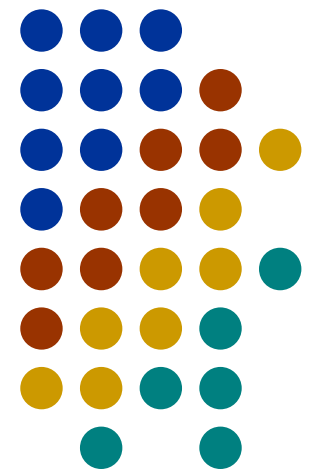


Formación de Hábitos y Distribución Internacional del Riesgo

Presentado por: Jair Ojeda
Banco de la República
Agosto 26 de 2009

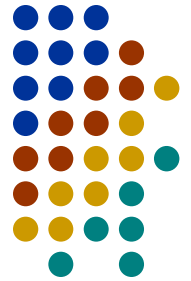


Contenido de la Presentación



1. La Anomalía de la Distribución Internacional del Riesgo
2. Un Modelo con Hábitos Internos y Externos
3. Implicaciones para la Tasa de Cambio Real y la Prima de Riesgo
4. Reconciliando las Medidas de Distribución Internacional del Riesgo
5. Literatura Relacionada
6. Conclusiones
7. Extensiones

Un Enfoque de Arbitraje para la Tasa de Cambio Real



- ◆ Modelo de dos países con mercados financieros completos basado en Backus-Smith (1993).
- ◆ Ecuación de Euler para un inversionista de USA que compra un activo riesgoso en USA:

$$E_t(M_{t+1}^{us} R_{t+1}^{us}) = 1$$

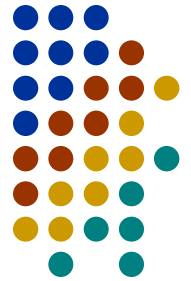
- ◆ M_{t+1}^{us} es el factor de descuento estocástico o tasa marginal de sustitución intertemporal:

$$M_{t+1}^{us} \equiv \beta \frac{U'(C_{t+1}^{us})}{U'(C_t^{us})}$$

- ◆ La ecuación de Euler para un inversionista del país i comprando el mismo activo riesgoso en USA es:

$$E_t(M_{t+1}^i R_{t+1}^{us} Q_{t+1}/Q_t) = 1$$

Un Enfoque de Arbitraje para la Tasa de Cambio Real



- ◆ Donde Q_i es la tasa de cambio real usada para convertir los retornos del activo de USA al país i en términos reales.
- ◆ Con las dos ecuaciones de Euler y de la unicidad de M en cada país obtenemos la siguiente condición de arbitraje:

$$\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = \frac{M_{t+1}^{US}}{M_{t+1}^i}$$

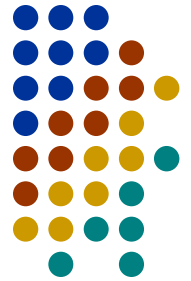
- ◆ Tomando logaritmos se puede expresar en términos de variaciones de la tasa de cambio real:

$$q_{t+1} - q_t = m_{t+1}^{US} - m_{t+1}^i$$

- ◆ Calculando la varianza a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\text{var}(q_{t+1} - q_t) = \text{var}(m_{t+1}^i) + \text{var}(m_{t+1}^{US}) - 2 \text{cov}(m_{t+1}^i, m_{t+1}^{US})$$

Midiendo la Distribución Internacional del Riesgo



- ◆ La perfecta distribución del riesgo se define como la solución de planeador central para los inversionistas de ambos países bajo mercados completos y sin fricciones al comercio internacional.
- ◆ Esta solución implica la igualación de las tasas marginales de sustitución intertemporal:

$$m_{t+1}^i = m_{t+1}^{US}$$

- ◆ Por consiguiente, la medida empírica de distribución del riesgo que se ha adoptado en la literatura es:

$$\text{corr}(m_{t+1}^{US}, m_{t+1}^i) = \frac{\text{cov}(m_{t+1}^{US}, m_{t+1}^i)}{(\text{var}(m_{t+1}^{US}) \text{var}(m_{t+1}^i))^{0.5}}$$

- ◆ Esta correlación puede ser interpretada como el porcentaje del riesgo total que se encuentra distribuido entre países.

Midiendo la Distribución Internacional del Riesgo



- ◆ Brandt, Cochrane y Santa-Clara (2006) llevan a cabo una medición de la distribución internacional del riesgo con datos del mercado financiero para USA, Alemania y Japón.
- ◆ La ecuación para la volatilidad de las variaciones de la tasa de cambio es usada para estimar: $\text{cov}(m_{t+1}^{US}, m_{t+1}^i)$
- ◆ La volatilidad de m_{t+1}^i en cada país es estimada utilizando la cota inferior de Hansen y Jagannathan (1991) la cual implica :
$$\text{var}(m_{t+1}^i) \leq \mu \Sigma^{-1} \mu$$
- ◆ Donde μ es el vector de retornos en exceso de la tasa libre de riesgo y Σ la matriz de covarianzas de estos retornos.
- ◆ Se utilizan tres activos en este ejercicio: stock en USA, stock en el país i y moneda extranjera.

Estadísticas Resumen: Mercado de Activos 1975-2006



	US Stock	UK		Germany		Japan		Canada		France		Italy		Average	
		Stock	X-rate	Stock	X-rate	Stock	X-rate	Stock	X-rate	Stock	X-rate	Stock	X-rate	Stock	X-rate
returns (% annual)															
mean	6.78	7.56	1.87	8.44	0.7	6.62	-0.81	5.32	0.53	8.7	1.64	7.24	1.21	7.24	0.86
Std. Dev	13.06	11.25	9.72	21.72	11.69	18.39	12.16	17.24	5.25	20.67	11.72	31.05	11.76	19.05	10.38
Return Correlations (1 = 100%)															
US Stock	--	0.66	0.04	0.52	0.03	0.33	0.17	0.61	0.06	0.58	0.02	0.38	0.09	0.51	0.07
Foreign Stock	--	--	-0.23	--	0.46	--	0.27	--	0.26	--	-0.01	--	0.02	--	0.13

Medición con Datos del Mercado Financiero



$$\text{corr}(m_{t+1}^{US}, m_{t+1}^i) = \frac{0.5(\mu' \Sigma^{-1} \mu + \mu^{US'} \Sigma^{-1} \mu^{US} - \text{var}(q_{t+1} - q_t))}{((\mu^{US'} \Sigma^{-1} \mu^{US})(\mu' \Sigma^{-1} \mu))^{0.5}}$$

TABLE 1 - MEASURING RISK SHARING WITH ASSET MARKET DATA							
Span of annual data: 1975-2006; Base Country: US.							
	UK	GERMANY	JAPAN	CANADA	FRANCE	ITALY	AVERAGE
Risk Sharing	0.986	0.964	0.977	0.991	0.961	0.955	0.972
Standard Deviation of SDFs							
US	0.524	0.406	0.524	0.386	0.396	0.372	0.435
Foreign Country	0.496	0.404	0.551	0.375	0.369	0.355	0.425
Standard Deviation of RER	0.090	0.108	0.116	0.051	0.109	0.110	0.097

Medición con Datos de Consumo y Función de Utilidad Estándar



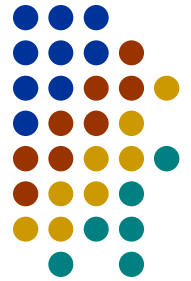
$$\text{corr}\left(m_{t+1}^{US}, m_{t+1}^i\right) = \frac{\text{cov}\left(\Delta c_{t+1}^{US}, \Delta c_{t+1}^i\right)}{\left(\text{var}\left(\Delta c_{t+1}^{US}\right) \text{var}\left(\Delta c_{t+1}^i\right)\right)^{0.5}}$$

TABLE 2 - RISK SHARING INDEX FROM CONSUMPTION DATA WITH CRRA UTILITY FUNCTION

Span of annual data: 1975-2006; Base Country: US.

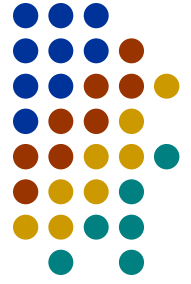
	UK	GERMANY	JAPAN	CANADA	FRANCE	ITALY	AVERAGE
Risk Sharing: Correlation of Consumption Growth	0.460	0.079	0.282	0.613	0.218	-0.096	0.259
Standard Deviation of Stochastic Discount Factor							
US Investor	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037
Foreign Investor	0.048	0.032	0.041	0.041	0.026	0.040	0.038

La Anomalía de la Distribución Internacional del Riesgo



- ◆ La medición con datos del mercado de activos es válida para cualquier función de utilidad e indica 97% de distribución internacional del riesgo.
- ◆ La razón de este resultado es que las tasas marginales de sustitución intertemporal son muy volátiles (43%) comparadas con la volatilidad de la tasa de cambio (10%).
- ◆ La medición con datos de consumo utiliza la siguiente función de utilidad estándar:
$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
- ◆ En este caso, la medida de distribución internacional del riesgo es la correlación entre crecimientos del consumo y es independiente del valor de α .
- ◆ Anomalía: correlación es 26% en promedio y volatilidad de la tasa de descuento es solo 4% con esta función de utilidad.

Modelo con Formación de Hábitos Externos e Internos



- ◆ Modelo de utilidad basado en Abel (1990, 2006) quien lo utilizo para estudiar la anomalía de la prima de riesgo del mercado accionario.
- ◆ La extensión considera N países con consumidores representativos que maximizan:

$$U_t = E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{C_{t+j}}{V_{t+j}^\gamma} \right)^{1-\alpha} \right]$$

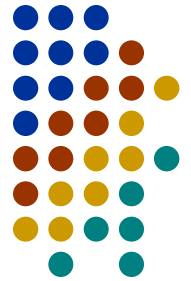
- ◆ Esta especificación incluye un consumo de referencia definido por:

$$V_t = \left[(C_{t-1})^D (C_{w,t-1})^{1-D} \right]$$

- ◆ El consumo mundial está definido como el promedio geométrico del consumo de cada país ponderado por el tamaño de cada economía:

$$C_w = \prod_{i=1}^N C_i^{\omega_i}$$

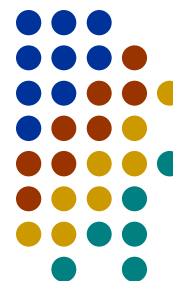
Modelo con Formación de Hábitos Externos e Internos



- ◆ El parámetro γ mide la importancia del consumo de referencia en la utilidad del consumidor. Si $\gamma = 0$ entonces la función de utilidad es la estándar CRRA.
- ◆ El parámetro D le da una ponderación a cada tipo de hábito. Los hábitos internos provienen de acostumbrarse a un cierto nivel de consumo doméstico. Los hábitos externos provienen de querer estar a la par con el consumo promedio mundial.
- ◆ La utilidad marginal del consumo tiene tres componentes que se presentan a continuación:

$$\frac{\partial U_t}{\partial C_t} = C_t^{-\alpha} V_t^{\gamma(\alpha-1)} H_t$$

- ◆ El componente $C_t^{-\alpha}$ proviene de las funciones de utilidad estándar y es decreciente en el nivel de consumo.



Factor de Descuento Estocástico

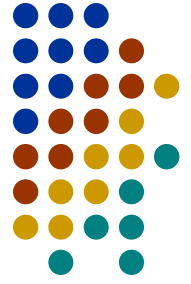
- ◆ El componente $V_t^{\gamma(\alpha-1)}$ mide el efecto del consumo de referencia en la utilidad marginal. Este efecto es positivo o negativo dependiendo de si α es mayor o menor que 1 respectivamente.
- ◆ El componente H_t mide el efecto de los hábitos internos en la utilidad marginal. Un mayor consumo hoy tiene un efecto negativo en la utilidad de mañana debido a que aumenta el consumo de referencia.

$$H_t = 1 - D\gamma\beta E_t \left(X_{t+1}^{1-\alpha} \right) X_t^{D\gamma(\alpha-1)} X_{w,t}^{(1-D)\gamma(\alpha-1)}$$

- ◆ La siguiente es la ecuación del factor de descuento estocástico el cual es la base para medir la distribución internacional del riesgo:

$$M_{t+1} = \beta X_{t+1}^{-\alpha} X_t^{D\gamma(\alpha-1)} X_{w,t}^{(1-D)\gamma(\alpha-1)} \left(\frac{H_{t+1}}{H_t} \right)$$

Implicaciones para la Valoración de Activos Financieros



- ◆ Utilizando la ecuación deducida al comienzo se obtiene la solución para la tasa de cambio real con respecto a USA :

$$\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = \left(\frac{X_{t+1}}{X_{US,t+1}} \right)^{-\alpha} \left(\frac{X_t}{X_{US,t}} \right)^{D\gamma(\alpha-1)} \left(\frac{H_{t+1}}{H_{US,t+1}} \right) \left(\frac{H_{US,t}}{H_t} \right)$$

- ◆ La solución para la tasa libre de riesgo es la siguiente:

$$R_f = \frac{H_t}{\beta X_t^{D\gamma(\alpha-1)} X_{w,t}^{(1-D)\gamma(\alpha-1)} E_t \left(X_{t+1}^{-\alpha} H_{t+1} \right)}$$

- ◆ El rendimiento de los activos en la bolsa de valores esta definido así:

$$R_{e,t+1} = \frac{(P_{t+1} + C_{t+1}^\lambda)}{P_t}$$

Implicaciones para la Valoración de Activos Financieros



- ◆ En esta definición se supone que los inversionistas consumen el total de los dividendos los cuales son pagados con una tasa de apalancamiento de:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- ◆ Para facilitar el cálculo de $R_{e,t+1}$ se asume adicionalmente, que el crecimiento del consumo tiene la siguiente distribución en todos los países:

$$\ln(C_{t+1}) - \ln(C_t) \sim iid N(g, \sigma^2)$$

- ◆ Dada la solución para el rendimiento del mercado accionario, se calcula la prima de riesgo de la siguiente manera:

$$EP_{t+1} \equiv \frac{R_{e,t+1}}{R_{f,t+1}}$$

Implicaciones para la Valoración de Activos Financieros



- ◆ La solución para la prima de riesgo es la siguiente:

$$EP_{t+1} = \beta J_{t+1} E_t \left(X_{t+1}^{-\alpha} H_{t+1} \right)$$

- ◆ Donde la expresión J_{t+1} está definida así:

$$J_{t+1} \equiv \frac{X_{t+1}^{D\gamma(\alpha-1)+\lambda} X_{w,t+1}^{(1-D)\gamma(\alpha-1)}}{H_{t+1}} + X_{t+1}^{\lambda} \left(\frac{1-A_0}{\beta A_1} \right)$$

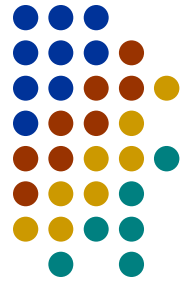
- ◆ Las constantes A_0 y A_1 son expectativas incondicionales definidas a continuación:

$$A_0 = \beta E \left(X_t^{(\alpha-1)(D\gamma-1)+(\lambda-1)} X_{w,t}^{(1-D)\gamma(\alpha-1)} \right)$$

$$A_1 \equiv E \left(X_t^{\lambda-\alpha} H_t \right)$$

- ◆ Para que la solución a la prima de riesgo sea válida, A_0 debe estar estrictamente entre 0 y 1. Adicionalmente A_1 debe ser estrictamente mayor que 0.

Soluciones Simplificadas del Modelo



- ◆ Antes de calibrar el modelo es importante estudiar el efecto de los parámetros en los diferentes resultados.
- ◆ Suponiendo los hábitos son sólo externos ($D = 0$) es posible calcular soluciones en forma cerrada (no numéricamente).
- ◆ La medida de distribución internacional del riesgo es:

$$\text{Corr}(m_{US,t}, m_t) = \frac{\gamma^2 (\alpha - 1)^2 \bar{\omega}^2}{\alpha^2 + \gamma^2 (\alpha - 1)^2 \bar{\omega}^2}$$

- ◆ La varianza del factor de descuento estocástico se simplifica a:

$$\text{var}(m_{t+1}) = \alpha^2 \sigma^2 + \gamma^2 (\alpha - 1)^2 \sigma^2 \bar{\omega}^2$$

- ◆ La varianza de las variaciones de la tasa de cambio real se simplifica significativamente:

$$\text{var}(\log Q_{t+1} - \log Q_t) = 2\alpha^2 \sigma^2$$

Soluciones Simplificadas del Modelo



- ♦ La solución para la tasa libre de riesgo es la siguiente:

$$E(\log(R_f)) = -\log(\beta) - g(\gamma(\alpha - 1) - \alpha) - \alpha^2 \sigma^2 / 2$$

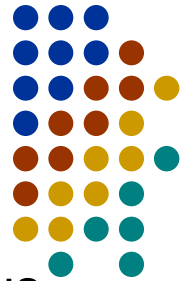
- ♦ Para calcular de manera simplificada la solución para la prima de riesgo del mercado accionario es necesario suponer $A_0 = 1$.

$$E(\log(EP)_t) = \log(\beta) + g(\lambda - \alpha + \gamma(\alpha - 1)) + 0.5\alpha^2 \sigma^2$$

- ♦ Finalmente, la varianza de la prima de riesgo tiene la siguiente forma simplificada:

$$\text{var}(\log(EP)_t) = \sigma^2 \left[\lambda^2 + \gamma^2 (\alpha - 1)^2 \bar{\omega}^2 + 2\lambda\gamma(\alpha - 1)\omega_i \right]$$

Calibración del Modelo



- ◆ Objetivo: calibrar los parámetros del modelo de tal forma que sus implicaciones para la distribución internacional del riesgo, la tasa de cambio real, la prima de riesgo y la tasa libre de riesgo sean realistas.
- ◆ Se asume: $N = 7, g = 2.5\%, \sigma = 2.5\%, \lambda = 3.$
- ◆ el consumo mundial calculado de acuerdo al tamaño de las economías del G7.
- ◆ Para cada uno de los 7 países se simularon 1000 observaciones para el crecimiento del consumo de acuerdo a la distribución:
$$\log(X_{t+1}^i) \sim i.i.d.N(g, \sigma^2)$$
- ◆ Se calibró el valor de los siguientes parámetros: α, γ, D, β
- ◆ El uso de valores simulados de crecimiento del consumo permite utilizar muestras grandes para calcular valores esperados y asegura que los resultados sobre distribución internacional del riesgo son totalmente endógenos.

Calibración del Modelo: Parámetros

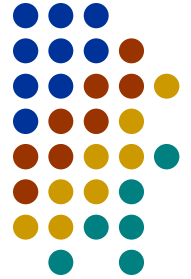


TABLE 3 - Features of the Model Calibration

A. Weights Used to Compute Total Consumption Growth in G7 countries

ω_1	United States	48,6%
ω_2	Japan	15,5%
ω_3	Germany	9,6%
ω_4	United Kingdom	7,9%
ω_5	France	7,6%
ω_6	Italy	6,6%
ω_7	Canada	4,1%

B. Calibrated Value of Parameters

α	Risk Aversion Coefficient	0,85
γ	Benchmark Consumption	7,42
β	Time Discount Factor	1,00
D	Habit Weight	12,9%
λ	Leverage Factor	3,0

Calibración del Modelo: Momentos



TABLE 4 - Matching Key Moments of International Markets

		Calibrated Model	Data for G7 Countries
A. Stylized Facts on International Risk Sharing			
$Corr(m_{US,t}, m_t)$	Correlation of SDFs	0.961	0.970
$(\text{var}(m_{t+1}))^{0.5}$	SDF Volatility	30.1%	43.0%
B. International Market Moments			
$(\text{var}(\log Q_{t+1} - \log Q_t))^{0.5}$	Real Exchange Rate Volatility	10.2%	10.0%
$E(\log(EP_t))$	Equity Premium	6.8%	7.4%
$(\text{var}(\log(EP_t)))^{0.5}$	Equity Premium Volatility	19.5%	19.5%
$E(\log(R_f))$	Risk Free Rate	2.9%	2.2%
$(\text{var}(\log(R_f)))^{0.5}$	Risk Free Rate Volatility	22.5%	2.8%

Calibración del Modelo: Hábitos Externos Versus Internos



TABLE 5 - Moments Implied by Alternative Specifications of the Model

		I. $\gamma = 0$	II. $\gamma > 0, D = 0$	III. $\gamma > 0, D > 0$
A. Stylized Facts on International Risk Sharing				
$Corr(m_{US,t}, m_t)$	Correlation of SDFs	0.001	0.348	0.961
$(\text{var}(m_{t+1}))^{0.5}$	SDF Volatility	2.1%	2.6%	30.1%
B. International Market Moments				
$(\text{var}(\log Q_{t+1} - \log Q_t))^{0.5}$	Real Exchange Rate Volatility	2.9%	2.9%	10.2%
$E(\log(EP_t))$	Equity Premium	4.9%	4.9%	6.8%
$(\text{var}(\log(EP_t)))^{0.5}$	Equity Premium Volatility	7.4%	7.1%	19.5%
$E(\log(R_f))$	Risk Free Rate	2.0%	4.8%	2.9%
$(\text{var}(\log(R_f)))^{0.5}$	Risk Free Rate Volatility	0.0%	1.4%	22.5%

Calibración del Modelo: Implicaciones por Países

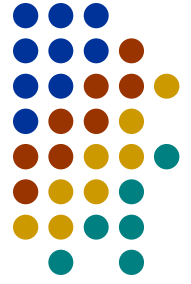
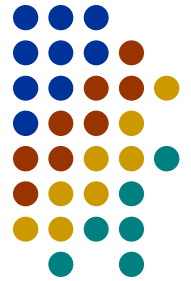


TABLE A2 - Moments Implied by the Calibrated Model: Country by Country

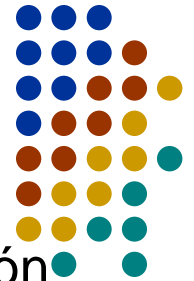
		US	UK	GERMANY	JAPAN	CANADA	FRANCE	ITALY
A. Stylized Facts on International Risk Sharing								
$Corr(m_{US,t}, m_t)$	Correlation of SDFs	1.000	0.960	0.961	0.961	0.960	0.960	0.965
$(\text{var}(m_{t+1}))^{0.5}$	SDF Volatility	34.3%	29.3%	29.7%	30.7%	28.4%	29.3%	28.8%
B. International Market Moments								
$(\text{var}(\log Q_{t+1} - \log Q_t))^{0.5}$	Real Exchange Rate Volatility	NA	10.2%	10.1%	9.8%	10.7%	10.3%	10.0%
$E(\log(R_f))$	Risk Free Rate	2.4%	3.1%	3.0%	2.9%	3.1%	2.9%	3.0%
$(\text{var}(\log(R_f)))^{0.5}$	Risk Free Rate Volatility	25.8%	21.7%	22.2%	23.0%	21.1%	21.9%	21.4%
$E(\log(EP_t))$	Equity Premium	7.1%	6.9%	6.9%	7.0%	6.7%	6.7%	6.7%
$(\text{var}(\log(EP_t)))^{0.5}$	Equity Premium Volatility	19.0%	19.6%	19.6%	19.5%	19.6%	19.5%	19.6%

Literatura Relacionada



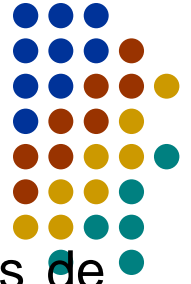
- ◆ Lewis (1999): Revisión de literatura sobre el debate acerca de la distribución internacional del riesgo.
- ◆ Baxter (2006): Muestra la importancia de realizar mediciones bilaterales y directas.
- ◆ Brandt, Cochrane y Santa-Clara (2006): Descubren la anomalía realizando mediciones con datos del mercado financiero.
- ◆ Colacito y Croce (2007): Resuelven la anomalía usando preferencias recursivas y asumiendo tendencias de largo plazo para el consumo las cuales son altamente correlacionadas entre países.
- ◆ Corsetti, Dedola y Leduc (2008), Benigno y Thoenissen (2008), Basu y Wada (2006): Resuelven la anomalía asumiendo mercados incompletos y shocks a la estructura productiva.
- ◆ Verdelhan (2007), Moore y Roche (2007, 2008) usan preferencias con hábitos externos para estudiar la tasa de cambio pero no resuelven la anomalía.

Conclusiones



- ◆ Este trabajo propone una solución a la anomalía de la distribución internacional del riesgo utilizando un modelo de preferencias que incluye la formación de hábitos internos y externos.
- ◆ Este modelo, basado en Abel (1991), contiene un nivel de consumo de referencia el cual depende del consumo domestico en el periodo anterior (hábitos internos) y del consumo promedio mundial en el periodo anterior (hábitos externos).
- ◆ Es posible calibrar los parámetros de este modelo de valoración de activos de tal forma que se obtengan altos niveles de distribución internacional del riesgo y al mismo tiempo se obtengan niveles realistas para varios momentos observados en los mercados financieros internacionales.
- ◆ En particular el modelo es consistente con la volatilidad de la tasa de cambio real, la prima de riesgo del mercado accionario y con los niveles promedio de la tasa libre de riesgo.
- ◆ Ambos tipos de hábitos son necesarios para resolver la anomalía.

Extensiones



- ◆ Este enfoque puede ser usado para estudiar los determinantes de las fluctuaciones en la tasa de cambio real. Según este enfoque la TCR fluctúa debido a la continua recomposición de portafolios que los inversionistas realizan ante cambios en su tasa marginal de sustitución intertemporal.
- ◆ Este modelo de preferencias puede ser usado como un componente adicional de modelos de ciclos económicos internacionales en particular para modelar contagio de shocks.
- ◆ Este estudio de la distribución internacional del riesgo se puede extender al caso de economías en desarrollo.
- ◆ Posibilidad de usar GMM o métodos Bayesianos para la estimación de los parámetros del modelo.