

# Pronóstico y estructuras de volatilidad multi-período de la tasa de cambio del peso colombiano

*Elkin Castaño Vélez*  
*Santiago Gallón Gómez*  
*Karoll Gómez Portilla*

## Orden de la presentación

- Introducción
- Objetivos
- El Modelo ARFIMA-HYAPARCH
- Descripción de la serie
- Modelación de los retornos de la tasa de cambio COP/USD
- Volatilidad multi-período y estructura a plazos
- Comentarios finales

## Introducción

- Debido a la naturaleza heterocedástica de los retornos de la tasa de cambio la modelación de su proceso de volatilidad es de gran importancia en la toma de decisiones macroeconómicas y del mercado financiero.
- Para modelar la dinámica de dicho proceso, se han propuesto diversos métodos estadísticos, dentro de los cuales la metodología ARCH ha jugado un papel preponderante.

## Introducción

- La familia de modelos ARCH (a partir de Engle, 1982) captura muchas de las regularidades empíricas asociadas a la volatilidad de los retornos de los activos financieros, tales como:
  - Volatilidad por clusters: Varianza condicional heterocedástica
  - Saltos de precios discontinuos
  - Efectos de asimetría
  - Persistencia y larga memoria
  - Proceso de volatilidad potencial
  - Distribuciones leptocúrticas (no normales)

## Introducción

- Dentro de esta familia, el modelo gaussiano GARCH(1,1) ha sido frecuentemente empleado para el estudio de la tasa de cambio.
- Su popularidad radica en la facilidad de estimación, su interpretabilidad y en la derivación analítica directa de resultados tales como la volatilidad multi-periodo y estructura de plazos de la volatilidad.
- Sin embargo, este modelo solamente tiene en cuenta la varianza condicional estacionaria, los saltos de precios discontinuos y leptocurtosis.

## Introducción

- Estudios recientes han encontrado evidencia sobre otros hechos estilizados presentes en los retornos de la tasa de cambio de varios países.
- En algunos se ha encontrado evidencia sobre la persistencia en el proceso de media y/o en la volatilidad.
- Para modelar estas dinámicas algunos autores han empleado:
  - Modelos ARFIMA para modelar la existencia de memoria larga en el proceso de media
  - Modelos IGARCH, FIGARCH, HYGARCH y HYAPARCH para modelar el proceso de volatilidad

## Introducción

- Las especificaciones IGARCH y FIGARCH se caracterizan por la no estacionaridad del proceso de volatilidad, lo cual no parece ajustarse bien a las propiedades empíricas de las variables financieras.
- Davidson (2004) introduce el modelo HYGARCH como una especificación alternativa la cual permite considerar series cuyo proceso de volatilidad es estacionario y de larga memoria.
- Schoffer (2004) introduce el modelo HYAPARCH como una generalización del modelo de Davidson, permitiendo volatilidad potencial y asimetría

## Objetivos

- Buscar evidencia sobre una especificación más adecuada para el proceso de volatilidad de la tasa de cambio del Peso colombiano con respecto al Dólar americano, para el período comprendido entre enero de 2000 y julio de 2006.
- Con base en modelo obtenido calcular la volatilidad multi-período y la estructura a plazos.

## Metodología

- Se utiliza la estrategia de modelos anidados, donde se inicia con el modelo HYAPARCH como el modelo más general.

## El modelo ARFIMA–HYAPARCH

- Considere la serie de tiempo  $r_t$ . El proceso Hiperbólico ARFIMA-HYAPARCH (Schoffer, 2003) para  $r_t$  sigue la especificación:

$$\phi(B)(1-B)^{d_m} r_t = \theta(B)a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t \quad (2)$$

La ecuación (1) permite modelar la memoria del proceso de media:

- ✓ Si  $d_m = 0$  el proceso de media tiene memoria corta dirigida por un proceso ARMA(p,q).

## El modelo ARFIMA–HYAPARCH

- ✓ Si  $-0.5 < d_m < 0.5$ , entonces  $(1 - B)^{d_m}$  es el operador de diferencia fraccional. Existe memoria larga si  $0 < d_m < 0.5$ .
- ✓  $d_m$  es un parámetro de memoria larga. A medida que  $d_m$  tiende a 0.5 la memoria crece.
- ✓  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  son los polinomios autorregresivo y de medias móviles regulares que conducen a la memoria corta del proceso.

$\varepsilon_t$  es una sucesión de variables i.i.d con media cero y varianza 1.

## El modelo ARFIMA–HYAPARCH

- La ecuación (2) permite modelar el proceso de volatilidad:
- Los parámetros  $\tau$  y  $d$  son los parámetros de amplitud (Qué tan grandes pueden ser las variaciones en la varianza condicional) y memoria del proceso de volatilidad (Cuánto tiempo tarda en disiparse un shock sobre la volatilidad).
  - ✓  $\tau=1$  el modelo corresponde al FIAPARCH cuyo proceso de volatilidad no es estacionario y su memoria es larga cuando  $0 < d < 1$ . La memoria decrece cuando  $d \rightarrow 1$ !!
  - ✓  $d=1$  y  $\tau=1$  el modelo corresponde al IPARCH, cuyo proceso de volatilidad no es estacionario, pero es de memoria corta (Davidson, 2004)

## El modelo ARFIMA–HYAPARCH

- ✓  $d=1$  y  $\tau < 1$  el modelo corresponde al APARCH, cuyo proceso de volatilidad es estacionario
- El parámetro de asimetría es  $\gamma$ . Si  $\gamma=0$  no hay asimetría. En los modelos anteriores esta restricción implica modelos FIAPARCH, IPARCH y PARCH, respectivamente.
- El parámetro de potencia en la volatilidad es  $\delta$ . Si  $\delta=2$ , los modelos anteriores serían FIGARCH, IGARCH y GARCH, respectivamente.
- $g(a_t) = |a_t| - \gamma a_t$  e la función de asimetría.

## El modelo ARFIMA–HYARCH

Además,  $\eta_t = g(a_t)^\delta - \sigma_t^\delta$ ,  $\alpha(B) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i$ ,  $\beta(B) = \sum_{j=1}^q \beta_j B^j$ ,

$\alpha_0 \geq 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $-1 < \gamma < 1$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ .

- Una manera natural de probar memoria geométrica contra memoria hiperbólica es probar  $d=1$ .
- Si  $\tau > 1$  el proceso no es estacionario.

## El modelo ARFIMA–HYARCH

- Las condiciones para la existencia de  $E(\sigma_t^\delta)$  y  $E(|a_t^\delta|)$  son

$$0 \leq \tau < 1 + \frac{1}{E\left(|a_t| |-\gamma a_t|^\delta\right) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}}$$

y

$$(1 - \beta(1))^{-1} (\alpha_0 - \alpha(1)) > 0.$$

donde  $\phi^{(2)}(B) = (1 - \beta(B))^{-1} (1 - \alpha(B) - \beta(B)) (1 - (1 - B)^d)$

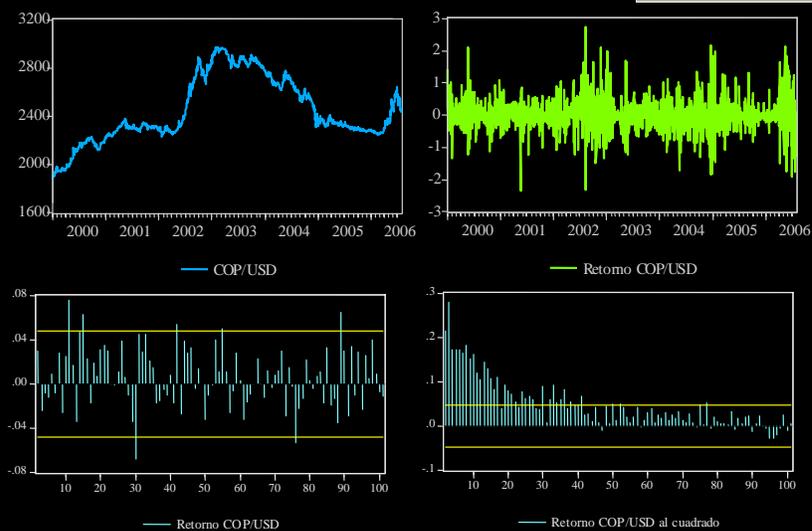
## Descripción de la información

- Precio de cierre diario del Peso colombiano con respecto al Dólar americano — COP/USD —.
- Para la serie de tasa de cambio se calcularon los retornos nominales porcentuales definidos como:

$$r_t = 100 \log(y_t / y_{t-1})$$

donde  $y_t$  representa el precio COP/USD en el  $t$ -ésimo día.

## COP/USD y sus retornos



## Resumen estadístico de los retornos del COP/USD

| Estadísticas de los retornos |                |
|------------------------------|----------------|
| Media                        | 0.015          |
| Mediana                      | 0.000          |
| Máximo                       | 2.719          |
| Mínimo                       | -2.345         |
| Desviación estándar          | 0.475          |
| Asimetría                    | 0.204          |
| Curtosis                     | 7.010          |
| Primer cuartil               | -0.186         |
| Tercer cuartil               | 0.222          |
| Jarque-Bera                  | 1160.71 {0.00} |
| Q(20)                        | 35.377 {0.02}  |
| Q <sup>2</sup> (20)          | 753.26 {0.00}  |
| T                            | 1715           |

## Exploración de larga memoria para la media. $H_0: dm=0$

| GPH                 |                     |                     | Whittle             |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| [T <sup>0.6</sup> ] | [T <sup>0.7</sup> ] | [T <sup>0.5</sup> ] | [T <sup>0.6</sup> ] | [T <sup>0.7</sup> ] | [T <sup>0.5</sup> ] |
| 0.181               | 0.069               | 0.25                | 0.151               | 0.035               | 0.136               |
| -2.455              | -1.407              | -2.128              | -2.858              | -0.938              | -1.738              |
| {0.014}             | {0.16}              | {0.034}             | {0}                 | {0}                 | {0}                 |
| R/S modificado      |                     |                     | KPSS                |                     |                     |
| m=4                 | m=8                 | m=24                | m=4                 | m=8                 | m=24                |
|                     | -2.014              | (1.903)             | -0.707              | -0.719              | -0.635              |
|                     | {0.025}             | {0.025}             | {0.025}             | {0.025}             | {0.025}             |
| Lobato_Robinson     |                     |                     | HLM                 |                     |                     |
|                     | -1.107              |                     |                     | 2.059               |                     |
|                     | {0.866}             |                     |                     | {0.02}              |                     |

## Exploración de larga memoria para la media. $H_0: d_m=0$

- Castaño, Gallón y Gómez (2007) proponen otra prueba basada en una aproximación autorregresiva de la componente de corto plazo del modelo ARFIMA. Los resultados de la prueba usando una aproximación AR(8):

Estimación de  $d$ : 0.271  
 Estadístico de la prueba: 4.788  
 Valor p: 0.000

Se rechaza  $H_0$

Se concluye que el proceso de media de los retornos de la tasa de cambio colombiana parece tener memoria larga.

## Modelación de los retornos de la tasa de cambio COP/USD: El GARCH(1,1)

| Especificación GARCH (1,1)  | Distribución Normal | Distribución GED |
|-----------------------------|---------------------|------------------|
| <i>Varianza condicional</i> |                     |                  |
| $c$                         | 0.008 (9.964)       | 0.004 (3.21)     |
| $\alpha_1$                  | 0.204 (11.39)       | 0.213 (6.182)    |
| $\beta_1$                   | 0.777 (52.55)       | 0.798 (29.45)    |
| $\eta$                      | —                   | 0.975 (25.10)    |
| Log Likelihood              | -878.55             | -747.99          |
| Jarque-Bera                 | 1207.01 {0}         | 1707.68 {0}      |
| Q(5)*                       | 8.60 {0.12}         | 9.41 {0.09}      |
| Q2(5)*                      | 1.79 {0.87}         | 3.11 {0.68}      |
| $a_1 + b_1$                 | 0.98                | 1.012            |

## Estrategia Alternativa de modelación: el modelo general ARFIMA–HYAPARCH

- Los resultados muestran que el modelo GARCH(1,1) no es adecuado para explicar la evolución de los retornos de la tasa de interés.
- Además, este modelo solamente tiene en cuenta la varianza condicional estacionaria, los saltos de precios discontinuos y la leptocurtosis. La imposición de este proceso conduciría a modelos subespecificados cuando existen otros hechos estilizados en la serie.
- Para evitar la imposición de modelos inapropiados se propone identificar un modelo más adecuado usando la estrategia de modelos anidados: Se trata de emplear un modelo general que considere:
  - Memoria del proceso de media: Corta o larga
  - Volatilidad por clusters
  - Saltos de precios discontinuos
  - Proceso de varianza condicional heterocedástica: estacionario o no estacionario

## Estrategia Alternativa de modelación: el modelo general ARFIMA–HYAPARCH

- Efectos de asimetría
  - Persistencia y larga memoria en el proceso de volatilidad
  - Proceso de volatilidad potencial
  - Distribuciones leptocúrticas (no normales)
- Un modelo general en el cual se pueden investigar los fenómenos anteriores es el modelo ARFIMA-HYAPARCH.

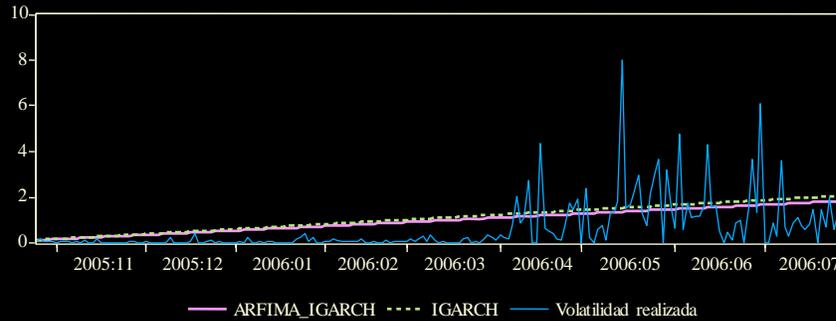
## Estrategia Alternativa de modelación: el modelo general ARFIMA–HYAPARCH, bajo una GED

| Especificación              | HYAPGARCH        | FIAPGARCH        | IGARCH           |
|-----------------------------|------------------|------------------|------------------|
| <i>Media condicional</i>    |                  |                  |                  |
| $d_m$                       | 0.099 (17.842)   | 0.099 (17.334)   | 0.096 (110.276)  |
| $\phi_1$                    | -0.100 (-94.988) | -0.100 (-94.004) | -0.096 (101.526) |
| $\phi_2$                    | -0.068 (-58.036) | -0.069 (-43.106) | -0.066 (-38.086) |
| $\phi_3$                    | -0.035 (-41.467) | -0.035 (-33.217) | -0.033 (-32.833) |
| $\phi_4$                    | -0.039 (-30.594) | -0.039 (-33.461) | -0.038 (-34.232) |
| <i>Varianza condicional</i> |                  |                  |                  |
| $\alpha_0$                  | 0.205 (6.240)    | 0.206 (2.731)    | 0.169 (9.224)    |
| $\beta_1$                   | 0.857 (19.714)   | 0.845 (27.148)   | 0.790 (30.107)   |
| $\gamma$                    | -0.213 (-1.512)  | 0.035 (0.174)    | —                |
| $\delta$                    | 1.568 (9.579)    | 1.750 (3.862)    | 2 (fijo)         |
| $d$                         | 1.105 (12.007)   | 1.076 (20.610)   | 1 (fijo)         |
| $\tau$                      | 1.040 (52.263)   | 1 (fijo)         | 1 (fijo)         |

## Diagnósticos

| Especificación         | HYAPGARCH      | FIAPGARCH      | IGARCH         |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|
| parámetro distribución | 0.955 (17.842) | 0.971 (17.333) | 0.964 (18.941) |
| Log-L                  | -744.927       | -747.178       | -747.836       |
| Akaike                 | -756.927       | -758.178       | -755.836       |
| Schwarz                | -789.596       | -788.125       | -777.616       |
| Hannan–Quinn           | -769.018       | -769.261       | -763.897       |
| Asimetría              | -0.032         | -0.031         | -0.0431        |
| Curtosis               | 7.672          | 7.580          | 7.915          |
| Jarque–Bera            | 1556.3 {0}     | 1495.51 {0}    | 1722.77 {0}    |
| Q(15)*                 | 18.211 {0.252} | 18.734 {0.226} | 19.128 {0.208} |
| Q2(15)*                | 4.052 {0.998}  | 3.755 {0.998}  | 4.668 {0.995}  |
| ARCH (CM15)            | 11.556 {0.712} | 11.320 {0.73}  | 14.969 {0.454} |
| Functional Form (LM)   | 4.918 {0.841}  | 5.436 {0.795}  | 5.305 {0.807}  |

## Otro Diagnóstico: Comparación de los pronósticos de la volatilidad condicional con la volatilidad realizada



|     | IGARCH | ARFIMA-IGARCH |
|-----|--------|---------------|
| ECM | 1.186  | 1.038         |
| EAM | 1.058  | 0.756         |

## Volatilidad multi-período y estructura de plazos

- El retorno de un activo a través de los períodos  $t$  y  $t+k$ , conocido como el retorno  $k$ -períodos, está definido como

$$r_t[k] = r_{t+1} + r_{t+2} + \dots + r_{t+k}$$

- Cuando el proceso para la media condicional de los retornos,  $r_t$ , sigue un proceso tipo ARMA, entonces el pronóstico de la volatilidad de  $r_t[k]$ , comúnmente conocido como *volatilidad multi-período*, está dado por la varianza condicional del error de pronóstico,  $e_t[k] = r_t[k] - E(r_t[k] | \mathcal{S}_t)$ , cuya expresión es:

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \text{Var}(e_t[k] | \mathcal{S}_t) = \sigma_t^2(k) + (1 + \psi_1)^2 \sigma_t^2(k-1) + \dots + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \psi_i\right)^2 \sigma_t^2(1), \quad \text{con } \psi_0 = 1$$

## Volatilidad multi-período y estructuras de plazos

- Claramente, la volatilidad multi-período crece conforme aumenta el horizonte de tiempo.
- Una vez obtenido el pronóstico de la volatilidad del retorno  $k$ -periodos,  $r_{t+k}$ , la correspondiente estructura de plazos de la volatilidad está dada por:

$$k^{-1}\sigma_{t+k}^2 = k^{-1}\text{Var}(e_t[k]|\mathcal{S}_t)$$

la cual refleja las expectativas de mercado sobre la volatilidad del retorno de un activo para diferentes horizontes de tiempo.

## Volatilidad multi-período y estructuras de plazos

- Esta medida es indispensable para la valoración de activos y el diseño de estrategias de cobertura de riesgos.
- A diferencia de la volatilidad multi-período, la estructura a plazos admite tres formas: monótona creciente, monótona decreciente o constante con respecto al horizonte de tiempo (Xu y Taylor, 1994).
- Sin embargo, cuando los retornos no están correlacionados serialmente, es decir no existe modelo ARMA, entonces los coeficientes impulso respuesta son nulos ( $\psi_i = 0, \forall i > 0$ ) y, por lo tanto, la ecuación para el pronóstico de la volatilidad de  $r_{t+k}$  se simplifica a

$$\begin{aligned}\sigma_{t+k}^2 &= \text{Var}(e_t[k]|\mathcal{S}_t) = \sigma_t^2(k) + \sigma_t^2(k-1) + \dots + \sigma_t^2(1) \\ &= \sum_{l=1}^k \sigma_t^2(l)\end{aligned}$$

## Volatilidad multi-período y estructuras de plazos

- Una práctica muy común en la construcción del pronóstico de la volatilidad de  $r_t[k]$ , es igualar la volatilidad futura a la volatilidad estimada corriente,  $\sigma_{t+k|t}^2 \approx \sigma_t^2$ , y así bajo el supuesto de retornos serialmente no correlacionados el pronóstico de la volatilidad se convierte en la suma sucesiva de los pronósticos de la varianza un periodo hacia delante, esto es:  $\sigma_{t+k|t}^2 \approx k\sigma_t^2$ .
- Este resultado es comúnmente conocido como *volatilidad escalada*. Sin embargo, esta práctica ha sido criticada debido a que puede producir sobreestimaciones de la variabilidad en un horizonte amplio (Diebold, et al., (1998).

## Volatilidad multi-periodo y estructuras de plazos

| Horizonte  | Precio de Cierre observado | ARFIMA—IGARCH             |        |        | Estructura a plazos |
|------------|----------------------------|---------------------------|--------|--------|---------------------|
|            |                            | Volatilidad multi-periodo | Máximo | Mínimo |                     |
| Diaria     | 2436.4                     | 0.790                     | 2445.2 | 2406.8 | 0.790               |
| Semanal    | 2389.8                     | 1.783                     | 2469.3 | 2382.7 | 0.797               |
| Quincenal  | 2371.7                     | 2.550                     | 2487.9 | 2364.1 | 0.806               |
| Mensual    | 2409.5                     | 3.881                     | 2520.1 | 2331.9 | 0.827               |
| Trimestral | 2314.7                     | 7.314                     | 2603.4 | 2248.6 | 0.900               |
| Semestral  | 2252.8                     | 11.487                    | 2704.7 | 2147.3 | 1.000               |
| Anual      |                            | 19.072                    | 2888.7 | 1963.3 | 1.174               |

Las expectativas promedio de la volatilidad aumentan conforme aumenta el plazo

## 6. Conclusiones

- La tasa de cambio colombiana presenta evidencia de larga memoria en la media.
- Su volatilidad parece responder mejor a un modelo IGARCH.
- La distribución condicional del término de error tiene colas más pesadas que la normal. Parece responder a una distribución GED.
- La volatilidad acumulada esperada a un año para el caso de los retornos COP/USD es del 19%.
- Finalmente, las expectativas promedio de volatilidad, representadas en la estructura a plazos, indican que en el caso de los retornos COP/USD aumentan conforme aumenta el plazo.



**MUCHAS GRACIAS!**

**Grupo de Econometría Aplicada**