



BANCO DE LA REPUBLICA
Gerencia Técnica

Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia*

Luis Fernando Melo Velandia
Oscar Reinaldo Becerra Camargo

Resumen

En este documento se describen en detalle diversas metodologías que permiten calcular dos medidas utilizadas para cuantificar el riesgo de mercado asociado a un activo financiero: el valor en riesgo, *VaR* y el *Expected Shortfall*, *ES*.

Los métodos analizados se dividen en dos grupos. En el primer grupo, compuesto por las metodologías de normalidad, simulación histórica y teoría del valor extremo (*EVT*), no se modelan las dependencias existentes en el primer y segundo momento condicional de la serie. En el segundo grupo, las metodologías *ARMA-GARCH* y *ARMA-GARCH-EVT* modelan los dos tipos de dependencias, mientras *RiskMetrics*® modela solo la segunda.

Estas metodologías son aplicadas a las variaciones diarias de la tasa interbancaria para el periodo comprendido entre el 16 de abril de 1994 y el 30 de diciembre de 2004. El desempeño o *backtesting* del *VaR* calculado para diferentes metodologías en los años 2003 y 2004 muestra que las mejores son aquellas que modelan la dependencia de la varianza condicional, tales como los modelos *RiskMetrics*®, *ARMA-GARCH* y *ARMA-GARCH-EVT*. Las técnicas con el peor desempeño son la de simulación histórica, la *EVT* sin modelar dependencia y la basada en el supuesto de normalidad.

Palabras clave: Riesgo de mercado, Valor en riesgo, *Expected Shortfall*, teoría del valor extremo, modelos *GARCH*, *backtesting*.

Códigos JEL: C32, C52, G10

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de La República ni a su junta directiva. Los autores agradecen las sugerencias y comentarios de Luis E. Arango, Munir Jalil, Martha Misas, Daniel Osorio y Carlos Sandoval. Cualquier observación puede ser dirigida a: lmelove@banrep.gov.co y orbecerrac@unal.edu.co.

Índice

1. Introducción	3
2. Manejo de los datos	5
2.1 La distribución de pérdidas y ganancias.....	6
3. Medidas de riesgo	6
3.1 La desviación estándar.....	6
3.2 El valor en Riesgo (<i>VaR</i>)	7
3.2.1. Cálculo del <i>VaR</i> de forma paramétrica	8
3.2.1.1. Estimación	10
3.2.1.1.1. Volatilidad histórica.....	11
3.2.1.1.2. Método de suavizamiento exponencial (<i>RiskMetrics</i> ®).....	12
3.2.1.1.3. Modelos <i>ARCH</i> y <i>GARCH</i>	13
3.2.2. Simulación histórica.....	16
3.2.3. Método de simulación Bootstrap	16
3.2.4. Métodos de simulación Monte Carlo	18
3.2.5 <i>VaR</i> y horizonte temporal	18
3.2.6 Características y críticas del <i>VaR</i>	19
3.3. Expected Shorfall.....	20
4. Medidas de riesgo y teoría del valor extremo (EVT)	22
4.1. Cómo obtener valores extremos (máximos por bloques y <i>POT</i>).....	22
4.2. Modelos de teoría del valor extremo	24
4.2.1. Distribución de los máximos	24
4.2.1.1. Otras medidas de riesgo.....	29
4.2.2. Distribución de los excesos	31
4.2.2.1. El problema de la selección del umbral.....	33
4.2.2.1.1. Gráfico de la media de los excesos.....	34
4.2.2.1.2. El estimador de Hill.....	35
4.2.2.2. Medidas de riesgo en modelos sobre un umbral: <i>VaR</i> y <i>ES</i>	39
4.2.3. Estimación bajo series no <i>i.i.d.</i>	40
4.2.4. Backtesting	42
4.2.4.1. Prueba de proporción de fallas de Kupiec.....	45
4.2.4.2. Estimador puntual de <i>p</i>	45
4.2.4.3. Estimación directa a partir de la distribución binomial.....	46
5. Estimación y resultados	47
5.1. La <i>TIB</i> y la política monetaria en Colombia	49
5.2. Pruebas de estabilidad	52
5.3. Cálculo de medidas de riesgo	55
5.3.1. Medidas de riesgo sin modelar dependencia: <i>EVT</i> , simulación histórica y normalidad.....	55
5.3.2. Medidas de riesgo modelando dependencia: <i>RiskMetrics</i> ®, <i>ARMA-GARCH</i> y <i>ARMA-GARCH-EVT</i>	59
5.4. Backtesting	62
6. <i>VaR</i> y riesgo de tasa de interés	65
7. Conclusiones	66

1. Introducción

En el año 2001 la medición de riesgo de mercado para las entidades financieras de Colombia sufrió un cambio de metodología siguiendo las recomendaciones del Comité de Basilea, las cuales han tenido una amplia aplicación en el plano internacional. La regulación colombiana adoptó el Valor en Riesgo, *VaR* por sus siglas en inglés, como la metodología requerida para la medición de los riesgos de mercado en las entidades financieras.

El VaR_{α} corresponde al α -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias de un activo. Es decir, representa la máxima pérdida en que incurre un activo en el $\alpha*100\%$ mejor de los casos¹. Para el caso colombiano, el *VaR* tiene implicaciones directas en el cálculo de la relación de solvencia de las entidades financieras, un *VaR* más alto representa una relación de solvencia más baja, lo cual obliga a las entidades a reasignar sus activos riesgosos o a realizar aportes adicionales de capital.

Sin embargo, no existe una metodología única para el cálculo del *VaR*. Bajo el marco regulatorio actual, las entidades financieras pueden medir este tipo de riesgo utilizando el método propuesto por la Superintendencia Bancaria de Colombia o modelos internos aprobados por el ente regulador.

En este contexto, la adopción de métodos más exactos en la medición de riesgo ofrece ventajas tanto para las entidades financieras como para la estabilidad del sistema financiero en general. El objetivo principal de este documento es presentar en forma didáctica algunas de las metodologías utilizadas en el cálculo del Valor en Riesgo y otras medidas alternativas, sus principales supuestos, ventajas y desventajas, y algunas técnicas para evaluar su desempeño².

Algunos de los principales documentos que muestran en detalle la aplicación y el cálculo de este tipo de medidas de riesgo para activos colombianos son Cardozo (2004) y Rodríguez (2005). Sin embargo, en estos documentos no se modelan las dependencias del primer y segundo momento condicional de las series analizadas³.

En nuestro trabajo se consideran diversos métodos para calcular las medidas de riesgo. Inicialmente se describen metodologías que asumen que las series en estudio son *i.i.d.* Lo cual implica que estas series no deben presentar ningún tipo de dependencia en el primer o segundo momento⁴. Posteriormente, se describen

¹ Bajo este contexto, los mejores casos indican las pérdidas más pequeñas.

² Vale la pena destacar que este documento analiza únicamente la medición de riesgo de mercado y de riesgo de tasa de interés. El riesgo de mercado se entiende como el riesgo asociado a una pérdida del valor del portafolio debido a cambios en el valor de uno (o algunos) de los activos que lo componen. Por otro lado, el riesgo de tasa de interés se puede definir como el riesgo que existe cuando cambios en la tasa de interés afectan negativamente la situación económica de una entidad financiera

³ Rodríguez (2005) modela las dependencias del segundo momento condicional de las series. Sin embargo, no modela las del primer momento.

⁴ Sin embargo, en la práctica la mayoría de series financieras no cumplen este supuesto.

métodos que si modelan este tipo de dependencias condicionales. Adicionalmente, se consideran medidas de riesgo basadas en la teoría del valor extremo⁵.

Estas técnicas son aplicadas a la tasa del mercado interbancario de Colombia, *TIB*. Esta tasa representa el precio de las operaciones realizadas en moneda doméstica por los intermediarios financieros para solucionar problemas de liquidez de muy corto plazo, generalmente un día.

La *TIB* tiene una importancia particular para los diseñadores de política monetaria. Esta representa el precio al cual las entidades financieras están dispuestas a obtener recursos de corto plazo, en consecuencia, la *TIB* es un indicador de la liquidez existente en el mercado. Por otra parte, esta tasa mantiene estrecha relación con las tasas de intervención del Banco de la República y con las tasas de interés de captación y colocación de la economía, por lo que se convierte de manera indirecta en un indicador de política monetaria. Adicionalmente, de acuerdo con la regulación actual, la *TIB* es uno de los quince factores de riesgo considerados para medir el riesgo de mercado en las entidades financieras.

El resto del documento se compone de la siguiente manera: en la segunda sección se definen algunos conceptos básicos para el manejo de los datos dentro del documento. En la tercera sección, se definen algunas medidas de riesgo, metodologías de estimación, características y críticas. En la cuarta sección se presentan los principales resultados de la *EVT* junto con sus aplicaciones en la definición de medidas de riesgo. Posteriormente, en la quinta sección se presentan los resultados de la estimación de las diferentes medidas de riesgo utilizadas en el documento para la Tasa Interbancaria a través de diferentes metodologías, y se evalúan sus desempeños. En la sexta sección se relacionan los resultados obtenidos para la *TIB* con en el riesgo de tasa de interés. Finalmente, en la séptima sección se concluye.

⁵ La Teoría del Valor Extremo, *EVT* por sus siglas en inglés, ha sido una herramienta implementada en los últimos años para la medición de riesgos. Análogo al teorema central del límite, la *EVT* ofrece resultados asintóticos sobre el comportamiento de los valores extremos de una variable aleatoria, lo cual permite analizar de una mejor manera estadísticos como el *VaR*.

2. Manejo de los datos

La mayoría de estudios financieros se realizan sobre retornos y no sobre precios. Por lo tanto, antes de definir las medidas de riesgo utilizadas en este documento, es importante definir algunos conceptos básicos relacionados con los retornos.

En general, la ganancia (perdida) absoluta (Π_t) de un activo financiero⁶ está definida por los cambios en su precio (P_t) y los dividendos recibidos durante un período de tiempo (D_t), formalmente:

$$\Pi_t = P_t + D_t - P_{t-1} \quad (1)$$

Sin embargo, esta definición no está libre de escala, es decir, un activo con un valor más alto tenderá a tener resultados de mayor cuantía que un activo con un valor menor. Por esto, una medida más atractiva para los resultados de un activo son los retornos, ya que en estos las pérdidas y ganancias se relativizan al valor inicial del activo. Además, éstos poseen propiedades estocásticas apropiadas⁷. Suponiendo $D_t = 0$, los *retornos simples* de un activo, para un período están dados por:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2)$$

para un período de tenencia k , el retorno simple de un activo esta definido por:

$$1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} \quad (3)$$

expresado de otra forma:

$$1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-k+2}}{P_{t-k+1}} \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}$$
$$1 + R_t[k] = (1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \dots \times (1 + R_{t-k+2}) \times (1 + R_{t-k+1})$$

En los casos que consideran los rendimientos de un activo de manera continua, los *retornos compuestos* o *logarítmicos* del activo son:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = p_t - p_{t-1} \quad (4)$$

⁶ Este tipo de análisis puede ser fácilmente generalizado para un portafolio. A menos que se realice algún tipo de aclaración en este documento, cuando se mencionen activos financieros el análisis también es aplicable al portafolio.

⁷ Tsay (2002)

donde $p_t = \ln(P_t)$. Esta definición posee ventajas estadísticas y matemáticas sobre el retorno considerado de la forma simple. Un ejemplo de ello es el retorno continuo de un activo con un período de tenencia k :

$$r_t[k] = \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \cdots \times (1 + R_{t-k+2}) \times (1 + R_{t-k+1})]$$

$$r_t[k] = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}$$

Así, en el caso de múltiples períodos el *retorno compuesto es simplemente la suma de los retornos compuestos de un período*.

2.1. La distribución de pérdidas y ganancias

En la administración de riesgo, es frecuente referirse a la distribución de pérdidas y ganancias, entendiendo esta como la distribución de probabilidad de los retornos de un activo o portafolio específico. En particular, los administradores de riesgo se interesan en las pérdidas mayores. De esta forma, los modelos estadísticos son construidos frecuentemente a partir del negativo de los retornos, concentrándose en la cola derecha de la distribución. La principal excepción a esta metodología se encuentra en el análisis de tasas de interés, las cuales presentan una relación inversa con el valor del activo.

3. Medidas de riesgo

Existen diferentes formas para medir el riesgo de mercado de un activo o portafolio. Una forma de medirlo es a través de la función de distribución de probabilidad de las pérdidas y ganancias de los activos, utilizando estimadores de algunos parámetros de dicha distribución tal como la desviación estándar (σ) o de estadísticos como cuantiles de la distribución (q_α).

3.1. La desviación estándar

Una forma simple de medir el riesgo de un activo es a través de la volatilidad de sus retornos, ya que cuando un activo tiene alta volatilidad, su resultado presenta una mayor incertidumbre. Una posible aproximación a la volatilidad es la desviación estándar del activo. Si se supone que los retornos de los activos provienen de una distribución normal, la cual se encuentra definida por su media y su varianza, entonces se puede encontrar con facilidad la probabilidad de que el retorno se encuentre dentro de un rango específico.

La varianza de una variable aleatoria X esta definida como:

$$V(X) \equiv \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (5)$$

En el caso de un portafolio con k activos y posiciones constantes en el tiempo, el valor esperado y la varianza de su retorno (\mathfrak{R}_t) son:

$$E(\mathfrak{R}_t) = \omega' \mu \quad (6)$$

$$V(\mathfrak{R}_t) = \omega' \Sigma \omega \quad (7)$$

donde $\omega' = [\omega_1, \dots, \omega_k]$, es el vector de participaciones de cada uno de los activos dentro del portafolio, $\mu' = [\mu_1, \dots, \mu_k]$ es el vector de retornos esperados y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos en el portafolio:⁸

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La desviación estándar del portafolio esta definida por:

$$\sigma = \sqrt{V(\mathfrak{R}_t)} \quad (9)$$

3.2. El Valor en Riesgo (VaR)

Otra medida de riesgo es el Valor en Riesgo (*VaR* por sus siglas en inglés). Esta indica la máxima pérdida posible para un nivel de confianza y un período de tenencia dado. En términos estadísticos, este corresponde al α -ésimo cuantil (q_α) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del activo⁹.

Es decir, el *VaR* es el menos malo de los $(1-\alpha)100\%$ peores casos¹⁰ de la distribución de pérdidas y ganancias. Así, el administrador de riesgo tiene la idea de que la pérdida en su inversión no excederá el *VaR* con probabilidad α .

Por ejemplo, asumiendo que los retornos de un portafolio siguen una distribución normal estándar, el cinco por ciento peor de los casos se encontrará por encima de

⁸ Otra posible forma de expresar la ecuación (7) es:

$$V(\mathfrak{R}_t) = \omega' S' R S \omega$$

donde R es la matriz de correlaciones del portafolio y S es una matriz diagonal con las desviaciones estándar de cada uno de los activos.

⁹ Siguiendo la notación de McNeil *et al* (2004), en este documento el símbolo α representa un nivel de confianza, por ejemplo 0.99. Esta notación es diferente a la usada en estadística, donde α generalmente esta asociado a valores bajos de probabilidad. Para evitar confusiones en este trabajo el error tipo I asociado a una prueba de hipótesis será denotado como $\tilde{\alpha}$.

¹⁰ Bajo este contexto, los peores casos indican las pérdidas más grandes.

1.65, área sombreada de la Figura 1. Así, la máxima pérdida en el 95% mejor de los casos, o la mínima pérdida en el 5% de los peores casos, será de 1.65 multiplicada por el valor del portafolio.

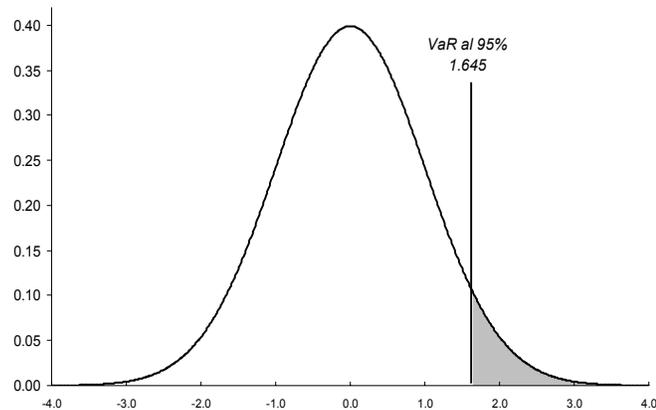


Figura 1. VaR de una variable aleatoria normal estándar.

3.2.1. Cálculo del VaR de forma paramétrica

Existen diferentes metodologías para calcular el VaR de forma paramétrica, el caso más simple resulta cuando se asume que la distribución de pérdidas y ganancias es normal. Dado este supuesto, $r_t \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, el VaR para un portafolio está dado por:

$$P[r_t \geq VaR] = P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha$$

$$\frac{VaR - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \equiv z_\alpha \quad (10)$$

$$\Rightarrow VaR = \mu + \sigma z_\alpha$$

donde $\Phi^{-1}(\bullet)$ es la función inversa de la distribución normal acumulada y z_α es el α -ésimo cuantil de una distribución normal estándar.

En el caso de una variable aleatoria con distribución normal, su función de distribución puede ser descrita por sus dos primeros momentos. Sin embargo, para otras distribuciones los momentos de órdenes mayores y en particular los asociados al coeficiente de asimetría y de curtosis, pueden ser importantes para determinar las características estocásticas de las series y por consiguiente para el cálculo del VaR.

En la Figura 2 se observan los valores en riesgo para dos variables aleatorias con curtosis diferentes. En este gráfico se presentan la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar y de una variable aleatoria que distribuye t-student con cinco grados de libertad ($\nu = 5$). Esta última presenta una curtosis más alta que

la normal¹¹, es decir, los eventos extremos tienen una probabilidad de ocurrencia más alta¹². Esto implica que el VaR con distribución t es más alto que el VaR asumiendo normalidad, en consecuencia, el VaR por normalidad subestima el riesgo en casos donde la distribución de pérdidas y ganancias presenta colas pesadas.

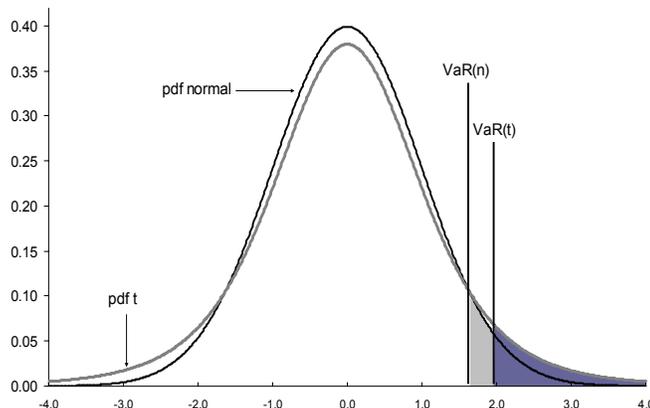


Figura 2. VaR para una variable con distribución normal estándar y una variable con distribución t -student ($\nu = 5$)

Si se supone que la distribución de pérdidas y ganancias estandarizada es t con ν grados de libertad, el valor esperado y la varianza de la serie sin estandarizar son μ y $\nu\sigma^2/(\nu-2)$. Por lo tanto, el VaR está definido por:

$$\begin{aligned}
 P[r_t \geq VaR] &= P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = P\left[t_{\nu,t} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha \\
 \frac{VaR - \mu}{\sigma} &= t_{\nu}^{-1}(\alpha) \equiv t_{\nu,\alpha} \\
 \Rightarrow VaR &= \mu + \sigma t_{\nu,\alpha}
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde $t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ es la inversa de la función de distribución t y $t_{\nu,\alpha}$ es el α -ésimo cuantil de una distribución t con ν grados de libertad.

De una manera más general el VaR puede ser calculado a través de la función de distribución inversa, la cual identifica el cuantil asociado a una probabilidad dada una distribución:

$$VaR_{\alpha} = F_X^{-1}(\alpha) \tag{12}$$

⁷ La curtosis para una variable aleatoria t con ν grados de libertad está dada por:

$$curtosis = \frac{3(\nu-2)}{(\nu-4)}, \nu > 4$$

¹² En estos casos se dice que la función de distribución presenta “colas pesadas”.

donde $F_X^{-1}(\alpha)$ es la función inversa de la función de distribución F_X y esta definida como¹³:

$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} \quad (13)$$

Esta función no tiene necesariamente una solución analítica, como en el caso de la función de distribución normal.

3.2.1.1. Estimación

Como se puede apreciar en la ecuación (10), en el caso más simple el VaR depende de dos parámetros, μ y σ^2 . En la práctica existen varios estimadores para estos parámetros de acuerdo con los supuestos realizados sobre las propiedades estocásticas de la serie. A continuación se describen algunos de los estimadores más utilizados para σ^2 ¹⁴. Para destacar algunas diferencias entre estas metodologías, estas son aplicadas a los variaciones diarias de la tasa interbancaria del mercado colombiano, *TIB*, para el período comprendido entre abril de 1995 y diciembre de 2004, (Figura 3).

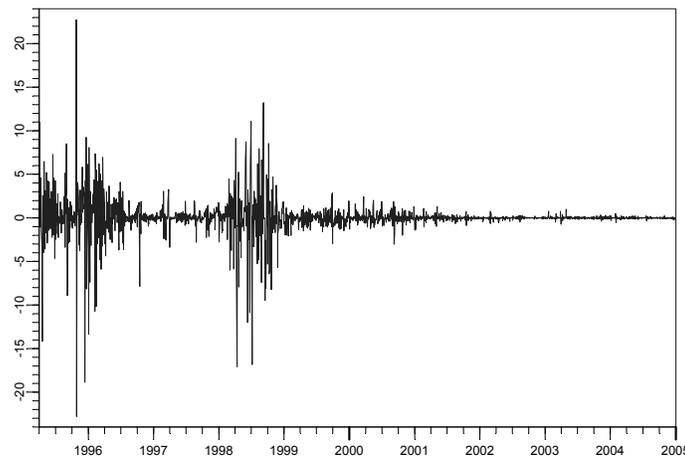


Figura 3. Variaciones TIB 1995-2004

Hasta ahora, un supuesto implícito en las metodologías mencionadas para el cálculo del VaR es que la volatilidad de los retornos del activo es constante a lo largo del tiempo. Aunque este supuesto facilita el cálculo de las medidas de riesgo, desconoce una regularidad empírica de los activos financieros: la volatilidad condicional no es constante a través del tiempo, específicamente, períodos de alta (baja) volatilidad del

¹³ De acuerdo con las ecuaciones (12) y (13) el VaR está definido en términos porcentuales ya que está expresado en las mismas unidades de X , en este caso retornos logarítmicos. Sin embargo, las unidades de medida finales del VaR son cantidades de dinero, por lo tanto el cuantil, $F_X^{-1}(\alpha)$, debe ser multiplicado por el valor de la posición.

¹⁴ Usualmente el estimador de μ es la media muestral, \bar{x} .

activo son seguidos por períodos de alta (baja) volatilidad (*volatility clustering*)¹⁵. En consecuencia, para tener un cálculo apropiado del VaR es necesario tener en cuenta el *régimen* de volatilidad bajo el cual se este calculando.

3.2.1.1.1 Volatilidad histórica

Si se supone que la varianza del activo es constante en el periodo de estudio, un estimador insesgado de la varianza, $\hat{\sigma}^2$, para una muestra de tamaño n esta definido por:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - \hat{\mu})^2}{n-1} \quad (14)$$

Usualmente la media de los retornos diarios es muy pequeña. Suponiendo ésta igual a cero y una muestra relativamente grande es común representar la ecuación (13) de la siguiente forma:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{n} \quad (15)$$

Sin embargo, en la mayoría las series financieras, como las variaciones de la *TIB* presentadas en la Figura 3, es usual que la varianza no sea constante en el tiempo. En este caso una metodología sencilla para estimar la varianza es a través de ventanas móviles:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sum_{i=t-m+1}^t \frac{r_i^2}{m}; \quad t = m, m+1, \dots, n$$

En la Figura 4 se presentan los resultados de las varianzas móviles estimadas para las variaciones de la *TIB* con diferentes tamaños de ventana, $m = 30$ (línea punteada) y $m = 60$ días (línea sólida). En esta gráfica es claro que el supuesto de varianza constante no es valido para esta serie. Un inconveniente de las ventanas móviles es la selección del tamaño de la ventana, ya que a medida que aumenta m la serie de volatilidades obtenida es más suave pero no necesariamente captura el comportamiento más reciente de la serie. Por el contrario, si m disminuye las observaciones más cercanas determinan el comportamiento de la volatilidad, sin embargo, tiene una dinámica más irregular.

¹⁵ Engle (1982)

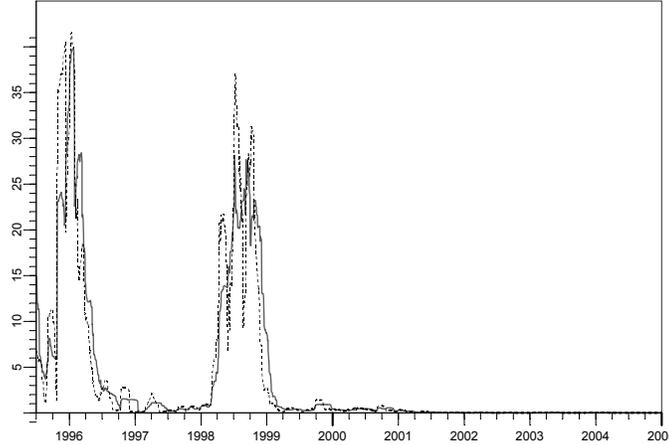


Figura 4. Volatilidad histórica para la TIB 1995-2004

3.2.1.1.2 Método de Suavizamiento Exponencial (RiskMetrics®)

Otra forma de calcular la volatilidad de un activo teniendo en cuenta que ésta no es constante es a través del método de suavizamiento exponencial, el cual es un promedio ponderando de las volatilidades pasadas de la forma:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{t-i}^2 \quad (16)$$

donde $\alpha_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow n$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Si se supone que las ponderaciones decaen exponencialmente a una tasa constante, es decir, $\alpha_{i+1}/\alpha_i = \lambda$ donde $0 < \lambda < 1$ ¹⁶ se obtiene:

$$\sigma_t^2 \approx (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 \quad (17)$$

rezagando (17) y multiplicando por λ :

$$\lambda \sigma_{t-1}^2 \approx (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^i r_{t-i-1}^2 \quad (18)$$

Finalmente, restando (18) de (17) y asumiendo un n grande se obtiene:

$$\sigma_t^2 \approx \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2 \quad (19)$$

La ecuación (19) indica que la volatilidad está determinada por el retorno y la volatilidad del periodo anterior. Su principal ventaja es que depende de un solo parámetro, λ , el cual indica la ponderación asignada a cada uno de los dos términos.

¹⁶ Es decir, $\alpha_i = \lambda^{i-1} \alpha_1$.

Esta metodología fue sugerida por J. P. Morgan¹⁷ y hace parte de *RiskMetrics*®. En general se recomienda que el parámetro λ tome valores entre 0.94 y 0.99.¹⁸

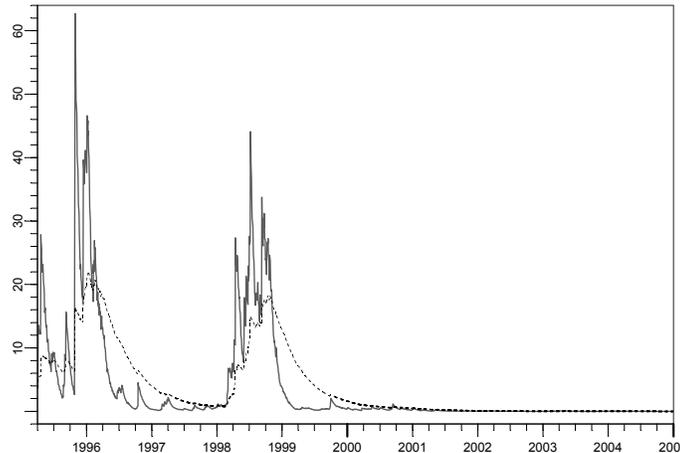


Figura 5. Estimaciones de las volatilidades con el método de suavizamiento exponencial para la TIB

En la Figura 5 se muestran dos ejemplos de volatilidades estimadas a través de este método con $\lambda = 0.94$ (línea sólida) y $\lambda = 0.99$ (línea punteada). En esta gráfica se observa que la serie presenta un comportamiento más suave a medida que se aumenta el valor del parámetro λ .

Tsay (2002) muestra que una de las características de esta metodología es que el pronóstico de la volatilidad del retorno para un horizonte k , $V(r_{t+k}[k]|t)$, esta dada por:

$$V(r_{t+k}[k]|t) = kV(r_{t+1}|t) \quad (20)$$

lo cual se conoce, en términos de desviaciones estándar, como la regla de la raíz cuadrada del tiempo.

Para $k = 1$, el *VaR* de la metodología *RiskMetrics*® se calcula como un *VaR* por normalidad, ecuación (10), suponiendo $\mu = 0$ y reemplazando σ por la raíz cuadrada de la varianza dada en la ecuación (19).

3.2.1.1.3 Modelos ARCH y GARCH

Como lo menciona Tsay (2002), el *VaR* esta asociado a la predicción de una posible pérdida de un portafolio para un horizonte de tiempo dado. Por lo tanto, este debería ser calculado usando la distribución de los pronósticos de los retornos.

¹⁷ Una descripción completa de esta metodología se encuentra en J.P. Morgan (1995)

¹⁸ *Ibidem*. Pág 205.

Específicamente, el *VaR* de los retornos de un portafolio, r_t , para un horizonte k , debería ser estimado con base en los pronósticos de $r_{t+k}[k]$ dada la información disponible hasta el período t . El pronóstico de $r_{t+k}[k]$, depende del modelo que se asuma para describir la dinámica de los retornos, por ejemplo, en el caso de *RiskMetrics*®, la volatilidad de los retornos es estimada a partir de la ecuación (19).

Un modelo más general que el asumido por *RiskMetrics*® es el modelo *ARCH*, el cual pretende replicar algunas regularidades de los activos financieros tales como los conglomerados de volatilidad (*volatility clustering*) y las colas pesadas de la distribución¹⁹. Los modelos *ARCH* (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models) fueron introducidos por Engle (1982) y suponen que la varianza no condicional es constante en el tiempo, mientras que la varianza condicional se asume variable. El modelo *ARCH* (q) se define de la siguiente forma:

$$r_t = f(z_t) + \varepsilon_t \quad (21)$$

$$\eta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (22)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (23)$$

donde $f(z_t)$ es una función que modela el valor esperado de r_t , esta puede ser por ejemplo, un modelo de regresión lineal o un proceso *ARMA*²⁰ y $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$ es un proceso independiente de h_t . Adicionalmente, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ y $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$. Es posible demostrar bajo estos supuestos que ε_t es un proceso ruido blanco con varianza condicional h_t .

Una posible generalización de estos modelos son los modelos *GARCH*, los cuales fueron desarrollados por Bollerslev (1986). Los modelos *GARCH* (generalized autoregressive conditional heteroskedastic) poseen una estructura de rezagos más flexible y en muchos casos, permiten una descripción más parsimoniosa de los datos. Un modelo *GARCH* (p, q) es descrito por las ecuaciones (21), (22) y (24), esta última ecuación es representada como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (24)$$

¹⁹ Una descripción detallada de las regularidades de los activos financieros se encuentra en Bollerslev *et al.* (1994).

²⁰ En el caso que $f(z_t)$ este asociada a un modelo *ARMA*, se dice que las ecuaciones (21), (22) y (23) conforman un proceso *ARMA-ARCH*.

donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, lo que garantiza la no negatividad de la varianza condicional.

En este modelo la varianza, no condicionada, del error es:

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad (25)$$

en consecuencia, si $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \geq 1$ la varianza del error no se encuentra definida un choque en la volatilidad no se desvanece a medida que avanza el tiempo. Por lo tanto, para que la varianza del error esté definida la suma de los coeficientes debe ser menor que uno. En el caso que la sumatoria de estos coeficientes sea igual a uno, Nelson (1990) propone los modelos *GARCH* integrados o *IGARCH* tales como el modelo *RiskMetrics®*, el cual se puede considerar como un caso particular de un modelo “*IGARCH* (1,1)” con $\alpha_0 = 0$ y $f(z_t) = 0$.

Como se mencionó anteriormente los modelos *ARCH* o *GARCH* pueden replicar dos hechos estilizados de los retornos financieros: conglomerados de volatilidad y distribuciones de colas pesadas. Por un lado, las ecuaciones (23) ó (24) implican conglomerados de volatilidad y segundo, dado que ε_t condicionado al conjunto de información pasada hasta $t-1$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza condicionada h_t , se puede demostrar que la curtosis de ε_t no condicionado es mayor que tres²¹, la curtosis bajo el supuesto de normalidad. Por lo tanto, la distribución de ε_t es de colas pesadas.

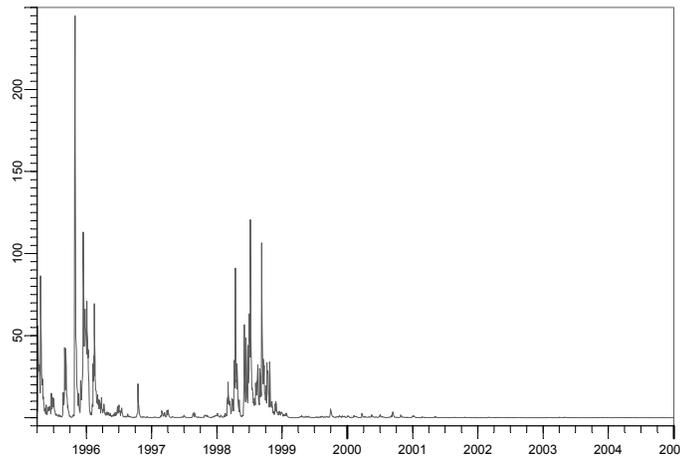


Figura 6. Varianza condicional para un modelo *IGARCH* (1,1). TIB Colombia 1995-2004

²¹ Esto es demostrado, entre otros textos, en Gouriéroux (1997).

3.2.2 Simulación Histórica

Otra manera a partir de la cual se puede obtener el VaR es a través de la información histórica de la serie de retornos, en este caso no se asume que la serie siga alguna distribución paramétrica en particular. En esta metodología el VaR es calculado como el α -ésimo percentil de la distribución empírica de pérdidas y ganancias. En la Figura 7, se muestra la distribución de pérdidas y ganancias de un activo para el cual se calcula el percentil 95, correspondiente al VaR del 95%.

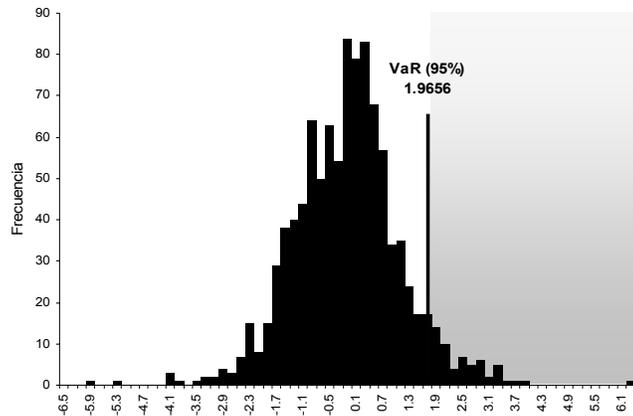


Figura 7. VaR por simulación histórica

Esta metodología evita la imposición de supuestos acerca de la distribución de los retornos y resulta fácil de implementar. Sin embargo, la simulación histórica supone que la distribución no cambia en el tiempo y por lo tanto es sensible al tamaño de la muestra seleccionado. Es así, como la inclusión o exclusión de datos dentro de la simulación puede cambiar los resultados del VaR. Otros inconvenientes de este método se encuentran asociados a la deficiente capacidad de pronóstico de retornos extremos debido a la posible ausencia de información acerca de este tipo de realizaciones. Adicionalmente, el carácter discreto de las observaciones impide encontrar percentiles específicos, por ejemplo con un tamaño de muestra de 500 observaciones no se puede obtener un VaR del 97.5%^{22 23}.

3.2.3 Método de simulación Bootstrap

Otra metodología utilizada para la estimación del VaR es el método de simulación por bootstrapping. Esta metodología también permite encontrar algunas características de la distribución del estimador VaR, tales como su varianza e intervalos de confianza sin realizar supuestos sobre la distribución de los retornos. El algoritmo para obtener el VaR a través de bootstrapping para las pérdidas de un activo, r_t , es:

²² Algunas comparaciones entre la simulación histórica y otros métodos para calcular el VaR se pueden encontrar en Mahoney (1996) y Danielsson y de Vries (2000).

²³ Existen otros métodos no paramétricos para estimar el VaR, por ejemplo, Butler y Schachter (1996) proponen un “kernel smoother” para estimar la función de distribución de pérdidas y ganancias.

- i) Se construyen B submuestras de tamaño S , ($t = 1, 2, \dots, S$), donde los retornos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados ($p = 1/S$), es decir, se realiza un muestreo aleatorio simple con reemplazamiento.
- ii) Para cada una de las B submuestras se calcula el VaR por simulación histórica ($VaR^{(1)}, VaR^{(2)}, \dots, VaR^{(B)}$)
- iii) Finalmente, un estimador del VaR puede ser calculado como el promedio de los VaR obtenidos en las B submuestras:

$$VaR^{bootstrap} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B VaR^{(i)} \quad (26)$$

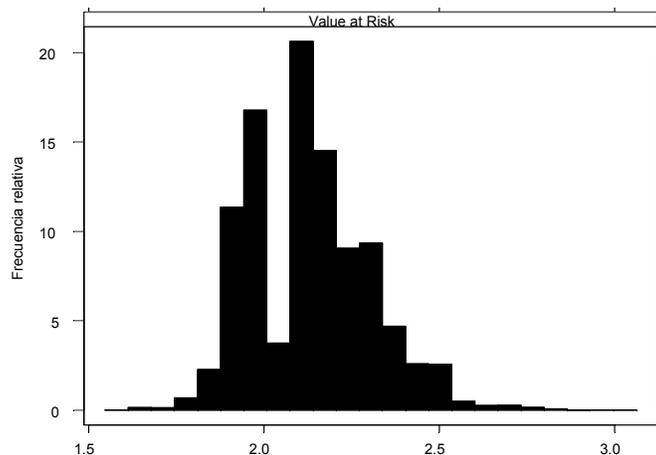


Figura 8. VaR por Bootstrapping ($B = 50000$)

En la Figura 8 se presenta el histograma para la distribución del $VaR_{0.5}$ obtenido a través del método de simulación de bootstrap para la cola derecha de la distribución de las variaciones de la TIB . En este ejercicio se utilizaron submuestras de tamaño $S = 2370$ y 50000 replicaciones. Los percentiles de esta distribución se pueden utilizar para calcular intervalos de confianza del VaR , para este ejercicio el intervalo de confianza al 90%, con base en los percentiles 5 y 95 son 1.8876 y 2.4433.

Un gran inconveniente que presenta esta metodología, es que asume que los retornos provienen de una distribución independiente e idénticamente distribuida, *i.i.d.*, lo cual no se presenta en general en retornos de activos financieros. Una posible solución a este problema es suponer un modelo apropiado para los retornos de tal forma que sus errores sean *i.i.d.*, realizar un proceso de simulación sobre estos y posteriormente calcular el VaR sobre la serie original.

3.2.4 Métodos de simulación Monte Carlo

A diferencia de los dos procedimientos anteriores, los métodos de simulación Monte Carlo asumen una distribución sobre los retornos²⁴. El procedimiento descrito en 3.2.3 puede ser utilizado para calcular el *VaR* por este método. Sin embargo, en lugar de realizar simulaciones históricas en la etapa *ii*), el *VaR* es estimado para cada submuestra de acuerdo con la distribución asumida²⁵. Al igual que los métodos de simulación bootstrap, este método permite estimar intervalos de confianza del *VaR*.

3.2.5 *VaR* y horizonte temporal

Como se mencionó anteriormente, el *VaR* es una medida que depende tanto del nivel de confianza, $\alpha 100\%$, como del período de tenencia del portafolio, k . En términos de regulación, el comité de Basilea recomienda el cálculo del *VaR* con un nivel de confianza del 99%, basado en información histórica de un año, 250 días hábiles, y un período de tenencia de 10 días²⁶, en el caso colombiano la Superintendencia Bancaria exige información histórica de por lo menos cuatro años, un periodo de tenencia de 10 días y un nivel de confianza mayor o igual al 98%. Para el método de *RiskMetrics*® J.P. Morgan asume un período de tenencia de un día a un nivel de confianza del 95%²⁷.

Las diferencias entre los valores del *VaR* de un activo cuando se tienen distintos períodos de tenencia se fundamentan en los siguientes resultados. Sea r_t el retorno logarítmico de un activo, entonces el retorno para un período de tenencia de k días es:

$$r_t[k] = \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i} \quad (27)$$

por lo tanto, el valor esperado y la varianza de $r_t[k]$ son:

$$E(r_t[k]) = \sum_{i=0}^{k-1} E(r_{t-i}) \quad (28)$$

$$V(r_t[k]) = \sum_{i=0}^{k-1} V(r_{t-i}) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{k-1} Cov(r_{t-i}, r_{t-j}) \quad (29)$$

²⁴ En el caso en que la dinámica estocástica de los retornos sea descrita por un modelo, el método de Monte Carlo supone una distribución sobre los errores de este modelo.

²⁵ Existen otras formas de calcular el *VaR* usando métodos de simulación Monte Carlo, una descripción sobre estas metodologías se puede encontrar en McNeil *et al.* (2004).

²⁶ Jorion (1999).

²⁷ Longerstaeck (1995) Pág 4

Si los retornos son *i.i.d.*²⁸, entonces $Cov(r_{t-i}, r_{t-j}) = 0$ para todo $i \neq j$ y $E(r_{t-i}) = \mu$, $V(r_{t-i}) = \sigma^2$ para todo i . De las ecuaciones (28) y (29) se obtiene:

$$E(r_t[k]) = k\mu \quad (30)$$

$$V(r_t[k]) = k\sigma^2 \quad (31)$$

Bajo estas condiciones, el valor esperado y la varianza de $r_t[k]$ son el producto del número de períodos, k , por el valor esperado y la varianza de r_t , respectivamente. Por ejemplo, el cálculo del *VaR* bajo los supuestos de normalidad e *i.i.d.* para un período de tenencia k es:

$$VaR[k] = k\mu + \sqrt{k} z_\alpha \sigma \quad (32)$$

Es decir, a medida que se incrementa el período de tenencia, el *VaR* describe una curva cóncava. Este efecto es más claro para valores pequeños de k , donde domina el efecto de la varianza, $\sqrt{k}\sigma$, sobre la tendencia, $k\mu$, o cuando el valor esperado de los retornos es cero. Esta regla es conocida como la regla de “la raíz cuadrada del tiempo”. Es posible mostrar que para modelos específicos, como *RiskMetrics*®, se obtiene este resultado. En consecuencia, se pueden obtener escalas de equivalencia entre diferentes *VaR*, como en el caso del *VaR* obtenido por *RiskMetrics*® y el *VaR* recomendado por el Comité de Basilea a través de la identidad:

$$VaR_{Basilea} = \frac{2.32}{1.65} \times \sqrt{10} \times VaR_{RiskMetrics} = 4.45 \times VaR_{RiskMetrics} \quad (33)$$

Donde 1.65 y 2.32 son cuantiles de una distribución normal estándar asociados a probabilidades de 0.95 y 0.99, respectivamente.

3.2.6. Características y críticas del *VaR*

El *VaR* es una medida generalmente aceptada por los diferentes participantes de los mercados financieros, ya que este presenta varias cualidades con respecto a su implementación y comprensión, las principales ventajas que caracterizan el *VaR* son²⁹:

- i) El *VaR* es una medida de riesgo *universal*, ya que este puede ser aplicado a cualquier tipo de activo o fuente de riesgo.
- ii) El *VaR* es *simple*, posee una fácil interpretación.
- iii) El *VaR* es *completo*, resume en un solo número, en unidades monetarias, todas las posibles fuentes de riesgo de mercado existentes en un portafolio.

²⁸ En este contexto este supuesto se conoce como la hipótesis de mercados eficientes.

²⁹ Acerbi y Tasche. (2002).

Sin embargo, Artzner *et al.* (1998), definieron formalmente algunas condiciones que debería satisfacer una medida de riesgo e introdujo el concepto de medida de riesgo coherente. Sea $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de riesgo, donde V es un espacio de variables aleatorias en el cual se encuentran todos los factores de riesgo, se dice que ρ es una medida de riesgo *coherente* si satisface las siguientes condiciones³⁰:

- i) **Monotonicidad:** para todo $X, Y \in V$ con $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
- ii) **Homogeneidad positiva:** para todo $\lambda \geq 0$, y $X \in V$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
- iii) **Invariante ante traslaciones:** para todo $X \in V$, y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$.
- iv) **Subaditividad:** para todo $X, Y \in V$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

La subaditividad tiene un significado especial dentro de la administración de riesgo, ya que esta asociada con el principio de diversificación. Ante portafolios grandes, en los que resulta complicado calcular una medida de riesgo global, es útil conocer que el máximo riesgo que podría tener portafolio corresponde a la suma de los riesgos individuales. Además, esta propiedad posee una relación con la convexidad de la medida de riesgo, lo cual garantiza que se puede encontrar una combinación óptima dentro del portafolio tal que minimice el riesgo³¹.

Sin embargo, es posible mostrar que el *VaR* no satisface la condición de subaditividad sino únicamente bajo distribuciones elípticas como en el caso de la normal³², por lo que se dice que el *VaR no es una medida coherente de riesgo*, en consecuencia el *VaR* puede llevar a resultados contradictorios y en algunos casos adversos para el administrador de riesgo³³.

3.3. Expected Shortfall

Ante estos inconvenientes que presenta el *VaR*, Artzner, Delbaen Ebert y Heath (2001), definen otra medida de riesgo, *Expected Shortfall (ES)*, que satisface las propiedades anteriormente mencionadas. El *Expected Shortfall* indica cual es el valor esperado de la pérdida, dado que ésta es mayor que el *VaR*. Para los retornos de un activo r_t , el *ES* esta definido por³⁴:

$$ES_{\alpha} = E(r | r > VaR_{\alpha}) \quad (34)$$

³⁰ Artzner *et al.* (1998).

³¹ Acerbi y Tasche, (2002).

³² Embrechts, *et. al.* (2002). Pág. 12.

³³ Para algunos ejemplos en los cuales el *VaR* es una medida incoherente, ver Acerbi y Tasche. (2002).

³⁴ La ecuación (34) presenta la definición del *ES* en el caso de distribuciones continuas. Sin embargo, para esta medida de riesgo existen otras definiciones más generales las cuales pueden ser aplicadas tanto a casos continuos como discretos. Una discusión detallada sobre estas medidas se encuentra en Acerbi y Tasche (2002).

En la práctica, el *ES* puede ser entendido como el promedio de los $(1-\alpha)100\%$ peores casos y puede ser calculado a través del promedio de los valores que exceden el *VaR* con un nivel de confianza de α . El cálculo del *ES*, para una distribución continua, está definido por:

$$ES_{\alpha} = E(r | r > VaR_{\alpha}) = \frac{1}{1 - F_R(VaR_{\alpha})} \int_{VaR_{\alpha}}^U r f_R(r) dr \quad (35)$$

donde U representa el extremo superior de los retornos³⁵, y $F_R(\cdot)$, $f_R(\cdot)$, corresponden a la función de distribución y de densidad de los retornos, respectivamente. Si $R \sim N(\mu, \sigma^2)$, el *ES* está dado por:

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)} \quad (35a)$$

donde $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son las funciones de densidad y distribución de una variable aleatoria normal estándar, respectivamente y $z = \frac{1}{\sigma}(VaR_{\alpha} - \mu)$. En la Figura 9 se muestran algunas de las diferencias entre los conceptos que implican las definiciones de *ES* y *VaR*. En esta gráfica se presentan las colas derechas para las funciones de densidad de dos activos, junto con el *VaR* y el *ES* respectivo a un nivel de confianza del 95%. El primer activo sigue una distribución *t* student estandarizada con 5 grados de libertad, línea punteada, mientras el segundo se distribuye normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1.225$, línea sólida.

A pesar que en este ejercicio el *VaR* para los dos activos es el mismo, 2.015, los *ES* son diferentes. Es decir, aunque el área a la derecha del *VaR* es la misma en los dos casos, 0.05, las colas pesadas de la *t* implican que el *ES* es mayor para el activo que sigue esta distribución³⁶.

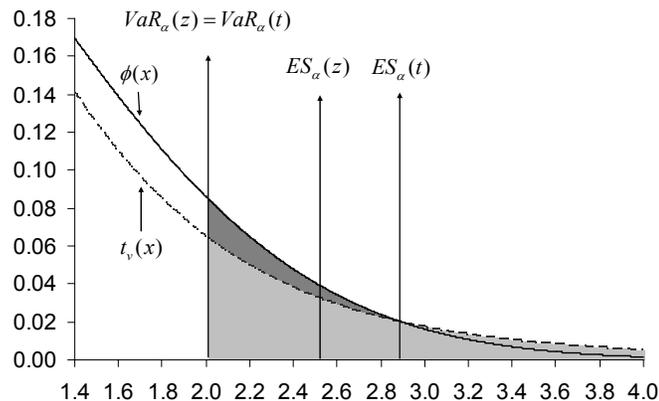


Figura 9. *VaR* y *ES*

³⁵ En algunas distribuciones, como por ejemplo la normal, el límite superior es infinito.

³⁶ Esto se debe a que el *ES* tiene en cuenta la forma de la distribución condicional, Acerbi y Tasche (2002).

Es importante anotar que las estimaciones del *ES* y del *VaR* son más complicadas a medida que se aumentan el número de activos. Para reducir el tiempo de cálculo Alexander (2000) plantea el uso de componentes principales para la generación de matrices de varianzas y covarianzas dentro del portafolio.

4. Medidas de riesgo y Teoría del Valor Extremo

Para la administración de riesgo es de gran importancia tener la mayor cantidad de información disponible. Parte de esta información se relaciona con el tamaño de las pérdidas en que puede incurrir un portafolio. Sin embargo, cuando se está interesado en las pérdidas máximas de un activo, pueden existir inconvenientes por la poca disponibilidad de este tipo de datos.

Adicionalmente, no es posible realizar inferencias sobre pérdidas muy grandes con metodologías estándar, ya que en algunos casos puede que no existan pérdidas observadas de este tipo de magnitudes y por lo tanto no son consideradas por los modelos de inferencia usuales.

Desde un punto de vista estadístico, en este caso interesa la distribución del máximo valor de la serie en lugar de la distribución de los retornos. Este problema es estudiado en detalle por la teoría del valor extremo, *EVT* por sus siglas en inglés, la cual presenta una estructura adecuada para la medición de riesgos, debido a que ésta se concentra en la estimación de la probabilidad de eventos que son más extremos que aquellos observados³⁷. Análogo al teorema central del límite, que estudia el comportamiento de la medida de tendencia central de la distribución, la *EVT* se concentra en resultados asintóticos con relación al valor máximo de una variable aleatoria.

La *EVT* ha sido ampliamente usada en áreas como la hidrología y la ingeniería, y en los últimos años en finanzas. De acuerdo con Coles (2001), es importante tener en cuenta algunas limitaciones de esta metodología: *i*) los resultados obtenidos se basan en derivaciones asintóticas, por lo que estos no se pueden tomar como exactos en muestras finitas, *ii*) los modelos usados en la *EVT* están construidos bajo ciertos supuestos, los cuales no necesariamente se mantienen en la práctica y *iii*) estos modelos implican el uso parcial de la información, ya que únicamente se concentran en las observaciones extremas³⁸.

4.1. Cómo obtener valores extremos:

La implementación de la *EVT* requiere en una etapa inicial, la obtención de una serie de valores extremos a partir de los datos observados. Como ya se ha mencionado anteriormente, debido a que en finanzas generalmente se trabaja con el negativo de

³⁷ Coles (2001)

³⁸ *Ibidem*. Pág. 2.

los retornos logarítmicos, los eventos con mayor valor corresponden a pérdidas muy grandes. Existen dos metodologías para definir un valor extremo, el método de máximo por bloques y el método de picos sobre un umbral.

En la metodología de máximos por bloques se identifican los eventos que tengan el valor más alto durante un período de tiempo específico. Este periodo de tiempo es calculado a través de la división de la muestra en j bloques contiguos de tamaño n . La serie de valores extremos, $\{M_{n,i}\}_{i=1,2,\dots,j}$, se obtiene a partir del valor máximo de la serie dentro de cada bloque, $M_{n,i}$. Por ejemplo, en la Figura 10 se presentan los máximos mensuales para las variaciones diarias de la *TIB*, marcados por círculos negros, entre abril de 1995 y abril de 1996.

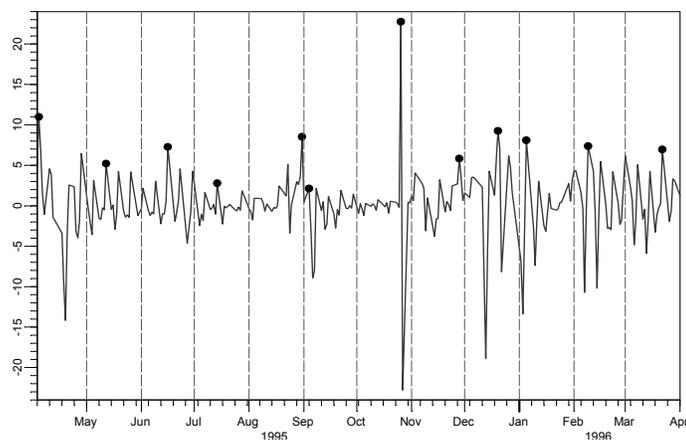


Figura 10. Máximos por bloques TIB 1995-1996.

Al identificar los máximos de la serie a través de esta metodología, es posible reducir la dependencia entre los eventos extremos y se garantiza que se están tomando observaciones a lo largo de toda la muestra. Sin embargo, este método desconoce la información asociada a otras observaciones extremas que no correspondan al máximo de su respectivo bloque. Adicionalmente, la información obtenida se reduce a medida que se aumenta el tamaño del bloque, generando posibles pérdidas de información.

El método de picos sobre el umbral, *POT* por sus siglas en inglés, identifica los valores extremos de la serie de retornos como aquellos que excedan un umbral u , estos valores son conocidos como *excesos de retorno*³⁹. Un ejemplo de esta metodología aplicado a la *TIB* en el período de abril de 1995 hasta abril de 1996 se muestra en la Figura 11. En esta gráfica las pérdidas son representadas por una línea continua y los excesos de retorno por unos círculos negros. El umbral utilizado es $u = 5$.

³⁹ Tsay. (2002)

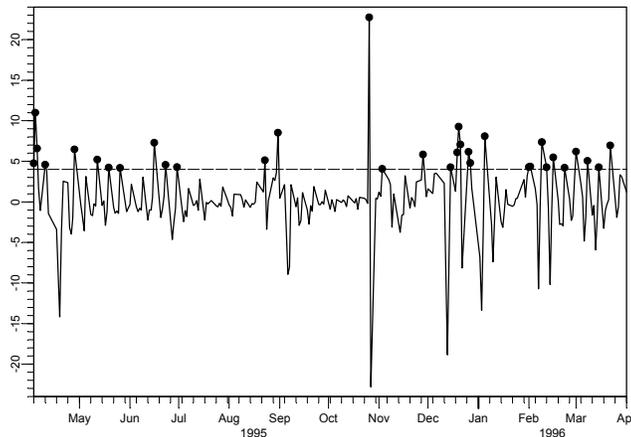


Figura 11. Máximos a través de POT. TIB 1995-1996

Como se puede observar en la Figura 11, al usar la metodología de POT el número de valores extremos no depende del número de observaciones incluidas en el análisis, aunque comparado con el método de bloques puede presentar un mayor grado de dependencia.

Un problema que presentan estas metodologías esta asociado a la definición del umbral o la definición de la longitud del bloque, estos temas serán discutidos en secciones posteriores.

4.2. Modelos de teoría del valor extremo⁴⁰

Análogo al teorema central del límite, el cual en líneas generales indica como la media muestral de una variable aleatoria converge en distribución a una distribución normal a medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito, de acuerdo con cada una de las definiciones de máximo existen dos resultados asintóticos para modelar el comportamiento de los extremos de una variable aleatoria.

4.2.1. Distribución de los máximos

Sea $\{R_t\}_{t=1,2,\dots,n}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* las cuales siguen una distribución F_R . El máximo de esta secuencia, M_n , es una variable aleatoria definida por:

$$M_n = \max \{R_1, R_2, \dots, R_n\} \quad (36)$$

y la distribución de M_n , la cual corresponde a la distribución del estadístico de orden n , es la siguiente:

⁴⁰ En esta sección se siguen de cerca los trabajos de Coles (2001), McNeil *et al.* (2004) y Embrechts *et al.* (1997)

$$\begin{aligned}
P\{M_n \leq z\} &= P\{R_1 \leq z, R_2 \leq z, \dots, R_n \leq z\} \\
P\{M_n \leq z\} &= \prod_{i=1}^n P\{R_i \leq z\} = \{F_R(z)\}^n
\end{aligned} \tag{37}$$

Dado que en la práctica F_R es desconocida, existen dos procedimientos para obtener la distribución de M_n . Como primera estrategia se puede partir de los datos observados, encontrar \tilde{F}_R , y posteriormente utilizar (37) para obtener la distribución de M_n . Sin embargo, si n es grande, este procedimiento puede producir malas aproximaciones. Un segundo tipo de procedimientos estima en forma directa F_R^n a partir, por ejemplo, de técnicas utilizadas en *EVT*, como se explica a continuación.

Para cualquier $z < R_U$, donde R_U es el extremo superior de los retornos⁴¹, $F_R^n \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$, por lo que la distribución de M_n tiende hacia una distribución degenerada⁴² con masa concentrada en R_U ⁴³. Para obtener la distribución de M_n , es necesario encontrar una secuencia de constantes $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ tal que estabilicen a la secuencia de máximos tanto en localización como en escala⁴⁴. Dicha transformación es de la forma:

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n} \tag{38}$$

de esta manera se pueden definir familias de distribuciones límite tales que satisfagan la siguiente condición, para variables aleatorias *i.i.d.* R_1, R_2, \dots, R_n , unas constantes apropiadas $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y para $n \geq 2$:

$$F_R^n(a_n r + b_n) \stackrel{d}{=} F_R(r) \tag{39}$$

Si R satisface la condición (39) se dice que la función de distribución de R , F_R , es una *distribución estable en los máximos o max-estable* de R_1, R_2, \dots, R_n . Es decir, una distribución para la cual el máximo muestral, re-escalado, posee la misma distribución que la variable aleatoria inicial⁴⁵. Fisher y Tippet (1928) y Gnedenko

⁴¹ En otras palabras, R_U es el valor más pequeño para el cual $F(R_U) = 1$.

⁴² Una función de distribución se dice degenerada si su masa de probabilidad esta concentrada en un solo punto.

⁴³ De manera similar en el teorema central del límite \bar{x} converge a una distribución degenerada con masa concentrada en $\mu = E(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

⁴⁴ Para el caso del teorema central del límite con respecto a \bar{x} , $a_n = \sigma/\sqrt{n}$ y $b_n = \mu$.

⁴⁵ Coles (2001) Pág. 50.

(1943) demostraron que las únicas distribuciones límite, no degeneradas, a las que puede converger F_R^n están dadas por el teorema 1.

Teorema 1. (Fisher-Tippett, Gnedenko). Sea $\{R_n\}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* Si existen constantes estabilizadoras $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tal que a medida que $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) &= P(M_n \leq a_n z + b_n) \\ &= F_R^n(x) \xrightarrow{d} G(x) \end{aligned} \quad (40)$$

donde G es una función de distribución no degenerada, entonces G debe ser alguna de las siguientes distribuciones:

$$I). \text{ Gumbel: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$II). \text{ Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0. \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0. \end{cases} \quad (42)$$

$$III). \text{ Weibull: } \psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0. \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (43)$$

donde $x = a_n z + b_n$ y $\alpha > 0$ se denomina el parámetro de forma para las familias Fréchet y Weibull. Este grupo de distribuciones es conocido como *distribuciones de valor extremo*. El teorema 1 implica que el máximo de la variable aleatoria puede ser estabilizado a través de secuencias de parámetros de escala, $\{a_n > 0\}$, y de localización $\{b_n\}$ de tal manera que M_n^* converja en distribución a alguna de las familias mencionadas⁴⁶.

En la Figura 12 se presentan las funciones de densidad y distribución para cada una de las familias de distribución de valor extremo. La función de distribución Weibull posee un extremo superior finito, mientras la distribución Fréchet presenta un extremo inferior finito, además, la distribución Fréchet presenta un crecimiento más lento que la distribución Gumbel y Weibull, siendo la distribución Weibull aquella que posee la tasa de crecimiento más rápida.

⁴⁶ Parte de la demostración del teorema 1 se presenta en Embrechts *et al*, (1997) Pág. 122.

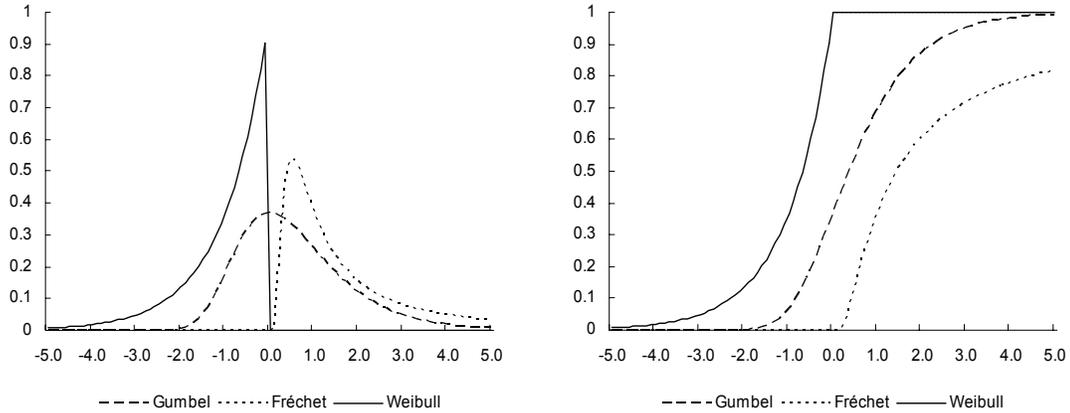


Figura 12. Funciones de densidad (izquierda) y distribución (derecha) de las distribuciones de valor extremo. Para las distribuciones Fréchet y Weibull $\alpha = 1$.

Un concepto asociado a la función de distribución de los máximos es el *dominio de atracción de los máximos*, *MDA* por sus siglas en inglés, el cual establece que si la condición (40) se tiene para alguna distribución no degenerada G , se dice que la función de distribución de los retornos F_R pertenece al dominio de atracción de los máximos de G ⁴⁷. Por lo tanto, el *MDA* relaciona la distribución, F_R , de una variable aleatoria R con la distribución límite asociada con sus “máximos”.

En términos prácticos, la estimación de los máximos en bloques implica varias etapas. En la primera fase se obtiene la serie de máximos, posteriormente se selecciona la distribución que se ajuste apropiadamente a esta serie y finalmente, se estiman los parámetros de la distribución seleccionada a través del método de máxima verosimilitud.

Para evitar la selección de una función de distribución a priori, es posible utilizar la representación de Jenkinson y Von Mises de las distribuciones involucradas en el teorema 1. En esta reformulación se representan las distribuciones de valor extremo en una sola función de distribución, la *distribución generalizada de valor extremo*, *GEV* por sus siglas en inglés, la cual se define como:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\} & \text{si } \xi \neq 0. \\ \exp\{-e^{-x}\} & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (44)$$

donde $1 + \xi x > 0$. De una manera más general, es posible obtener la distribución *GEV* con parámetros de localización, $\mu \in \mathbb{R}$, y escala, $\sigma > 0$, tal que $H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_{\xi}((x - \mu)/\sigma)$. La *GEV* puede ser obtenida fijando el valor de $\xi = \alpha^{-1}$

⁴⁷ Para ejemplos de dominios de atracción de los máximos con diferentes tipos de distribuciones véase Embrechts *et al*, (1997) y McNeil *et al*, (2004)

para la distribución Fréchet, $\xi = -\alpha^{-1}$ para la distribución Weibull y $\xi = 0$ en el caso de la distribución Gumbel.

De esta manera es posible realizar la estimación en la metodología de máximos por bloques usando la distribución *GEV* y el método de máxima verosimilitud. Dependiendo del resultado de la estimación del parámetro ξ , si es mayor, menor o igual a cero, la *GEV* toma alguna de las tres formas funcionales anteriormente descritas.

En general, el *MDA* para las distribuciones de valor extremo depende de las características de las distribuciones que se estén analizando. El *MDA* para las distribuciones que presentan colas pesadas, usuales en aplicaciones financieras, se encuentran en las distribuciones Gumbel y Fréchet, aunque principalmente se concentran en esta última. Para la distribución *GEV* con $\xi > 0$, distribución Fréchet, el *MDA* esta definido como:

$$F_R \in MDA(H_\xi) \Leftrightarrow \bar{F}_R(x) = x^{-1/\xi} L(x) \quad (45)$$

donde $\xi > 0$, $\bar{F}_R(x) = 1 - F_R(x)$ es la función de sobrevivencia de R , y $L(x)$ corresponde a una función que varía lentamente. Las funciones que pertenecen a este *MDA* son funciones en las cuales sus colas decaen a una tasa constante⁴⁸, el parámetro $\alpha = 1/\xi$ es conocido como el *índice de colas*. Formalmente, se dice que $L(x)$ es una función que *varía lentamente* si es una función que se puede medir en el intervalo $(0, \infty)$ y satisface la condición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad (46)$$

para $t > 0$. Ejemplos de esta función son $L(x) = \kappa$ donde κ es una constante y $L(x) = \ln(x)$. Embrechts *et al.* (1997) muestran que para variables aleatorias no negativas que pertenecen al *MDA* de la distribución Fréchet, $E(X^k)$, su k -ésimo momento, es igual a infinito para $k > 1/\xi$.⁴⁹

Para el caso Gumbel, $\xi = 0$, aunque su *MDA* se encuentra especialmente en distribuciones de colas livianas, también incluye algunas distribuciones con colas más pesadas que las de la normal. A diferencia del caso Fréchet donde sus colas decaen a una tasa constante, en general las colas de las distribuciones que

⁴⁸ En estos casos, se dice que las distribuciones poseen colas que varían regularmente o *power tails*. Estas a su vez se encuentran relacionadas con un concepto conocido como leyes de potencia. Para una discusión amplia acerca de las leyes de potencia y sus implicaciones en administración de riesgo véase Farmer y Geanakoplos (2004).

⁴⁹ Embrechts *et al.* (1997), página 568.

pertencen al *MDA* Gumbel decrecen de forma exponencial, un ejemplo de este caso es la distribución lognormal. Para $\xi < 0$, el *MDA* de la distribución Weibull resulta poco atractivo para la medición de riesgos de mercado, ya que a éste pertenecen distribuciones truncadas en la cola derecha, como es el caso de las distribuciones uniforme, triangular y beta⁵⁰.

La decisión acerca del tamaño del bloque, n , tiene grandes implicaciones en esta metodología. Si se utilizan bloques muy pequeños se tiene una serie de máximos con gran cantidad de observaciones, aunque puede producir sesgos en la estimación debido a la mala aproximación del resultado límite presentado en el teorema 1. Por otra parte, tamaños de bloque grandes reducen este problema, pero generan una serie de máximos con pocas observaciones, lo cual produce estimaciones con varianzas grandes.

4.2.1.1. Otras medidas de riesgo

A partir de la teoría del valor extremo es posible introducir otras medidas de riesgo que se concentran en la frecuencia y la magnitud de la realización de eventos extremos. Estas medidas son conocidas como el *Return level* y el *Return period*.

Sea $M_n = \{M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,j}\}$ el conjunto de los máximos obtenidos en j bloques no traslapados de tamaño n generados a partir de la realización de una variable aleatoria *i.i.d.*, cuya función de distribución pertenece al *MDA* de $H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$. El *Return level*, $r_{n,k}$, indica cual es el nivel de pérdida que se espera sea excedido, en promedio, una vez cada k períodos de tamaño n . Por ejemplo, para una serie mensual con bloques anuales, $r_{12,10}$ corresponde al nivel de pérdida anual que será excedido una vez cada diez años. Por consiguiente, la probabilidad de que una pérdida sea mayor que $r_{n,k}$ es $p = P(R > r_{n,k}) = 1/k$. El *return level* se puede definir como el cuantil de la distribución de los máximos asociado a una probabilidad $1-p$, formalmente:

$$r_{n,k} = H_{\xi, \mu, \sigma}^{-1}(1-p)$$

$$r_{n,k} = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left\{ 1 - [-\log(1-p)]^{-\xi} \right\}, & \text{para } \xi \neq 0. \\ \mu - \sigma \log[-\log(1-p)], & \text{para } \xi = 0. \end{cases} \quad (47)$$

Por otro lado, el *Return period*, $k_{n,u}$, indica cada cuantos períodos de tamaño n una pérdida excederá, en promedio, un nivel de pérdidas u . Este el conjunto $M_n = \{M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,j}\}$ definido de igual manera que en el párrafo anterior, entonces la probabilidad del evento $\{M_n > u\}$ esta dada por:

⁵⁰ McNeil *et al.* (2004) Pág. 260-261.

$$P(M_n > u) = \bar{H}_{\xi, \mu, \sigma}(u) = p \quad (48)$$

donde $\bar{H}_{\xi, \mu, \sigma}(u)$ es la función de sobrevivencia de M_n . Sea $\tilde{L}(u)$ la variable aleatoria que cuenta el número de períodos hasta que un máximo presente una pérdida superior a u , es decir⁵¹:

$$\tilde{L}(u) = \min \{i > 1 : M_{n,i} > u\} \quad (49)$$

$\tilde{L}(u)$ sigue una distribución geométrica con probabilidad p . El *return period* se define como:

$$k_{n,u} = E[\tilde{L}(u)] = \frac{1}{p} = (\bar{H}_{\xi, \mu, \sigma}(u))^{-1} \quad (50)$$

Por ejemplo, para una serie mensual con bloques anuales, $k_{12, 0.05}$ indica cada cuantos años, en promedio, se presentará una pérdida mensual superior al 5%. En la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de la *GEV* para las variaciones diarias de la *TIB* entre abril de 1995 y diciembre de 2004 utilizando bloques mensuales, $n = 117$. El valor de $\hat{\xi}$ mayor que cero indica que la distribución de los máximos pertenece al *MDA* de la distribución Fréchet.

$\hat{\xi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1.18135	0.5601	0.4515
(0.1429)	(0.0885)	(0.0607)

Tabla 1. Parámetros estimados de la *GEV* para la *TIB*, errores estándar entre paréntesis.

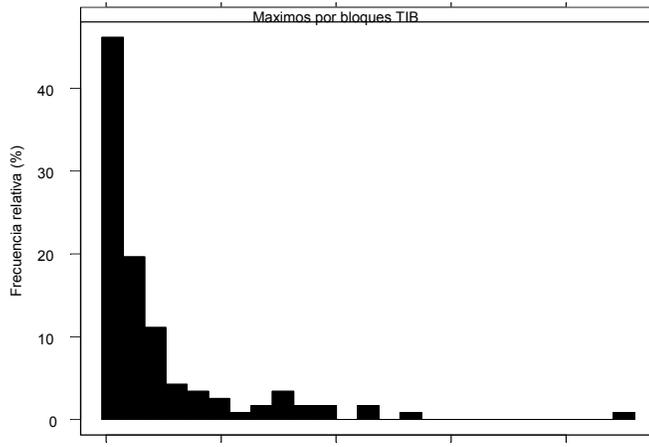


Figura 13. Histograma de los máximos mensuales *TIB*.

⁵¹ Una demostración completa de este resultado se encuentra en Embrechts *et al.* (1997) Pág. 305.

A partir de los parámetros estimados, por ejemplo, es posible obtener el *return level*, $r_{20,60} = 59.15$, para bloques mensuales ($n = 20$ días hábiles aproximadamente). Este valor indica que en promedio en un mes cada cinco años, $k = 60$ meses, la *TIB* presenta una variación superior a 5915 puntos básicos. Es importante aclarar que este ejercicio únicamente pretende ilustrar la aplicación del método de máximos en bloques, ya que como se discutirá más adelante, esta aplicación presenta algunos inconvenientes cuando la muestra de donde provienen los máximos no sigue una distribución *i.i.d.*

4.2.2. Distribución de los excesos

Un segundo tipo de metodología desarrollado en teoría del valor extremo es la asociada la distribución de los excesos sobre un umbral. El procedimiento para obtener los valores extremos según este método, *POT*, se encuentra definido en la segunda parte de la sección 4.1. Como lo menciona Coles (2001), esta metodología tiene una gran aceptación debido al mejor aprovechamiento de los datos frente a la metodología de máximos en bloques.

Sea R una variable aleatoria la cual tiene una función de distribución F_R , la función de distribución de R condicionada a que esta variable sea mayor que un umbral dado u , es conocida como la distribución de *excesos de R* , $F_{R,u}$, y esta dada por:

$$F_{R,u}(y) = P\{R - u \leq y \mid R > u\} \quad (51)$$

donde $0 \leq y \leq R_U - u$, y R_U corresponde al extremo superior de la variable aleatoria.

Si $F_R \in MDA(H_{\xi,\mu,\sigma})$, es posible mostrar que:

$$F_{R,u}(y) \approx G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y/\beta)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0. \\ 1 - \exp(-y/\beta) & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (52)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ y $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$. Los parámetros ξ y β son conocidos como los parámetros de forma y escala, respectivamente y $G_{\xi,\beta}$ es conocida como la *Distribución Generalizada de Pareto*, *GPD* por sus siglas en inglés. Balkema y De Hann (1974) y Pickands (1975), muestran que la *GPD* es la única función de distribución no degenerada la cual aproxima el comportamiento de la función de excesos,⁵² tal como lo muestra el teorema 2.

⁵² Longin y Solnik (2001). Pág. 652.

Teorema 2. (Pickands-Balkema-de Haan). Sea $\{R_n\}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* Es posible encontrar una función $\beta(u) > 0$ tal que:

$$\lim_{u \rightarrow R_U} \sup_{0 \leq y \leq R_U - u} |F_{R,u}(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0 \quad (53)$$

sí y solo sí $F_R \in MDA(H_{\xi, \mu, \sigma})$ y $\xi \in \mathbb{R}$. En otras palabras, para aquellas distribuciones en las que sus máximos muestrales convergen en distribución a la distribución *GEV*, su distribución de excesos converge a una *GPD*. Además, ya que el parámetro ξ de la *GPD* corresponde al mismo parámetro de la distribución *GEV*, el valor de ξ sigue describiendo el tipo de función de distribución, tal como se mostró anteriormente.

Dependiendo del valor del parámetro ξ de la *GPD* se obtienen tres tipos de funciones de distribución. En el caso que $\xi > 0$, la *GPD* es una distribución Pareto con parámetros $\alpha = 1/\xi, \kappa = \beta/\xi$ ⁵³ para valores no negativos de la variable aleatoria, $y \geq 0$. Para $\xi = 0$ la *GPD* corresponde a una distribución exponencial con parámetro $1/\beta$ y $y \geq 0$. Cuando $\xi < 0$, las *GPD* toma la forma de una distribución del tipo Pareto II, la cual está definida para el rango $0 \leq y \leq -\beta/\xi$.

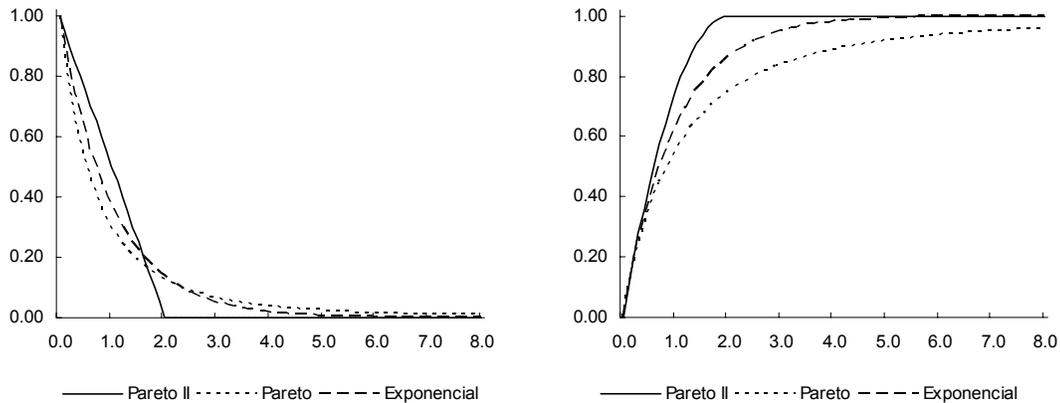


Figura 14. Funciones de densidad (izquierda) y distribución (derecha) de la *GPD* para $\xi = 0$, línea con punteado grueso, $\xi = -0.5$, línea sólida, y $\xi = 0.5$, línea con punteado fino, en todos los casos $\beta = 1$

Una función relacionada con los modelos de excesos sobre un umbral es la media de los excesos, $e(u)$, la cual se define como:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (54)$$

⁵³ Ver Embrechts *et al.* (1997) Pág. 35.

para el caso de la *GPD*, con parámetros $\beta = \beta_0 > 0$ y $\xi < 1$ la media de los excesos esta dada por:

$$e(u) = \frac{\beta(u)}{1-\xi} = \frac{\beta_0 + \xi u}{1-\xi} \quad (55)$$

en este caso en particular, la media de los excesos presenta una tendencia lineal con respecto a u con pendiente $\xi/1-\xi$. Vale la pena destacar que para un valor $v > u$, la media de los excesos bajo esta misma distribución esta dada por:

$$e(v) = \frac{\beta_0 + \xi(v-u)}{1-\xi} \quad (55a)$$

4.2.2.1. El problema de la selección del umbral.

Análogo al problema de la selección del tamaño del bloque, en la metodología *POT* la selección del umbral u es complicada. Un umbral muy bajo garantiza una serie de máximos con un mayor número de observaciones, sin embargo, el resultado asintótico del teorema 2 no es valido en este caso, lo cual lleva a una estimación sesgada. Por otro lado, un umbral demasiado alto genera pocos excesos, lo cual conlleva a una gran varianza en la estimación.

Sea $\{R_t, t \in \mathbb{Z}\}$ una serie de tiempo estrictamente estacionaria de tamaño n , la cual representa las pérdidas de un activo. La serie de excesos sobre un umbral dado u , esta definido por:

$$Z = \{R_t : R_t > u\} \quad (56)$$

y el número de excesos sobre u , N_u , esta dado por:

$$N_u = \text{card} \{i : i = 1, 2, \dots, n, R_i > u\} \quad (57)$$

donde $\text{card}\{A\}$ representa el número cardinal del conjunto A .

La selección del umbral en la metodología *POT* puede llevarse a cabo identificando u o escogiendo N_u . Existen varias metodologías para identificar el umbral las cuales se basan en métodos gráficos y técnicas paramétricas. En la próxima sección se presentan algunos de estos métodos.

4.2.2.1.1. Gráfico de la media de los excesos.

Esta metodología se basa en el análisis gráfico del tipo de relación existente entre u y $e(u)$ de acuerdo con el resultado presentado en la ecuación (55). Para ello se utiliza el promedio muestral de la serie de excesos sobre un umbral \tilde{u} , como estimador del valor esperado de los excesos, definido como:

$$\widehat{e(\tilde{u})} = \frac{1}{N_{\tilde{u}}} \sum_{i=1}^{N_{\tilde{u}}} (r_{(i)} - \tilde{u}) \quad (58)$$

donde $r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(N_{\tilde{u}})}$ son las $N_{\tilde{u}}$ observaciones mayores que \tilde{u} , $\tilde{u} < r_{MAX}$ y r_{MAX} corresponde a la observación más grande de la muestra. A partir de este estimador de la media de los excesos, se analiza la tendencia de la gráfica de las parejas ordenadas $(\tilde{u}, \widehat{e(\tilde{u})})$. Si $G_{\xi, \beta}$ es una aproximación válida de $F_{R, u}$ para un umbral dado u^* , el gráfico de la media de los excesos debe ser aproximadamente lineal alrededor de u^* conforme con la ecuación (55), lo cual permite establecer intervalos a partir de los cuales se puede seleccionar el umbral. Además, si la distribución de la serie bajo análisis tiene colas pesadas y su primer momento es finito, $0 < \xi < 1$, la pendiente de este gráfico, $\xi/1 - \xi$, debe ser positiva.

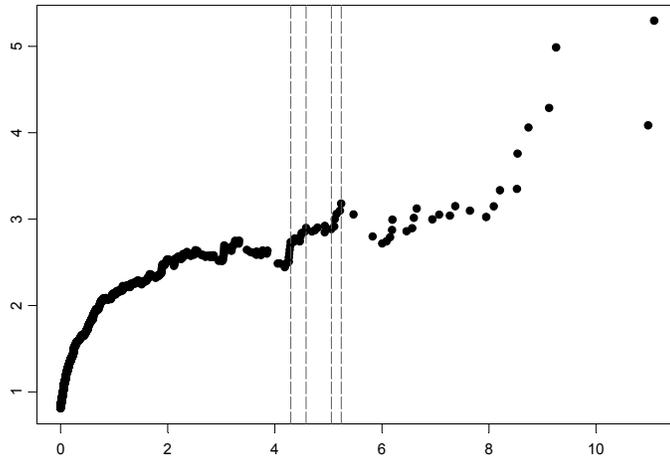


Figura 15. Gráfico de la media de los excesos para las variaciones de la TIB.

En la Figura 15 se presenta el gráfico de la media de los excesos para las variaciones de la TIB. En el eje horizontal se encuentran los diferentes umbrales posibles, mientras que en el eje vertical se encuentra el estimador de la media de los excesos asociados a cada uno de los umbrales. Los intervalos $(4.298, 4.583)$ y $(5.057, 5.241)$, destacados por las líneas punteadas, muestran dos posibles zonas en

las cuales el gráfico presenta una tendencia lineal. Los números de observaciones asociados a estos intervalos son (40, 47) y (29, 34) respectivamente.

4.2.2.1.2. El estimador de Hill.

Una metodología alterna utilizada para la selección del umbral se basa en el *estimador de Hill*⁵⁴, la cual es aplicable para distribuciones que pertenezcan al *MDA* de la distribución Fréchet. De acuerdo con la ecuación (45) para una variable aleatoria *i.i.d.*, R_1, R_2, \dots, R_n :

$$\bar{F}_R(r) = r^{-\alpha} L(r), \quad \alpha = 1/\xi > 0.$$

si y solo $F_R \in MDA(\Phi_\alpha)$. Es posible mostrar que en este caso el estimador de máxima verosimilitud del índice de colas condicionado a un umbral dado, $\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill}$, es⁵⁵:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln r_{j,n} - \ln r_{k,n}) \right)^{-1} \quad (59)$$

donde $R_{n,n}, \dots, R_{2,n}, R_{1,n}$, son los estadísticos de orden de R tal que $R_{n,n} \leq \dots \leq R_{2,n} \leq R_{1,n}$ y $k = N_u$ es el número de observaciones que son mayores al umbral⁵⁶. Finalmente, utilizando la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud se obtiene:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{Hill} = (\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill})^{-1} \quad (60)$$

Adicionalmente, es posible demostrar que si $k \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ y R es una variable aleatoria *i.i.d.* que satisface (45), entonces⁵⁷:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} \xrightarrow{p} \alpha \quad (61)$$

Además,

$$\sqrt{k} (\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2) \quad (61a)$$

⁵⁴ Véase, Hill. (1975).

⁵⁵ El estimador de Hill no es la única aproximación posible para la estimación del índice de colas y de $\xi = 1/\alpha$, véase Embrechts et al (1997). Pág. 331.

⁵⁶ Véase ecuación (57).

⁵⁷ Embrechts et al. (1997) Pág. 337.

Una herramienta utilizada para seleccionar el umbral es el *gráfico de Hill*, en el cual se gráfica el estimador de Hill para diferentes valores de k , asociados a distintos umbrales. Es decir se grafican las siguientes parejas ordenadas:

$$\{(k, \alpha_{k,n}^{Hill}) : k = 2, 3, \dots, n\} \quad (61b)$$

El conjunto de valores apropiados para k se determina como el rango de valores de k para el cual el estimador de Hill es estable⁵⁸.

En la Figura 16 se presenta el Gráfico de Hill para las 300 variaciones más grandes de la *TIB* a lo largo de todo el período de estudio. Las líneas punteadas alrededor de $\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill}$ corresponden a intervalos de confianza del 95%. El eje horizontal inferior indica el número de observaciones incluidas dentro de la estimación, k , mientras el eje superior muestra el umbral asociado a cada valor de k .

En esta grafica se presentan dos intervalos para k , los cuales son destacados por líneas verticales, y corresponden a los intervalos obtenidos al analizar el gráfico de la media de los excesos. Sin embargo, el Gráfico de Hill solo presenta estabilidad a lo largo del segundo intervalo, indicando que el umbral óptimo posiblemente se encuentre en $(4.298, 4.583)$ o equivalentemente $k \in (40, 47)$.

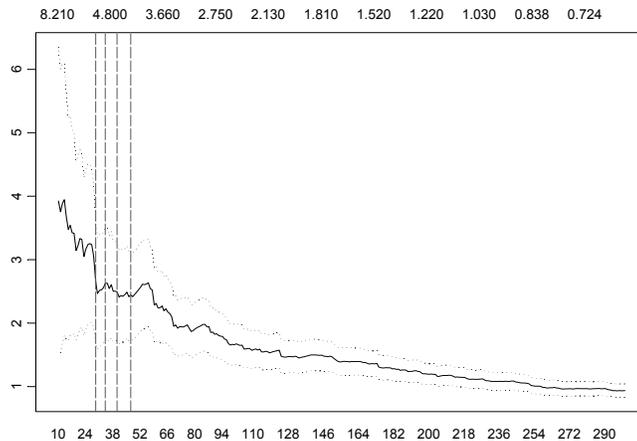


Figura 16. Gráfico de Hill para la TIB.

Como se mencionó anteriormente, los estimadores de $\hat{\alpha}^{Hill}$ ó $\hat{\xi}^{Hill}$ a partir de un umbral esta sujetas al balance entre sesgo y varianza. Por lo tanto, otra posible forma de encontrar el umbral óptimo es a través de la minimización del Error

⁵⁸ Una discusión más detallada acerca del gráfico de Hill y algunas extensiones del mismo se encuentra en Drees, et al. (2000)

cuadrático medio del estimador de Hill, $ECM\left(\hat{\xi}_{n,k}^{Hill}\right)$. Matthys y Beirlant (2002), resumen algunas de las metodologías existentes en esta línea⁵⁹.

Para un estimador $\hat{\theta}$, el $ECM\left(\hat{\theta}\right)$ esta definido como:

$$ECM\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = \left(E\left(\hat{\theta} - \theta\right)\right)^2 + V\left(\hat{\theta}\right) \quad (62)$$

El primer componente en la parte derecha de la ecuación (62) es el cuadrado del sesgo del estimador, mientras la segunda parte corresponde a su varianza. Para valores pequeños de k el estimador de Hill presenta una varianza alta mientras el sesgo es bajo y esta relación se invierte a medida que aumenta el tamaño de k . En consecuencia, el $ECM\left(\hat{\xi}_{n,k}^{Hill}\right)$ presenta una forma de “U” cuando se gráfica con respecto a k .⁶⁰

Hall (1990),⁶¹ propone la identificación de k a partir de técnicas de Bootstrapping con submuestras de tamaño $n_1 < n$. Este autor sugiere utilizar submuestras de datos ya que el sesgo del estimador no es lineal con respecto a n y por lo tanto al utilizar la muestra completa se subestima el sesgo⁶².

Sean $R_{n,n} \leq \dots \leq R_{2,n} \leq R_{1,n}$ los estadísticos de orden de $\mathfrak{R}_n = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$. El estimador de Hill para ξ , $\hat{\xi}_{n,k}^{hill} = \hat{\xi}_{n,k}^{Hill}(k)$, esta dado por:

$$\hat{\xi}_{n,k}^{Hill}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln R_{j,n} - \ln R_{k,n} \quad (63)$$

De acuerdo con la metodología de Hall, se generan B submuestras de tamaño n_1 , $\mathfrak{R}_{n_1}^* = \{R_1^*, R_2^*, \dots, R_{n_1}^*\}$ de \mathfrak{R}_n , y el estimador de Hill de ξ obtenido por Bootstrapping en cada una de las submuestras es:

$$\tilde{\xi}_{n_1}^{Hill}(k_1) = \frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{k_1} \ln R_{j,n_1}^* - \ln R_{k_1,n_1}^* \quad (64)$$

y el Error Cuadrático Medio asociado a (64) es:

⁵⁹ Una discusión detallada de estos métodos se encuentra en Matthys y Beirlant (2002). Discusiones adicionales se encuentran en Beirlant *et al.* (1999a) Beirlant *et al.* (1999b). Drees y Kaufmann (1998). De acuerdo con Matthys y Beirlant, (2002), los métodos propuestos en los dos últimos documentos tienen un desempeño adecuado en muestras pequeñas.

⁶⁰ Véase, McNeil *et al.* (2004) Pág. 287.

⁶¹ Véase, Hall (1990).

⁶² Danielsson *et al.* (2001)

$$ECM = E\left(\left(\tilde{\xi}_n^{Hill}(k_1) - \hat{\xi}_n^{Hill}(k)\right)^2 \mid \mathfrak{R}_n\right) \quad (65)$$

Donde k es un valor tal que $\hat{\xi}_n^{Hill}(k)$ es un estimador consistente⁶³.

Esta aproximación es criticada por Danielsson *et al* (2001). debido a que $\hat{\xi}_n^{Hill}(k)$ depende de un valor desconocido, k . En su lugar proponen el siguiente estimador⁶⁴:

$$\widehat{M}_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln R_{j,n} - \ln R_{k,n})^2 \quad (66)$$

El Error Cuadrático Medio de (66) es:

$$ECM(k) = E\left(\left(\widehat{M}_n(k) - 2\left(\tilde{\xi}_n^{Hill}(k)\right)^n\right)^2 \mid \mathfrak{R}_n\right) \quad (67)$$

Sin embargo, el estimador de k que minimiza (67) no es consistente, por lo que se utiliza un estimador bootstrap: en un primer paso, se realizan B replicaciones con dos tamaños de submuestras, $n_1 \in (\sqrt{n}, n)$ y $n_2 = n_1^2/n$, de las cuales se obtienen los números de observaciones tales que minimicen el Error Cuadrático Medio, $\hat{k}_{n_1}^*$ y $\hat{k}_{n_2}^*$, respectivamente y a partir de estos resultados se calcula el siguiente estimador⁶⁵:

$$\hat{k}_n^{opt} = \frac{(\hat{k}_{n_1}^*)^2}{\hat{k}_{n_2}^*} \left(1 - \frac{1}{\hat{\rho}_1}\right)^{\frac{2}{2\hat{\rho}_1-1}} \quad (68)$$

donde $\hat{\rho}_1 = \frac{\ln \hat{k}_{n_1}^*}{2 \ln(\hat{k}_{n_1}^*/n_1)} < 0$. Matthys y Beirlant (2002), destacan que esta metodología resulta apropiada para conjuntos de datos de tamaño $n \geq 5000$.

Por último, el estimador de Hill posee algunos problemas. En primer lugar, no se conocen sus propiedades para muestras finitas, ya que éstas se basan en resultados asintóticos. En segundo lugar, algunas metodologías son altamente sensibles a la elección del valor inicial de k , o requieren de la elección arbitraria de ciertos

⁶³ Una extensión a esta metodología se presenta en Danielsson *et al.* (2001)

⁶⁴ Para una discusión más detallada sobre las propiedades de este estimador, véase Danielsson y de Vries. (1997)

⁶⁵ Los resultados teóricos a partir de los cuales se llega a este estimador se encuentran en Danielsson *et al.* (2001) y Matthys y Beirlant, (2002)

parámetros. Finalmente, el estimador de Hill puede tener un sesgo alto incluso cuando su Error Cuadrático Medio es mínimo⁶⁶.

4.2.2.2. Medidas de riesgo en modelos sobre un umbral: VaR y ES⁶⁷

Sea R_t una serie de tiempo estrictamente estacionaria que representa las pérdidas de un activo. La función de *excesos de pérdida* de R_t , definida en la ecuación (51), puede ser expresada como:

$$F_{R,u}(y) = \frac{F_R(y+u) - F_R(u)}{1 - F_R(u)} \quad (69)$$

Sea $x = y + u$, si la condición (53) se cumple para un umbral u lo suficientemente grande, entonces:

$$F_{R,u}(x-u) = G_{\xi,\beta}(x-u) \quad (70)$$

Reemplazando la condición (70) en la (69):

$$F_R(x) = (1 - F_R(u))G_{\xi,\beta}(x-u) + F_R(u) \quad (71)$$

para $x > u$. La ecuación (71) esta asociada a la cola superior de la distribución de R . Cuando F_R es conocida, el cálculo de las medidas de riesgo asociadas a esta variable aleatoria solo requiere de la estimación de los parámetros de su distribución. Sin embargo, en la práctica dicha función es desconocida, por lo que es necesario el resultado de la ecuación (71), en la cual F_R depende de $F_R(u)$ y de $G_{\xi,\beta}(x-u)$. Un estimador de $F_R(u)$ es su función de distribución empírica, la cual corresponde a $(n-k)/n$. Reemplazando este último resultado y los estimadores de los parámetros de $G_{\xi,\beta}(x-u)$ en la ecuación (71) se obtiene:

$$\widehat{F}_R(x) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}} \quad (72)$$

A partir de la ecuación (72) es posible construir medidas de riesgo de orden superior tal como el VaR y el ES. Para un nivel de probabilidad α , un estimador del VaR esta dado por:

⁶⁶ Drees *et al.* (2000) Pág 255. Matthys y Beirlant (2002). Pág. 16.

⁶⁷ Esta sección se basa en McNeil (1999).

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-\alpha}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (73)$$

Teniendo en cuenta que el ES está definido como:

$$ES_\alpha = E(X | X > VaR_\alpha) \quad (74)$$

Al sumar y restar VaR_α de la expresión anterior se obtiene:

$$ES_\alpha = VaR_\alpha + E(X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha) \quad (75)$$

Combinando la ecuación (75) con los resultados obtenidos en (55a), un estimador del ES está dado por:

$$\widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}} \quad (76)$$

Finalmente, dividiendo (76) por \widehat{VaR}_α se obtiene:

$$\frac{\widehat{ES}_\alpha}{\widehat{VaR}_\alpha} = \frac{1}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}u}{(1-\hat{\xi})\widehat{VaR}_\alpha} \quad (77)$$

Si la distribución de R posee colas pesadas y $0 < \xi < 1$, a medida que $\alpha \rightarrow 1$ $VaR_\alpha \rightarrow +\infty$ la relación ES_α / VaR_α , descrita en (77), está determinada por $1/(1-\xi)$.

4.2.3. Estimación bajo series no *i.i.d.*

La mayoría de resultados expuestos en la teoría del valor extremo exigen que los retornos sean independientes e idénticamente distribuidos. Sin embargo, en la práctica no es común encontrar series que presenten esta característica, incluso en las series de máximos. Por ejemplo, en la Figura 17 se presentan las funciones de autocorrelación simple y parcial, FAC y $FACP$, para los máximos por bloques mensuales de la TIB usados en la estimación de la GEV de la sección 4.2.1.1. Las líneas punteadas corresponden a intervalos de confianza del 95%. En este caso es clara la evidencia de autocorrelación en la serie.

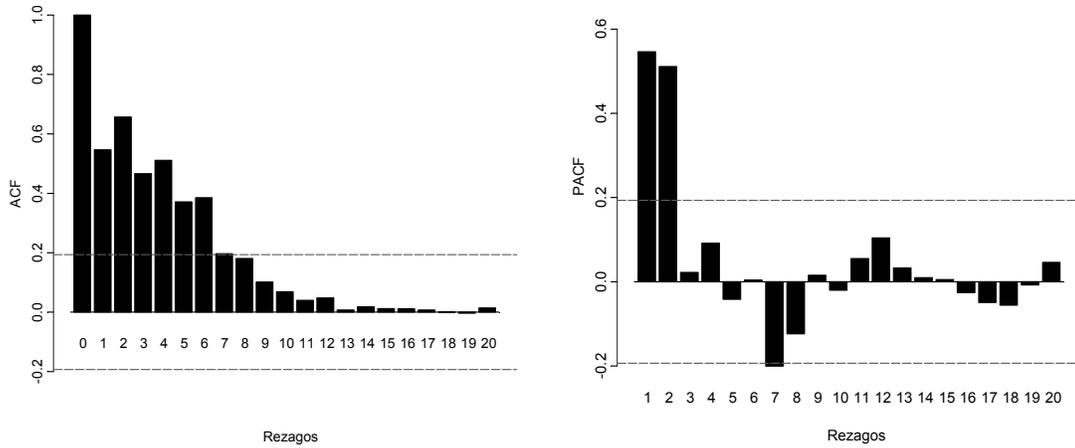


Figura 17. FAC y FACP para los máximos mensuales de la TIB

En consecuencia, los resultados obtenidos de la aplicación de la *EVT* sobre una serie que no sea *i.i.d.* no son apropiados. Existen varias metodologías para reducir la dependencia presente en los datos. Por ejemplo, en el caso de los máximos por bloques se puede ampliar el tamaño del bloque.

Para los modelos de excesos sobre un umbral, McNeil y Frey (2000), proponen reducir la dependencia en las series de retornos a partir de un proceso de dos etapas. En la primera, se realiza una modelación de la dependencia de la serie, tal como un modelo *ARIMA-GARCH*. En la segunda etapa, se calculan las medidas de riesgo a través de la aplicación de la metodología *EVT* sobre los residuales del modelo ajustado en la etapa anterior⁶⁸.

Sea R_t una serie de tiempo estrictamente estacionaria que representa las pérdidas de un activo, la cual sigue un proceso estocástico de la forma:

$$R_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (78)$$

donde Z_t es un proceso de innovaciones *i.i.d.* con media cero, varianza uno y función de distribución $F_Z(z)$. La función de distribución de $R_{t+1}, F_{R[t+1]}$, condicionada a la información existente hasta el momento t, I_t , esta dada por:

$$F_{R[t+1]|I_t}(r) = P\{\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}Z_{t+1} \leq r | I_t\} \quad (79)$$

$$F_Z((r - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}) = F_Z(z)$$

⁶⁸ Vale la pena aclarar que es posible obtener las medidas de riesgo sobre los residuales sin utilizar *EVT*. Por ejemplo, a través de la utilización de un modelo *ARIMA-GARCH* con errores que siguen una distribución normal.

En la expresión (79) se asume que $F_Z(z)$ no depende del tiempo. Tomando en cuenta los resultados anteriores, las medidas de riesgo asociadas a R , con un horizonte temporal de un día,⁶⁹ están dadas por:

$$VaR_\alpha(r_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR_\alpha(z) \quad (80)$$

$$ES_\alpha(r_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E(Z | Z > VaR_\alpha(z)) \quad (81)$$

En la práctica, las estimaciones de las medidas de riesgo propuestas por McNeil y Frey, a partir de las ecuaciones (80) y (81), requieren de la estimación de μ_{t+1} , σ_{t+1} y $F_Z(z)$. Estas estimaciones son obtenidas con base en los pronósticos del primer y segundo momento de R_{t+1} y la aplicación de la metodología *EVT* sobre los residuales del modelo ajustado en la primera etapa.

Otro método para reducir la dependencia en los modelos de excesos sobre un umbral es el *declustering* o desconglomeración⁷⁰. Esta metodología consta de las siguientes etapas:

- i) Se utiliza una regla empírica que permita identificar conglomerados de excesos. Por ejemplo, los conglomerados se pueden definir como grupos de excesos consecutivos o agrupaciones de excesos que no se encuentren separados por más de r retornos inferiores al umbral.
- ii) Se selecciona el máximo de cada uno de los conglomerados.
- iii) Se asume que estos nuevos máximos son independientes y se estima la *GPD*.
- iv) Se calculan las medidas de riesgo tal como en la sección 4.2.2.2.

4.2.4. Backtesting

A partir de las recomendaciones hechas por el comité de Basilea en 1996⁷¹, el *VaR* se convirtió en una medida de riesgo ampliamente utilizada. Sin embargo, tal como se mostró en las secciones anteriores, existen diversas maneras de calcular el *VaR*. Por lo tanto, es importante cuantificar el desempeño de estas metodologías con fines de control interno y regulatorios.

Las pruebas utilizadas para evaluar el desempeño de las metodologías empleadas en el cálculo del *VaR* son conocidas como pruebas de *Backtesting*. En general, las metodologías son evaluadas de acuerdo con el número de fallos ocurridos en un período de tiempo específico. Por ejemplo, para un *VaR* calculado con un nivel de confianza del 95% y un período de tenencia de un día, se espera que las pérdidas

⁶⁹ Para períodos de tenencia mayores a un día, véase McNeil y Frey (2000). Pág. 14.

⁷⁰ Véase, Coles (2001)

⁷¹ Basle Committe on Banking Supervision (1996a) y Basle Committe on Banking Supervision (1996b)

excedan el VaR en un 5% de las observaciones evaluadas, es decir, una vez cada 20 días.

En materia de regulación con respecto al riesgo de mercado, el Comité de Basilea recomienda que los requerimientos de capital correspondan a 3 veces el VaR . Esta recomendación genera incentivos para que los administradores de riesgo traten de mantener baja dicha medida, lo que puede llevar a una subestimación del riesgo.

En consecuencia, el Comité de Basilea recomienda el uso del *Backtesting* como herramienta de regulación, puesto que éste permite analizar si los administradores de riesgo están midiendo el VaR de manera apropiada. Adicionalmente, este mismo comité sugiere tres zonas de riesgo de acuerdo con el desempeño del VaR , las cuales implican diferentes factores multiplicativos en los requerimientos de capital, tal como se muestra en la Tabla 2⁷²:

Zona	Número de fallas para un período de 250 días	Factor multiplicativo
Verde	4 o menos	3.00
Amarilla	5	3.40
	6	3.50
	7	3.65
	8	3.75
	9	3.85
Roja	10 o más	4.00

Tabla 2. Las tres zonas del Comité de Basilea⁷³

En el caso colombiano, la Superintendencia Bancaria se encarga de regular los diferentes factores de riesgo y establecer el marco general de la medición de riesgos. Con respecto a las pruebas de *backtesting*, la Superintendencia determina que: “Con base en los resultados que arrojen las pruebas de desempeño sobre la precisión y consistencia de los modelos internos de medición de riesgos la SBC podrá multiplicar los valores en riesgo obtenidos por un factor de ajuste que corrija las debilidades encontradas, de modo que los resultados reflejen el verdadero valor en riesgo de las entidades”⁷⁴.

Una forma preliminar de revisar el desempeño del VaR con un nivel de confianza α y un período de tenencia k , es a través del Gráfico de *Backtesting*. Para cada uno de los períodos, t , presentados en el gráfico se calcula el \widehat{VaR}_t , utilizando la información disponible hasta $t - k$, y se contrasta con la pérdida observada en t .

⁷² Tal como se ha comentado anteriormente, el VaR sugerido por el Comité de Basilea es calculado con un nivel de confianza del 95% y un período de tenencia de 10 días,

⁷³ Basle Committee on Banking Supervision (1996a). Pág. 15. y Cassidy y Gizycki (1997) Pág.22.

⁷⁴ Superintendencia Bancaria de Colombia (2003)

En la Figura 18 se presenta el gráfico de Backtesting para el VaR obtenido por la metodología *RiskMetrics*® con un nivel de confianza del 95%, un período de tenencia de un día y un parámetro de suavizamiento $\lambda = 0.94$. La evaluación se realizó para 490 días, desde enero de 2003 hasta diciembre de 2004. Los círculos negros indican las ocasiones en las cuales las pérdidas fueron mayores que VaR, en total 25 ocasiones, que corresponden a un 5.1% del número de períodos evaluados.

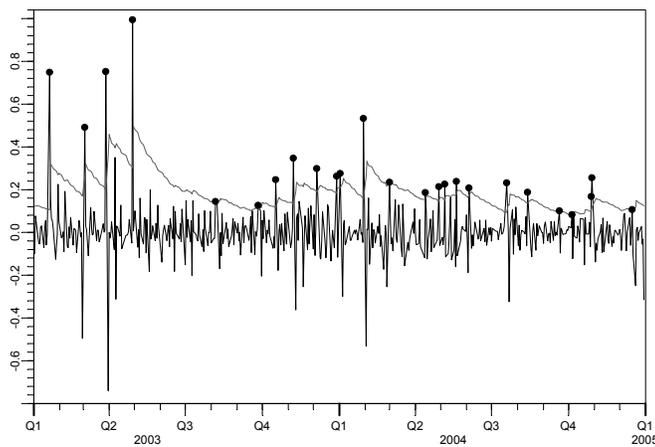


Figura 18. Gráfico de Backtesting para las variaciones de la TIB. La línea oscura corresponde a las variaciones observadas de la TIB, mientras la línea más clara representa el VaR calculado por Riskmetrics® para cada una de las fechas evaluadas. Los círculos negros indican las ocasiones en que fue excedido el VaR.

Este gráfico permite observar cual es la dinámica del VaR con respecto a las pérdidas del activo, y sirve para evaluar de manera preliminar el desempeño del VaR, en particular, puede servir de ayuda en las siguientes situaciones⁷⁵:

- i) Un indicio de que se está subestimando el riesgo del activo se presenta cuando un número grande de pérdidas excede el VaR.
- ii) Por el contrario, si se observa que un número muy pequeño de observaciones excede el VaR, es posible que el VaR esté sobrestimando el riesgo del activo.
- iii) En general, un indicio de que el VaR no se está actualizando con la frecuencia apropiada se presenta cuando el VaR se mueve de manera muy suave o es constante.

Junto con el gráfico de *backtesting*, existen pruebas estadísticas que permiten evaluar el desempeño del VaR. Una de estas pruebas está asociada a la variable aleatoria que cuenta el número de veces en las cuales las pérdidas exceden el VaR. Si se asume que estos eventos son independientes, esta variable sigue una distribución binomial con parámetros n , el número de observaciones consideradas

⁷⁵ Dowd. (2002) Pág. 142.

dentro del *backtesting*, y $p=1-\alpha$, la probabilidad de falla. Por ejemplo, para el Comité de Basilea esta corresponde a una distribución binomial $B(250;0.01)$ ⁷⁶. Dicha distribución es de la forma:

$$P(x=i|n,p)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \quad (82)$$

A partir de este resultado es posible realizar varias pruebas estadísticas para evaluar el desempeño del *VaR*, tal como se muestra a continuación.

4.2.4.1. Prueba de proporción de fallas de Kupiec

La prueba de proporción de fallas de Kupiec⁷⁷, *POF* por sus siglas en inglés, evalúa la hipótesis nula que la probabilidad de falla sea igual a $1-\alpha$. Es decir, si se calcula el *VaR* con un nivel de confianza del 95%, entonces $H_0: p=0.05$. Esta hipótesis nula es contrastada a través de una prueba de razón de verosimilitud de la forma:

$$LR_{POF} = -2 \ln \left(\frac{p^x (1-p)^{n-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{n-x}} \right) \quad (83)$$

donde x es el número de excepciones o fallas, n el número de observaciones incluidas en el *backtesting* y $\hat{p} = \frac{x}{n}$. El numerador de (83) corresponde al valor de la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula y el denominador corresponde a la función de verosimilitud evaluada en el estimador *ML* no restringido de p , \hat{p} . Esta prueba se distribuye asintóticamente Chi-cuadrado con un grado de libertad. En el ejemplo anterior $x=25$, $n=490$ y $p=0.05$, en consecuencia $\hat{p}=0.051$ y $LR_{POF}=0.01067$ ($p\text{-value}=0.9177$). Por lo tanto, el número de fallas del *backtesting* para el modelo *RiskMetrics*® es compatible con el nivel de confianza utilizado para este ejercicio.

4.2.4.2. Estimador puntual de p

Utilizando el modelo binomial comentado en la sección anterior, el estimador de máxima verosimilitud de p , \hat{p} , esta definido por:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (84)$$

y el estimador de su varianza es:

⁷⁶ Haas (2001).

⁷⁷ Kupiec (1995).

$$\widehat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \quad (85)$$

Teniendo en cuenta que \hat{p} es un estimador de máxima verosimilitud, éste sigue asintóticamente una distribución normal. Por lo tanto, es posible establecer intervalos de confianza $\left[\hat{p} \pm z_{\tilde{\alpha}/2} \sqrt{\widehat{V}(\hat{p})} \right]^{78}$ con el objeto de evaluar si $p = (1-\alpha)$ se encuentra dentro del intervalo. El resultado anterior se puede obtener análogamente a través de la hipótesis nula $H_0 : p = 1-\alpha$ mediante el uso de la siguiente estadística:

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - (1-\alpha)}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{p})}} \quad (86)$$

Asintóticamente la distribución de la estadística presentada en (86) es normal estándar. El valor de esta estadística para el *VaR* estimado a través de la metodología *RiskMetrics*® es $Z_0 = 0.1027$ (*p-value* = 0.9182), con lo cual se obtiene una conclusión similar a la presentada en la sección anterior.

4.2.4.3. Estimación directa a partir de la distribución binomial.

Esta prueba se basa de nuevo en la ecuación (82), y a diferencia de las pruebas anteriores ésta tiene la ventaja que no depende de resultados asintóticos. La hipótesis nula es $H_0 : p = 1-\alpha$.

La idea detrás de esta prueba es construir un intervalo de confianza $(1-\tilde{\alpha})100\%$ del número de fallas bajo H_0 utilizando la distribución binomial. Si el número de fallas observado, x , se encuentra dentro de este intervalo la hipótesis nula no es rechazada con un nivel de significancia $\tilde{\alpha}100\%$. En la Figura 19 se muestra la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 490$ y $p = 0.05$. Las áreas no sombreadas corresponden al intervalo de confianza del 95% reseñado anteriormente.

Para el caso del modelo binomial presentado en la Figura 19, $E(X) = np = 24.5$, y con un nivel de confianza del 95%, el número de fallas del *VaR* se encuentra entre

⁷⁸ En esta expresión $z_{\tilde{\alpha}/2}$ corresponde al percentil $(1-\tilde{\alpha}/2)100$ de la distribución normal estándar.

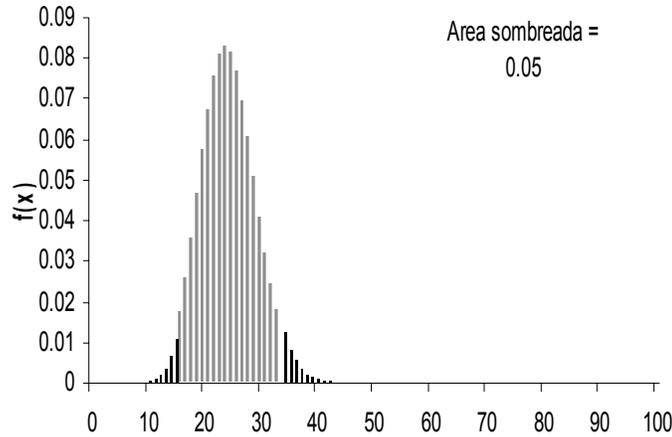


Figura 19. Función de probabilidad para una variable aleatoria binomial $X \sim B(n = 490, p = 0.05)$.

$[x_1 = 16, x_2 = 33]$, o análogamente $p \in [0.0327, 0.0673]$, es decir, $P(X < x_1) \approx P(X > x_2) \approx 0.025$. En el ejemplo del VaR obtenido a través de la metodología Riskmetrics®, $x = 25$. Dado que este valor se encuentra dentro del intervalo $[16, 33]$ no existe evidencia para rechazar $H_0 : p = 0.05$ a un nivel de significancia de $\tilde{\alpha} = 0.05$.

5. Estimación y resultados.

A partir de la definición de VaR y las diferentes formas de estimación, en esta sección se presentan las medidas de riesgo para las variaciones diarias de la tasa interbancaria de Colombia, TIB, en el período comprendido entre abril de 1994 y diciembre de 2004. Teniendo en cuenta las unidades de esta variable, el percentil de la distribución de pérdidas y ganancias esta dado en centésimas de puntos básicos.

La estimación y evaluación del desempeño del VaR se realiza para diferentes modelos: en el primer grupo se asume que las variaciones de la TIB siguen una distribución *i.i.d.*⁷⁹ y se calcula el VaR mediante simulación histórica, asumiendo normalidad y por EVT. Para el segundo grupo, donde se modelan las dependencias, se estiman un modelo bajo la metodología de RiskMetrics®⁸⁰, un modelo ARMA-GARCH, y un modelo ARMA-IGARCH. Finalmente, se calcula el VaR por EVT utilizando el método de dos etapas de McNeil y Frey (2000) con base en los residuales de estos dos últimos modelos.

Como se ha mencionado anteriormente, las series financieras presentan características particulares, tal como el exceso de curtosis o colas pesadas, y los agrupamientos de volatilidad. Estas características implican que el supuesto de normalidad no se cumple.

⁷⁹ Este tipo de metodologías se estiman solo con un objetivo comparativo ya que existe evidencia empírica que muestra que este supuesto es inapropiado.

⁸⁰ El modelo Riskmetrics® solo modela la dependencia asociada al segundo momento de la serie.

El histograma de la serie y los gráficos Q-Q (cuantil-cuantil) son dos herramientas gráficas para evaluar si el supuesto de normalidad es apropiado, tal como lo muestra la Figura 20. En el panel de la izquierda se presenta el histograma de las variaciones de la *TIB*, el cual muestra exceso de curtosis frente a una distribución normal, mientras en el panel derecho el gráfico Q-Q compara los cuantiles observados con los cuantiles teóricos de una distribución normal. Por lo tanto, si la distribución de la serie es normal se espera una línea recta. En esta Figura, se observa un patrón en forma de “S rotada”, donde las mayores diferencias con respecto a línea punteada se presentan en los extremos. Este resultado indica que la distribución de la serie tiene colas más pesadas que las de una distribución normal.

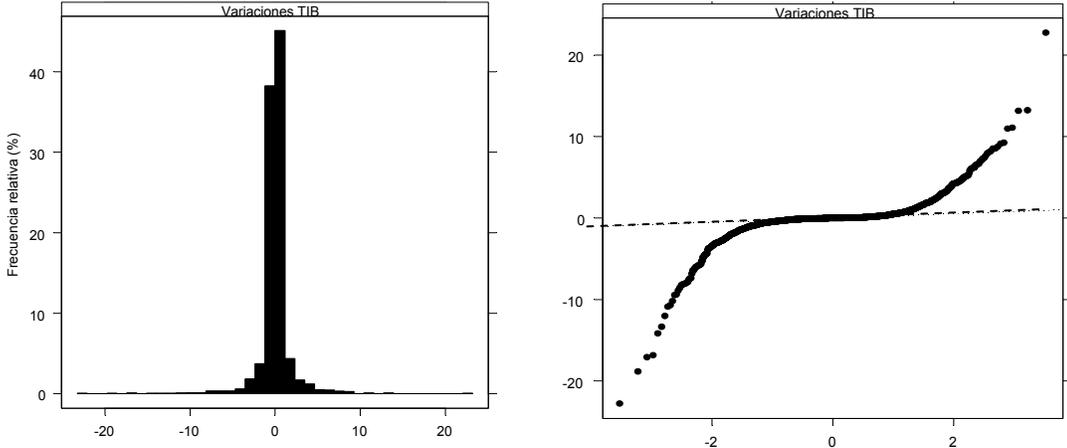


Figura 20. Histograma y gráfico Q-Q para las variaciones de la *TIB*.

Adicionalmente, la *TIB* se aleja del supuesto de *i.i.d.* tal como lo muestra la Figura 21 donde se presentan la *FAC* y *FACP* para las variaciones de esta serie. En consecuencia, la estimación de medidas de riesgo que dependan de este supuesto puede resultar en conclusiones erróneas acerca del verdadero riesgo asociado a la *TIB*.

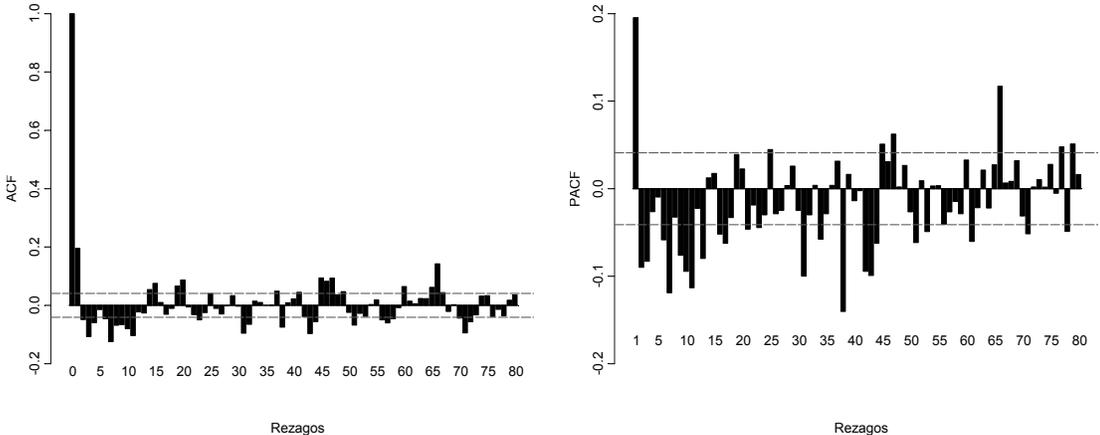


Figura 21. *FAC* y *FACP* para las variaciones de la *TIB*.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, para el segundo grupo de metodologías se estimaron por máxima verosimilitud dos modelos; un modelo $AR(120)-GARCH(1,1)$ asumiendo errores con distribución doble exponencial ⁸¹ y un modelo $AR(120)-IGARCH(1,1)$ con errores distribuidos normalmente. Posteriormente, se estimó el VaR por EVT a partir de los residuales de estos modelos, tal como se explica en la sección 4.2.3. En la Figura 22 se presenta el histograma de los residuales del modelo $AR(120)-GARCH(1,1)$ y el gráfico Q-Q de los mismos contra cuantiles teóricos de la distribución doble exponencial. Aunque la distribución los residuales se separa de la distribución doble exponencial especialmente en la cola derecha, las diferencias no son tan grandes como en el caso cuando se supone normalidad.

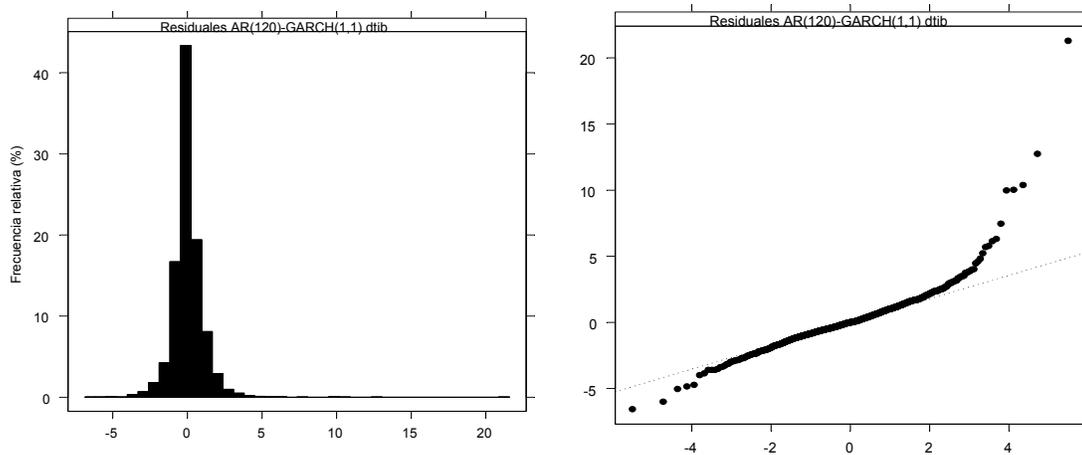


Figura 22. Histograma y Gráfico Q-Q para los residuales estandarizados del modelo $AR(120)-GARCH(1,1)$ sobre las variaciones de la TIB

5.1. La TIB y la política monetaria en Colombia

La TIB ha presentado diferentes patrones de comportamiento a lo largo del período de estudio. Estos cambios de comportamiento se encuentran ampliamente ligados con el manejo de la política monetaria, tal como se muestra en la Figura 23, donde se presenta la TIB junto con las tasas de expansión y contracción, por subasta y por ventanilla, las cuales son establecidas por el Banco de la República, BR. La descripción que se realiza a continuación se basa en los Informes realizados por parte de la Junta Directiva del Banco de la República al Congreso de la República ⁸²,

⁸¹ La función de distribución doble exponencial estándar, para una variable aleatoria X es de la forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{2}(x)}/2 & \text{si } x < 0. \\ 1 - e^{-\sqrt{2}(x)}/2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

⁸² Banco de la República. *Informe de la Junta Directiva al Congreso de la República*. Varios años.

y algunos documentos técnicos de la Subgerencia Monetaria y de Reservas del Banco de la República⁸³.

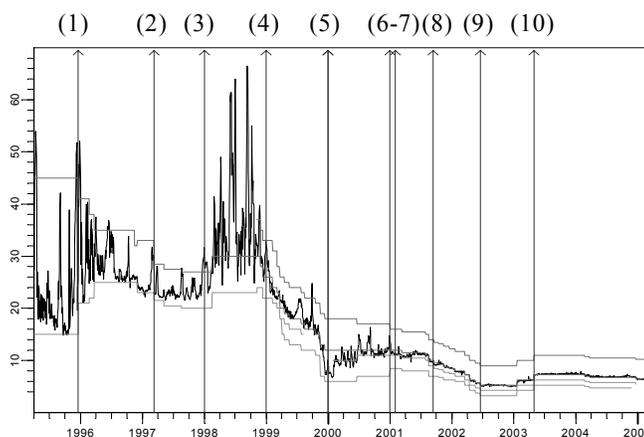


Figura 23. TIB y tasas de intervención del Banco de la República

El “corredor de tasas” o franja de intervención aparece a comienzos de 1995 como un instrumento de política monetaria con el fin de disminuir la volatilidad del mercado interbancario. Durante 1995 este corredor era muy amplio, de 3000 puntos básicos⁸⁴, y a pesar que la TIB durante este período se mueve dentro del corredor, presenta gran volatilidad. A finales de diciembre de 1995, índice (1) en la parte superior del gráfico, se presenta la primera disminución de la amplitud del corredor. En 1996 continúan otras reducciones en las tasas de expansión y contracción, finalizando con una nueva disminución de la amplitud del corredor el 10 de marzo de 1997, (2). A lo largo de 1997 se mantiene una relativa estabilidad cambiaria, lo que permite mantener un corredor estable en ese año, (3).

De forma contraria, 1998 es un año con un ambiente macroeconómico inestable tanto por choques internos como externos. Entre los principales factores internos se destacan el desequilibrio fiscal, la crisis en la balanza de pagos, la incertidumbre por la proximidad de las elecciones presidenciales y un recorte del financiamiento externo ocasionado por la desconfianza de los inversionistas internacionales en los países emergentes. En el campo monetario, la política monetaria adoptada por el BR como respuesta a los ataques contra el techo de la banda cambiaria, restringe la liquidez en la economía. La suma de estos factores llevó a que se presentaran aumentos en las expectativas de devaluación, en el riesgo crediticio de la nación y en el riesgo del sistema financiero, lo que finalmente condujo a un aumento en el nivel y la volatilidad de la TIB durante la mayor parte de este año, (4).

⁸³ Cardozo y Hernandez (2005).

⁸⁴ La amplitud del corredor de tasas esta definida como la diferencia entre las tasas de expansión y contracción.

Las políticas macroeconómicas emprendidas por el nuevo gobierno y el *BR* a finales de 1998, facilitaron la estabilización de los mercados monetario y cambiario. Bajo este nuevo panorama, el *BR* empieza una serie de reducciones de la franja de intervención acompañados de aumentos en la liquidez de la economía, con lo que la *TIB* empieza a disminuir.

En 1999 se recobra un ambiente de relativa estabilidad. Las tasas de intervención continúan su tendencia decreciente⁸⁵, mientras la *TIB* sigue de cerca esta tendencia. Desde finales de 1998 se implementan una serie de medidas que tienen como objetivo incrementar la liquidez de la economía y reducir la volatilidad de la *TIB*⁸⁶. Adicionalmente, en éste año se presentan nuevas presiones alcistas sobre la *TRM*, lo que finalmente lleva el 25 de septiembre al cambio del régimen de banda cambiaria por un régimen de flotación del tipo de cambio nominal. Este es el único día en el año en el cual la *TIB* rebasa la franja de intervención. Por otro lado, la inflación cayó cerca de 700 puntos básicos para diciembre, situándose en el 9.23%, (5).

Posteriormente, el *BR* continuó encaminando parte de sus medidas a mantener niveles adecuados de liquidez dentro del mercado interbancario, ya que éste se encontraba altamente fraccionado debido al acceso limitado que poseían algunas entidades financieras. Con el fin de “hacer más directa la política monetaria y las tasas de intervención del Banco”⁸⁷ y reducir la dispersión de la *TIB*, en el año 2000 el *BR* redujo la amplitud de la franja de intervención. Adicionalmente, se expidieron disposiciones acerca de los cupos de subastas para operaciones de contracción y expansión, con lo que se logró mantener estable la *TIB* durante ese período, (6).

Para el año 2001, el *BR* redujo en siete ocasiones el corredor de tasas y adquirió instrumentos más ágiles en el esquema operativo de suministro de liquidez con la creación del Comité de Intervención Monetaria y Cambiaria (CIMC) y el Comité Operativo Interno (COI)⁸⁸. En este periodo no se presentaron necesidades extraordinarias de liquidez, por lo cual la *TIB* mantuvo su tendencia a la baja. Esta tendencia fue seguida por otras tasas de mercado, como la tasa de depósitos a término, *DTF*, y la tasa de los *TES*. Eventos internacionales, tales como la crisis argentina, (7), y los atentados ocurridos el 11 de septiembre, (8), no generaron grandes distorsiones en el mercado interbancario.

En el año 2002 se mantuvieron niveles adecuados de liquidez, lo cual facilitó la continuación de la política de reducción de tasas. La franja de intervención se redujo en 5 ocasiones y fue seguida de cerca por la *TIB*. Sin embargo, estas reducciones de la *TIB* llevaron a rendimientos reales negativos en este mercado al final del año⁸⁹, (9).

⁸⁵ En este año el *BR* realizó diez reducciones a la franja de intervención.

⁸⁶ Banco de la República. Marzo de 2000. Pág. 23

⁸⁷ Banco de la República. Julio de 2000. Pág. 13

⁸⁸ Hernández Gamarra y Tolosa (2001)

⁸⁹ Informe al Congreso, marzo de 2003.

El comienzo del año 2003 estuvo marcado por una serie de presiones hacia la devaluación del peso, lo cual llevó al *BR* a aumentar las tasas de intervención y a anunciar la intervención del mercado cambiario. En abril de ese mismo año la tendencia devaluacionista cedió; sin embargo, la postura del *BR* con respecto a la franja de intervención se mantuvo estable el resto del año. Como sucedió en los años anteriores, la *TIB* se mantuvo dentro de la franja de intervención y volvió a presentar rendimientos reales positivos, aunque muy bajos⁹⁰, (10).

Finalmente, en 2004 la inflación continuó su tendencia a la baja, mientras la liquidez del sistema financiero se ha mantenido estable. En consecuencia, el *BR* redujo las tasas de intervención en tres ocasiones. Por su parte, la *TIB* continuó con su tendencia decreciente, pero con rendimientos reales positivos.

5.2. Pruebas de Estabilidad

La validez de los resultados que se desprenden del análisis de un modelo de series de tiempo, depende fundamentalmente del cumplimiento de los supuestos sobre el término de perturbación. Adicionalmente, en el contexto de modelos *ARIMA-GARCH*, en especial en economías poco estables, aparecen problemas generados por inestabilidad de parámetros y quiebres estructurales. Estos problemas producen sesgo y aumento en la incertidumbre de los pronósticos de la serie.

En esta sección se prueba la existencia de posibles cambios estructurales tanto en la media como en la varianza de las variaciones de la *TIB* bajo los modelos *AR*(120)–*GARCH*(1,1) y *AR*(120)–*IGARCH*(1,1).

Las pruebas de estabilidad respecto al modelo *AR* utilizadas en este trabajo siguen el enfoque de Zeileis *et al.*⁹¹ (2005), que desde el punto de vista estadístico, sugieren que las pruebas para detectar cambios estructurales pueden ser divididas en dos clases, las pruebas tipo *F* y las pruebas de fluctuación.

Las pruebas tipo *F* están diseñadas para detectar si existe un cambio estructural ocurrido en un periodo de tiempo específico, como por ejemplo la prueba de Chow, y aunque esta prueba se puede calcular mediante técnicas muy simples, requiere que el punto de quiebre especificado en la hipótesis alterna sea escogido de forma independiente de los datos. Con el propósito de superar los problemas sobre este tipo de pruebas, Zeileis *et al.* las implementan utilizando técnicas propuestas por Andrews (1993) y Andrews y Ploberger (1994).

Las pruebas de fluctuación, en términos generales, no suponen un patrón para el cambio estructural. Un ejemplo de este tipo de técnicas lo constituye la prueba *CUSUM* y *CUSUM* cuadrática. Para evitar las críticas de Hansen (1992) y Kramer,

⁹⁰ Informe al Congreso, marzo de 2004.

⁹¹ Una aplicación a series colombianas de esta metodología se encuentra en Melo y Misas (2004), donde adicionalmente se presentan en detalle las pruebas reseñadas por Zeileis *et al.* (2005).

Ploberger y Alt. (1988), Zeileis et al. presentan e implementan otras pruebas de fluctuación además de las pruebas CUSUM.

En la Tabla 3 se presentan los resultados de la evaluación de cinco pruebas de estabilidad para el modelo $AR(120)$ ⁹² estimado en la muestra 16/abr/1994 – 30/dic/2004. Tres de las cuales se realizan sobre los residuales del modelo y las dos restantes sobre las estimaciones de los parámetros del mismo.

Pruebas de fluctuación sobre los residuales		
	Estadística	P-Value
OLS-Cusum	1.2284	0.0978
REC-Cusum	1.4456	0.0004
REC-Mosum	1.9176	0.4339
Pruebas de fluctuación sobre las estimaciones de los parámetros		
	Estadística	P-Value
ME test	2.5400	0.010
Fluctuation test	2.3704	0.003

Tabla 3. Pruebas de Estabilidad ($DTIB \sim AR(120)$, 1994/04/16 – 2004/12/30)

Utilizando un nivel de significancia de $\tilde{\alpha} = 5\%$, tres de las cinco pruebas permiten concluir que existe evidencia de cambio estructural, el cual es identificado en febrero de 2000. La Figura 24 muestra la TIB para toda la muestra, donde la línea punteada indica el cambio estructural asociado al primer momento de la serie de acuerdo con las pruebas anteriores⁹³.

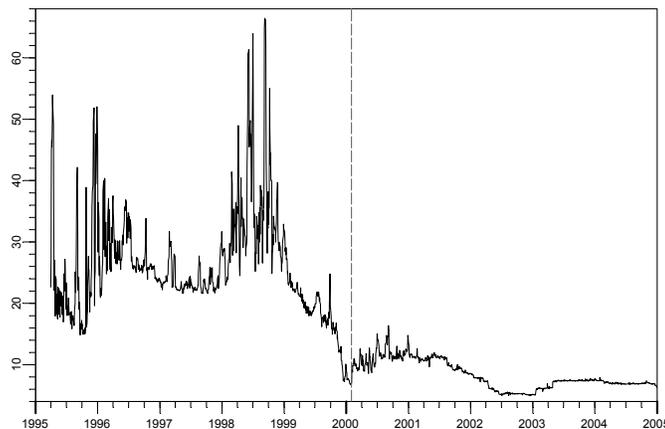


Figura 24. TIB

⁹² Debido a que estas pruebas involucran solo la especificación del primer momento de la serie, estas se realizan sobre el modelo AR y no sobre el modelo completo $AR-GARCH$. Esto es posible debido a que los parámetros de la ecuación (21) del modelo $AR-GARCH$ no se encuentran correlacionados asintóticamente con los parámetros de la ecuación (24). Este último resultado es demostrado, por ejemplo, en Gouriéroux (1997).

⁹³ Los gráficos correspondientes a las pruebas de estabilidad no se presentan en este documento pero están disponibles a solicitud del interesado.

Además de revisar la estabilidad de los parámetros de la media, es necesario evaluar la estabilidad de los parámetros asociados con los modelos $GARCH(1,1)$ e $IGARCH(1,1)$. En este punto se sigue el enfoque planteado por Lundbergh y Terasvirta⁹⁴, en el cual se estima el siguiente modelo⁹⁵:

$$h_t = \omega^* + \alpha_1^* \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^* h_{t-1} + \zeta^* t + \gamma_1^* \varepsilon_{t-1}^2 t + \delta_1^* h_{t-1} t \quad (87)$$

y se contrasta la hipótesis $H_0: \zeta^* = \gamma_1^* = \delta_1^* = 0$. Para los modelos $AR(120)$ – $GARCH(1,1)$ y $AR(120)$ – $IGARCH(1,1)$ los valores p de la estadística asociada a esta prueba de hipótesis fueron 0.8648 y 0.649, respectivamente.

Teniendo en cuenta los resultados de las pruebas de estabilidad sobre la media y varianza de la TIB , se realizó la estimación para el período comprendido entre el 1 de febrero de 2000 y el 30 de diciembre de 2004. Siguiendo las metodologías tradicionales de identificación se estimaron los modelos $AR(120)$ – $GARCH(1,1)$ y $AR(120)$ – $IGARCH(1,1)$. Sobre los modelos finales se realizaron las pruebas de estabilidad reseñadas anteriormente, estas no presentaron evidencia de cambios estructurales a un nivel de significancia de $\alpha = 5\%$ ⁹⁶.

Con el fin de identificar posibles no linealidades en la especificación de la varianza condicional de la TIB , se realizó la prueba de Engle y Ng⁹⁷, en la cual se estima un modelo de regresión lineal de la forma:

$$\hat{\eta}_t^2 = a_0 + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + e_t \quad (88)$$

Donde S_t^- toma el valor de uno cuando $\varepsilon_t < 0$ y toma el valor de cero en caso contrario y $S_t^+ = 1 - S_t^-$. La hipótesis nula evaluada es $H_0: b_1 = b_2 = b_3 = 0$. En caso de comportamientos asimétricos en la varianza condicional, el parámetro b_1 indica la presencia de sesgo de signo y los parámetros b_2 y b_3 están asociados a sesgos de tamaño y signo. El sesgo de signo implica que la varianza condicional responde de forma diferente ante innovaciones negativas o positivas. Por otro lado, el sesgo de tamaño y signo indica que la respuesta de la varianza condicional depende simultáneamente del signo y de la magnitud de la innovación.

En los dos modelos especificados sobre las variaciones de la TIB , no se encontró evidencia acerca de este tipo de asimetrías en la varianza condicional, los valores p

⁹⁴ Lundbergh y Terasvirta (2002)

⁹⁵ Ver Franses y van Dijk (2000) Pág. 186.

⁹⁶ En general, los resultados de estas pruebas no son significativos al 5%, excepto por el “ME test” y el “fluctuation test”, los cuales no son significativos al 1%.

⁹⁷ Engle y Ng. (1995)

obtenidos fueron 0.5183 y 0.1483, para los modelos *AR-GARCH* y *AR-IGARCH*, respectivamente.

Adicionalmente, en el Anexo 1 se presentan varias pruebas de especificación sobre los residuales estandarizados de los modelos *AR-GARCH* y *AR-IGARCH*. En general, estas pruebas indican que estos modelos están especificados correctamente. Es importante destacar que las gráficas Q-Q y los resultados de las pruebas de Jarque-Bera y Shapiro-Wilk indican que los errores estandarizados no siguen las distribuciones asumidas para los dos modelos.

Los resultados anteriores muestran que las distribuciones de los errores estandarizados poseen colas más pesadas que la distribución doble exponencial y normal, respectivamente. Estas características pueden ser modeladas a través de la *EVT*, las estimaciones de estos modelos son presentadas en secciones posteriores.

5.3. Cálculo de medidas de riesgo.

Una vez establecidos los procesos que modelan la dependencia de la *TIB*, es posible calcular medidas de riesgo y posteriormente verificar su desempeño a través del backtesting. Los resultados para el *VaR* y el *ES*, son calculados con dos niveles de confianza, $\alpha = 0.95$ y $\alpha = 0.99$, para un período de tenencia de un día. Teniendo en cuenta el cambio estructural anteriormente reseñado, se utilizó la muestra comprendida entre febrero de 2000 y diciembre de 2004⁹⁸.

Dado que la tasa interbancaria es una tasa que afecta al portafolio de las entidades financieras en dos sentidos, dependiendo si éstos tienen una posición activa o pasiva frente a los préstamos con otras entidades, en este documento se evalúan los valores en riesgo tanto del lado positivo como del lado negativo de las variaciones de esta tasa⁹⁹.

5.3.1. Medidas de riesgo sin modelar dependencia: *EVT*, simulación histórica y normalidad.

Como se mencionó en secciones anteriores, los cálculos del *VaR* y el *ES* a través de la metodología *POT*¹⁰⁰ de *EVT* se realizan en dos etapas. En la primera, se identifica un umbral óptimo y en la segunda se utiliza este umbral para la estimación de la Distribución Generalizada de Pareto.

⁹⁸ Vale la pena destacar que el período de análisis utilizado por la Superintendencia Bancaria de Colombia, para la *TIB*, comprende los años 1999-2003, véase: Superintendencia Bancaria de Colombia (2003)

⁹⁹ Por lo tanto, las medidas de riesgo se presentan para las dos colas de las variaciones de la *TIB*. Como se menciona en la sección 2.1, la cola izquierda y derecha están asociadas a las variaciones negativas y positivas extremas, respectivamente. Para facilitar la lectura de los resultados, las medidas de riesgo de la cola izquierda de la distribución omiten el signo negativo.

¹⁰⁰ Debido a que las medidas de riesgo obtenidas a través de máximos por bloques no son comparables a las obtenidas por otras metodologías (sección 4.2.1.1), este método no fue utilizado.

En la Figura 25 se presentan el gráfico de media de los excesos en los paneles superiores y el gráfico *Alt Hill* en los paneles inferiores. El gráfico *Alt Hill*, por *Alternative Hill*, corresponde al gráfico de Hill con el eje de las abscisas en escala logarítmica ¹⁰¹, esto permite observar detalladamente el comportamiento del estimador de Hill para los estadísticos de orden iniciales, donde se presume que se encuentra el umbral óptimo.

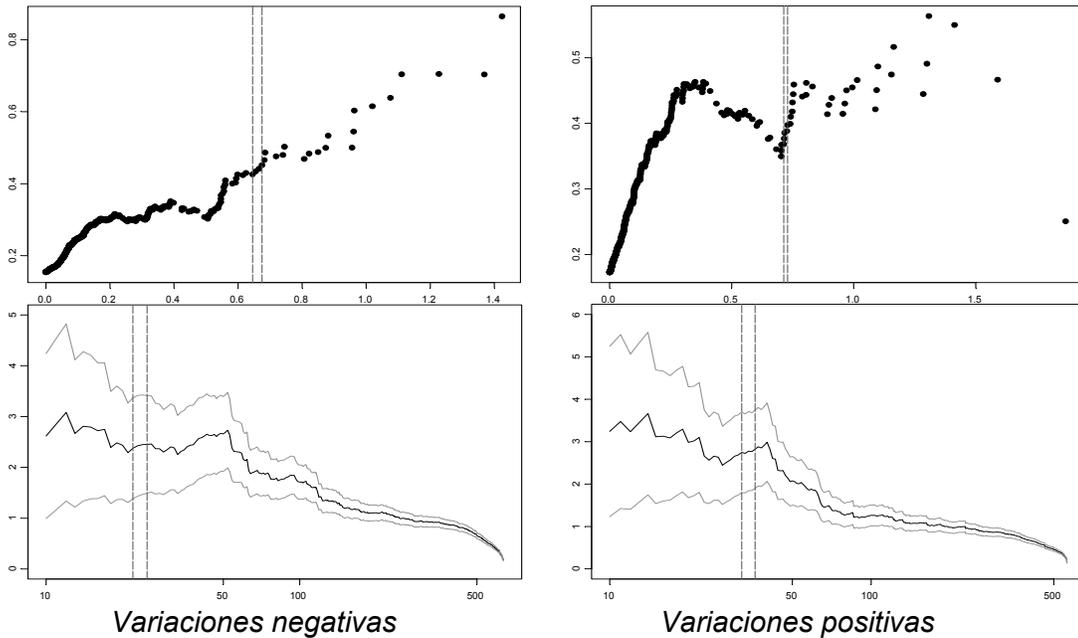


Figura 25. Gráfico de Media de los excesos y *Alt Hill* para las variaciones de la TIB. Febrero de 2000 - diciembre de 2004.

De acuerdo con estos gráficos, unas áreas estables de los gráficos *Alt Hill* se encuentran en los intervalos destacados por las líneas punteadas, (22, 25) y (32, 36) para las variaciones negativas y positivas, respectivamente. Estas regiones son consistentes con los intervalos (0.645, 0.675) y (0.713, 0.729) que presentan una tendencia lineal en el gráfico de media de los excesos.

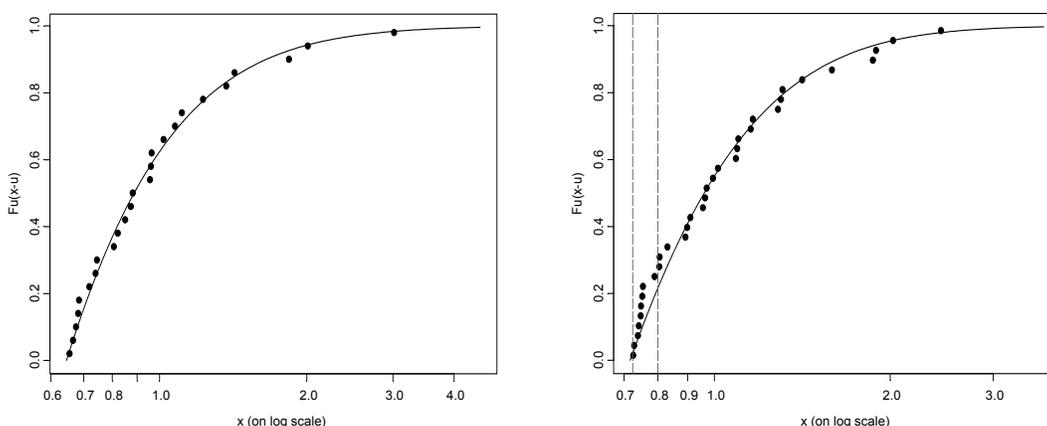
Al utilizar el método sugerido por Beirlant, Dierckx, y Starica (1999b), el número de observaciones asociado al umbral para las variaciones negativas fue $k^- = 22$ ¹⁰², mientras para las variaciones positivas se encontró $k^+ = 21$. Los umbrales seleccionados fueron $u^- = 0.645$, $k^- = 25$ y $u^+ = 0.717$, $k^+ = 34$, respectivamente.

¹⁰¹ Para una discusión más amplia véase Drees, *et al* (2000)

¹⁰² De aquí en adelante, la notación que se refiera a una variable o estimador relacionado con la cola izquierda o derecha de la distribución de las variaciones de la TIB, se acompañará por los superíndices “-” y “+”, respectivamente.

Los parámetros estimados de la *GPD* utilizando el método de máxima verosimilitud son¹⁰³: $\hat{\xi}^- = 0.265$ (0.273), $\hat{\beta}^- = 0.317$ (0.106) y $\hat{\xi}^+ = 0.137$ (0.249), $\hat{\beta}^+ = 0.334$ (0.101). Pese a que los parámetros estimados de ξ son positivos, lo que en una primera instancia indica que las variaciones de la *TIB* pertenecen al *MDA* de la distribución Fréchet, estos presentan errores estándar altos, lo cual implica que esta serie realmente pertenece al *MDA* de la distribución Gumbel.

El grado de bondad de ajuste de la estimación de la *GPD* puede ser evaluado a través del gráfico de la distribución de los excesos estimada $F_{R,u}(x-u)$, y las pérdidas observadas sobre el umbral, Figura 26. En general, se presenta un buen ajuste en la mayoría de los puntos, excepto en el intervalo destacado por las líneas punteadas.



Variaciones negativas

Variaciones positivas

Figura 26. Función de distribución de los excesos para la *TIB*.

Los resultados de las medidas de riesgo a partir de las *GPD* estimadas sobre cada cola para el día 3 de enero de 2005¹⁰⁴ se presentan en la Tabla 4a. Adicionalmente, en esta tabla se presentan los resultados obtenidos para el *VaR* y el *ES* asumiendo que las variaciones de la *TIB* siguen una distribución normal y utilizando el método de simulación histórica, *HS*.

Aunque es complicado comparar los valores del *VaR* entre diferentes metodologías, dado que este no es una medida coherente de riesgo, los resultados muestran, con un nivel de confianza de $\alpha = 0.95$, que los valores del *VaR* resultan similares. Sin embargo, con $\alpha = 0.99$ el *VaR* por normalidad es menor con respecto al de las otras metodologías.

El análisis del *ES*, el cual es una medida coherente de riesgo, muestra que los resultados para las dos colas de los métodos *EVT* y *HS* son similares, mientras que

¹⁰³ Errores estándar entre paréntesis.

¹⁰⁴ Es decir, el *VaR* y el *ES* son calculados con información hasta el día 31 de diciembre de 2004 para un periodo de tenencia de un día.

el *ES* por normalidad indica un riesgo menor comparado con las dos metodologías anteriores.

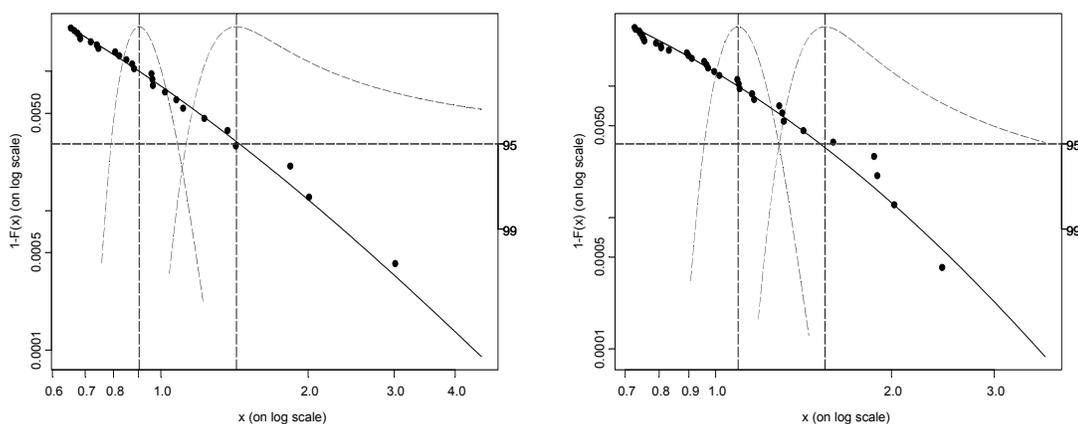
Método	-Cola Izquierda (DTIB)				Cola Derecha (DTIB)			
	$\widehat{VaR}_{0.95}$	$\widehat{VaR}_{0.99}$	$\widehat{ES}_{0.95}$	$\widehat{ES}_{0.99}$	$\widehat{VaR}_{0.95}$	$\widehat{VaR}_{0.99}$	$\widehat{ES}_{0.95}$	$\widehat{ES}_{0.99}$
Normal	0.5198	0.7354	0.6520	0.8426	0.5198	0.7354	0.6520	0.8426
HS	0.4258	0.8831	0.7565	1.4146	0.4702	1.0945	0.8819	1.5449
EVT	0.3979	0.9028	0.7402	1.4276	0.5350	1.0921	0.8934	1.5388

Tabla 4a. VaR y ES por EVT, HS y normalidad.

Cola	Media ($\hat{\mu}$)	Desviación estándar ($\hat{\sigma}$)	Umbral (\hat{u})	Parámetro de forma ($\hat{\xi}$)	Parámetro de escala ($\hat{\beta}$)
-Izquierda	-0.0006	0.3164	0.6455	0.2654 (0.2726)	0.3172 (0.1059)
Derecha			0.7175	0.1367 (0.2491)	0.3344 (0.1009)

Tabla 4b. Parámetros utilizados en la estimación del VaR y ES por normalidad y EVT

Una forma de construir los intervalos de confianza del VaR y el ES es a partir del método *profile maximum likelihood*, el cual está basado en la estimación ML de la *GPD*¹⁰⁵. En la Figura 27 se presentan los intervalos de confianza del 95% para $\widehat{VaR}_{0.99}$ y $\widehat{ES}_{0.99}$. Los puntos de corte entre las líneas verticales izquierda y derecha con la cola estimada de la distribución representan las estimaciones del VaR y el ES respectivamente, mientras que los cortes de las “parábolas invertidas” con la línea horizontal definen los intervalos de confianza de estas dos medidas. Por ejemplo, los intervalos del 95% para el $\widehat{VaR}_{0.99}$ y el $\widehat{ES}_{0.99}$ asociados a la cola derecha de la distribución son (0.9565, 1.2805) y (1.2919, 3.6649), respectivamente.



Variaciones negativas Variaciones positivas
 Figura 27. Estimaciones del VaR y ES por EVT, las “parábolas” invertidas muestran intervalos de confianza al 95%

¹⁰⁵ Véase, Coles (2001).

5.3.2. Medidas de riesgo modelando dependencia: ARMA-GARCH, ARMA-GARCH-EVT, RiskMetrics®

En la sección anterior, las estimaciones de las medidas de riesgo fueron basadas en metodologías que suponen que las series son *i.i.d.* En esta sección se estima un segundo grupo de metodologías que modelan dependencias en la media y la varianza condicional de la serie en análisis. Estas incluyen las metodologías *RiskMetrics®*, *ARMA-GARCH* y *ARMA-GARCH-EVT*.

La metodología de *RiskMetrics®* solo modela la volatilidad condicional de la serie y supone que el valor esperado de los retornos es cero. En este caso, las medidas de riesgo son calculadas con base en los resultados de la sección 3.2.1.1.2.

En la metodología *ARMA-GARCH* se utilizaron los resultados obtenidos de las secciones 5 y 5.2, donde se estiman los modelos *AR(120)-GARCH(1,1)* y *AR(120)-IGARCH(1,1)*. Las medidas de riesgo fueron calculadas con base en los residuales de estos modelos. Teniendo en cuenta pruebas de diagnóstico sobre los residuales de los modelos, se asumió una distribución doble exponencial para los residuales del proceso *GARCH*, la cual presenta colas más pesadas que la normal, mientras que se asume que los residuales del modelo *IGARCH* siguen una distribución normal.

Las medidas de riesgo asociadas a los modelos *AR(120)-GARCH(1,1)* y *AR(120)-IGARCH(1,1)* se calculan con base en las ecuaciones (80), (81) y en la distribución asumida para los errores de estos modelos, doble exponencial y normal. Si se asume que los errores siguen una distribución doble exponencial estándar, con media cero y varianza uno, su función de densidad es de la forma¹⁰⁶:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|z|} \quad (89)$$

y su α -ésimo cuantil esta dado por:

$$q_\alpha(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\log(2) + \log(1-\alpha)), \quad \alpha > 0.5 \quad (90)$$

En este caso el *VaR* se encuentra reemplazando (90) en la ecuación (80), mientras que el *ES* es obtenido a partir de las ecuaciones (35) y (81). Los valores obtenidos para los cuantiles 95 y 99 de la distribución doble exponencial estándar son 1.6282, 2.7662, respectivamente, mientras que los valores obtenidos para la ecuación (35) asociados a estos dos cuantiles y a esta distribución son 2.3353 y 3.4733, respectivamente.

¹⁰⁶ Zivot y Wang (2002) Pág. 247.

	$AR(120) - GARCH(1,1)$				$AR(120) - IGARCH(1,1)$			
	Umbral (\hat{u})	No de observaciones (k)	Parámetro de forma ($\hat{\xi}$)	Parámetro de escala ($\hat{\beta}$)	Umbral (\hat{u})	No de observaciones (k)	Parámetro de forma ($\hat{\xi}$)	Parámetro de escala ($\hat{\beta}$)
-Cola izquierda	1.3603	65	-0.0313 (0.1160)	1.1678 (0.1982)	1.3432	59	-0.0145 (0.1371)	0.8231 (0.1556)
Cola derecha	1.9761	44	0.3139 (0.2348)	1.1664 (0.3208)	1.8139	39	0.1720 (0.2346)	1.1123 (0.3144)

Tabla 5. Umbrales y parámetros estimados para las colas de la distribución de los residuales de los modelos $AR(120)-GARCH(1,1)$ y $AR(120)-IGARCH(1,1)$ (Errores estándar entre paréntesis)

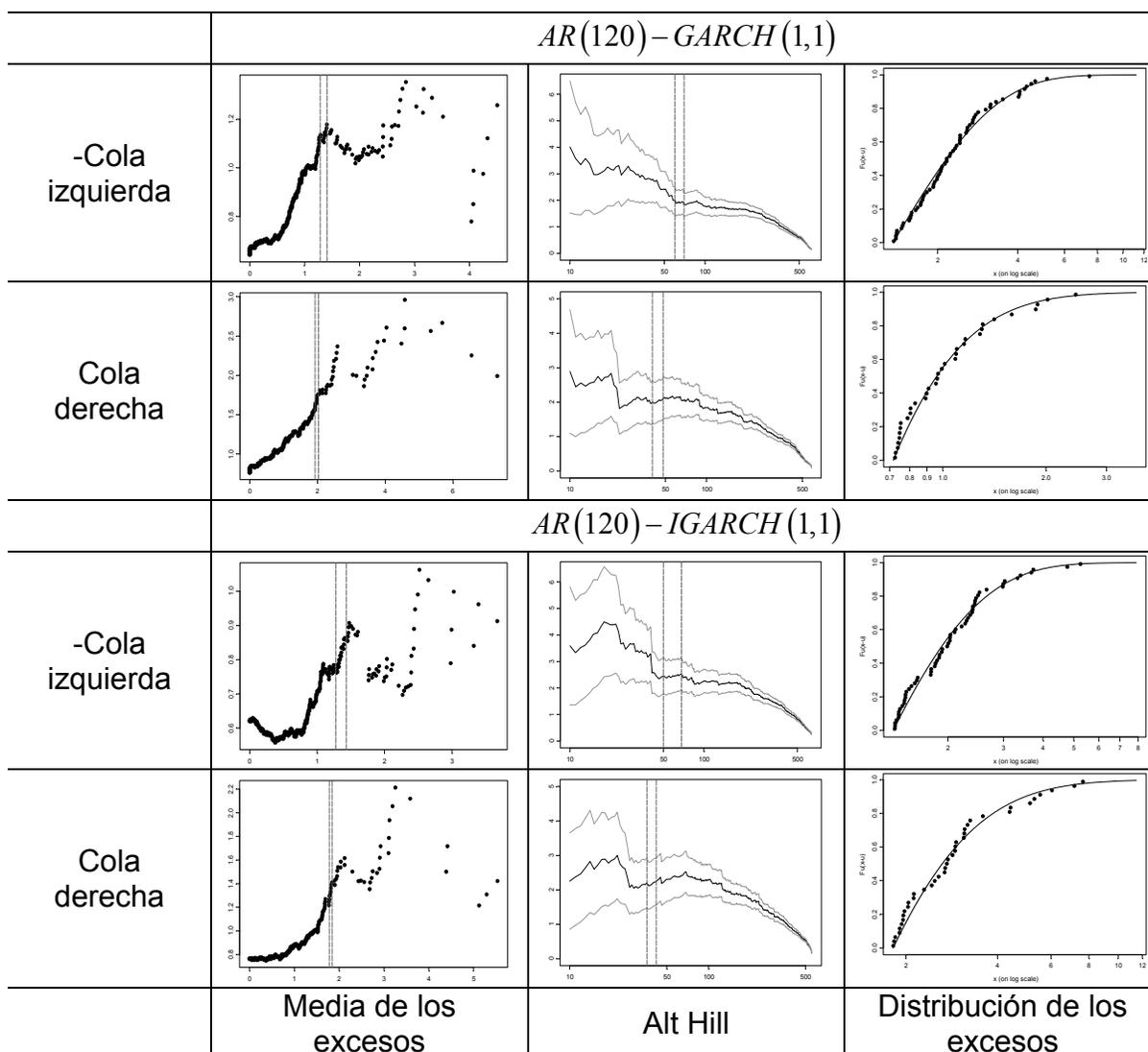


Figura 28. Gráfico de la media de los excesos, Alt Hill y distribución de los excesos para los residuales de los modelos $AR(120)-GARCH(1,1)$ y $AR(120)-IGARCH(1,1)$

La estimación de las medidas de riesgo utilizando el método *POT* de *EVT*, *ARMA-GARCH-EVT*, se basa en la metodología de dos etapas explicada en la sección 4.2.3. La selección de los umbrales óptimos sobre los residuales de los modelos *AR(120)-GARCH(1,1)* y *AR(120)-IGARCH(1,1)* sigue la metodología utilizada en la sección anterior. En la Figura 28 y la Tabla 5 se presentan los umbrales óptimos seleccionados y los resultados de la estimación de los parámetros de la *GPD* sobre las colas de la distribución de los residuales de los modelos.

En el gráfico de la distribución de los excesos se observa que la *GPD* es una buena aproximación a las colas de la distribución de los residuales del modelo. Sin embargo, al evaluar los parámetros estimados de esta distribución, se encuentra que no se puede rechazar la hipótesis $H_0 : \xi = 0$. Por lo tanto, las variaciones de la *TIB* no se pueden asociar a distribuciones de colas pesadas que pertenezcan al *MDA* de la distribución Fréchet, sino a distribuciones del *MDA* de la familia Gumbel, en las que se encuentran distribuciones como la normal y distribuciones con colas pesadas como la lognormal y las de la familia exponencial¹⁰⁷.

En la Tabla 6 se presentan los resultados de las estimaciones asociadas a los cinco métodos mencionados en esta sección para el día 3 de enero de 2005. En general, el *VaR* estimado a través de estas metodologías resulta más bajo que los obtenidos en la sección anterior, ya que estas últimas metodologías tienen en cuenta más información. Con un nivel de confianza de $\alpha = 0.95$, la mayoría de metodologías presentadas en la Tabla 6 indican que, en el caso de las variaciones positivas, el *VaR* se encuentra alrededor de 27 puntos básicos, mientras que en las variaciones negativas, el *VaR* oscila alrededor de 10 puntos básicos.

Adicionalmente, a un nivel de confianza de $\alpha = 0.95$, la metodología *RiskMetrics®*, presenta el valor en riesgo más bajo en la cola derecha y el más alto en la cola izquierda. Esto es debido a que esta metodología asume que la media de los retornos es cero, mientras que las metodologías basadas en los modelos *ARMA-GARCH*, tienen en cuenta el pronóstico de la serie, por lo que se generan “asimetrías” en los valores en riesgo de las variaciones de la *TIB*. A un nivel de confianza de $\alpha = 0.99$, los valores en riesgo obtenidos para la cola derecha con los modelos *GARCH* e *IGARCH*, son más altos que los obtenidos por *RiskMetrics®*, mientras en la cola izquierda son similares.

Los resultados del *ES* muestran que la metodología que combina los residuales del modelo *AR(120)-GARCH(1,1)* con *EVT* presenta el resultado más alto, mientras que los *ES* más bajos se presentan en aquellos modelos que asumen normalidad en la serie.

¹⁰⁷ McNeil *et. al.* (2004)

Método	-Cola Izquierda (DTIB)				Cola derecha (DTIB)			
	$\widehat{VaR}_{0.95}$	$\widehat{VaR}_{0.99}$	$\widehat{ES}_{0.95}$	$\widehat{ES}_{0.99}$	$\widehat{VaR}_{0.95}$	$\widehat{VaR}_{0.99}$	$\widehat{ES}_{0.95}$	$\widehat{ES}_{0.99}$
<i>RiskMetrics</i> ® ($\lambda = 0.94$)	0.1749	0.2473	0.2193	0.2833	0.1749	0.2473	0.2193	0.2833
AR-GARCH- Doble exponencial	0.1009	0.2313	0.1820	0.3124	0.2722	0.4026	0.3533	0.4837
AR-GARCH- EVT	0.0810	0.2906	0.2105	0.4136	0.2727	0.5267	0.4495	0.8196
AR-IGARCH- Normal	0.1348	0.2200	0.1870	0.2623	0.2761	0.3612	0.3283	0.4036
AR-IGARCH- EVT	0.0955	0.2591	0.1969	0.3581	0.2396	0.4789	0.3955	0.6844

Tabla 6. VaR y ES por *RiskMetrics*®, AR-GARCH doble exponencial, EVT-AR-GARCH, AR-IGARCH con normalidad y EVT-AR-IGARCH

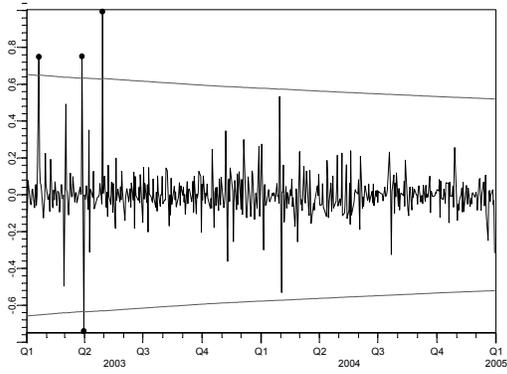
5.4. Backtesting

En las secciones anteriores se presentaron resultados de la estimación de medidas de riesgo para el periodo final de la muestra a partir de diferentes metodologías. Para establecer cuales son las que presentan un mejor desempeño se realizó el *Backtesting* sobre los últimos 490 días de la muestra, período comprendido entre enero de 2003 y diciembre de 2004. Los resultados se presentan en la Figura 29 y en las Tablas 7 y 8.

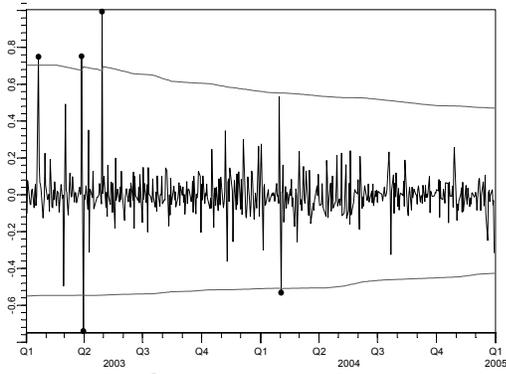
En estos resultados se observa claramente que las metodologías que asumen que la volatilidad condicional de la serie no permanece constante a través del tiempo, tales como los modelos *GARCH* e *IGARCH* y la metodología de *RiskMetrics*®, presentan un mejor desempeño a lo largo del período de evaluación.

El buen desempeño de estas metodologías, alrededor de 25 fallas para todos los modelos anteriores, se contrasta con la sobreestimación del riesgo que presentan las metodologías de simulación histórica, normalidad y *EVT* sin modelar dependencia.

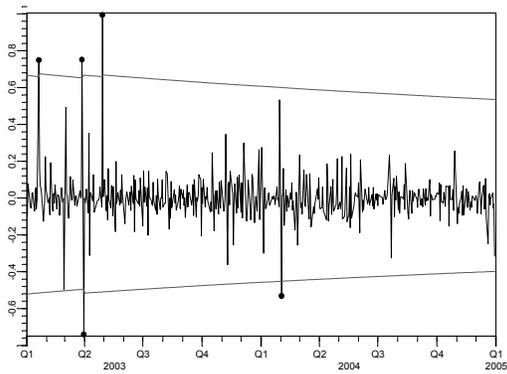
Las metodologías que más subestimaron el riesgo, es decir, aquellas con un mayor número de fallas, son las metodologías *AR-IGARCH* y *EVT-AR-IGARCH*. Esta última técnica, es la única en la que se muestra evidencia de subestimación del riesgo de acuerdo con las pruebas de *backtesting*. A pesar del buen desempeño de la metodología de *RiskMetrics*® en la cola derecha, en la cola izquierda esta metodología tendió a sobreestimar el riesgo. Esta característica asimétrica puede ser debida a que *RiskMetrics*® calcula el mismo *VaR* para las dos colas ya que no incorpora estimaciones del primer momento condicional de las series.



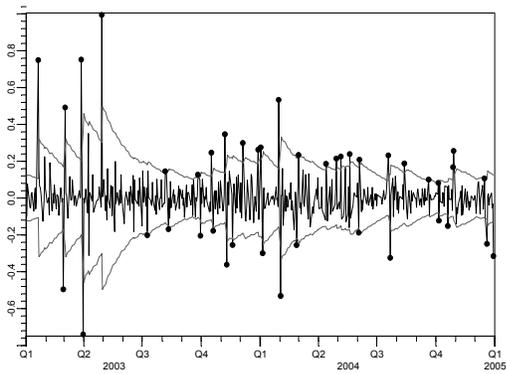
Normal



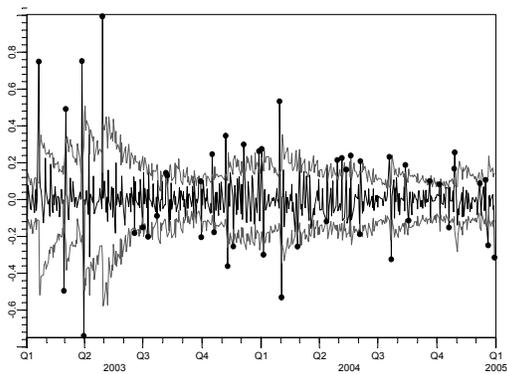
Simulación Histórica



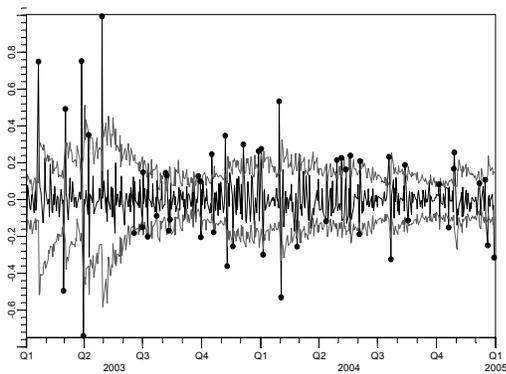
EVT sin modelar dependencia



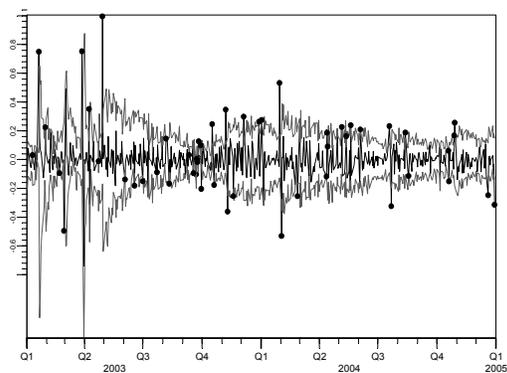
RiskMetrics®



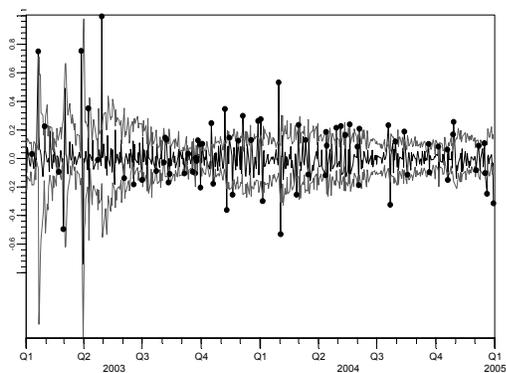
AR-GARCH doble exponencial



AR-GARCH-EVT



AR-IGARCH normal



AR-IGARCH-EVT

Figura 29. Gráficos de Backtesting

	No. obs. (n)	No. de fallas (x)	Tiempo hasta primera falla (\hat{v})	Proporción de fallas estimada (\hat{p})	Intervalos de confianza del 95% para \hat{p} bajo normalidad		Prueba de proporción de fallas LR_{POF}	Prueba normal Z_0	Intervalos de confianza del 95% bajo H_0 con distribución binomial	
					Inferior	Superior			Inferior	Superior
Resultado esperado bajo H_0		25	20	0.05				$H_0: p=0.05$	$H_0: p = 0.05$	
Normalidad	490	1	61	0.0020	-0.0020	0.0060	41.7695 (0.0000)	-23.5240 (0.0000)	0.0327	0.0673
Simulación histórica	490	2	61	0.0041	-0.0016	0.0097	36.0483 (0.0000)	-15.9425 (0.0000)	0.0327	0.0673
EVT	490	2	61	0.0041	-0.0016	0.0097	36.0483 (0.0000)	-15.9425 (0.0000)	0.0327	0.0673
RiskMetrics®	490	17	41	0.0347	0.0185	0.0509	2.6946 (0.1007)	-1.8514 (0.0641)	0.0327	0.0673
AR-GARCH	490	20	41	0.0408	0.0233	0.0583	0.9257 (0.3360)	-1.0274 (0.3042)	0.0327	0.0673
AR-GARCH-EVT	490	22	41	0.0449	0.0266	0.0632	0.2777 (0.5982)	-0.5454 (0.5855)	0.0327	0.0673
AR-IGARCH	490	22	36	0.0449	0.0266	0.0632	0.2777 (0.5982)	-0.5454 (0.5855)	0.0327	0.0673
AR-IGARCH-EVT	490	31	36	0.0633	0.0417	0.0848	1.6807 (0.1948)	1.2062 (0.2277)	0.0327	0.0673

Tabla 7. Resultados del Backtesting para la cola izquierda (valores p entre paréntesis)

	No. obs. (n)	No. de fallas (x)	Tiempo hasta primera falla (\hat{v})	Proporción de fallas estimada (\hat{p})	Intervalos de confianza del 95% para \hat{p} bajo normalidad		Prueba de proporción de fallas LR_{POF}	Prueba normal Z_0	Intervalos de confianza del 95% bajo H_0 con distribución binomial	
					Inferior	Superior			Inferior	Superior
Resultado esperado bajo H_0		25	20	0.05				$H_0: p=0.05$	$H_0: p = 0.05$	
Normalidad	490	3	12	0.0061	-0.0008	0.0130	31.3777 (0.0000)	-12.4512 (0.0000)	0.0327	0.0673
Simulación histórica	490	3	12	0.0061	-0.0008	0.0130	31.3777 (0.0000)	-12.4512 (0.0000)	0.0327	0.0673
EVT	490	3	12	0.0061	-0.0008	0.0130	31.3777 (0.0000)	-12.4512 (0.0000)	0.0327	0.0673
RiskMetrics®	490	25	12	0.0510	0.0315	0.0705	0.0107 (0.9177)	0.1027 (0.9182)	0.0327	0.0673
AR-GARCH	490	26	12	0.0531	0.0332	0.0729	0.0949 (0.7581)	0.3023 (0.7624)	0.0327	0.0673
AR-GARCH-EVT	490	28	12	0.0571	0.0366	0.0777	0.5041 (0.4777)	0.6812 (0.4958)	0.0327	0.0673
AR-IGARCH	490	30	6	0.0612	0.0400	0.0825	1.2167 (0.2700)	1.0364 (0.3000)	0.0327	0.0673
AR-IGARCH-EVT	490	44	6	0.0898	0.0645	0.1151	13.3540 (0.0003)	3.0813 (0.0021)	0.0327	0.0673

Tabla 8. Resultados del Backtesting para la cola derecha (valores p entre paréntesis)

6. VaR y riesgo de tasa de interés.

Hasta la sección anterior las variaciones de la *TIB* se han tratado como las variaciones del precio de un activo financiero. Sin embargo, los cambios en la *TIB* afectan el valor del portafolio de forma diferente. En términos generales, el riesgo de tasa de interés se define como el riesgo que existe cuando cambios en la tasa de interés afectan negativamente la situación económica de una entidad financiera¹⁰⁸.

La medición de éste riesgo incluye metodologías relacionadas con el *VaR* y otros factores tales como las bandas de tiempo y el concepto de duración. La duración es una medida del cambio porcentual en el valor de una posición que ocurre cuando se dan pequeños cambios en la tasa de interés¹⁰⁹.

Sea *VP* el valor presente de los flujos de fondos que recibe (paga) una entidad financiera por un instrumento específico, formalmente:

$$VP = \sum_{j=1}^T \frac{FC_j}{(1+i)^j} \quad (91)$$

donde *FC* representan los flujo de caja involucrados en la operación e *i* representa la tasa a la cual la entidad financiera descuenta dichos flujos de caja. La respuesta del valor presente de los flujos de fondos ante un cambio en la tasa de interés, puede ser aproximada a través de la primera derivada $\frac{dVP}{di}$. Dividiendo por el valor presente en ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\frac{dVP}{di} \frac{1}{VP} = -\frac{1}{(1+i)} \left[\frac{\sum_{j=1}^T \frac{j FC_j}{(1+i)^j}}{VP} \right] \quad (92)$$

Donde el término entre corchetes corresponde a la duración de Macaulay¹¹⁰, D_{MAC} . Una forma de interpretar D_{MAC} es como la elasticidad tasa de interés del valor presente de los flujos de caja. Reorganizando (92) se tiene que:

$$\frac{dVP}{di} \frac{(1+i)}{VP} = -D_{MAC} \quad (93)$$

¹⁰⁸ Para una discusión más amplia acerca de regulación en riesgo de tasa de interés, valor en riesgo y algunas formas de cobertura, véase Grubisic y Escude (1999)

¹⁰⁹ Basel Committee on Banking Supervision (2004)

¹¹⁰ Fabozzi (2000).

La ecuación (93) puede ser expresada en forma discreta como:

$$\Delta VP_{t+1} = -VP_t \times D_{MOD_t} \times \Delta i_{t+1} \quad (94)$$

Donde $D_{MOD} = D_{MAC} / (1+i)$, es la duración modificada. A partir de la ecuación (94) el VaR se define, en términos de riesgo de tasa de interés, como la variación del valor presente de los flujos de caja de la entidad, ΔVP , ante cambios en la tasa de interés, Δi . Omitiendo el signo negativo de (94), el VaR se puede expresar como:

$$VaR_\alpha(VP_{t+1}) = VP_t \times D_{MOD_t} \times VaR_\alpha(i_{t+1}) \quad (95)$$

Debido a que las entidades financieras pueden mantener posiciones activas y pasivas en los mismos instrumentos, y manejar diferentes plazos dentro de las mismas posiciones, el VaR por riesgo de tasa de interés finalmente esta dado por:

$$VaR_{t+1} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n VaR_i^{act} - \sum_{s=1}^m VaR_s^{pas} \right) \quad (96)$$

Es decir, el VaR total por riesgo de tasa de interés de un instrumento específico, se encuentra definido como la suma de las diferencias entre los VaR obtenidos para las n posiciones activas y m posiciones pasivas del mismo instrumento dentro de cada una de las k bandas de tiempo preestablecidas.

En resumen, el cálculo del riesgo de tasa de interés de un instrumento específico no depende únicamente del VaR de la tasa de interés, tal como se obtuvo en las secciones anteriores, sino además de la duración y plazos del instrumento, ecuación (96).

7. Conclusiones.

En este documento se presentaron diversas metodologías para medir el riesgo de mercado, entendiendo éste como la posibilidad que se disminuya el valor del portafolio debido a reducciones en los valores de mercado de los activos que lo componen.

Una de las medidas de riesgo de mercado más utilizadas es el valor en riesgo, VaR , el cual indica la máxima pérdida posible en el $\alpha * 100\%$ mejor de los casos. Este corresponde al α -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias del activo.

Aunque el VaR es bastante utilizado, no es una medida de riesgo coherente. Es decir, el VaR no refleja en todos los casos ganancias por diversificación. En ese sentido, existen otras medidas de riesgo coherentes, tal como el *Expected Shortfall*,

ES. El uso de estas dos medidas, *VaR* y *ES*, puede aportar mayor información en la toma de decisiones.

Dadas las características de los activos financieros, colas pesadas y conglomerados de volatilidad, la teoría del valor extremo, *EVT*, también puede ser una herramienta útil en la medición del *VaR* y el *ES*. A pesar que la metodología *EVT* supone que las series analizadas son *iid*, esta técnica puede ser combinada con modelos del tipo *ARMA-GARCH* con el objeto de superar este inconveniente. Estas metodologías fueron implementadas sobre la Tasa de Interbancaria para el periodo diario entre el 16 de abril de 1994 y el 30 de diciembre de 2004.

Análisis preliminares detectaron que existe un cambio estructural en los parámetros del modelo de la media condicional de la *TIB* en febrero de 2000. Teniendo en cuenta estos resultados, las estimaciones de las diferentes metodologías se realizaron para las variaciones de la *TIB* en el período comprendido entre el 1 de febrero de 2000 y el 30 de diciembre de 2004.

Las medidas de riesgo, *VaR* y *ES*, se estimaron para dos grupos de metodologías. El primer grupo no modela el comportamiento las dependencias existentes en el primer y segundo momento de la serie, mientras que el segundo grupo si modela estas características. En el primer grupo se incluyeron la metodología de normalidad, simulación histórica y *EVT*, en el segundo grupo *RiskMetrics*®¹¹¹, *ARMA-GARCH* y *ARMA-GARCH-EVT*.

Los análisis realizados sobre la serie en estudio y los resultados de la estimación de las técnicas de *EVT* indican que aunque la distribución de las variaciones de la *TIB* tiene colas más pesadas que las de una distribución normal, no pertenece al dominio de atracción (*MDA*) de la distribución Fréchet. Específicamente, esta serie pertenece al *MDA* de la distribución Gumbel, el cual esta conformado por distribuciones cuyas colas decaen en forma exponencial.

Las estimaciones obtenidas para el 3 de enero de 2005 del *VaR* y el *ES* para la *TIB* presentan dos características. En primer lugar, las metodologías que no tienen en cuenta la volatilidad condicional, (normalidad, simulación histórica y *EVT*), presentan medidas de riesgo más altas. En segundo lugar, las medidas de riesgo estimadas en la cola derecha son más altas que las obtenidas en la cola izquierda. El análisis del *backtesting* muestra que la primera característica es también válida para el periodo de evaluación 2003-2004. Sin embargo, la magnitud y el sentido de la asimetría entre la cola izquierda y derecha depende tanto de la metodología utilizada como de la fecha en la cual se evalúe.

Teniendo en cuenta los modelos de *RiskMetrics*®, *AR-GARCH*, *AR-IGARCH* y *AR-GARCH-EVT* para una posición de mil millones de pesos, con una duración modificada de uno, el *VaR* de las posiciones pasivas, con un nivel de confianza de 99% y un período de tenencia de un día para el 3 de enero de 2005, oscila de

¹¹¹ La metodología *Riskmetrics*® solo modela dependencia en la varianza condicional.

acuerdo con la metodología utilizada entre \$2'199.500.00 y \$2'905.500.00. Para las posiciones activas el *VaR* se encuentra entre \$2'473.100.00 y \$5'266.700.00.

La evaluación de las medidas de riesgo (*backtesting*) para las diferentes técnicas entre los años 2003 y 2004 muestra que las mejores metodologías son aquellas que modelan la dependencia de la varianza condicional, tales como los modelos *RiskMetrics*®, *AR-GARCH* y *AR-GARCH-EVT*. Las técnicas con el peor desempeño son la de simulación histórica, la *EVT* y la basada en el supuesto de normalidad.

Estas evaluaciones se realizaron para las dos colas de la distribución de la serie. En general, los resultados de la evaluación son similares en ambos casos. Sin embargo, el modelo de *RiskMetrics*® conduce a resultados diferentes; a pesar de su buen desempeño en la cola derecha, en la cola izquierda esta metodología tendió a sobreestimar el riesgo. Esta característica asimétrica puede ser debida a que *RiskMetrics*® calcula el mismo *VaR* para las dos colas, ya que no incorpora estimaciones del primer momento condicional de las series.

Finalmente, es importante aclarar que este documento no pretende abarcar la totalidad de las metodologías econométricas relacionadas con el riesgo de mercado, solo intenta generar un marco general para una mayor discusión técnica acerca de las aplicaciones de estos temas. Es así, como en este trabajo únicamente se presentan modelos univariados y uniecuacionales relacionados con el *VaR*. Sin embargo, existen extensiones de estos modelos, por ejemplo, para *EVT* existen las copulas de valor extremo, las cuales permiten integrar el comportamiento de otras variables en el análisis. Por otro lado, en este documento tampoco se tratan decisiones óptimas de portafolio con base en las medidas de riesgo analizadas.

Referencias

Acerbi Carlo y Dirk Tasche (2002). "*Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk*". Economic Notes. Blackwell Publishing. Vol 31. No. 2, pp. 379-388.

Acerbi Carlo, Claudio Nardio y Carlo Sirtori. (2004) "*Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*" Working Paper. Abax Bank

Alexander Carol (2000). "*Orthogonal Methods for Generating Large Semi-Definite Covariance Matrices*". Discussion Papers in Finance 2000-06. ISMA Centre.

Artzner, P. *et al.* (1998). "*Coherent Measures of Risk*". Mathematical Finance, Vol. 9. No.3, pp. 203-228.

Banco de la República. *Informe de la Junta Directiva al Congreso de la República*. Varios Años.

Basel Committee on Banking Supervision (2004). "*Principles for the Management and Supervision of Interest Rate Risk*". Bank for International Settlements, Press & Communications. Working Paper. GLoriaMundi

Basel Committe on Banking Supervision (1996a). "*Supervisory Framework for the use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements.*" Working Paper. GLoriaMundi

Basel Committe on Banking Supervision (1996b). "*Ammendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*". Working Paper. GLoriaMundi

Beirlant Jan, G. Dierckxm, Y. Goegebeur y G. Matthys. (1999a). "*Tail Index Estimation and an Exponential Regression Model*". Extremes. Vol. 2. No. 2, pp. 177-200.

Beirlant Jan, G. Dierckxm, y C. Starica (1999b) "*On Exponential Representations of Log Spacings of Extreme Order Statistics.*" Technical Report, Catholic University Leuven

Bollerslev Tim, (1986) "*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*". Journal of Econometrics. No. 31, pp. 309-328.

Bollerslev Tim, Robert F. Engle y Daniel B. Nelson. (1994) "*ARCH Models*". Handbook of Econometrics. Vol. IV, pp. 2961-2984.

Butler J.S. y B. Schachter (1996). "*Improving Value-at-Risk estimates by combining kernel estimation with historical simulation.*" mimeo, Vanderbilt University and Comptroller of the Currency.

Cardozo Pamela (2004). "Valor en Riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la teoría del valor extremo". Borradores de Economía. Banco de la República. No. 304.

Cardozo, P. y C. Hernandez (2005). Documentos técnicos de la subgerencia monetaria. Banco de la República.

Cassidy Colleen y Marianne Gizycki (1997) "Measuring Traded Market Risk: Value at Risk and Backtesting Techniques." Research Discussion Paper 9708. Reserve Bank of Australia.

Coles Stuart (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, London.

Danielsson Jon y Casper de Vries (2000). "Value-at-Risk and Extreme Returns." FMG-Discussion Paper No 273. Financial Markets Group, London School of Economics.

Danielsson Jon y Casper G. de Vries. (1997). "Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data". Journal of Empirical Finance. Vol. 4, pp. 241-257.

Danielsson Jon, L. de Haan, L. Peng y C. de Vries (2001). "Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation." Journal of Multivariate Analysis. No. 76, pp. 226-248.

Dowd Kevin (2002) *An introduction to Market Risk Measurement*. John Wiley & Sons Inc.

Drees H y E. Kaufmann (1998). "Selecting the Optimal Sample Fraction in Univariate Extreme Value Estimation". Stochastic Process. Applications 75. No.2, pp. 149-172.

Drees Holger, Laurens de Haan y Sidney Resnick. (2000) "How to Make a Hill Plot". The Annals of Statistics. Vol. 28, No. 1, pp 254-274.

Embrechts P, C. Klüppelberg y T. Mikosch (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin. Springer-Verlag.

Embrechts Paul, Alexander McNeil y Daniel Straumann. (2002) "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls." Risk Management : Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, pp176-223.

Engle Robert F. (1982). "Autoregressive Condicional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". Econometrica. Vol. L, No. 4. pp. 987-1006.

Engle Robert F. y Victor K. Ng. (1995) "Measuring and Testing the Impact of News". En Robert F. Engle (Ed.) ARCH Selected Readings, Oxford University Press.

- Fabozzi (2000) *Bond Markets, Analysis and Strategies*. New Jersey. Prentice Hall.
- Farmer J. Doyne y John Geanakoplos (2004) “*Power Laws in Finance and their Implications for Economic Theory*”. Working Paper. Yale University.
- Franses Philip Hans y Dick van Dijk (2000). *Non Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press
- Gouriéroux Christian (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Nueva York. Springer-Verlag.
- Grubisic Elena y Guillermo Escude (1999). “*Modelización de la tasa de interés para la evaluación del riesgo de tasa de interés mediante modelos de Valor a Riesgo (VaR)*”. Documento de trabajo No. 9, Banco Central de la República Argentina.
- Haas Marcus (2001). “*New Methods in Backtesting*.” Research discussion paper. Financial Engineering Research Center Caesor, Bonn.
- Hall Peter (1990). “*Using the bootstrap to estimate mean squared error and select smoothing parameter in nonparametric problems*”. Journal of Multivariate Analysis, Vol. 32, Issue 2, pp. 177-203.
- Hernández Gamarra Antonio y José Tolosa Buitrago, 2001, “*La política monetaria en Colombia en la segunda mitad de los años Noventa*”. Borradores de Economía. Banco de la Republica. No. 172.
- Hill Bruce M. (1975) “*A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution*”. The Annals of Statistics. Vol. 3, No. 5, pp. 1163-1174.
- J.P. Morgan (1995). “*RiskMetrics Technical Document*.” Morgan Guaranty Trust Company, Market Risk Research. Third Edition.
- Jorion Philippe (1999). *Valor en Riesgo*. México. Limusa, Noriega Editores.
- Kupiec N. (1995). “*Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measures Models*”. Journal of Derivatives. Vol. 3, No. 2, pp 73-84.
- Longerstaey Jack (1995). *RiskMetrics™ /RD : A Regulatory Dataset*. Morgan Guaranty Trust Company, Market Risk Research.
- Longin François y Solnik Bruno. (2001) “*Extreme Correlation of International Equity Markets*”. The Journal of Finance. Vol. LVI. No. 2. Abril. pp. 652.
- Lundbergh Stefan y Timo Terasvirta (2002). “*Evaluating GARCH models*” Journal of Econometrics. Vol. 110. No. 2, pp. 417-435.

Mahoney J. M. (1996). *“Forecast biases in Value-at-Risk estimations: Evidence from foreign exchange and global equity portfolios,”* mimeo, Federal Reserve Bank of New York.

Matthys Gunther y Jan Beirlant (2002). *“Adaptative Threshold Methods in Tail Index Estimation.”* P. Embrechts (Ed.). Risk Books, London, pp 37-49.

McNeil Alexander (1999). *“Extreme Value Theory for Risk Managers”* Internal Modelling and CAD II, RISK Books, pp. 93-113.

McNeil Alexander y Rüdiger Frey (2000). *“Estimation of Tail Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach.”* Journal of Empirical Finance. Vol. 7. pp. 271-300

McNeil Alexander, Rudiger Frey y Paul Embrechts (2004) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Por publicar.

Melo, L.F. y M. Misas. (2004). *“Modelos Estructurales de Inflación en Colombia: Estimación a través de Mínimos Cuadrados Flexibles.”* Borradores de Economía. Banco de la República. No. 283.

Rodríguez Hernández Romel (2005). *“Colocar menos cartera e invertir en TES: ¿una decisión óptima? Análisis de las inversiones en la banca colombiana, 1995-2003.”* Documento CEDE 2005-1. Universidad de los Andes.

Superintendencia Bancaria de Colombia (2003) *Circular 100 de 1995. Capítulo XXI: Reglas aplicables a la gestión de los riesgos de mercado.* Disponible en www.superbancaria.gov.co

Tsay Ruey S. (2002). *“Analysis of Financial Time Series.”* John Wiley & Sons.

Zeileis, A., F. Leisch, C. Kleiber. y K. Hornik. (2005). *“Monitoring Structural Change in Dynamic Econometric Models”.* Journal of Applied Econometrics, Vol. 20, 1 pp. 99-121.

Zivot Eric y Jiahui Wang (2002). *“Modelling Financial Time Series with S-Plus.”* Springer.

Anexo 1

Modelos $AR(120)-GARCH(1,1)$ y $AR(120)-IGARCH(1,1)$

A1.1 Estimación de los modelos $GARCH$

Ecuación $GARCH$ de los Modelos $AR(120)-GARCH(1,1)$ y $AR(120)-IGARCH(1,1)$ *

Modelo	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$
$GARCH(1,1)$ $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$	0.000159 (0.000040)	0.068178 (0.010235)	0.916333 (0.008587)
$IGARCH(1,1)$ $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{t-1}$	0.013631 (0.001585)	0.086729 (0.007182)	

* Errores estándar entre paréntesis

A1.2 Pruebas de Especificación para los modelos $AR(120)-GARCH(1,1)$ y $AR(120)-IGARCH(1,1)$

A1.2.1 Modelo $AR(120)-GARCH(1,1)$

Pruebas de normalidad

Jarque-Bera	valor p	Shapiro-Wilk	valor p
14479.51	0	0.847	0

Prueba de autocorrelación de Ljung-Box para los residuales estandarizados:

Estadístico	valor p	Grados de libertad
195.004	0.996	250

Prueba de autocorrelación de Ljung-Box para los residuales estandarizados al cuadrado:

Estadístico	valor p	Grados de libertad
227.391	0.845	250

Prueba de efectos asimétricos de Engle y Ng (1995)

Estadístico F	DF-Numerador	DF-denominador	valor p
0.757	3	1194	0.518

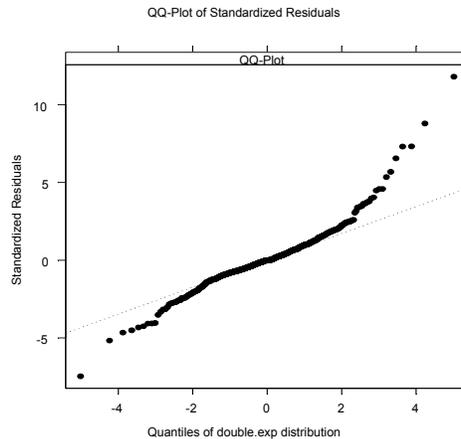
Prueba de constancia de parámetros de Lundbergh y Teräsvirta (2002)

Estadístico F	DF-Numerador	DF-denominador	valor p
0.2453	3	1192	0.865

Especificación de los órdenes del modelo

Prueba	Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Estadístico de prueba	Valor	Valor-p
Lundbergh y Terasvirta (2002)	No existe efecto ARCH en los residuales estandarizados	Existe efecto ARCH en los residuales estandarizados (m=2)	F	2.103	0.349
Bollerslev (1986)	DTIB-AR(120)-GARCH(1,1)	DTIB-AR(120)-GARCH(1,2)	TR ²	0.350	0.554
Bollerslev (1986)	DTIB-AR(120)-GARCH(1,1)	DTIB-AR(120)-GARCH(2,1)	TR ²	0.938	0.333

Gráfico Q-Q de los residuales estandarizados



A1.2.2. Modelo AR(120)-IGARCH(1,1)

Pruebas de normalidad

Jarque-Bera	valor p	Shapiro-Wilk	valor p
4035.718	0	0.912	0

Prueba de autocorrelación de Ljung-Box para los residuales estandarizados:

Estadístico	valor p	Grados de libertad
168.48	0.999	250

Prueba de autocorrelación de Ljung-Box para los residuales estandarizados al cuadrado:

Estadístico	valor p	Grados de libertad
244.889	0.579	250

Prueba de efectos asimétricos de Engle y Ng (1995)

Estadístico F	DF-Numerador	DF-denominador	valor p
1.784	3	1194	0.148

Prueba de constancia de parámetros de Lundbergh y Teräsvirta (2002)

Estadístico F	DF-Numerador	DF-denominador	valor p
0.549	3	1192	0.649

Gráfico Q-Q de los residuales estandarizados

