



# REPORTE DE ESTABILIDAD FINANCIERA

Septiembre de 2010

Estructura de red del Mercado Electrónico Colombiano (MEC) e identificación de agentes sistémicos según criterios de centralidad

Agustín Saade Ospina

# Estructura de red del Mercado Electrónico Colombiano (MEC) e identificación de agentes sistémicos según criterios de centralidad.\*

Agustín Saade Ospina<sup>†</sup>

Agosto 2010

## Resumen

En este documento se utilizan herramientas de análisis de redes tradicionales para describir las características generales de la estructura del Mercado Electrónico Colombiano (MEC). Se encontró que éste está fuertemente concentrado en unos pocos agentes, con bajo nivel de conectividad, aunque con un alto grado de reciprocidad en las relaciones entre los agentes. Se calcularon indicadores de centralidad diaria para cada uno de aquéllos, buscando identificar cuáles son sistémicos según su posición relativa en la red. Este análisis permitió observar que en el MEC los agentes más grandes, los que tienen mayor número de conexiones, aquellos con mayor capacidad de intermediación, y los que tienen relaciones cercanas con agentes más importantes tienden a ser los mismos cada día. Finalmente, vía simulaciones, se buscó medir qué tan sensible es la estructura de red del MEC ante la ausencia de los agentes más conectados. Se encontró que la estructura es fuertemente dependiente de las conexiones de unos pocos agentes, que pueden clasificarse como centrales a la red.

**Clasificación JEL:** *G1, G2, L14.*

**Palabras Claves:** Mercado Electrónico Colombiano - MEC; posición relativa en mercados con red observable; mercado interbancario.

---

\*El autor agradece los valiosos comentarios de Christopher Martin Oosterhuis, Dairo Estrada y Angela González, además de las discusiones llevadas a cabo al interior del Departamento de Estabilidad Financiera del Banco de la República. Las opiniones contenidas en este documento son exclusivas del autor y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

<sup>†</sup>Profesional especializado del Departamento de Estabilidad Financiera del Banco de la República.  
e-mail:asaadeos@banrep.gov.co

# 1. Introducción

Los mercados financieros funcionan como redes sociales en las que individuos interactúan según la confianza que les brindan las potenciales contrapartes. Cada agente dispone de un nivel distinto de conocimiento sobre las características de los demás, hasta el punto que en el mercado la información está particionada. Adicionalmente, no todos los agentes son de igual tamaño, ni son igual de activos en la red, ni presentan igual número de conexiones.

Las redes de los mercados financieros distan de ser completas<sup>1</sup>, y presentan distribuciones no homogéneas en las conexiones de los agentes, en las que unos pocos individuos suelen concentrar las conexiones de la red, mientras que muchos agentes tienen pocas conexiones. Tal como menciona [Haldane \(2009\)](#), los mercados financieros son redes con características de “Pequeños Mundos”<sup>2</sup> en las que con muy pocas conexiones puede darse interacción entre cualquier par de agentes de la red, pero con intermediación sólo posible a través de unos pocos agentes centrales en la red. Sin embargo, tal como menciona [Haldane \(2009\)](#) para las redes financieras y como resaltan [Watts and Strogatz \(1998\)](#) para otros tipos de redes, los pequeños mundos son redes fuertemente vulnerables si alguno de sus agentes centrales falla.

Estas redes presentan distribución de grado de nodo<sup>3</sup> con colas largas, donde pocos agentes tienen muchas conexiones. Por tanto son robustas ante el fallo de un agente aleatorio de la red, pero muy frágiles ante la caída de uno de esos agentes en la cola de la distribución: si quienes concentran las conexiones dejaran de participar en la red, entonces la estructura de la red se vería fuertemente afectada.

Tal como menciona [Haldane \(2009\)](#), estos pocos agentes con muy pocas conexiones pueden ser sistémicos, y no necesariamente serlo por su tamaño relativo al mercado. En los mercados financieros puede llegar a ser más grave, y tener un efecto propagador mayor, el fallo de un agente muy conectado que el fallo de un agente muy grande. Y esto tiene consecuencias de política para manejo de crisis. Hoy en día la preocupación por la posible existencia de agentes *Too Big To Fail* tiende a ser reemplazada por el interés de identificar cuáles serían los nodos *Too Interconnected To Fail*, tal como mencionan [Cont \(2009b\)](#), [Cont \(2009a\)](#) y [Haldane \(2009\)](#).

Es por tal motivo que para hacer una identificación de los agentes que pueden llegar a considerarse sistémicos en un mercado financiero se debe recurrir a un análisis de las características de conectividad y las exposiciones de contrapartes que concurren en la red, además del análisis tradicional de tamaño de mercado. Adicionalmente, una vez identificados los agentes claves

---

<sup>1</sup>Una red completa es aquella en la que cada individuo interactúa con todos los demás miembros de la red.

<sup>2</sup>Para ver en mayor detalle las propiedades de las redes de “pequeños mundos” (small world networks) ver [Watts and Strogatz \(1998\)](#). El nombre de estas redes se debe al bajo número de intermediarios necesarios para conectar un nodo con otro.

<sup>3</sup>La distribución de grado de nodo de una red es la distribución de frecuencias de las conexiones de sus nodos.

en la red se debe medir qué tan importantes son, y una manera de hacerlo es buscando medir qué tanto se afecta la estructura de la red subyacente ante la potencial ausencia de estos agentes.

En este documento se aprovechó la información disponible de transacciones hechas en el Mercado Electrónico Colombiano (MEC) para realizar un análisis básico de la estructura de red, identificar cuáles son los agentes centrales y aproximarse a una medición de qué tanto se afecta la red ante su ausencia.

El documento se compone de cinco secciones, incluida esta introducción. En la segunda sección se describen características generales de la estructura de red del MEC. Por su parte, en la tercera sección se identifican los agentes sistémicos en el MEC, según varios criterios de centralidad en red. La sección cuarta mide, vía simulaciones, la sensibilidad de la estructura de red del MEC ante la ausencia de los agentes más centrales. Finalmente la quinta sección concluye.

## 2. Características generales de la red del MEC

Para este trabajo se utilizó una base de datos de transacciones registradas en Mercado Electrónico Colombiano - MEC, administrado por la Bolsa de Valores de Colombia, desde enero de 2006 hasta mayo de 2010. La base de datos cuenta con 1072 días.

La información registra cada una de las operaciones de compra/venta y derivados (repos y simultáneas<sup>4</sup>), cuyo subyacente son títulos de deuda pública TES de corto y largo plazo (bien sea principal, cupón, o título completo), bonos ordinarios o títulos amortizables privados, certificados a término CDT, o títulos de Fogafin. Las operaciones hechas sobre TES representan el 95.6 % de la base.

En el MEC se transan cerca de \$3 billones diarios en operaciones como las arriba mencionadas, lo que representa una tercera parte del volumen diario de operaciones afines hechas entre agentes privados a través de los sistemas colombianos de negociación electrónica. Por su parte, en el Sistema Electrónico de Negociación - SEN, operado por el Banco de la República, se realizan las restantes dos terceras partes, pero en este sólo participan entre 10 y 15 agentes al día, principalmente los bancos comerciales y otros agentes clasificados como creadores de mercados<sup>5</sup>.

El MEC, si bien es más pequeño en volumen, es mucho más activo en número de operaciones y agentes. En la base de datos del MEC se registran los destinatarios finales de cada operación,

---

<sup>4</sup>Los repos son contratos para vender y subsecuentemente volver a comprar títulos valores a un precio específico y en una fecha determinada. Las simultáneas son operaciones temporales que tienen cumplimiento en un plazo pactado.

<sup>5</sup>En la resolución del Ministerio de Hacienda y Crédito Público número 6390 de 2008 se explica en detalle el programa de creadores de mercado.

descritos debidamente como compradores o vendedores, e identificados por NIT, cédula de ciudadanía, cédula de extranjería, o pasaporte.

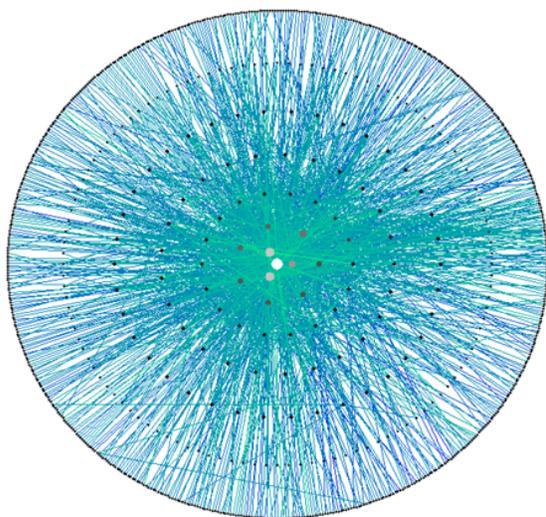
Utilizando esta información se identificaron 47.657 agentes distintos, en su gran mayoría con cédula de ciudadanía; sin embargo, el 96,5 % de estos agentes participó en menos del 10 % de los días registrados en la base, y un 79 % se registra en 10 días o menos de los 1072.

Por su parte, sólo 180 agentes (0,38 %) aparecen en más de la mitad de los días de mercado, todos estos identificados con NIT. Estas empresas representan en promedio un 78 % del volumen diario transado en el MEC e incluyen a los comisionistas de bolsa, bancos comerciales, compañías de financiamiento comercial, aseguradoras, fondos de pensiones y cesantías, entre otros.

Para el análisis de red del MEC se consideró cada uno de estos agentes como un nodo de la red que puede o no aparecer en un día de transacción. Cada uno de los agentes fue debidamente indexado para poder seguirlo en el tiempo. Con la información de transacciones de compra y venta, y los índices de los nodos, se construye para cada día una red dirigida que refleja el comportamiento observado en el MEC en cada fecha.

Si bien la estructura de red de un mercado con pocos participantes puede ser descrita fácilmente con grafos de nodos y enlaces, para redes como la presente en el MEC, con muchos agentes y alto volumen de información, este tipo de análisis no es práctico. Como ilustración de este hecho se presenta en la Figura 1, en el que se muestra en un grafo de red un día típico de operaciones en el MEC.

**Figura 1:** Ejemplo de estructura de red del MEC en un día típico - 11 de abril de 2010



#### Notas

- El 11 de abril de 2010 se registraron operaciones entre 849 distintos agentes finales (nodos de red), según identificación por NIT, CC y CE.
- Los nodos más centrales son aquellos con un mayor número de enlaces con otros agentes.
- Cerca del 70 % del volumen de las operaciones involucra a los 11 agentes con ubicación más central en el diagrama, y la mitad del volumen transado se dio en operaciones entre estos 11 agentes.
- El agente con más conexiones interactuó con 306 nodos.
- En promedio, cada agente transó con 3.83 nodos.
- 560 agentes sólo interactuaron con 1.

**Fuente:** MEC - Diagrama del autor.

Dada la necesidad de comparar las redes correspondientes a cada día de transacción del MEC, se debe tener a mano una serie de indicadores que permitan obtener con su cálculo información relevante sobre la estructura de red.

A continuación se describen las medidas aplicadas y los resultados para el caso del MEC (para una discusión más detallada sobre la utilidad de estos indicadores ver [Jackson \(2008\)](#)). Tal como se verá, el Mercado Electrónico Colombiano es fuertemente concentrado en unos pocos agentes, con bajo nivel de conectividad, aunque con un alto grado de reciprocidad en las relaciones entre los agentes.

### Estadísticos de red

Para un día  $t$ , las relaciones existentes entre agentes en la red del MEC se pueden describir por medio de una matriz de conexiones  $G_t = [g_{i,j}^t]$  de dimensiones  $n_t \times n_t$ , donde  $n_t$  es el número de participantes en el MEC ese día. El elemento  $g_{i,j}^t$  de la matriz es 1 si existió alguna operación de compra de  $i$  a  $j$  en  $t$ , y toma el valor de 0 en caso contrario. Por convención, la diagonal principal de  $G_t$  está compuesta por ceros.

Usando esta notación, los estadísticos diarios de red calculados fueron los siguientes:

#### I. Grado promedio de nodo y distribución de grado de nodo

El grado promedio de nodo dice con cuántos agentes, en promedio, se relaciona un individuo de la red. Es un indicador valioso porque ayuda a entender qué tan relacionados están los nodos de la red. Para su cálculo se necesita, primero, identificar el grado de cada uno de los nodos. El grado del nodo  $i$  el día  $t$  ( $d_i^t$ ) es el número de nodos con los que se conectó, bien sea en operaciones de compra o de venta. El grado promedio de nodo  $d_{prom}^t$  es entonces:

$$d_{prom}^t = \frac{1}{n_t} \sum_i d_i^t = \frac{1}{n_t} \sum_i \sum_{j \neq i} \max[g_{i,j}^t, g_{j,i}^t]$$

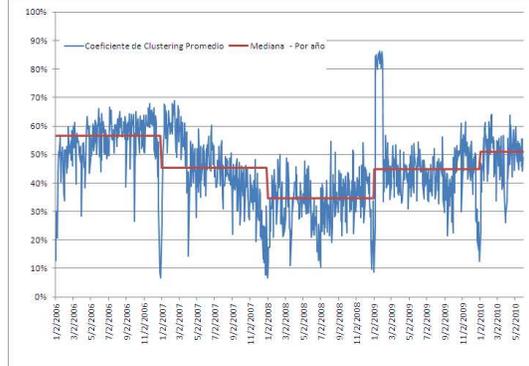
Tal como se describe en el Panel B de la Figura 2, el grado promedio diario en el MEC oscila entre dos y ocho a lo largo de la muestra, siendo mayor (y más variable) durante el año 2006. En el primer año de la muestra la mediana del grado promedio tuvo un valor cercano seis, mientras que desde 2007 hasta 2010 el grado promedio diario tiende a estar entre tres y cuatro.

Es decir, un agente promedio del MEC suele interactuar vía compras y ventas con otros tres o cuatro agentes, cifra bastante baja si se considera que cada día participan cerca de 600 agentes distintos según NIT y cédulas (ver Panel E de la Figura 2).

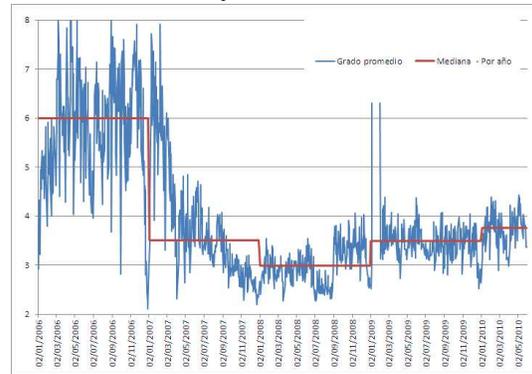
El grado promedio es un indicador que permite comparar con facilidad entre redes, pero oculta gran parte de la información en las colas de la distribución de conexiones. En una red como el MEC, donde son muchos los agentes con muy pocas conexiones y son la minoría quienes concentran las conexiones de la red, cobra importancia entender *distribución de grado de nodo*: ésta es una característica fundamental de una red, y refleja las frecuencias relativas de

**Figura 2:** Series de estadísticos generales de la red del MEC

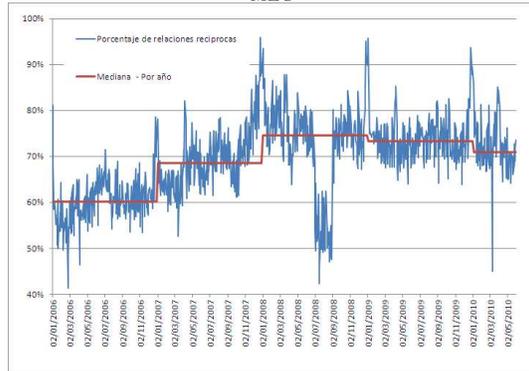
**Panel A.** Coeficiente de Clustering del MEC - Promedio diario



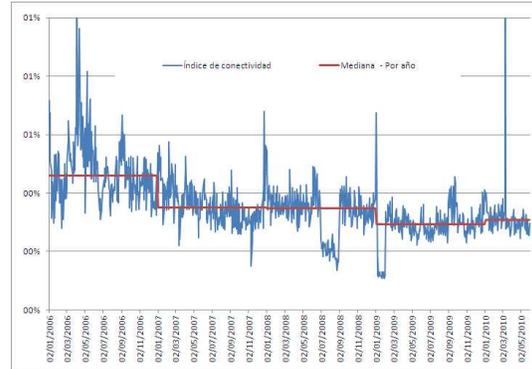
**Panel B.** Grado promedio de nodo en el MEC



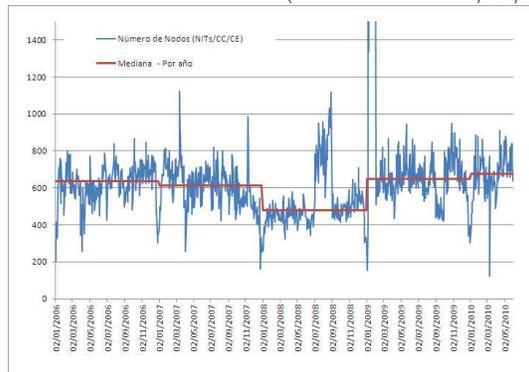
**Panel C.** Porcentaje de relaciones recíprocas entre los nodos del MEC



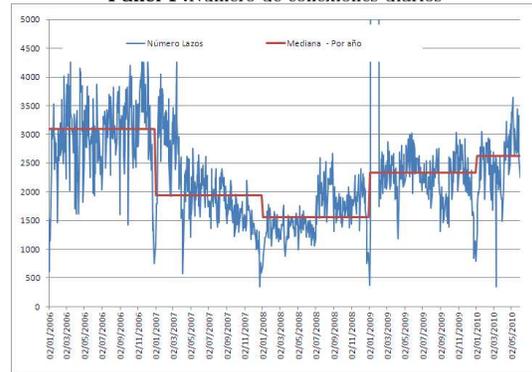
**Panel D.** Índice de conectividad del MEC



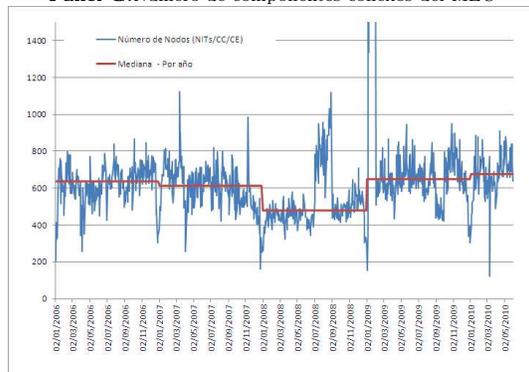
**Panel E.** Número de nodos diarios (identificados con NIT/CC/CE)



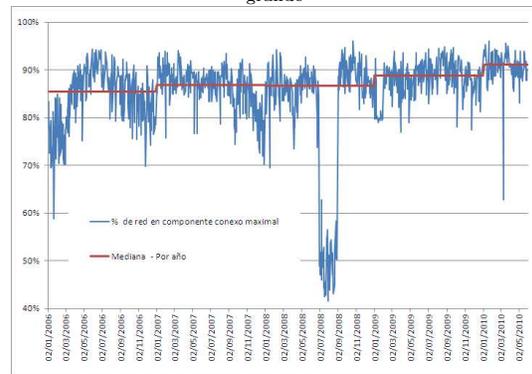
**Panel F.** Número de conexiones diarias



**Panel G.** Número de componentes conexos del MEC



**Panel H.** Porcentaje de agentes en el Componente Conexo más grande



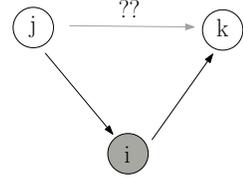
Fuente: MEC - Cálculos del autor.

nodos con distintos grados.

Para cada día  $t$  se estimó la distribución de grado de nodo  $P^t(d)$  utilizando las frecuencias relativas de los grados en el día. Si bien varía levemente por días, se encontró que sólo el 0.6 % de los nodos presentes en la red interactúan con 100 o más agentes cada día, 2.6 % lo hace con 20 o más nodos, y 4.5 % tiene contacto de compra o venta con 10 o más agentes. Lo anterior sugiere una gran concentración y dependencia del MEC en unos pocos agentes. Tal como se verá en la sección 3, estos agentes centrales a la red son en su mayoría comisionistas de bolsa.

## II. Coeficiente de *clustering* promedio

En redes, un *cluster* es un conjunto de nodos fuertemente relacionados. En una red dirigida, los agentes  $i, j, k$  forman un *cluster* de tres nodos alrededor del nodo  $i$  cuando existen enlaces  $j \rightarrow i, i \rightarrow k, y j \rightarrow k$ . Tal como se describe en el diagrama, estos *clusters* son tripletas transitivas de nodos.



El coeficiente de clustering para el agente  $i (Cl_i^t)$  describe con qué porcentaje de las parejas de nodos  $j, k$  que se enlazan con  $i$  se forman *clusters* de tres nodos alrededor de  $i$ . Por su naturaleza,  $Cl_i^t$  sólo está definido para los agentes que tienen dos o más conexiones ( $d_i^t > 2$ ). El coeficiente promedio de clustering  $Cl_{prom}^t$  es:

$$Cl_{prom}^t = \frac{1}{\#\{i : d_i^t > 2\}} \sum_{i:d_i^t > 2} Cl_i^t = \frac{1}{\#\{i : d_i^t > 2\}} \sum_{i:d_i^t > 2} \frac{\sum_{j \neq i, k \neq j, k \neq i} g_{j,i}^t \times g_{i,k}^t \times g_{j,k}^t}{\sum_{j \neq i, k \neq j, k \neq i} g_{j,i}^t \times g_{i,k}^t} \epsilon_{[0, 1]}$$

Valores mayores de este indicador ( $Cl_{prom}^t \rightarrow 1$ ) sugieren que en promedio los agentes que tienen más de dos conexiones tienen relaciones transitivas con los agentes con quienes se conectan. En una red como el MEC, donde hay muchos agentes con muy pocas conexiones, el indicador da más peso a los coeficientes individuales de *clustering* de los agentes de menor grado. Y como estos agentes se conectan a la red a través unos pocos agentes centrales, valores mayores del coeficiente promedio de *clustering* sugieren una mayor dependencia, para los agentes poco conectados, de las relaciones transitivas entre los agentes centrales.

En el caso del MEC, el coeficiente promedio de *clustering* suele ser mayor al 30 %, y se ha venido incrementando paulatinamente desde 2008 hasta alcanzar valores de 50 % en mayo de 2010 (ver Panel A de la Figura 2). Estos niveles de *clustering* son altos comparados con los que habría en una red puramente aleatoria con grado promedio de nodo similar al del MEC (menos de 1 % de *clustering*), pero no son altos si se comparan con los valores de *clustering* promedio encontrados en otros mercados con red observable, tal como menciona Jackson (2008). Sin embargo, la tendencia creciente del coeficiente sugiere un crecimiento paulatino de la importancia en la red, desde 2008, de los pocos agentes que concentran las conexiones.

## III. Porcentaje de reciprocidad entre nodos

Las relaciones presentes en el MEC el día  $t$  entre un par de agentes pueden ser de una vía ( $j \rightarrow i$ : sólo se registran ventas de  $i$  a  $j$ ) o de doble vía ( $i \rightleftharpoons j$ ). El coeficiente de reciprocidad entre nodos ( $Cr^t$ ) mide qué porcentaje de las relaciones observadas son recíprocas:

$$Cr^t = \frac{\sum_{i,j} g_{i,j}^t \times g_{j,i}^t}{\sum_{i,j} g_{i,j}^t}$$

En el caso del MEC existe un alto grado de reciprocidad. Tal como se muestra en el Panel C de la Figura 2, el coeficiente de reciprocidad diario suele ser mayor a 60 %, y ha venido aumentando a lo largo de la muestra. Desde 2008 y hasta abril de 2010 se observa que más del 70 % de las relaciones diarias observadas entre agentes son de doble vía.

Es decir, si  $i$  le compra  $j$  algún instrumento en el MEC el día  $t$ , es más probable que exista también ese mismo día alguna transacción de venta entre  $i$  y  $j$  a que no la haya.

#### IV. Índice de conectividad

Esta es una medida básica de qué tan conectada es la red. Dice qué porcentaje, de las relaciones posibles entre nodos, ocurrieron efectivamente:

$$IC^t = \frac{1}{n_t(n_t - 1)} \sum_{i,j} g_{i,j}^t$$

El MEC tiene un índice de conectividad bastante bajo, que suele ser menor al 1 %. Como se muestra en el Panel D de la Figura 2, el índice de conectividad alcanzó un máximo cercano a 1 % en 2006, y desde entonces ha disminuido hasta estabilizarse cerca de 0,3 %.

Vale anotar que este nivel bajo del indicador no es de sorprender en una red tan concentrada como el MEC. Más aún, no es de preocupar a menos de observarse episodios de variabilidad inusitada del indicador: si bien es cierto que un bajo nivel del indicador de conectividad (junto con la distribución de grado de nodo) sugieren la presencia de unos pocos agentes que concentran el mercado, sólo disminuciones inusitadas del indicador indican alteraciones del *status-quo* tales que puedan estar afectando el flujo normal de liquidez.

Un ejemplo de lo anterior es el periodo comprendido entre julio y octubre de 2008, cuando el índice de conectividad del MEC estuvo por debajo de niveles usuales. En este periodo disminuyó considerablemente el porcentaje de conexiones efectivamente realizadas, y coincide con el pico de estrés financiero internacional y la caída de Lehman Brothers. Si bien en Colombia no se observaron episodios de iliquidez durante la crisis financiera global, no es sorprendente que durante ese periodo los agentes estuvieran a la expectativa y actuando con mayor cautela, manifestándose en particular con una disminución del porcentaje de conexiones en el MEC.

#### V. Componentes conexos

Al analizar una red es importante considerar si existen fuertes separaciones al interior de ésta, que puedan dar lugar a subredes, para así entender si se está trabajando con una sola red o con varias que coexisten en simultánea y sin contacto. Estas subredes separadas se llaman componentes conexos. Intuitivamente, los componentes conexos de la red son los pedazos separados que tendría un gráfico de la red. Cada componente conexo es un conjunto de agentes conectados entre sí, posiblemente vía intermediación entre estos, y separados del resto de los agentes.

En el caso del MEC, el número de componentes conexos suele ser menor a tres, y para lo observado en 2010 este número suele ser uno (panel G de la Figura 2). Adicionalmente, el porcentaje de agentes que pertenecen al componente conexo más grande suele ser cercano a 90% (panel F e la Figura 2). Lo anterior sugiere que en el MEC la mayoría de los agentes pertenecen a un componente de gran tamaño, en el que vía intermediación podrían conectarse con la mayor parte del mercado.

Sin embargo, dada la concentración de las conexiones del MEC, este componente conexo máximo es muy sensible a la posible ausencia de los agentes más centrales de la red, quienes conectan a los miembros del mismo. Tal como se verá en detalle en las secciones 3 y 4, la estructura de red del MEC es sensible a la ausencia de unos pocos agentes que se podrían considerar sistémicos, bajo un enfoque de redes.

### 3. Agentes sistémicos en el MEC según indicadores de centralidad

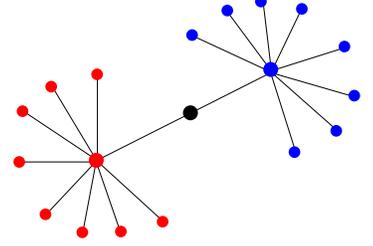
Las estadísticas discutidas en la sección 2 describen características generales de la estructura de la red presente en el MEC, pero no brindan información sobre los diferentes roles que juegan cada uno de los participantes en el MEC. En particular, si se quiere detectar cuáles son los agentes cuyo rol en una red puede llegar a considerarse sistémico, es necesario poder clasificarlos según algún criterio objetivo de importancia para el funcionamiento de la red.

Los indicadores de centralidad en red son una forma de clasificar los agentes en una red según su importancia. Estos indicadores, utilizados en economía de redes, suelen clasificarse en alguna de las siguientes categorías según el estadístico en el que se basan (Borgatti (2005)).

- **Centralidad por peso en el mercado:** son medidas que miden la participación porcentual de cada agente en el mercado, ignorando la estructura de red subyacente.
- **Centralidad según grado de nodo:** indicadores que miden cuántas conexiones directas tiene cada agente.
- **Centralidad por capacidad de intermediación:** son indicadores que miden la importancia de cada agente conectando a los demás miembros de la red.

- **Centralidad según características de los vecinos:** estas medidas, también conocidas como medidas de prestigio o influencia, clasifican como más importantes a los agentes cercanos a un mayor número de agentes influyentes.

Cada una de las anteriores categorías refleja algún aspecto medible de la importancia de un agente para la red, pero no necesariamente existe monotonicidad estricta entre estos criterios de ordenamiento, tal como menciona Borgatti (2005). Como ejemplo de lo anterior, en el diagrama se muestra una red en la que los dos agentes con el mayor número de conexiones directas no son quienes tienen mayores posibilidades de intermediación. Si este diagrama representa un mercado, en el que los nodos rojos son demandantes netos del bien transado y los nodos azules son oferentes netos, se tiene que el nodo negro es el más central por intermediación, aun no siendo el más central por grado.



Teniendo en cuenta lo anterior, se calcularon indicadores de centralidad según cada una de las categorías anteriormente mencionadas para cada día presente en la base de datos, buscando identificar cuáles agentes son más centrales a la red según el mayor número de criterios y, a su vez, por un periodo más extenso de tiempo. A continuación se describen las metodologías utilizadas, para luego analizar los resultados.

### 3.1. Metodologías de cálculo de centralidad

#### I. Indicadores de centralidad por peso en el mercado: $c_t^{PC}(i)$ , $c_t^{PV}(i)$

**Definición:**

$$c_t^{PC}(i) = \frac{\text{Valor de todas las operaciones de compra hechas por } i \text{ en } t}{\text{Valor de todas las operaciones hechas en } t} = \%_{\text{valor operaciones de compra}}$$

$$c_t^{VC}(i) = \frac{\text{Valor de todas las operaciones de venta hechas por } i \text{ en } t}{\text{Valor de todas las operaciones hechas en } t} = \%_{\text{valor operaciones de venta}}$$

#### II. Indicadores de centralidad según grado de nodo: $c_t^{DegC}(i)$ , $c_t^{DegV}(i)$

Sea  $G_t = [g_{i,j}^t]$  una matriz  $n_t \times n_t$  que denote las conexiones existentes en la red el día  $t$ , dónde  $n_t$  es el número de participantes en el MEC ese día. Los elementos de esta matriz son de la siguiente manera (con diagonal principal de ceros):

$$g_{i,j}^t = \begin{cases} 1, & \text{si existe alguna operación de compra de } i \text{ a } j \text{ en } t \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Dada esta notación, los indicadores de centralidad según grado de salida (operaciones de compra) y según grado de entrada (operaciones de venta) son respectivamente,  $c_t^{DegC}(i)$  y

$c_t^{DegV}(i)$ :

**Definición:**

$$c_t^{DegC}(i) = \frac{1}{n_{t-1}} \sum_k g_{i,k}^t = \text{\%de la red con quienes se conectó directamente vía compras}$$

$$c_t^{DegV}(i) = \frac{1}{n_{t-1}} \sum_k g_{k,i}^t = \text{\%de la red con quienes se conectó directamente vía ventas}$$

### III. Indicador de centralidad según capacidad de intermediación - *Betweenness*:

$c_t^B(i)$

Dada la matriz de conexiones  $G_t = [g_{i,j}^t]$ , un posible camino que conecte al agente  $a$  con el agente  $b$  es un conjunto de conexiones  $R = \{g_{a,k_1}^t, g_{k_1,k_2}^t, \dots, g_{k_{r-1},k_r}^t, g_{k_r,b}^t\}$  tal que  $\min(R) = 1$ . Dado este camino, los agentes en  $I_R = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ , son intermediarios posibles entre  $a$  y  $b$ .

Entre cualquier par de nodos pueden existir muchos caminos de diverso tamaño. Sea  $\sigma_{ab}$  el conjunto de todos los caminos de tamaño mínimo que conectan a los agentes  $a$  y  $b$ . Este conjunto se conoce como el conjunto de geodésicas dirigidas entre  $a$  y  $b$ . Dado un agente  $i$ , sea  $\sigma_{ab}(i)$  el conjunto de geodésicas entre  $a$  y  $b$  que pasan por  $i$ :  $\sigma_{ab}(i) = \{R \in \sigma_{ab} : i \in I_R\}$ .

El indicador de centralidad por intermediación (*betweenness centrality*) busca aproximar qué tan probable es que un agente se encuentre presente en los caminos más cortos que conectan cualquier par de individuos de la red:

**Definición:**

$$c_t^B(i) = \frac{1}{(n_t - 1)(n_t - 2)} \sum_{a \neq i, b \neq i, \sigma_{ab} \neq \emptyset} \frac{\#\sigma_{ab}(i)}{\#\sigma_{ab}},$$

donde  $\# C$  denota el número de elementos del conjunto  $C$ .

### IV. Indicador de centralidad según características de los vecinos - *Google PageRank*: $c_t^G(i)$

El *Google PageRank* hace parte de una familia de indicadores de importancia en redes según valor propio - vector propio. La idea detrás de estos indicadores es bastante sencilla: un agente en una red es importante si está conectado a otros agentes importantes.

El precursor de estos indicadores es el Prestigio de Katz ([Katz \(1953\)](#)):  $P_i^K = \sum_{j \neq i} g_{ij} \frac{P_j^K}{\#\text{conexiones de } j}$ . Intuitivamente, el prestigio de  $i$  es mayor si se conecta a agentes prestigiosos, pero cada uno de estos contribuye menos a  $i$  si tiene más conexiones con otros agentes.

Si se normaliza la matriz de conexiones  $G$  por la suma de las columnas,  $\hat{G} = \left[ \frac{g_{ij}}{\sum_k g_{kj}} \right] = [\hat{g}_{ij}]$ , el Prestigio de Katz se puede expresar de manera matricial:  $P^K = \hat{G}P^K \rightarrow (\hat{G} - I)P^K = 0$ . Por tal motivo, calcular el Prestigio de Katz consiste en encontrar un vector propio con valor propio unitario de la matriz de conexiones ponderada  $\hat{G}$ .

El *Google PageRank* es una generalización de la idea anterior, que además permite un cálculo recursivo con rápida convergencia en redes extensas (Brin et al. (1998)). Indicadores similares al *PageRank* han sido utilizados recientemente para hacer un ranking de los participantes en el sistema canadiense de transferencias de alto valor (Bech et al. (2010)).

Para este trabajo, se utiliza un *PageRank* con las siguientes características:

**Definición:** Para cada agente  $k$  presente en el MEC el día  $t$ , sea  $B_k^t$  el conjunto de agentes presentes en la red que hicieron alguna petición de compra a  $k$  (es decir,  $v \in B_k^t \Leftrightarrow g_{vk}^t = 1$ ). Sea  $N_k^t$  el número de agentes a los que  $k$  les hizo alguna compra en el MEC el día  $t$ . Dada esta notación, el *PageRank* es un vector  $c_t^G$  que satisface:

$$c_t^G(i) = c \sum_{v \in B_i^t} \frac{c_t^G(v)}{N_v^t} + cE_i$$

donde  $E$  es un vector de valores reales positivos llamado fuente del rango<sup>6</sup>,  $c$  es maximizado, y  $\max_i c_t^G = 1$ .

## 3.2. Resultados de centralidad en el MEC

Una vez calculados los indicadores por agente, para cada uno de los días, se calcularon promedios por individuos de cada indicador de importancia en la red.

Tal como se mencionó anteriormente, no tiene por qué existir relación alguna entre estos indicadores de centralidad; cada uno describe alguna característica de importancia para la red, no todas. El agente más grande no tiene por qué ser el más conectado, por dar un ejemplo.

Sin embargo, en el MEC existe una relación positiva entre estos indicadores de importancia de la red. Tal como se describe en el Cuadro 1, la relación es estadísticamente significativa para todos los indicadores según un criterio de correlación de rango de Spearman, aunque algunos tienen una relación monótona más fuerte (Figura 3).

Es decir, los agentes en el MEC que son más centrales según alguno de los criterios I a IV, tienden a serlo también por los demás criterios. Para la red del MEC, los agentes más grandes (criterio I), con mayor número de conexiones (II), con mayor capacidad de intermediación (III), y con relaciones cercanas con agentes más importantes (IV), tienden a ser los mismos cada día. Y, teniendo en cuenta las diferencias marcadas entre los primeros 10-15 agentes y los restantes, según cada indicador, los agentes centrales son pocos, y sistémicos para el MEC, según un criterio de importancia en la red.

---

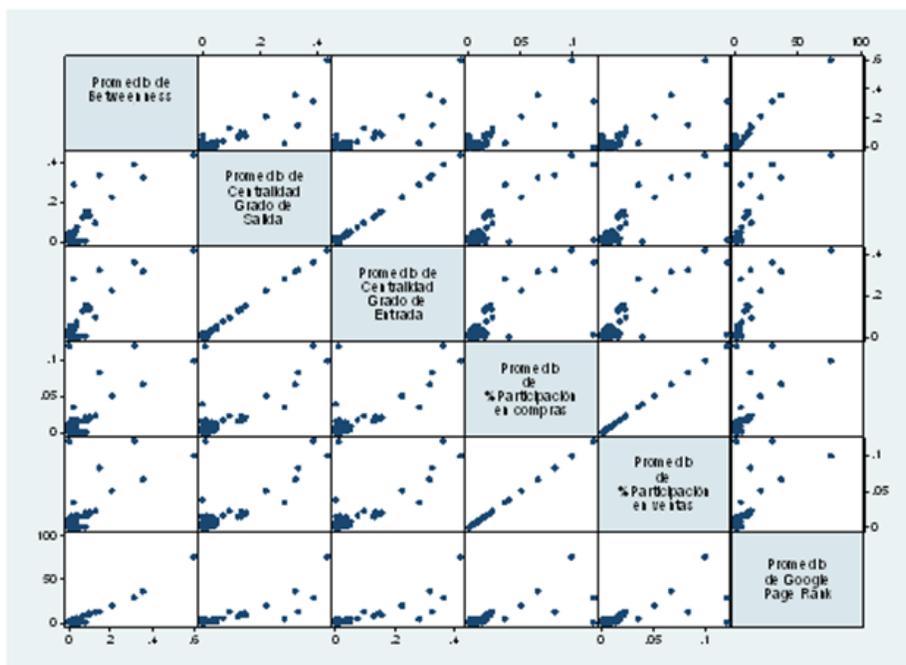
<sup>6</sup>En este caso, para dar ponderaciones iniciales iguales en la fuente de rango a cada agente, se usó  $E_i = 0,015$ , y es el mínimo valor posible del indicador  $c_t^G(i)$ . Este valor se introduce en la fórmula para garantizar convergencia en el cálculo, Brin et al. (1998).

Cuadro 1: Correlación de rango de Spearman entre las medidas de centralidad

	Promedio de <i>Betweenness</i>	Promedio de centralidad grado de salida	Promedio de centralidad grado de entrada	Promedio de % participación en compras	Promedio de % participación en ventas	Promedio de Google PageRank
Promedio de <i>Betweenness</i>		$\rho_s = 0,3921$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,4299$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,2823$ n=2854 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.2823$ n=2854 $p_{valor} = 0,00$	$\rho_s = 0.5486$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$
Promedio de centralidad grado de salida	$\rho_s = 0,3921$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$		$\rho_s = 0,1114$ n=47629 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,0519$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.0519$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.3686$ n=35873 $p_{valor} = 0.00$
Promedio de centralidad grado de entrada	$\rho_s = 0,4299$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,1114$ n=47629 $p_{valor} = 0.00$		$\rho_s = 0,6780$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.6780$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.7124$ n=35873 $p_{valor} = 0.00$
Promedio de % participación en compras	$\rho_s = 0,2823$ n=2854 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,0519$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,6780$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$		$\rho_s = 10.000$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.5783$ n=34976 $p_{valor} = 0.00$
Promedio de % participación en ventas	$\rho_s = 0,2823$ n=2854 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,0519$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,6780$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 10.000$ n=41374 $p_{valor} = 0.00$		$\rho_s = 0.5783$ n=34976 $p_{valor} = 0.00$
Promedio de Google PageRank	$\rho_s = 0,5486$ n=2866 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,3686$ n=35873 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0,7124$ n=35873 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.5783$ n=34976 $p_{valor} = 0.00$	$\rho_s = 0.5783$ n=34976 $p_{valor} = 0.00$	

Fuente: Cálculos del autor.

**Figura 3:** Dispersión de los indicadores de centralidad



Fuente: Cálculos del autor.

En particular, (1) Interbolsa S.A., (2) V. Bancolombia, (3) Correval, y (4) Alianza V. Comisionista, son clasificados según TODOS los indicadores entre los 5 agentes más centrales. Estos, según un criterio de centralidad, serían agentes sistémicos para el MEC (Cuadro 2).

**Cuadro 2:** Agentes más centrales en el MEC, según cada uno de los criterios

Promedio de %Participación en compras					Promedio de %Participación en ventas				
	Quién	NIT	Días	Indicador		Quién	NIT	Días	Indicador
1	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,1197***	1	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,1197***
2	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,0987***	2	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,0987***
3	Interbolsa	800103498-9	1062	0,0825**	3	Interbolsa	800103498-9	1062	0,0825**
4	Correval	860068182-5	1071	0,0665***	4	Correval	860068182-5	1071	0,0665***
5	Alianza V.	860000185-4	1067	0,0507***	5	Alianza V.	860000185-4	1067	0,0507***
6	Corredores A.	860079174-3	1071	0,0231**	6	Corredores A.	860079174-3	1071	0,0231**
7	Serfinco	890905375-0	1070	0,0218**	7	Serfinco	890905375-0	1070	0,0218**
8	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,0209**	8	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,0209**
9	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,0185**	9	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,0185**
10	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0172**	10	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0172**
11	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,0156**	11	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,0156**
12	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,0154**	12	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,0154**
13	BBVA	860003020-1	1068	0,0138*	13	BBVA	860003020-1	1068	0,0138*
14	Whitewater	830135235-5	987	0,0137	14	Whitewater	830135235-5	987	0,0137
15	Banco AV Villas	860035827-5	932	0,0114	15	Banco AV Villas	860035827-5	932	0,0114
Promedio de Centralidad por Intermediación					Promedio de Google Page Rank				
	Quién	NIT	Días	Indicador		Quién	NIT	Días	Indicador
1	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,5991***	1	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,7634***
2	Correval	860068182-5	1071	0,3556***	2	Correval	860068182-5	1071	0,3647***
3	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,3143***	3	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,2928***
4	Alianza V.	860000185-4	1067	0,2080***	4	Alianza V.	860000185-4	1067	0,2007***
5	Interbolsa	800103498-9	1062	0,1470**	5	Corredores A.	860079174-3	1071	0,1273**
6	Corredores A.	860079174-3	1071	0,1265**	6	Interbolsa	800103498-9	1062	0,1230**
7	Serfinco	890905375-0	1070	0,0989**	7	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,1129**
8	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,0952**	8	Serfinco	890905375-0	1070	0,0982**
9	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,0816**	9	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,0890**
10	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,0802**	10	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,0884**
11	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,0666**	11	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,0735**
12	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0363**	12	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0489**
13	Preflex	860508470-0	570	0,0355	13	Acciones de Col.	800073493-2	1059	0,0423
14	Ultrabursátiles	800120184-3	1060	0,0334*	14	Ultrabursátiles	800120184-3	1060	0,0417*
15	El Edén	805019599-3	780	0,0290	15	Crear V.	860001196-1	472	0,0390*
Promedio de Centralidad Grado de Salida					Promedio de Centralidad Grado de Entrada				
	Quién	NIT	Días	Indicador		Quién	NIT	Días	Indicador
1	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,4360***	1	V. Bancolombia	800128735-8	1071	0,4195***
2	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,3879***	2	Interbolsa C.	900221113-7	486	0,3628***
3	Interbolsa	800103498-9	1062	0,3349**	3	Interbolsa	800103498-9	1062	0,3258**
4	Correval	860068182-5	1071	0,3235***	4	Correval	860068182-5	1071	0,3164***
5	Alianza V.	860000185-4	1067	0,2227***	5	Alianza V.	860000185-4	1067	0,2236***
6	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,1524**	6	CPB Compensar	800019807-2	1071	0,1542**
7	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,1496**	7	Asesores en V.	890931609-9	1070	0,1488**
8	Serfinco	890905375-0	1070	0,1362**	8	Serfinco	890905375-0	1070	0,1357**
9	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,1339**	9	Acciones y V.	860071562-1	1071	0,1331**
10	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,1253**	10	Bolsa y Banca	800115324-8	782	0,1286**
11	Corredores A.	860079174-3	1071	0,0953**	11	Corredores A.	860079174-3	1071	0,0942**
12	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0741**	12	Bancolombia	890903938-8	1069	0,0747**
13	Ultrabursátiles	800120184-3	1060	0,0531*	13	Ultrabursátiles	800120184-3	1060	0,0523*
14	Banco Santander	890903937-0	1071	0,0517*	14	Acciones de Col.	800073493-2	1059	0,0511
15	Acciones de Col.	800073493-2	1059	0,0506	15	Mun. de Palmira	891380007-3	780	0,0501

\*\*\* En los 5 más centrales según todos los criterios

\*\* En los 15 más centrales según todos los criterios

\* En los 30 más centrales según todos los criterios

Fuente: Cálculos del autor.

## 4. Análisis de sensibilidad de la estructura del MEC

Buscando tener una mejor idea de la resistencia de la estructura de red del MEC, se simuló para cada día una serie de ataques que eliminan agentes importantes de la red de manera secuencial. Esta metodología permite intuir cuánto se *deforma y desconecta* la red del MEC sin sus agentes más centrales.

### 4.1. Descripción de las simulaciones de ataque al MEC

Para un día  $t$ , se calculan unos estadísticos básicos de la red del MEC. Luego se le elimina el nodo más conectado vía operaciones de compra y venta, y se recalculan los estadísticos. La eliminación secuencial de nodos continúa hasta que no existen conexiones observables en la red simulada.

Este proceso se realiza para cada uno de los 1072 días de la base de datos, desde enero de 2006 hasta mayo de 2010. Los siguientes son los indicadores calculados en cada ronda del ataque para cada día:

- **Número de componentes conexos de la red:** Tal como se explicó en la sección 2, cada componente conexo es un conjunto de agentes conectados entre sí, posiblemente vía intermediación entre estos, y separados del resto de la red. Este indicador se calcula en cada ronda de eliminación secuencial, buscando entender qué tanto se fragmenta la red ante la ausencia de sus nodos más conectados.
- **Número de nodos vigentes:** es el número de nodos que permanecen con alguna conexión, luego de la eliminación de los agentes atacados en la simulación.
- **Número de conexiones:** cuántos enlaces de compra o venta permanecen en la red.
- **Tamaño del componente conexo maximal:** describe cuántos agentes tiene el pedazo más grande de la red.
- **Porcentaje de nodos que no están en el componente maximal:** este indicador da una noción de cuánto de la red se compone de islas.
- **Porcentaje de nodos en el segundo componente de mayor tamaño:** describe la importancia de la isla más grande de la red.

### 4.2. Resultados de las simulaciones

Los gráficos 4 5 muestran los resultados de las simulaciones de ataques a la red del MEC. Para facilidad de su interpretación, los resultados se muestran consolidados en media y mediana anual.

En el panel A del Gráfico 4 se muestra el número de componentes conexos que componen el MEC, y qué tan sensible es este valor a la ausencia de los agentes más conectados de la red. Partiendo de entre 2 y 4 componentes conexos en el caso base, si no existiesen los seis agentes más conectados el número de pedazos distinguibles del MEC se duplicaría.

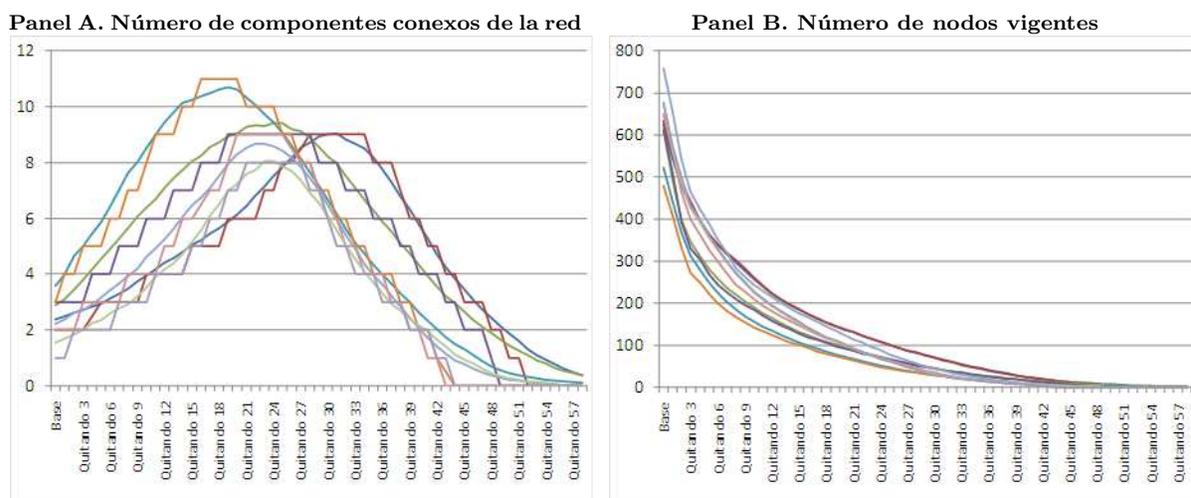
Como los agentes más conectados hacen parte del componente más grande, sin estos pocos nodos centrales el componente principal se fragmentaría muy rápidamente, como se evidencia en los paneles B y C del Gráfico 5, que muestran respectivamente el tamaño del componente conexo máximo y el porcentaje de agentes que no pertenecen al componente conexo más grande.

La fuerte dependencia del MEC de las conexiones de unos pocos agentes se ve también de manera clara en el Panel B del Gráfico 4 y el Panel A del Gráfico 5, que muestran el número de nodos conectados en la red y el número de conexiones, respectivamente. Bastaría que se eliminen los seis a ocho agentes más conectados de la red, para que cerca de la mitad de nodos y más de la mitad de conexiones dejaran de existir en la red.

En resumen, la estructura de red del MEC es fuertemente dependiente de las conexiones de unos pocos agentes, que pueden clasificarse como centrales a la red. Ante la ausencia de seis a ocho de los agentes más conectados de cada día, cerca de la mitad de conexiones y agentes del MEC se perderían, y adicionalmente se observa una disminución de la cohesión de la red.

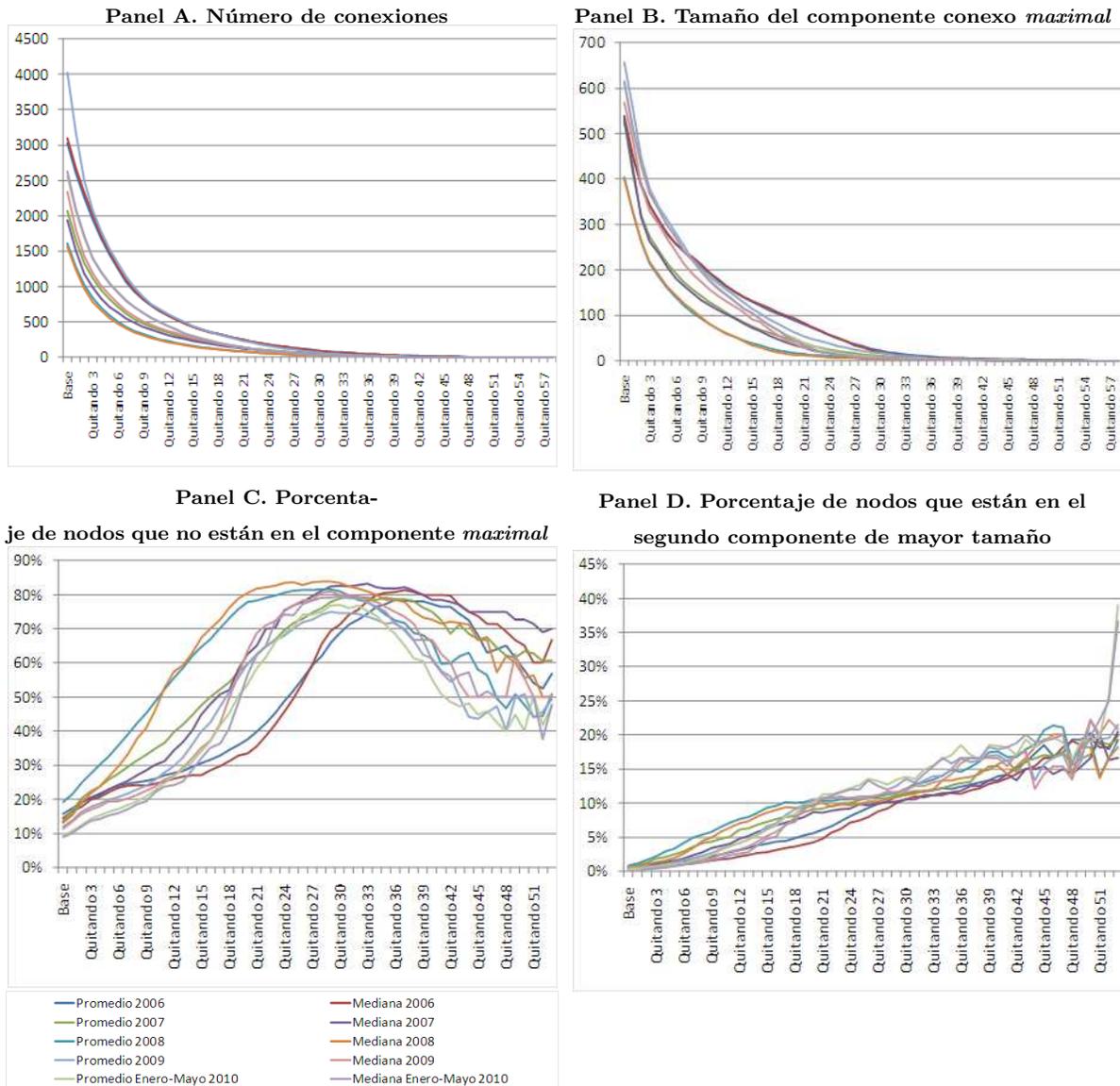
Vale anotar que este es un análisis del tipo contra-factual, y por tanto ignora en gran medida la capacidad de ajuste y reacción de los agentes remanentes ante cada ausencia del agente más conectado. Por tal motivo los resultados pueden sobreestimar la fragilidad del MEC.

**Figura 4:** Resumen simulaciones de ataque al MEC



Fuente: Cálculo del autor.

**Figura 5:** Resumen simulaciones de ataque al MEC



Fuente: Cálculo del autor.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se hizo un análisis de la estructura de red presente en el Mercado Electrónico Colombiano - MEC, administrado por la Bolsa de Valores de Colombia. Se utilizó para ello una base de datos con información desde enero de 2006 hasta mayo de 2010. La base registra cada una de las operaciones hechas en el MEC de compra/venta y derivados (repos y simultáneas), cuyo subyacente son títulos de deuda pública, bonos ordinarios o títulos amortizables privados,

certificados a término CDT, o títulos de Fogafin.

Aprovechando esta información, se calcularon series diarias de indicadores generales de la red como son los índices de conectividad, de reciprocidad, y de *clustering* promedio, grado promedio de nodo y distribuciones de grado, y componentes conexos de la red. Las series de estos estadísticos permiten observar que el Mercado Electrónico Colombiano es fuertemente concentrado en unos pocos agentes, con bajo nivel de conectividad, aunque con un alto grado de reciprocidad en las relaciones entre los agentes.

En este documento también se calcularon indicadores de centralidad diaria para cada uno de los agentes participantes en la base, buscando identificar cuáles son los agentes con características sistémicas según su posición relativa en la red. Los indicadores calculados responden a cuatro nociones tradicionales de centralidad en red: (I) centralidad por peso en el mercado, (II) por grado de nodo, (III) por capacidad de intermediación, y (IV) por características de los vecinos.

Si bien no tiene por qué existir relación monótona alguna entre estos indicadores de centralidad (el agente más grande no tiene por qué ser más conectado, por dar un ejemplo), se encontró que en el MEC existen relaciones positivas y estadísticamente significativas entre los indicadores de importancia de la red de los agentes.

Es decir, en el MEC, los agentes más grandes (criterio I), con mayor número de conexiones (II), con mayor capacidad de intermediación (III) y con relaciones cercanas con agentes más importantes (IV), tienden a ser los mismos cada día. Y, teniendo en cuenta las diferencias marcadas entre los primeros 10-15 agentes y los restantes, según cada indicador, los agentes centrales son pocos, y sistémicos para el MEC. En particular, Interbolsa S.A., Valores Bancolombia, Correval S.A., y Alianza Valores Comisionista, son clasificados según todos los indicadores entre los 5 agentes más centrales. Estos, según un criterio de centralidad, serían agentes sistémicos para el MEC.

Finalmente, vía simulaciones, se buscó medir qué tan sensible es la estructura de red del MEC ante la ausencia de los agentes más conectados. Se encontró que la estructura es fuertemente dependiente de las conexiones de unos pocos agentes, que pueden clasificarse como centrales a la red. Ante la ausencia seis a ocho de los agentes más conectados de cada día, cerca de la mitad de conexiones y agentes del MEC se perderían, y adicionalmente disminuye la cohesión de la red. No sobra recordar que este último análisis es del tipo *contra-factual*, y por tanto ignora en gran medida la capacidad de ajuste y reacción de los agentes remanentes ante cada ausencia del agente más conectado, y por tanto puede sobreestimar la fragilidad del MEC.

## Referencias

- Bech, M., J. T. Chapman, and R. J. Garrat (2010). Which bank is the “central” bank? *Journal of Monetary Economics* 57, 352–363.
- Borgatti, S. (2005). *Centrality and network flow*. *Social Networks* (27), 55 – 71.
- Brin, S., R. Motwani, and T. Winograd (1998). *The pagerank citation ranking: Bringing order to the web*. Technical report, Stanford InfoLab.
- Cont, R. (2009a). *Credit default swaps and financial stability*. To appear in *Revue de Stabilité Financière (Banque de France)*.
- Cont, R. (2009b). *Measuring systemic risk*. Working Paper.
- Haldane, A. (2009). *Rethinking financial networks*. *Bank of England Speech*.
- Jackson, M. O. (2008). *Social and economic networks*. Princeton University Press.
- Katz, L. (1953). *A new status index derived from sociometric analysis*. *Psychometrika* (18), 39–43.
- Watts, D. and S. Strogatz (1998). *Collective dynamics of “small-world” networks*. *Nature* 393, 409–410.