgo y ciertas características adicionales, Riley y Samuelson [8] demuestran la existencia de un conjunto de subastas en donde cada una genera el mismo ingreso esperado para el subastador. Aunque en [8] sólo se consideran subastas de un objeto, el Teorema de Ingreso Equivalente se mantiene para el caso de subastas de múltiples objetos idénticos, siempre y cuando la demanda de cada participante sea unitaria e independiente de las demandas de sus competidores [9].

Cuando subastas de múltiples objetos no idénticos tienen lugar y la oferta de un participante por un objeto depende de si gana o no otro, sólo algunos subconjuntos del conjunto de objetos tendrán valor real para los participantes. Por ello es deseable permitir ofertas sobre combinaciones de objetos a diferencia de ofertas sobre objetos individuales. Este tipo de subasta se conoce como subasta combinatoria; en esta subasta los participantes expresan sus preferencias reales al poder ofrecer por subconjuntos de objetos, a diferencia de lo que harían si sólo pudieran ofrecer por un objeto a la vez [4].

Las preferencias que los participantes tengan sobre el conjunto de objetos determina las características de sustitución o complementariedad entre ellos. Por ejemplo, para un participante en una subasta de dos guantes de lana el conjunto de los dos guantes puede tener más valor que la suma de lo que vale cada uno de los guantes por separado. En este caso los objetos serían complementarios para ese participante.

En general, los objetos en un conjunto son complementarios si el valor del conjunto es mayor a la suma del valor de cada uno de los objetos y sustitutos en caso contrario. La aproximación que se utiliza en este trabajo para tratar las preferencias de los participantes sobre el conjunto de objetos, cumple con la definición anterior y es diferente a las propuestas en [10] y [7].

Las subastas combinatorias, al permitir ofertas por subconjuntos de objetos, son más "complejas" que las subastas en donde sólo se permiten ofrecer por objetos individuales desde el punto de vista del subastador y del participante. El problema que más interés a generado en este tipo de subasta es el problema de determinar el ganador, el cual es un problema de programación entera *NP-completo* [5], de manera que su complejidad aumenta de acuerdo con la cantidad de objetos a subastar. Por otro lado, el problema al cual se enfrenta un participante en este tipo de subasta no ha sido desarrollado de manera formal en el caso de subastas combinatorias estáticas. En el diseño de la subasta combinatoria dinámica propuesta en [3], no se necesita que un participante decida las ofertas por cada uno de los subconjuntos "a-priori", ya que lo puede hacer a medida que transcurren las rondas y por lo tanto el problema que debe resolver es menos exigente que aquel que debe resolver en una subasta combinatoria estática. En este trabajo se formula de manera explícita el problema que debe resolver un participante en una subasta combinatoria estática para determinar sus ofertas.

Este documento se encuentra estructurado de la siguiente forma: en la segunda sección se presentan los problemas que buscan resolver las subastas combinatorias, en la tercera sección se formula el problema del subastador y del participante en una subasta combinatoria de una sola ronda, en la cuarta sección se desarrolla el caso de una subasta de dos objetos y se presentan los resultados obtenidos; finalmente en la quinta sección se presentan las conclusiones.

2. Los problemas que buscan resolver las subastas combinatorias

En esta sección se describen los problemas principales que aparecen en las subastas de múltiples objetos, cuando entre éstos existen propiedades de complementariedad y sustitución.

2.1. Objetos sustitutos y complementarios

Una de las ventajas de las subastas combinatorias es que permiten a los participantes hacer explícitas las características de sustitución y complementariedad entre los objetos a subastar. De una manera formal, esas preferencias se pueden representar de la siguiente forma. Sea K el conjunto de objetos, α un elemento de K, S y T subconjuntos de K (los cuales no contienen a α), definidos de tal manera que $S \subseteq T$, y, $X(L)$ la valoración por un conjunto L, $L \subseteq K$. Los objetos de K son sustitutos para un participante si para todo $\alpha \in K$ y para todos los subconjuntos S y T se cumple que [10]:

$$X(S \cup \{\alpha\}) - x(S) \geq X(T \cup \{\alpha\}) - x(T) \tag{1}$$

Es decir, los objetos son sustitutos si el valor marginal de obtener un objeto particular α es menor si el conjunto de objetos ya obtenido es "más grande". Análogamente, los objetos son complementos si el valor marginal de obtener un objeto α es mayor si el conjunto de objetos ya obtenidos es "más grande" [10]:

$$X(S \cup \{\alpha\}) - x(S) \leq X(T \cup \{\alpha\}) - x(T) \tag{2}$$

Para un conjunto de objetos K, las ecuaciones (1) y (2) determinan si todos los objetos del conjunto son sustitutos o complementos correspondientemente.

2.2. Los problemas de reducción de demanda y de exposición

Los mecanismos de subasta que no permiten ofrecer por "paquetes" presentan dos problemas principales [4]. Cuando los objetos son sustitutos, el mecanismo de subasta puede crear incentivos estratégicos para que un participante "esconda" su demanda con el objetivo de reducir los precios. Por otro lado, si los objetos son complementos, un participante puede enfrentar el problema de exposición, ya que al intentar "ensamblar" el paquete de objetos está incurriendo en el riesgo de ganarse sólo una parte de éste a un precio total que excede su valoración [4].

2.3. Subastas estáticas y dinámicas

Las subastas estáticas corresponden a las subastas de una sola ronda, en donde los participantes reportan sus ofertas por cada uno de los subconjuntos de objetos y los ganadores son determinados una sola vez. Las subastas dinámicas generalmente se componen de varias rondas de manera que los participantes no están obligados a hacer sus ofertas por todos los subconjuntos de una sola vez, los ganadores en este tipo de subasta y los precios que deben pagar se determinan generalmente en la última ronda. La diferencia principal entre los dos tipos de subasta se encuentra en la información disponible para los participantes en el momento de hacer sus ofertas. En el caso de la subasta dinámica un participante tiene acceso a la historia de las rondas, la cual contiene las ofertas (información) de sus competidores en rondas anteriores [1][3]. En el caso de la subasta estática, un participante no tiene ningún tipo de información de las ofertas de sus competidores antes de que los resultados sean determinados. De acuerdo con [1], un diseño de subasta deber maximizar la información disponible para un participante en el momento de hacer las ofertas; según esto las subastas dinámicas presentarían ventajas comparativas sobre las subastas estáticas.

En [3] se propone un mecanismo de subasta combinatoria ascendente. La dinámica de esta subasta es la siguiente. En cada una de las rondas los participantes hacen sus ofertas por los "paquetes" de su interés. La oferta por un paquete debe ser positiva y mayor a la mejor oferta de la ronda anterior. Después de cada ronda el subastador determina el *conjunto posible de ofertas ganadoras*; este conjunto es escogido de manera que se maximice el ingreso total del subastador. La subasta prosigue de esta forma, creando una secuencia de rondas, hasta que ningún participante haga nuevas ofertas. Cuando no hay nuevas ofertas, la subasta termina en esa ronda y las ofertas ganadoras corresponden a las de la ronda. Las asignaciones resultantes de esta subasta son asignaciones eficientes, es decir replican los resultados de una subasta Vickrey en donde los objetos le son asignados a los participantes que más los valoran. La subasta Vickrey, como se ilustra en [3], tiene varios defectos en su diseño relacionados con el ingreso del subastador, los incentivos de colusión y adicionalmente con el supuesto de que todos los participantes tienen una capacidad ilimitada para ofrecer, es decir ignora la existencia de restricciones de presupuesto.

Sin embargo la subasta Vickrey, dentro del conjunto de subastas estáticas en el caso de múltiples objetos, es la única que asegura asignaciones eficientes [10] porque su regla de pago[2] asegura que la estrategia dominante para todos los participantes sea ofrecer su valoración.

[1] El diseño de la subasta dinámica utilizada en la asignación de licencias de espectro radioléctrico en los Estados Unidos publica la totalidad de las ofertas y no únicamente las ganadoras

[2] Esta regla se ilustra en el desarrollo del problema del subastador

3. El Problema del Subastador y del Participante en una Subasta Combinatoria Estática

En una subasta combinatoria estática los participantes determinan sus ofertas por los diferentes subconjuntos de objetos y las reportan al subastador[3]; una vez han sido reportadas las ofertas el subastador asigna los objetos a los participantes con las máximas ofertas.

El desarrollo del modelo que se propone en este documento se divide en dos partes: la primera parte presenta el problema que debe resolver el subastador para determinar las asignaciones y los pagos correspondientes, y la segunda parte, el problema que debe resolver un participante para determinar sus ofertas. El modelo supone que los participantes son neutrales al riesgo y que las valoraciones de los participantes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

3.1. El problema del subastador

El problema que tiene que resolver un subastador para determinar el ganador en una subasta combinatoria se puede formular de la siguiente manera [5]:

$$\text{máx} \quad \textstyle\sum_{j\in N}\sum_{S\subseteq M} b_j(S)y_j(S) \tag{3}$$

sujeto a

$$\textstyle\sum_{S\ni i}\sum_{j\in N} y_j(S) \leq 1,\ i\in M \tag{4}$$

$$\textstyle\sum_{S\subseteq M} y_j(S) \leq 1,\ j\in N \tag{5}$$

$$y_j(S) \in \{0,1\};\ j\in N;\ S\subseteq N \tag{6}$$

En donde:

N : conjunto de participantes

M : conjunto de objetos a subastar

$b_j(S)$: oferta del participante j por el subconjunto S

$y_j(S)$: vale 1 si el conjunto S es asignado al participante j y 0 en caso contrario

Las restricciones (4) aseguran que los objetos no sean asignados más de una vez y las restricciones (5) que a cada participante le sea asignado máximo un subconjunto. Este conjunto de restricciones permite, sin importar las propiedades de sustitución o complementariedad que existan entre los objetos para los participantes, que al resolver

[3]Los reportes se hacen de forma privada, por ejemplo en un sobre sellado de manera que ningún participante conoce las ofertas de sus competidores en el momento de realizar la suya

el problema (3)– (6) las asignaciones resultantes no presenten el problema de exposición para los participantes.

Las restricciones (5) se pueden eliminar si todas las funciones de oferta $b_j(\cdot)$ son superaditivas [4], en este caso los objetos serían complementos para todos los participantes.

El objetivo de un subastador al hacer las asignaciones en una subasta puede ser maximizar su ingreso o maximizar la eficiencia. Tal y como se encuentra formulado, el problema (3)– (6) maximiza el ingreso del subastador con base en las ofertas reportadas por los participantes utilizando la regla de pago "pague su oferta", de manera que los participantes ganadores pagarían $b_j(\cdot)$. El caso correspondiente a esta regla en subastas de un objeto es la subasta de primer precio. Esta subasta tiene problemas de eficiencia ya que la estrategia para un participante consiste en ofrecer menos que su valoración [8]. De manera alternativa, existe otra regla de pago que hace que la estrategia dominante de un participante sea ofrecer su valoración, la cual corresponde a la utilizada en la subasta Vickrey [9]. Por esta razón el mecanismo produce asignaciones "eficientes", entendiendo como eficiencia que los objetos sean asignados a aquellos participantes con las valoraciones más altas.

3.2. El problema del participante

Las preferencias que el participante i tiene sobre un subconjunto de objetos S, se encuentran representadas en su valoración de la siguiente forma:

$$v_i(S) = \left[\sum_{u \in S} v_i(u)\right] k_i \tag{7}$$

$v_i(S)$: valoración del participante i por el subconjunto (S).

si k_i $\in [0,1]$:los objetos contenidos en S son sustitutos para el participante i.

si k_i $\in (1,\infty)$: los objetos contenidos en S son complementarios para el participante i.

La formulación (7) cumple con la definición de sustitución y complementariedad presentada en los primeros capítulos.

El problema que debe resolver cada participante en una subasta combinatoria bajo la regla "pague su oferta" se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{máx}\, \Pi_i(b_i) = \sum_{S \subseteq M} (v_i(S) - b_i(S)) \cdot Prob_i(S) \tag{8}$$

En donde:

[4]Suponiendo que se tienen dos objetos para subastar a y b, se dice que la función de oferta $b_j(\cdot)$ del participante j es superaditiva si se cumple que $b_j\{a\} + b_j\{b\} \leq b_j\{a,b\}$

$$
\begin{aligned}
\Pi(b_i) &: \text{beneficio esperado del participante } j \text{ al hacer la ofertas } b_i(\cdot) \\
v_i(S) &: \text{valoración del participante } i \text{ por el subconjunto } S \\
b_i(S) &: \text{oferta del participante } i \text{ por el subconjunto } S \\
Prob_i(S) &: \text{probabilidad de que el subconjunto } S \text{ le sea asignado al participante } i
\end{aligned}
$$

Adicionalmente, sea:

$$
\begin{aligned}
O &: \text{un subconjunto de } M \text{ tal que } |O| = 1 \\
S_* &: \text{un subconjunto de } M \text{ tal que } |S_*| \geq 2 \\
\vartheta_{S_*} &: \text{la familia de particiones de } S_* \\
V &: \text{un miembro de la familia de particiones, } V = \{V_1, ...V_w\},\ V \in \vartheta_{S_*}.
\end{aligned}
$$

Para que al participante i le sea asignado el subconjunto S_* se debe cumplir que:

$$
b_i(S_*) \geq \sum_{V_l \in V} max_j b_j(V_l), \quad V \in \vartheta_{S_*} \tag{9}
$$

Por otro lado, para que al participante i le sea asignado el subconjunto O se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
& b_i(O) \geq max_{j \neq i} b_j(O) \\
& max_j b_j(S_*) \leq b_i(O) + \sum_{V_l \in V, V_l \neq O} max_j b_j(V_l) \quad S_* \ni O, V \in \vartheta_{S_*}
\end{aligned} \tag{10}
$$

De acuerdo con lo anterior el problema (8) es equivalente a resolver:

$$
\text{máx}\, \Pi_i(S_*) = \sum_{S_* \subseteq M} (v_i(S_*) - b_i(S_*)) \cdot \prod_{V \in \vartheta_{S_*}} Prob \left(b_i(S_*) \geq \sum_{V_l \in V} max_j b_j(V_l) \right) \tag{11}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& \text{máx}\, \Pi_i(O) = \sum_{O \in M} (v_i(O) - b_i(O)) \cdot Prob\, (b_i(O) \geq max_{j \neq i} b_j(O)) \\
& \cdot \prod_{S_* \ni O,} \prod_{V \in \vartheta_{S_*}} Prob \left(max_j b_j(S_*) \leq b_i(O) + \sum_{V_l \in V, V_l \neq O} max_j b_j(V_l) \right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

El participante debe resolver $2^m - 1 - m$ problemas[5] del tipo (11)para determinar las expresiones de oferta por subconjuntos de dos objetos o más, y m problemas como (12) para determinar las ofertas por cada uno de los objetos de la subasta. Como se puede observar estos problemas aumentan su complejidad a medida que el número de objetos crece. El número posible de formas en las que se puede partir el conjunto S_* en subconjuntos no vacíos corresponde al *número de Bell*$B_{|S_*|}$. Los primeros números de Bell para $|S_*|$={1,2...} son {1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975}[6]. De acuerdo con esto, el problema que debe resolver un participante para determinar sus ofertas en este tipo de subasta es más complejo que el problema que debe solucionar el subastador para determinar el ganador.

4. El Caso de una Subasta de dos Objetos

Sea $M = a, b$ el conjunto de objetos a subastar y $N = 1, \ldots, n$ el conjunto de participantes. Para el desarrollo específico de este caso, se supone que las valoraciones de los participantes son variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$.

4.1. El problema del subastador

En este caso particular el problema del subastador es el siguiente:

$$\text{máx} \quad \textstyle\sum_{i \in N} b_i(a)y_i(a) + b_i(b)y_i(b) + b_i(ab)y_i(ab) \tag{13}$$

sujeto a

$$\textstyle\sum_{i \in N} y_i(a) + y_i(ab) \leq 1 \tag{14}$$

$$\textstyle\sum_{i \in N} y_i(b) + y_i(ab) \leq 1 \tag{15}$$

$$y_i(a) + y_i(b) + y_i(ab) \leq 1, \ i \in N \tag{16}$$

$$y_i(\cdot) \in \{0, 1\}; \ i \in N \tag{17}$$

Se puede observar de una forma más clara que las restricciones (14) y (15) impiden que los objetos a y b sean asignados más de una vez. Las restricciones (16) incorporan en el problema las preferencias de los participantes de manera que las asignaciones resultantes estén libres del problema de exposición; ya que si a un participante le van a asignar el conjunto de objetos (ab) el ingreso que percibe el subastador es el correspondiente a $b_i(ab)$ y no $b_i(a) + b_i(b)$.

4.2. El problema del participante

En este caso son tres los problemas que el participante i debe resolver para determinar sus ofertas:

[5] m es la cantidad de objetos a subastar,$m = |M|$

[6] Tomado de http://mathworld.wolfram.com/BellNumber.html

$$\text{máx}\,\Pi(a) = (v_i(a) - b_i(a)) \cdot Prob_i(a) \tag{18}$$

$$\text{máx}\,\Pi(b) = (v_i(b) - b_i(b)) \cdot Prob_i(b) \tag{19}$$

$$\text{máx}\,\Pi(ab) = (v_i(ab) - b_i(ab)) \cdot Prob_i(ab) \tag{20}$$

4.2.1. Funciones de oferta por $\{a\}$ y $\{b\}$

Para que el participante i se gane el objeto a deben pasar dos cosas. Primero, su oferta tiene que ser mayor a la máxima oferta por a:

$$b_i(a) \geq max_{j \neq i} b_j(a) \tag{21}$$

Y segundo, la máxima oferta por el conjunto de los dos objetos (ab) debe ser menor a la suma de la oferta de i por a más la máxima oferta por el objeto b:

$$max_j b_j(ab) \leq b_i(a) + max_j b_j(b) \tag{22}$$

La condición (22) es equivalente a:

$$\begin{aligned} b_i(a) &\geq max_j b_j(ab) - max_j b_j(b) \\ b_i(a) &\geq max_j (b_j(a) + b_j(b)) k_j - max_j b_j(b) \end{aligned} \tag{23}$$

La probabilidad de que el participante i se gane el objeto a va a ser equivalente a la probabilidad de que (21) se cumpla por la probabilidad de que (23) se cumpla. Sin embargo los valores de k_j son información privada, de manera que i no conoce los valores de k_j correspondientes a sus competidores. Lo que sí es información común es que si $k_j \in [0,1]$ los objetos son sustitutos para el participante j, y si $k_j \in [1,\infty]$ los objetos son complementos para el participante j. Se supone entonces que el participante i tiene dos creencias:
1. Que hay un porcentaje p_c de participantes en la subasta para los cuales los objetos son complementos y un porcentaje $(1-p_c)$ de participantes para los que son sustitutos y,
2. Que $\overline{k}$ corresponde al valor máximo de todos los k_j.

Adicionalmente, para todos los participantes, $k_j \equiv U[0,1]$ si los objetos son sustitutos y $k_j \equiv U[1,\overline{k}]$ si los objetos son complementos. El participante i puede estimar el valor esperado de k_j para un participante de la siguiente manera:

$$E[k_j] = E[k_j|complementos]Prob[complementos] + E[k_j|sustitutos]Prob[sustitutos]$$
$$E[k_j] = \frac{\overline{k}+1}{2}\,p_c + \frac{1}{2}\,(1-p_c) = k$$

$$(24)$$

Si se utiliza el valor k[7] determinado en (24) como un "estimador" para el valor de k_j, (23) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b_i(a) &\geq max_j b_j(a)k - max_j b_j(b)(1-k) \\ b_i(a) &\geq max_j b_j(a)k + max_j b_j(b)(k-1) \end{aligned} \tag{25}$$

A continuación se desarrollan los problemas (18) y (19). De acuerdo con el desarrollo anterior, se puede observar que la oferta que haga un participante va a depender del valor k, es decir de las creencias que tenga respecto a las preferencias de sus competidores.

Los primeros dos casos que siguen a continuación corresponden a situaciones en donde las creencias de i sobre las preferencias de sus competidores resultan en un valor de k mayor a 1. El tercer y último caso corresponde a valores de k entre 0 y 1.

Cuando $1 < k < 2$, el beneficio esperado del participante i al hacer una oferta $b_i(a)$ es el siguiente:

$$\Pi_i(a) = [v_i(a) - b_i(a)]\big[b_i(a)\big]^{n-1}\left[\frac{b_i(a)}{k}\right]^{(n-1)n}$$

Al maximizar la expresión anterior se produce la siguiente función de oferta $b_i(a)$:

$$b_i(a) = v_i(a)\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right] \tag{26}$$

Como se puede observar en (26), la oferta que el participante i hace por el objeto a es menor a su valoración por el mismo y depende únicamente del número de participantes en la subasta; de manera que a medida de que el número de participantes crece, la oferta se acerca más a la valoración. La oferta por el objeto b se determina de la misma forma.

Cuando $k \geq 2$, el beneficio esperado del participante i al hacer una oferta $b_i(a)$ es el siguiente:

$$\Pi_i(a) = (v_i(a) - b_i(a))\big[b_i(a)\big]^{n-1}\left[\frac{b_i(a)^2}{2k(k-1)}\right]^{n(n-1)}$$

Al maximizar, se obtiene la siguiente expresión para la función de oferta $b_i(a)$:

$$b_i(a) = v_i(a)\left[\frac{(n-1+2n(n-1))}{n+2n(n-1)}\right] \tag{27}$$

[7]Nótese que este valor es diferente al k_i que corresponde a las preferencias individuales del participante i

Nuevamente la oferta $b_i(a)$ para este caso es menor a la valoración del participante y a medida que aumenta el número de participantes el valor de $b_i(a)$ se acerca al valor $v_i(a)$. Siguiendo argumentos similares se determina la oferta por el objeto b.

Cuando $0 < k \leq 1$, el beneficio esperado del subastador es el siguiente:

$$\Pi_i(a) = (v_i(a) - b_i(a))\big[b_i(a)\big]^{n-1}$$

Al maximizar se obtiene la siguiente expresión para la función de oferta $b_i(a)$:

$$b_i(a) = v_i(a)\left[\frac{n-1}{n}\right] \tag{28}$$

En este caso las ofertas por cada uno de los dos objetos, corresponden a las funciones de oferta en una subasta de primer precio para un solo objeto. Esto sugiere que si para todos los participantes en la subasta los objetos son sustitutos, entonces el resultado sería equivalente al obtenido si se subastaran los objetos de forma separada. Esta afirmación se encuentra sugerida por los resultados de los experimentos reportados en [6], de acuerdo con la cual no sería necesaria una subasta combinatoria para la asignación los objetos.

4.2.2. Función de oferta por $\{a, b\}$

Para que el conjunto $\{a, b\} \equiv (ab)$ le sea asignado al participante i debe cumplirse que la oferta $b_i(ab)$ sea la mayor oferta, y que adicionalmente sea mayor a la suma de las ofertas más altas por cada uno de los objetos. Esas condiciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$b_i(ab) \geq max_{j \neq i} b_j(ab) \tag{29}$$

$$b_i(ab) \geq max_j b_j(a) + max_j b_j(b) \tag{30}$$

La función de densidad asociada con la condición (29) se define de la siguiente forma:

$$f_1 = \begin{cases} \frac{a}{k^2} & \text{si } 0 \leq a \leq k, \\ \frac{2k-a}{k^2} & \text{si } k < a \leq 2k \end{cases}$$

De manera similar, la función de densidad asociada con la condición (30) es la siguiente:

$$f_2 = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq 1, \\ 2-a & \text{si } 1 < a \leq 2 \end{cases}$$

La probabilidad de ganar para el participante dependerá del rango en donde se encuentre su valoración por los dos objetos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq v_i(ab) \leq k \equiv 0 \leq [v_i(a) + v_i(b)]k \leq k, \\ k < v_i(ab) \leq 2k \equiv k < [v_i(a) + v_i(b)]k \leq 2k, \end{aligned}\right\} \quad \text{para } f_1$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq v_i(ab) \leq 1 \equiv 0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1, \\ 0 < v_i(ab) \leq 2 \equiv 0 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{para } f_2$$

Se puede observar que los rangos en los dos casos, los cuales corresponden a los de las funciones (29) y (30) coinciden. La probabilidad de que la oferta $b_i(ab)$ sea una oferta ganadora dependerá del rango en el el cual se encuentre $v_i(a) + v_i(b)$.

Ahora, si $0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1$, el beneficio esperado del participante i cuando ofrece $b_i(ab)$ es el siguiente:

$$\Pi_i(a) = (v_i(a) - b_i(a)) \left[\frac{b_i(ab)}{2k^2}\right]^{n-1} \left[\frac{b_i(ab)^2}{2}\right]^{n^2}$$

La solución del problema anterior deja la siguiente expresión para la función de oferta $b_i(ab)$:

$$b_i(ab) = [v_i(a) + v_i(b)]k_i \left[\frac{2(n^2 + n - 1)}{2(n^2 + n - 1) + 1}\right] \tag{31}$$

De la misma forma que en las ofertas por los objetos separados el valor de $b_i(ab)$ va a ser menor a la valoración que el participante i tiene por el conjunto de objetos. Sin embargo, a medida que crece el número de participantes el valor de la oferta se acerca al valor de la valoración.

Por otro lado, si $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2$, el beneficio esperado del participante i cuando ofrece $b_i(ab)$ es el siguiente:

$$\Pi_i(a) = (v_i(a) - b_i(a)) \left[\frac{4kb_i(ab) - 3k^2 - b_i(ab)^2}{2k^2}\right]^{n-1} \left[\frac{4b_i(ab) - 2 - b_i(ab)^2}{2}\right]^{n^2}$$

Para encontrar la oferta que le da solución al problema anterior es necesario hallar las raíces del siguiente polinomio de grado cinco:

$$b_i(ab)^5(1 - 2n) + b_i(ab)^4 2v_i(ab)(n - 1) - b_i(ab)(2n^2k^2) + 2v_i(ab)n^2k^2 = 0 \tag{32}$$

5. Resultados del modelo

En esta sección se determinan las ofertas de un participante para un caso particular, junto con el comportamiento de éstas para diferentes valores de k y n.

5.1. Ofertas del participante si $0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1$

Como se determinó en en el modelo, dependiendo de el intervalo en donde se encuentre la suma de las valoraciones por los objetos individuales el participante hará sus ofertas por el conjunto de los dos objetos. En este caso se presentan los resultados para $b_i(a)$, $b_i(b)$ y $b_i(ab)$ cuando $0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1$.

Para determinar los cambios en las funciones de oferta al cambiar el número de participantes y el valor k, se supone que el participante i tiene las siguientes valoraciones $v_i(a) = 0{,}5$, $v_i(b) = 0{,}5$.

k	p_c	$b_i(\cdot)$
0,5	0 %	0,450
1,1	30 %	0,495
1,5	50 %	0,495
1,9	70 %	0,495
2,5	100 %	0,497

Cuadro 1: valores de $b_i(\cdot)$ variando k

En la Tabla 1 se presentan los resultados de las ofertas $b_i(a)$ y $b_i(b)$ con $n = 10$ y aumentando el porcentaje de participantes para los cuales los objetos son complementarios desde 0 % hasta 100 %. Este porcentaje afecta el valor del k[8]. Se puede observar que a medida que el porcentaje de participantes para los cuales el par de objetos es complementario, el participante i aumenta su oferta por cada uno de los objetos. De acuerdo al modelo las ofertas de el participante i por cada uno de los objetos van a depender únicamente del número de participantes y de las preferencias que i supone tiene el conjunto de participantes sobre los objetos.

En la Tabla 2 se presentan los valores de las ofertas para diferentes valores de k y un conjunto de 2 participantes y de 100. Se puede observar que cuando hay dos participantes las ofertas son menores que cuando hay 100. En este último caso cuando $k \geq 1{,}5$ la oferta corresponde a la valoración. Adicionalmente se observa que las ofertas, con un mismo número de jugadores, aumentan a medida que aumenta el valor de k.

La oferta por el conjunto de objetos $b_i(ab)$, de acuerdo al modelo va a depender del número de participantes y de k_i[9]. Los resultados obtenidos para diferentes valores de

[8] La estimación que hace el participante i sobre las preferencias de sus competidores

[9] Preferencias individuales del participante i

$n-k$	$b_i(\cdot)$
2-0,5	0,250
100-0,5	0,495
2-1,5	0,375
100-1,5	0,500
2-2	0,417
100-2	0,500

Cuadro 2: valores de $b_i(\cdot)$ variando n

k_i cuando hay 2 y 100 participantes se presentan en la Tabla 3.

k_i	$b_i(ab)$,$n=2$	$b_i(ab)$,$n=100$
0,5	0,455	0,5
1	0,909	1,0
1,5	1,364	1,5
2	1,818	2,0
5	4,545	5,0

Cuadro 3: valores de $b_i(ab)$

5.2. Ofertas del participante si $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2$

En esta parte se presentan los resultados para $b_i(a)$, $b_i(b)$ y $b_i(ab)$ cuando $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2$.

Para determinar los cambios en las funciones de oferta al cambiar el número de participantes y el valor k, se supone que el participante i tiene las siguientes valoraciones $v_i(a) = 0{,}75$, $v_i(b) = 0{,}75$ y que el número de participantes es igual a 10.

En este caso la función de oferta que determina los valores de $b_i(a)$ y $b_i(b)$ es la misma a la utilizada en la sección anterior. Por lo tanto el comportamiento de las ofertas en este caso es similar al discutido anteriormente.

En la Tabla 4 se presentan los valores de las ofertas $b_i(a)$ y $b_i(b)$ para diferentes valores de k y en la Tabla 5 los valores de las ofertas con 2 y 100 participantes y diferentes valores de k.

En este caso la función de oferta que determina $b_i(ab)$ corresponde a el polinomio (32). Para poder determinar el valor de las ofertas se utilizó *Mathematica 3.0 for Students*; de las 5 raíces, en todos los casos, sólo una raíz era real, la cual corresponde

k	p_c	$b_i(\cdot)$
0,5	0	0,675
1,1	30 %	0,743
1,5	50 %	0,743
1,9	70 %	0,743
2,5	100 %	0,746

Cuadro 4: valores de $b_i(\cdot)$ variando k

$n;k$	$b_i(\cdot)$
2;0,5	0,375
100;0,5	0,743
2;1,5	0,563
100;1,5	0,750
2;2	0,625
100;2	0,750

Cuadro 5: valores de $b_i(\cdot)$ variando n y k

al valor de la oferta. Los resultados para $b_i(ab)$ teniendo diferentes valores de k, k_i y suponiendo que n=10 se presentan en la Tabla 6[10].

	$b_i(ab)$			
k	$k_i = 0,5$	$k_i = 1$	$k_i = 1,5$	$k_i = 2$
0,5	0,745	1,45	2,14	2,848
1,1	0,749	1,478	2,174	2,867
1,5	0,749	1,486	2,191	2,882
1,9	0,749	1,49	2,204	2,897
2,5	0,749	1,494	2,218	2,917

Cuadro 6: valores de $b_i(ab)$

De acuerdo a la Tabla 6, se puede observar que el valor de las ofertas en todos los casos es menor a la valoración que tiene el participante por el conjunto de objetos, y que la oferta aumenta si aumenta el valor de k y k_i.
Para determinar el efecto del número de participantes en las oferta $b_i(ab)$, se fijó $k = 1$ y se calcularon los diferentes valores para $b_i(ab)$ si el conjunto de participantes estuviera

[10]En cada caso $v_i(ab) = [0{,}75 + 0{,}75]k_i$

compuesto por 2 y 100 participantes. Los resultados se presentan en la Tabla 7.

k_i	$b_i(ab), n = 2$	$b_i(ab), n = 100$
0,5	0,73	0,75
1	0,73	0,75
1,5	1,69	2,24
2	2,11	2,99

Cuadro 7: Valores de $b_i(ab)$, variando n y k_i

De acuerdo con los resultados de la Tabla 7, se puede observar que a medida que el número de participantes aumenta también lo hace la oferta $b_i(ab)$ de manera que se acerca al valor de $v_i(ab)$.

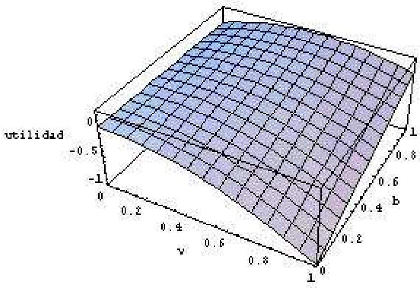
5.3. La función de utilidad esperada del participante

Para determinar las ofertas $b_i(a)$, $b_i(b)$ y $b_i(ab)$ se resuelven los problemas que tienen como objetivo maximizar la utilidad esperada del participante al ofrecer por cada subconjunto. En esta sección de presenta la representación gráfica de las funciones de utilidad de cada uno de los subproblemas que resuelve el modelo para determinar las diferentes ofertas.

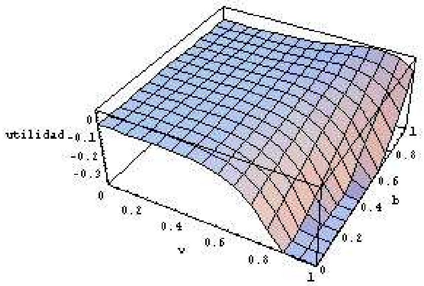
5.3.1. Caso 1:$b_i(a)$ y $b_i(b)$

Cuando $k = 0{,}5$[11] la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(a)$, para diferentes combinaciones $[b_i(a), v_i(a)]$ y con $n = 2$,$n = 6$ y $n = 10$ se presenta en la figura 1.

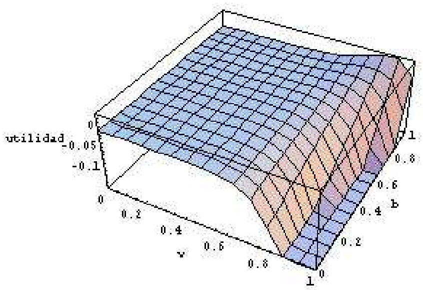
[11]En este caso el porcentaje de participantes para los cuales los objetos son complementarios sería 0 %



(a) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=2.



(b) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=6.



(c) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=10.

Figura 1: Utilidad esperada si los objetos son sustitutos.

Se puede observar en las figuras que a medida que el número de participantes aumenta, la gráfica de la función de utilidad esperada se “aplana” en uno de sus extremos. Sin embargo, la parte de interés consiste en aquella determinada por valores positivos de la utilidad. En este caso, se observa que para parejas de valores cercanos a 1, tanto para b como para v; la gráfica tiende a “elevarse” más a medida que aumenta el número de participantes.

Cuando $k = 1{,}5$ la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(a)$, para diferentes combinaciones $[b_i(a), v_i(a)]$ y con $n = 2$,$n = 4$ y $n = 10$ se presenta en la figura 2[12].

Se puede observar que la gráfica se “aplana” en un extremo y se eleva a medida que aumenta el número de participantes. También se puede ver que a medida que n aumenta la utilidad esperada para el participante disminuye.

5.3.2. Caso 2: $b_i(ab)$

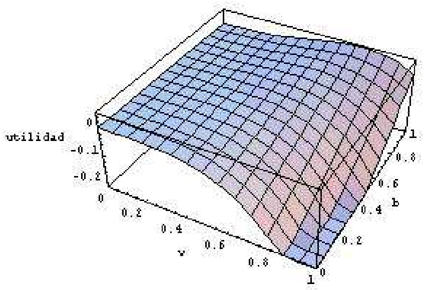
Las ofertas en este caso van a depender del intervalo en donde se encuentre $v_i(a) + v_i(b)$ y adicionalmente de los valores de k_i y k. Para el caso en el que $0 \leq v_i(a)+v_i(b) \leq 1$ y suponiendo que $k = 0{,}5$ y $k_i = 1$ la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(ab)$, para diferentes combinaciones $[b_i(ab), v_i(ab)]$ y con $n = 2$,$n = 6$ y $n = 10$ se presenta en la figura 3[13].

Para el caso en el que $0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1$ y suponiendo que $k = 2$ y $k_i = 2$ la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(ab)$, para diferentes combinaciones $[b_i(ab), v_i(ab)]$ y con $n = 2$,$n = 6$ y $n = 10$ se presenta en la figura 4[14].

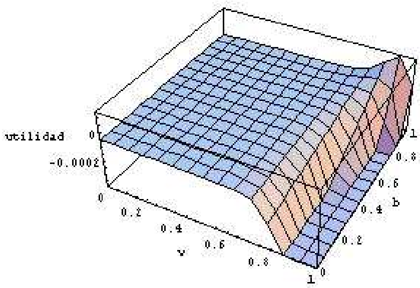
[12] En las gráficas $b_i(\cdot) \equiv b$ y $v_i(\cdot) \equiv v$

[13] En las gráficas $b_i(\cdot) \equiv b$ y $v_i(\cdot) \equiv v$

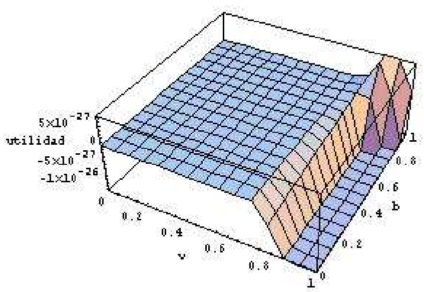
[14] En las gráficas $b_i(\cdot) \equiv b$ y $v_i(\cdot) \equiv v$



(a) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=2.

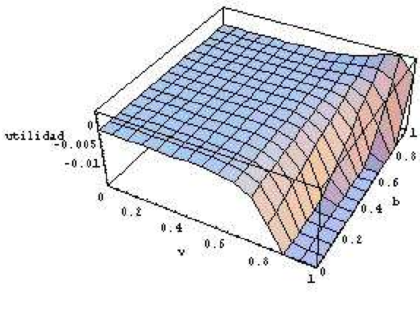


(b) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=4.

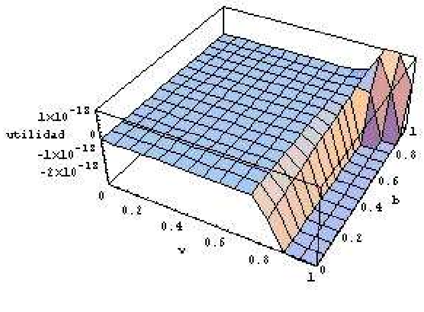


(c) Utilidad esperada si $b_i(a)$,n=10.

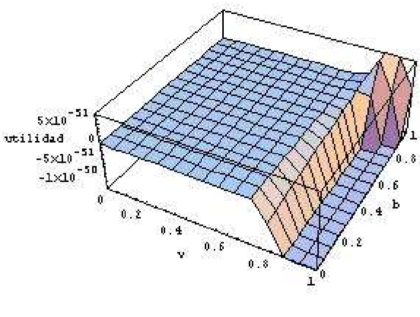
Figura 2: Utilidad esperada si los objetos son complementos.



(a) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=2.

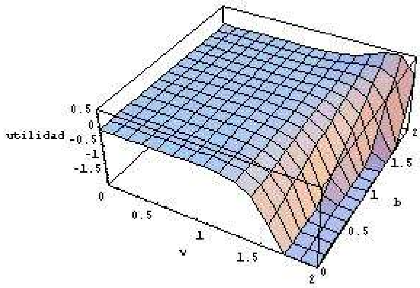


(b) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=6.

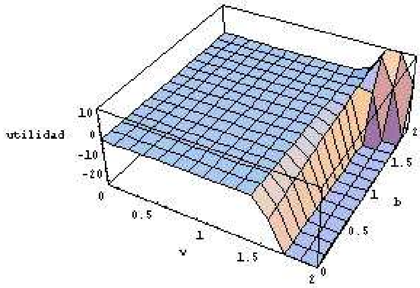


(c) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=10.

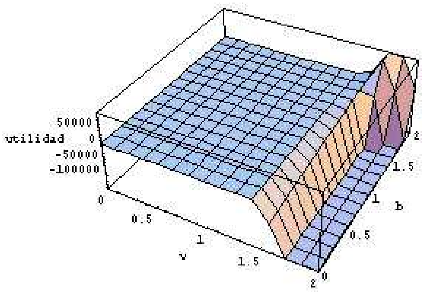
Figura 3: Utilidad esperada si los objetos son sustitutos.



(a) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=2.



(b) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=6.



(c) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=10.

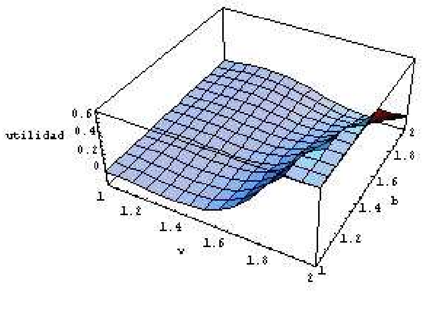
Figura 4: Utilidad esperada si los objetos son complementos.

Para el caso en el que $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2$ y suponiendo que $k = 0{,}5$ y $k_i = 1$ la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(ab)$, para diferentes combinaciones $[b_i(ab), v_i(ab)]$ y con $n = 2$,$n = 4$ y $n = 10$ se presenta en la figura 5[15].

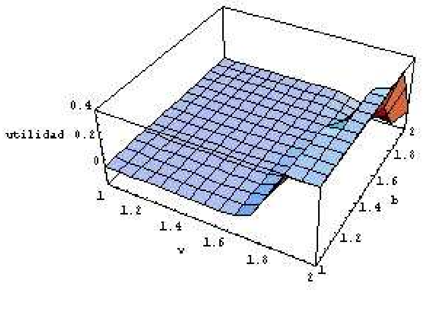
Para el caso en el que $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2$ y suponiendo que $k = 2$ y $k_i = 2$ la utilidad esperada del participante al hacer la oferta $b_i(ab)$, para diferentes combinaciones $[b_i(ab), v_i(ab)]$ y con $n = 2$,$n = 4$ y $n = 10$ se presenta en la figura 6[16].

[15] En las gráficas $b_i(\cdot) \equiv b$ y $v_i(\cdot) \equiv v$

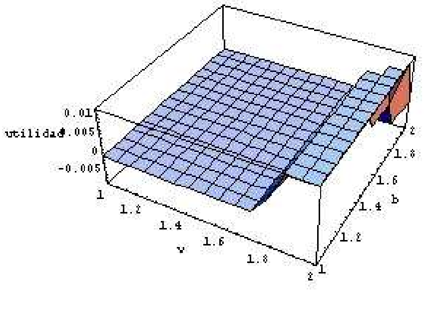
[16] En las gráficas $b_i(\cdot) \equiv b$ y $v_i(\cdot) \equiv v$



(a) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=2.

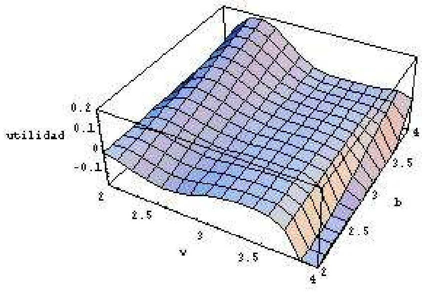


(b) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=4.

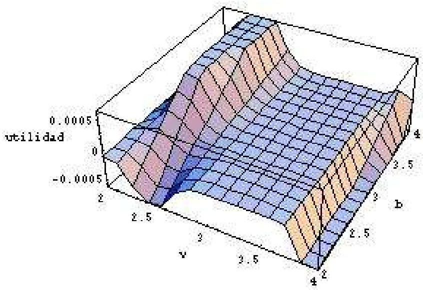


(c) Utilidad esperada si $b_i(ab)$,n=10.

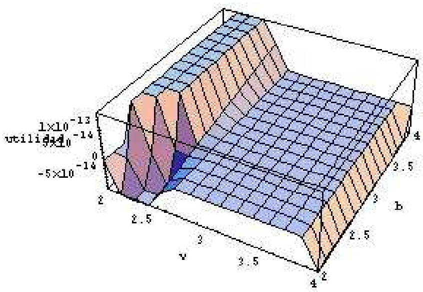
Figura 5: Utilidad esperada si los objetos son sustitutos.



(a) Expected utility if $b_i(ab)$,n=2.



(b) Expected utility if $b_i(ab)$,n=4.



(c) Expected utility if $b_i(ab)$,n=10.

Figura 6: Expected utility if the objects are substitutes.

Se puede observar en las figuras que la función de utilidad esperada tiene un comportamiento diferente dependiendo del intervalo en el cual se encuentre $v_i(a) + v_i(b)$. Sin embargo en todas las figuras se puede ver que existe una tendencia a que aparezca una "elevación" en las parejas de valores superiores para v y b. Adicionalmente, se observa que el efecto que tiene el número de participantes en la función de utilidad parece ser similar al efecto de la existencia de propiedades de complementariedad. La forma que tiene la función en la figura 1b es similar a la forma que tiene en la figura 2a; en el primer caso tenemos un valor $k = 0{,}5$ y 6 participantes, en el segundo un valor $k = 1{,}5$ y 2 participantes. Esta observación concuerda con la que se hizo en la sección anterior al calcular los valores de las ofertas para diferentes valores de k y de número de participantes; si el número de participantes es pequeño ($n = 2$) pero el valor de k refleja preferencias de complementariedad ($k = 2$) las ofertas se acercan al valor de ofertas con un mayor número de participantes ($n = 100$) y menor valor de k ($k = 0{,}5$)[17]. Esto sugiere que el efecto que tiene aumentar el número de jugadores en una subasta es similar a la efecto de la presencia de propiedades de complementariedad entre los objetos.

6. Conclusiones

De acuerdo con el desarrollo del modelo para una subasta de dos objetos con n participantes, se observa que en general las ofertas van a ser menores que la valoración. Esta situación se presenta en la subasta de primer precio en el caso de subastas de un objeto. Sin embargo este "sesgo" tiende a desaparecer a medida que el número de participantes aumenta; se podría pensar que en una subasta combinatoria con el suficiente número de participantes y con la regla "pague su oferta", el subastador estaría maximizando su ingreso y asegurando asignaciones eficientes [18]. Faltaría comprobar si los resultados para el caso de dos objetos se pueden generalizar para un caso más general de m objetos y n participantes, donde $m > 2$.

Un problema claro que presenta la subasta combinatoria estática, por ser de una sola ronda, está relacionado con la información que tiene cada uno de los participantes en el momento de hacer las ofertas. En el modelo, cada participante utiliza un valor esperado de las preferencias del conjunto de participantes para determinar sus ofertas. Si la estimación de ese valor esperado[19] para un participante no refleja las características reales del conjunto, entonces el participante podría ofrecer más de lo que debería en el caso en el que la estimación del coeficiente de complementariedad esté por encima del

[17] Ver Tabla 2

[18] En el caso de una subasta de dos objetos, con 10 participantes la diferencia entre la valoración y la oferta es mínima

[19] Coeficiente de complementariedad definido en la formulación del problema del participante como k

valor real, y podría ofrecer menos de lo que debería si la estimación de ese coeficiente está por debajo del valor real.

En el primer caso las ofertas serían más competitivas y el ingreso del subastador aumentaría, pero en el segundo el ingreso del subastador se afectaría de manera negativa y las asignaciones presentarían problemas de eficiencia; esto debido a que la oferta de un participante que tiene una valoración mayor que otro podría ser menor a la oferta de este último. Para evitar este tipo de problemas sería necesario que cada participante emitiera algún tipo de "señal", de manera que permitiera que cada participante hiciera una buena aproximación de ese valor esperado. Sin embargo, si el conjunto de objetos y de participantes aumenta, el problema de estimación del coeficiente de complementariedad para cada uno de los posibles subconjuntos de objetos[20] requiere la estimación de $2^m - 1 - m$ valores k y la emisión de $(2^m - 1 - m)n$ "señales".

Una subasta dinámica que permita ofrecer por conjuntos tiene ventajas sobre una subasta combinatoria estática, ya que la primera maximiza la información disponible para los participantes en el momento de determinar sus ofertas, y además le permite a un participante "corregir las ofertas" de una ronda a otra de acuerdo con la historia de la subasta[21]

Una observación interesante es que las ofertas de los participantes aumentan a medida que el número de participantes crece, y/o, el porcentaje de participantes para los cuales los objetos son complementarios aumentan. Esto sugiere que el aumento de "competitividad" en una subasta combinatoria se logra aumentando el número de participantes, y/o, aumentando el porcentaje de participantes con preferencias de complementariedad sobre los objetos.

Otro resultado que llama la atención es la división en dos "tipos" de participante. Aquellos cuyas valoraciones están en el intervalo $0 \leq v_i(a) + v_i(b) \leq 1)$ y aquellos cuyas valoraciones están en el intervalo $1 < v_i(a) + v_i(b) \leq 2)$. Este comportamiento puede deberse a que el número de objetos en la subasta es dos, de manera que los intervalos corresponden a los intervalos de una función de distribución triangular que resulta de la suma de dos funciones uniformes. Con un número de objetos mayor a dos, los intervalos serían diferentes y por ende también los "tipos" de participante.

El comportamiento de las funciones de utilidad observado para cada "tipo" de participante es diferente, de manera que las ofertas en el primer caso únicamente van a depender del número de participantes en la subasta, mientras que en el segundo caso van a depender tanto del número de participantes, como del valor del coeficiente de complementariedad, el cual trata de reflejar las preferencias del conjunto de participantes. Nuevamente, sería necesario estudiar el caso general con m objetos y n participantes, en donde $m > 2$.

[20] Subconjuntos de dos o más objetos

[21] En la subasta estática el participante no puede modificar sus ofertas, entonces no hay manera de "corregir" una mala estimación de k por ejemplo.

Referencias

[1] Ausubel. L, *An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects*, Working Paper,(1997),University of Maryland

[2] Ausubel. L, P. Cramton, *Demand Reduction and Inefficiency in Multi-Unit Auctions*, Working Paper,(1998), University of Maryland

[3] Ausubel. L, P. Milgrom, *Ascending Auctions with Package Bidding*,(2002), Frontiers of Theoretical Economics, Vo.1, Is.1

[4] Charles River Associates Inc, Market Design Inc *Report1B: Package Bidding for Spectrum Licenses*,(1997),Federal Communications Commission (FCC)

[5] des Vries. S, R. Vohra, *Combinatorial Auctions: A Survey*,(2001), TU München-Zentrum Mathematik, Northwestern University-Department of Managerial Economics and Decision Sciences

[6] Ledyar. J, D. Porter, A. Rangel,*Experiments Testing Multiobject Allocation Mechanisms*,(1997), Journal of Economics and Management Strategy, Vol.6,Is.3

[7] Milgrom. P,*Putting Auction Theory to Work*,Working Paper,(2000), Stanford University

[8] Riley. J, W. Samuelson *Optimal Auctions*,(1981), The American Economic Review, Vol.17, Is.3

[9] Vickrey. W *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders*,(1961), The Journal of Finance, Vol.16, Is.1

[10] Vijay. K, *Auction Theory*,Academic Press, 2002

[11] Vijay. K, M. Perry *Efficient Mechanism Design*,(1998)