

COMBINACIÓN DE BRECHAS DEL PRODUCTO COLOMBIANO

PAULO MAURICIO SÁNCHEZ BELTRÁN

(paulo.sanchez@mail.escuelaing.edu.co)

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA

(lmelevel@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

RESUMEN. Este documento combina estimaciones de ocho metodologías de la brecha del producto colombiano para el período comprendido entre el primer trimestre de 1994 y el tercer trimestre de 2012. A partir de modelos VAR que incluyen las diferentes brechas y la inflación, se construyen las densidades combinadas de pronósticos de la brecha mediante el uso de tres esquemas de ponderación: logarítmicos, basados en puntuaciones de rango de probabilidad continuo (CRPS) y en el error cuadrático medio (MSE). Los resultados sugieren que las densidades combinadas bajo estos tres esquemas con horizontes de pronóstico de uno, dos, tres y cuatro trimestres adelante están bien especificadas. Adicionalmente, las puntuaciones logarítmicas calculadas sobre estas densidades muestran que las metodologías basadas en ponderadores logarítmicos son las que presentan mejor desempeño y para horizontes de pronóstico de dos y tres trimestres tienen significativamente una mayor puntuación que las calculadas por los ponderadores CRPS y MSE.

Palabras claves. Combinación de densidades de pronóstico, brecha del producto, pronósticos directos, modelos VAR.

Códigos de clasificación JEL. C32, C53, E37.

1. INTRODUCCIÓN

La formulación de la política monetaria exige tener información adecuada acerca del estado de la economía, en particular, sobre la brecha del producto. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que esta variable no es observable y que aún contando con diferentes estimaciones de la misma, estas nunca podrán ser contrastadas con valores observados. Esto genera un costo adicional para los encargados de la política económica puesto que tiene asociado un mayor grado de incertidumbre en la toma de decisiones.

Fecha: Julio 2013.

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Los autores agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de Juan Sebastián Amador.

Dada la característica de no observabilidad y las múltiples metodologías de estimación de la brecha, una pregunta relevante es cómo se pueden combinar dichas estimaciones para obtener una sola que contenga la información de todas estimaciones consideradas. Es importante notar que este documento se centra en el análisis de los pronósticos de la brecha ya que estos tienen mayor relevancia para la toma de decisiones. Adicionalmente, no se consideran los pronósticos puntuales sino los pronósticos de densidad, los cuales proveen mayor información puesto que a través de estos se puede obtener una descripción completa de la incertidumbre asociada a dichos pronósticos, Hall y Mitchell [2007] y Tay y Wallis [2000].

Diferentes estudios muestran que la combinación de pronósticos de densidad brinda mayor información y mejor desempeño que las densidades individuales de pronóstico. McDonald y Anders [2011] encuentran que combinar densidades de pronóstico del PIB y la tasa de cambio en Nueva Zelanda tiene un mejor desempeño comparado con las densidades de pronóstico individuales para las mismas variables. Este mismo resultado es obtenido por Hall y Mitchell [2007] al combinar los pronósticos de densidad de inflación del banco central de Inglaterra y el NIESR¹ y compararlos con los pronósticos individuales.

Este trabajo se compone de cuatro secciones, siendo la primera esta introducción. En la segunda sección se presenta la metodología a utilizar para la combinación y obtención de los pronósticos de densidad. La tercera sección muestra la aplicación para las series de la brecha del producto colombiano. Finalmente, en la cuarta sección se presentan las conclusiones.

2. METODOLOGÍA

2.1. Modelo. Los métodos de combinación de densidades de pronóstico suponen que se tiene información sobre el pronóstico y el error de pronóstico². Sin embargo, para una serie no observable como la brecha del producto no se tiene lo segundo. Para evitar este inconveniente Garratt et al. [2009] y Orphanides y van Norden [2002] proponen utilizar el siguiente modelo que relaciona la brecha con una variable observada, en nuestro caso, la brecha inflacionaria³:

$$\tilde{\pi}_{t+h} = \alpha_1^j + \sum_{p=0}^{P_j} \beta_{1,p}^j \tilde{\pi}_{t-p} + \sum_{p=0}^{P_j} \gamma_{1,p}^j \tilde{y}_{t-p}^j + \varepsilon_{1,t+h}^j \quad (1)$$

$$\tilde{y}_{t+h}^j = \alpha_2^j + \sum_{p=0}^{P_j} \beta_{2,p}^j \tilde{\pi}_{t-p} + \sum_{p=0}^{P_j} \gamma_{2,p}^j \tilde{y}_{t-p}^j + \varepsilon_{2,t+h}^j \quad (2)$$

Donde $\tilde{\pi}_t = \pi_t - \bar{\pi}_t$ denota la brecha entre inflación (π_t) y la meta fijada por el Banco de la República ($\bar{\pi}_t$), \tilde{y}_t^j denota las diferentes medidas de la brecha del producto, h el horizonte de pronóstico y $j = 1, 2, \dots, N$ indica el método utilizado para extraer la brecha del producto. En conjunto, las ecuaciones (1) y (2) conforman un modelo VAR, el cual facilita el cálculo de las densidades de

¹National Institute of Economic and social Research

²Bajo normalidad solo se requiere estos dos momentos para identificar la función de densidad de los pronósticos.

³Este modelo está diseñado para realizar pronósticos directos. Una descripción de estos modelos se encuentra entre otros en Marcellino et al. [2006] y González et al. [2007]

pronóstico.

Nótese que la anterior representación implica que para cada brecha del producto bajo consideración hay un modelo VAR diferente; en particular, el número de rezagos puede variar. Cada modelo VAR es utilizado para pronosticar h pasos adelante tanto la brecha de inflación como la del producto y para calcular las varianzas de los errores de pronóstico generados.

2.2. Combinación y ponderación. Dados los N modelos VAR indicados en (1) y (2) y sus respectivas densidades de pronóstico, la densidad combinada se calcula por medio de una combinación lineal convexa⁴ definida de la siguiente forma:

$$p(\tilde{y}_{\tau,h}) = \sum_{j=1}^N w_{j,\tau,h} g(\tilde{y}_{\tau,h}^j | I_{j,t}), \tau = \underline{\tau}, \dots, \bar{\tau} \quad (3)$$

Donde $g(\tilde{y}_{\tau,h}^j | I_{j,t})$ es la densidad de pronóstico h -pasos adelante del modelo j de la brecha del producto y τ denota el periodo de evaluación.

De manera análoga para las densidades de pronóstico de la brecha de inflación podemos definir la combinación lineal como:

$$p(\tilde{\pi}_{\tau,h}) = \sum_{j=1}^N w_{j,\tau,h} g(\tilde{\pi}_{\tau,h}^j | I_{j,t}), \tau = \underline{\tau}, \dots, \bar{\tau} \quad (4)$$

Donde $\tilde{\pi}_{\tau,h}^j$ son los pronósticos de la brecha de inflación h pasos adelante, obtenidos a partir de una representación VAR en la que se ha utilizado la serie j de la brecha del producto.

El anterior esquema de combinación, basado en el trabajo pionero de Stone [1961]⁵, presenta la característica que aunque se combinen densidades de pronóstico gaussianas, la densidad combinada no necesariamente es normal y puede ser multimodal, Kascha y Ravazzolo [2010].

Dentro de este tipo de esquemas la densidad combinada es determinada por los ponderadores $w_{j,\tau,h}$. Siguiendo a trabajos como Bache et al. [2001], Jore et al. [2010], Garratt et al. [2009] y Garratt et al. [2011], una alternativa usual en la literatura es suponer que las ponderaciones están basadas en el esquema de ponderación logarítmico (o recursivo logarítmico), y se deriva de una perspectiva bayesiana emulando el concepto de *Bayesian Model Averaging* y, en particular, de las probabilidades a posteriori de los modelos a combinar⁶:

$$w_{j,\tau,h} = \frac{\exp \left[\sum_{\tau=\underline{\tau}-k}^{\bar{\tau}-h} \ln g(\tilde{y}_{\tau,h}^j | I_{j,t}) \right]}{\sum_{j=1}^N \exp \left[\sum_{\tau=\underline{\tau}-k}^{\bar{\tau}-h} \ln g(\tilde{y}_{\tau,h}^j | I_{j,t}) \right]} \quad (5)$$

⁴Con $0 \leq w_{i,\tau,h} \leq 1$ y $\sum_{i=1}^N w_{i,\tau,h} = 1$. Estas restricciones son necesarias para asegurar que la densidad combinada es no-negativa e integra a la unidad, Timmermann [2006].

⁵Un análisis de la combinación de densidades de pronóstico desde un punto de vista bayesiano puede ser encontrado en Hall y Mitchell [2004].

⁶Para una mayor descripción de *Bayesian Model Averaging* véase Koop [2003].

Donde k representa un período a través del cual se inicializan los ponderadores y $\ln g(\tilde{y}_{\tau,h}^j | I_{j,t})$ es el logaritmo de la función de densidad evaluada en $\tilde{y}_{\tau,h}^j$.

El logaritmo de la función de densidad evaluada en $\tilde{y}_{\tau,h}^j$ se conoce en la literatura como puntuación logarítmica y en general brinda valores numéricos a través de los cuales se puede evaluar la calidad de un pronóstico de densidad, Gneiting y Raftery [2007]. En particular, la puntuación logarítmica ofrece ventajas conceptuales y eventualmente puede facilitar la comparación entre diferentes densidades de pronóstico.

Garratt et al. [2009] comentan que el uso del esquema de ponderación basado en las puntuaciones logarítmicas es apropiado puesto que asigna una alta puntuación a un pronóstico de densidad asociado a probabilidades altas de los valores observados. Sin embargo, por la naturaleza de las puntuaciones logarítmicas las ponderaciones podrían llegar a tener comportamientos extremos y ser sensibles a valores atípicos.

Alternativo al esquema de ponderación logarítmico, en la literatura se han identificado el uso de otros esquemas diferentes. Por ejemplo, el esquema de ponderación basado en puntuaciones de rango de probabilidad continuo (CRPS, por sus siglas en inglés), donde los ponderadores están dados por:⁷

$$w_{j,\tau,h} = \frac{\frac{1}{CRPS_{j,\tau,h}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{CRPS_{j,\tau,h}}} \quad (6)$$

El esquema de combinación CRPS, desarrollado en Bjorland et al. [2011], utiliza puntuaciones con rango de probabilidad continuo en lugar de puntuaciones logarítmicas. Estas puntuaciones son menos extremas ante la presencia de datos atípicos.

Otro método de ponderación se basa en los errores cuadráticos medios, MSE, (Kascha y Ravazzolo [2010]). En esta metodología los ponderadores para la densidad j en el horizonte h y el periodo τ están dados por:

$$w_{j,\tau,h} = \frac{\frac{1}{MSE_{j,\tau,h}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{MSE_{j,\tau,h}}} \quad (7)$$

Garratt et al. [2009] y Garratt et al. [2011] proponen calcular las ponderaciones $w_{i,\tau,h}$ utilizando el método de ponderación logarítmico sobre las densidades de pronóstico de la brecha de inflación y posteriormente utilizar estos ponderadores en la combinación de las densidades de la brecha del producto.

⁷La definición y una descripción de las puntuaciones de rango de probabilidad continuo se encuentra en el apéndice B.

2.3. Evaluación de las densidades de pronóstico. La evaluación de las densidades de pronóstico se puede realizar por medio de diversos métodos. Como primer paso se debe verificar si las densidades están correctamente especificadas (Berkowitz [2001] y Diebold et al. [1998]).

Las pruebas utilizadas para verificar si las densidades están especificadas de forma correcta se fundamentan en el concepto de la transformación integral de probabilidad (PIT's por sus siglas en inglés), la cual está definida de la siguiente forma:

$$z_{\tau,h} = \int_{-\infty}^{\tilde{\pi}_{\tau}} g_h(u) du \quad (8)$$

Donde $g_h(u)$ es la función de densidad de pronóstico para horizonte h y $\tilde{\pi}_{\tau}$ es la brecha de inflación en el periodo τ . Se considera que una densidad de pronóstico está correctamente especificada si la serie $z_{\tau,h}$ se distribuye uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y si para los pronósticos un paso adelante es *i.i.d.*, Diebold et al. [1998].

Otra prueba de evaluación sugerida en Mitchell y Hall [2005], Bao et al. [2007] y Amisano y Giacomini [2007] se basa en la pseudo-distancia⁸ o medida de divergencia Kullback-Leibler (KLIC por sus siglas en inglés), la cual compara dos densidades de la siguiente forma:

$$KLIC(g_1, g_2) = E_{g_1} \left(\ln \frac{g_1}{g_2} \right) = E_{g_1} (\ln g_1 - \ln g_2) \quad (9)$$

Siendo $g_1 = g_1(x_t)$ y $g_2 = g_2(x_t)$ funciones de densidad de pronóstico continuas y E el valor esperado.

El análisis de las estadísticas KLIC con respecto a la función de densidad verdadera se puede realizar a través de puntuaciones logarítmicas, definidas de la siguiente forma:

$$\ln S_j = \ln g_j(x_t), \quad j = 1, \dots, N$$

Tomando el valor esperado a la anterior expresión se tiene como resultado:

$$E(\ln S_j) = E(\ln g_j(x_t))$$

y bajo ciertas condiciones de regularidad, este valor esperado puede ser estimado consistentemente por el siguiente estadístico:

$$\widehat{\ln S_j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln g_j(x_t)$$

⁸Para mayores detalles de Pseudo-Distancias o divergencias véase Ullah [1996]

Las puntuaciones logarítmicas tienen la característica que su función de divergencia es la pseudo distancia Kullback-Leibler, Gneiting y Raftery [2007]. Además, observando la ecuación (9) se puede deducir que si $E(\ln g_1) > E(\ln g_2)$ entonces $KLIC_{g_1} < KLIC_{g_2}$, siempre y cuando KLIC haya sido medido con respecto a la densidad verdadera, la cual es común a g_1 y g_2 . Interpretando lo anterior se puede afirmar que si la puntuación logarítmica de g_1 es más grande que la de g_2 entonces hay una menor divergencia de g_1 con respecto a la densidad verdadera. Por lo tanto, se concluye que funciones de densidad con puntuaciones logarítmicas más altas implican una menor divergencia con respecto a la densidad verdadera y por consiguiente son una mejor aproximación a esta última.

Es importante notar que dado que no se conoce la brecha del producto observada, el uso de las pruebas anteriormente sugeridas se limita a la evaluación de las densidades de pronóstico de la inflación.

3. EJERCICIO EMPÍRICO

El ejercicio empírico utiliza diferentes estimaciones de la brecha del producto colombiano para construir la combinación de densidades de pronóstico para el periodo trimestral comprendido entre 1994 : 1 y 2012 : 3. A continuación se describen las brechas utilizadas.

3.1. Medidas de la brecha del producto. La brecha del producto, \tilde{y}_t , es definida como la diferencia porcentual entre el producto observado y el producto potencial, como sigue:

$$\tilde{y}_t^j = \frac{y_t - \bar{y}_t^j}{\bar{y}_t^j}$$

Donde y_t es el producto observado en el momento t y \bar{y}_t^j denota su tendencia o nivel potencial extraído por el método j . Con base en los trabajos de Cobo [2007], González et al. [2012] y Rodríguez et al. [2006] se consideran las siguientes estimaciones de la brecha del producto:

1. Filtro de Hodrick-Prescott: Se utiliza la metodología propuesta por Hodrick y Prescott [1997], utilizando un parámetro de suavización $\lambda = 1600$.
2. Filtro de Hodrick-Prescott con restricciones: La metodología de Hodrick-Prescott con restricciones sigue los mismos lineamientos que la metodología de Hodrick y Prescott [1997]. Sin embargo, bajo este enfoque el problema de minimización está sujeto a un conjunto de restricciones en algunos periodos específicos de acuerdo al consenso de expertos sobre el comportamiento de la brecha. Para mayores detalles véase Cobo [2007].
3. Brecha adaptativa: Este modelo supone que el producto potencial se comporta de acuerdo a un modelo de tendencia local lineal (Harvey y Proietti [2005]) e incluye un conjunto de ecuaciones basadas en teoría económica donde se asume que las expectativas se forman de manera adaptativa. La brecha del producto es extraída usando el filtro de Kalman a partir de las ecuaciones del modelo. Algunos parámetros del modelo son fijos y determinados de acuerdo a consideraciones de expertos, mientras que otros son estimados por medio de

técnicas bayesianas. El modelo de tendencia local lineal en su forma básica se compone de las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + g_t + \varepsilon_t^{\bar{y}}$$

Siendo g_t la tasa de crecimiento del componente tendencial de la brecha del producto, el cual a su vez sigue la siguiente dinámica:

$$g_t = (1 - \eta)\bar{g}_{ss} + \eta g_{t-1} + \varepsilon_t^g$$

Donde $\varepsilon_t^{\bar{y}}$ y ε_t^g son perturbaciones gaussianas *i.i.d.* Las anteriores ecuaciones son complementadas con una curva IS, una curva de Phillips, una condición de la paridad de la tasa de interés y un conjunto de ecuaciones que describen la dinámica de la tasa de interés y de cambio reales. Esta metodología es descrita en detalle en González et al. [2012].

4. Brecha racional: Se considera un conjunto de ecuaciones similar al construido en el ítem anterior. Sin embargo, la principal diferencia de este modelo radica en el supuesto que se asume para la formación de las expectativas, las cuales ahora se consideran racionales. Esta metodología también es descrita en González et al. [2012].
5. Componentes principales: En esta metodología se estima un indicador de la brecha del producto utilizando componentes principales, los cuales resumen de manera eficiente la información disponible sobre la actividad económica. Para mayor detalle véase Rodríguez et al. [2006].
6. Promedio móvil del filtro de Hodrick-Prescott con restricciones: Bajo esta metodología se calcula un promedio móvil de orden cuatro sobre la brecha de producto calculada por medio del filtro de Hodrick-Prescott con restricciones.
7. Función de producción. Este método modela la tecnología productiva mediante una función Cobb-Douglas que incorpora información sobre el tamaño de la fuerza laboral, el acervo de capital y sus niveles de utilización. Finalmente, se calculan las versiones no inflacionarias de estas variables mediante diferentes tipos de filtros con el objetivo de estimar un PIB potencial no inflacionario consistente con los niveles de los factores productivos de la economía. Véase Cobo [2007].

Adicionalmente, se utiliza la media aritmética de las siete medidas de la brecha del producto anteriormente mencionadas. La Figura 1 del Apéndice A presenta la evolución de las brechas del producto durante el periodo de análisis. Esta gráfica muestra que aunque se presenta un comportamiento común, las medidas difieren considerablemente entre sí en ciertos periodos. De las diferentes medidas bajo consideración se observa que las brechas del producto calculadas por medio del filtro de Hodrick-Prescott restringido y la función de producción son las que presentan mayor variabilidad. Por otro lado, la brecha del filtro de Hodrick-Prescott presenta un comportamiento un poco diferente a las demás estimaciones al inicio del período de análisis; sin embargo, este patrón no se cumple al final de la muestra.

3.2. Pronósticos de Densidad. Los pronósticos de densidad se basan en los pronósticos directos del modelo VAR especificado en (1) y (2). El número de rezagos de estos modelos fue seleccionado de acuerdo al criterio de información de Schwartz. Los modelos son estimados inicialmente con información hasta el segundo trimestre de 2002. Posterior a la estimación se realizan pronósticos a uno, dos, tres y cuatro trimestres adelante y se calculan las varianzas de los errores de pronóstico. Tras haber realizado los pronósticos, se adiciona un trimestre de información y se re-estiman los parámetros de los modelos para obtener de nuevo pronósticos hasta cuatro trimestres adelante y las varianzas de sus errores asociados. El ejercicio continúa de forma recurrente hasta el final del período de evaluación que corresponde al tercer trimestre de 2012.

Bajo el supuesto de normalidad, los pronósticos de densidad son obtenidos a partir de las predicciones y las varianzas de los errores de pronóstico calculados en la estimación recurrente del modelo VAR indicado en el párrafo anterior. En el Anexo C se muestran los resultados de diferentes pruebas sobre los errores de pronóstico de los modelos VAR para verificar el supuesto de normalidad. Estos resultados no dan indicio de violación de dicho supuesto.

3.2.1. Densidades combinadas de pronósticos de la brecha de inflación. En los Cuadros 1 y 2 se muestran los valores-p de las pruebas de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling sobre las series de PITs para los métodos de ponderación considerados. Si los modelos están bien especificados estas series se deben distribuir uniforme en el intervalo $[0, 1]$, tal como se menciona en la sección 2.3. Los resultados de ambas pruebas indican que no existe evidencia de mala especificación.

El Cuadro 3 presenta las puntuaciones logarítmicas sobre las densidades combinadas bajo los diferentes esquemas de ponderación considerados para el período de evaluación comprendido entre el tercer trimestre de 2002 y el tercer trimestre de 2012.⁹ Las estimaciones con el símbolo “*” indican que dicha puntuación es menor que la obtenida bajo ponderadores logarítmicos a un nivel de significancia del 5%.¹⁰ Los resultados mostrados en este cuadro sugieren que el método de combinación basado en ponderaciones logarítmicas tiene puntuaciones mayores indicando que es la metodología con mejor desempeño. Adicionalmente, para horizontes de dos y tres trimestres estas puntuaciones son significativamente mayores con respecto a los otros métodos de combinación. Teniendo en cuenta estos resultados, en lo que sigue del documento solo se considerará las densidades obtenidas por este método.

⁹En este ejercicio se utilizaron 10 observaciones como período de entrenamiento de los ponderadores. Es decir, en el contexto de la expresión (5), k es igual a 10.

¹⁰Esta prueba se realiza de acuerdo a la metodología presentada en Hall y Mitchell [2007] y McDonald y Anders [2011].

CUADRO 1. Prueba Kolmogorov-Smirnov

Método de Ponderación	Horizonte de pronóstico			
	h=1	h=2	h=3	h=4
Ponderaciones logarítmicas	0.88	0.59	0.61	0.61
Ponderaciones MSE	0.99	0.65	0.58	0.40
Ponderaciones CRPS	0.99	0.65	0.61	0.41

Valores-p de la prueba de Kolmogorov-Smirnov. La hipótesis nula indica que la serie de PITs se distribuye uniforme en el intervalo [0,1].

CUADRO 2. Prueba Anderson-Darling

Método de Ponderación	Horizonte de pronóstico			
	h=1	h=2	h=3	h=4
Ponderaciones logarítmicas	0.92	0.71	0.50	0.19
Ponderaciones MSE	0.99	0.83	0.38	0.22
Ponderaciones CRPS	0.99	0.82	0.40	0.23

Valores-p de la prueba de Anderson-Darling. La hipótesis nula indica que la serie de PITs se distribuye uniforme en el intervalo [0,1].

CUADRO 3. Puntuaciones Logarítmicas

Método de Ponderación	Horizonte de pronóstico			
	h=1	h=2	h=3	h=4
Ponderaciones logarítmicas	-2.05	-2.23	-2.39	-2.63
Ponderaciones MSE	-2.12	-2.30*	-2.47*	-2.69
Ponderaciones CRPS	-2.12	-2.30*	-2.47*	-2.68

El símbolo “*” indica que existe una diferencia significativa al 5% con respecto a la ponderación logarítmica.

La Figura 2 del Apéndice A muestra la evolución de las ponderaciones basadas en el método logarítmico a lo largo del período de evaluación para los ocho métodos de estimación de la brecha

y para los cuatro horizontes de pronóstico considerados. En este gráfico se observa que las densidades asociadas al método de brecha adaptativa presentan una alta ponderación para horizontes de dos, tres y cuatro trimestres adelante; sin embargo, las ponderaciones de las distintas densidades son diferentes de acuerdo al horizonte de pronóstico considerado. Las densidades generadas por medio del promedio móvil del filtro de Hodrick-Prescott restringido y por componentes principales tienen las ponderaciones más altas para el horizonte de pronóstico de un trimestre. Por otro lado, los métodos de brecha racional y Hodrick-Prescott sin restricciones presentan ponderaciones altas en los horizontes de tres y cuatro trimestres adelante, respectivamente.

3.2.2. *Densidades combinadas de pronósticos de la brecha del producto.* La Figura 3 del Apéndice A presenta las densidades combinadas utilizando el método de ponderadores logarítmicos de la brecha para los cuatro horizontes de pronóstico. Este gráfico muestra la concentración de masa de probabilidad, la cual es mayor a medida que la región es más clara. El eje vertical mide la brecha del producto mientras que el horizontal está asociado al tiempo. Se observa que las densidades combinadas presentan algunos comportamientos multi-modales; por otro lado, como era de esperarse, la dispersión de las densidades estimadas aumenta a medida que el horizonte de pronóstico es mayor.

Puesto que las densidades combinadas pueden tener comportamientos multimodales (ver Kascha y Ravazzolo [2010]), no es completamente pertinente mostrar medidas de tendencia central. En lugar de ello, se analiza la probabilidad de un evento en particular sobre la brecha del producto.

La Figura 4 del Apéndice A muestra la probabilidad que la brecha del producto sea negativa $P(\tilde{y}_t < 0)$ a lo largo del período de evaluación para los cuatro horizontes de pronóstico. Se observa que las probabilidades de las densidades obtenidas siguen patrones de comportamiento similares para los diferentes horizontes de pronóstico. Es de resaltar que para el horizonte de pronóstico de un trimestre los valores de probabilidad tienden a ser extremos (cerca de cero o de uno) y menos volátiles. Por otro lado, todos los gráficos indican un aumento en la probabilidad de que la brecha sea negativa a partir de 2009 con un descenso al final de la muestra; sin embargo, para los horizontes de tres y cuatro trimestres se muestra un leve repunte de esta probabilidad al final del período analizado.

4. COMENTARIOS FINALES

Este documento combina estimaciones de ocho metodologías de la brecha del producto colombiano para el período comprendido entre el primer trimestre de 1994 y el tercer trimestre de 2012. Utilizando la metodología sugerida por Garratt et al. [2009] y Garratt et al. [2011] se construyen las densidades combinadas de pronósticos de la brecha mediante el uso de tres esquemas de ponderación: ponderadores logarítmicos, CRPS y MSE. Los resultados sugieren que las densidades combinadas bajo estos tres esquemas con horizontes de pronóstico de uno, dos, tres y cuatro trimestres adelante están bien especificadas. Por otro lado, las puntuaciones logarítmicas calculadas sobre estas densidades muestran que la metodología basada en ponderadores logarítmicos presenta el mejor desempeño. Adicionalmente, estas ponderaciones tienen un desempeño significativamente mejor que las calculadas por los ponderadores CRPS y MSE para horizontes de

pronóstico de dos y tres trimestres.

La densidad combinada resultante puede ser utilizada de diferentes formas. Por ejemplo, para estimar dichas densidades en periodos pasados. Esto no solamente provee indicios de la tendencia central de la brecha sino también caracteriza su incertidumbre. También se pueden estimar dichas densidades para periodos futuros, lo cual es de gran interés para las autoridades económicas. Finalmente, se puede obtener la probabilidad de que la brecha sea negativa para diferentes periodos en el tiempo y horizontes de pronóstico.

REFERENCIAS

- AMISANO, G., Y R. GIACOMINI (2007): “Comparing Density forecasts via weighted likelihood ratio tests,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 25, 177–190.
- BACHE, J., A. JORE, Y J. MITCHELL (2001): “Combining VAR and DSGE forecast densities,” *Journal of Economics dynamics and control*, 35, 1659–1670.
- BAO, Y., T. LEE, Y B. SALTOUGLU (2007): “Comparing Density forecasts Models,” *Journal of Forecasting*, 26, 203–225.
- BERKOWITZ, J. (2001): “Testing density forecasts, with applications to risk management,” *Journal of business and economic statistics*, 19, 465–474.
- BJORLAND, H., K. GERDRUP, A. JORE, Y C. SMITH (2011): “Weights and pools for a Norwegian density combination,” *North American Journal of Economics and Finance*, 22, 61–76.
- COBO, A. (2007): “Output gap in Colombia: an eclectic approach,” Borradores de economía 327, Banco de la República.
- DIEBOLD, F., T. GUNTHER, Y A. TAY (1998): “Evaluating density forecasts: with applications to financial risk management,” *International Economic Review*, 39, 863–883.
- GARRATT, A., J. MITCHELL, Y S. VAHEY (2009): “Measuring Output Gap Uncertainty,” NIESR Discussion paper 342, National Institute of Economic and Social Research.
- (2011): “Measuring output gap nowcast uncertainty,” CAMA Working paper 16, Center for Applied Macroeconomic Analysis, The Australian National University.
- GNEITING, T., Y A. RAFTERY (2007): “Strictly proper scoring rules, prediction and estimation,” *American statistical association*, 102, 359–378.
- GONZÁLEZ, A., S. OCAMPO, J. PÉREZ, Y D. RODRÍGUEZ (2012): “Output gap and neutral interest measures for Colombia,” Borradores de economía 726, Banco de la República.
- GONZÁLEZ, E., L. MELO, Y A. GRAJALES (2007): “Pronósticos directos de la inflación colombiana,” Borradores de economía 458, Banco de la República.
- HALL, G., Y J. MITCHELL (2004): “Density Forecast combination,” Discussion paper 249, National Institute of Economic and Social Research.
- HALL, S., Y J. MITCHELL (2007): “Combining Density Forecasts,” *Journal of forecasting*, 22, 1–13.
- HARVEY, A., Y T. PROIETTI (2005): *Readings in unobserved components models*. Oxford University Press.
- HODRICK, R., Y E. PRESCOTT (1997): “Post war business cycles: An empirical investigation,” *Journal of money, credit and banking*, 29, 1–16.

- JORE, A., J. MITCHELL, Y S. VAHEY (2010): “Combining forecast densities from VARs with uncertain instabilities,” *Journal of Applied Econometrics*, 25, 621–634.
- KASCHA, C., Y F. RAVAZZOLO (2010): “Combining inflation density forecasts,” *Journal of forecasting*, 29, 231–250.
- KOOP, G. (2003): *Bayesian Econometrics*. Wiley: Chichester.
- MARCELLINO, M., J. STOCK, Y M. WATSON (2006): “A comparison of direct and iterated multistep AR methods for forecasting macroeconomic time series,” *Journal of Econometrics*, 135, 499–526.
- MCDONALD, C., Y L. ANDERS (2011): “Evaluating density forecasts: model combination strategies vs the RBNZ,” Discussion paper 3, National Institute of Economic and Social Research.
- MITCHELL, J., Y S. HALL (2005): “Evaluating, comparing and combining density forecasts using the KLIC with an application to the bank of England and NIESR fan charts of inflation,” *Oxford bulletin of economics and statistics*, 67, 995–1033.
- ORPHANIDES, A., Y S. VAN NORDEN (2002): “The reliability of inflation forecasts based on output-gap estimates in real time,” *Journal of Money Credit and Banking*, 37-3, 583–601.
- RODRIGUEZ, N., J. TORRES, Y A. VELASCO (2006): “La estimación de una brecha del producto a partir de encuestas y datos reales,” Borradores de economía 392, Banco de la República.
- STONE, M. (1961): “The opinion pool,” *Annals of mathematical statistics*, 32, 1339–1342.
- TAY, A., Y K. WALLIS (2000): “Density forecasting: a survey,” *Journal of Forecasting*, 19, 235–254.
- TIMMERMANN, A. (2006): “Forecast combination,” en *Handbook of economic forecasting*, ed. por G. Elliott, C. Granger, y A. Timmermann, pp. 135–196. Elsevier.
- ULLAH, A. (1996): “Entropy, divergence, and distance measures with econometric applications,” *Journal of Statistical Planning and Inference*, 49, 137–162.

APÉNDICE A. GRÁFICOS

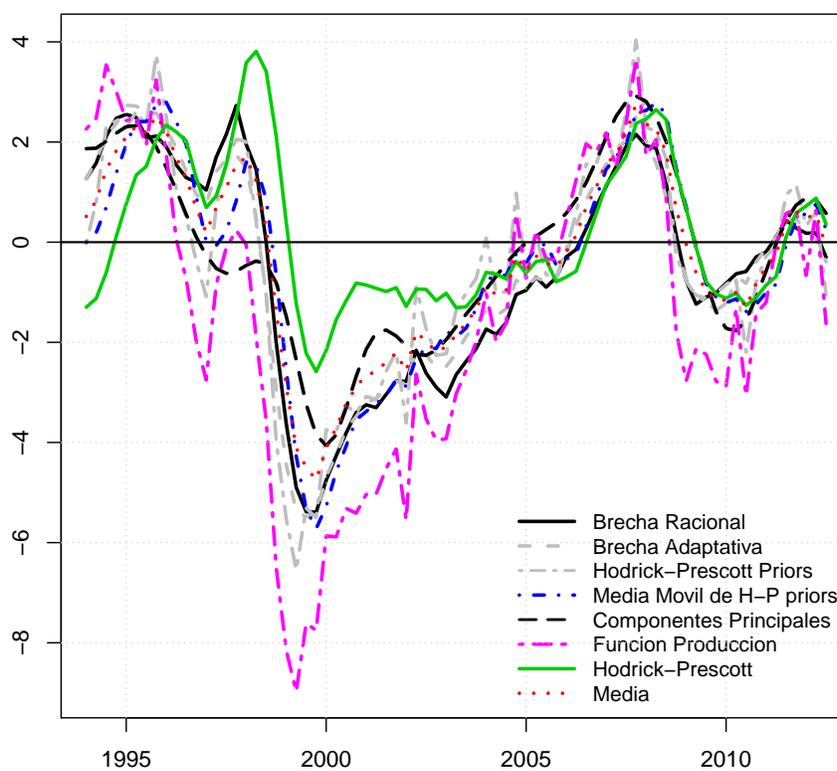


FIGURA 1. Brechas del producto colombiano estimadas por diferentes metodologías.

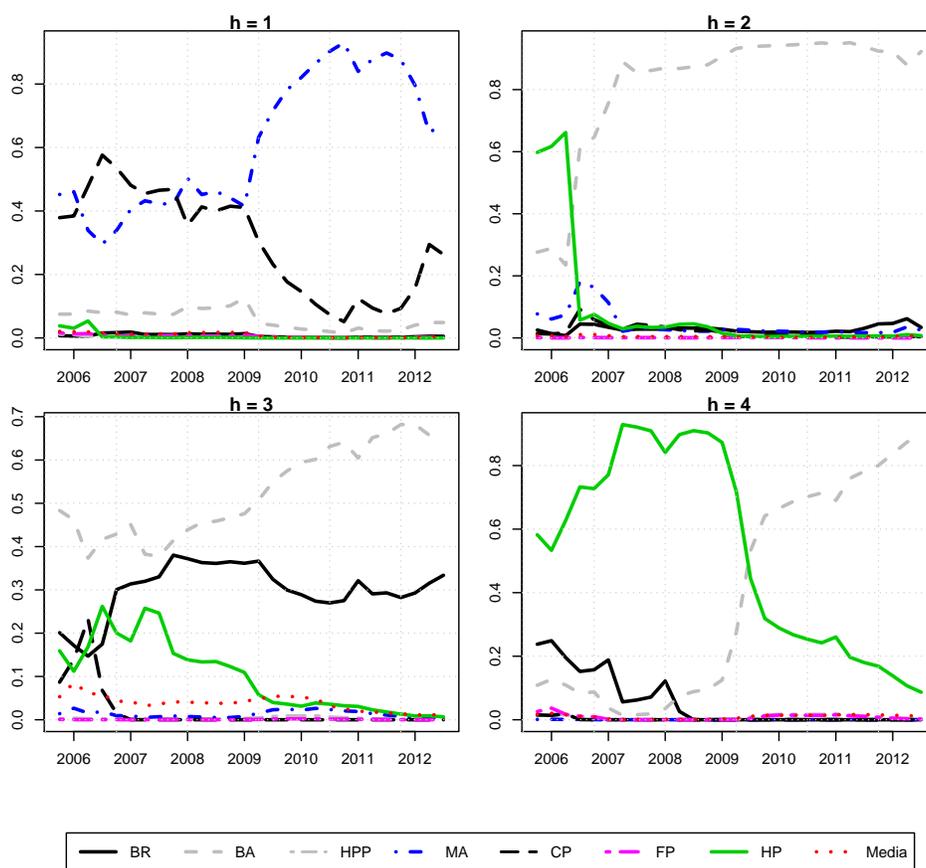


FIGURA 2. Ponderadores logarítmicos para el periodo 2005:4 - 2012:3. BR: indica brecha racional, BA: brecha adaptativa, HPP: Metodología de Hodrick-Prescott con restricciones, MA: Media móvil de HPP, CP: Metodología de componentes principales, FP: Función de producción, HP: Metodología de Hodrick-Prescott, Media: Media aritmética de las brechas.

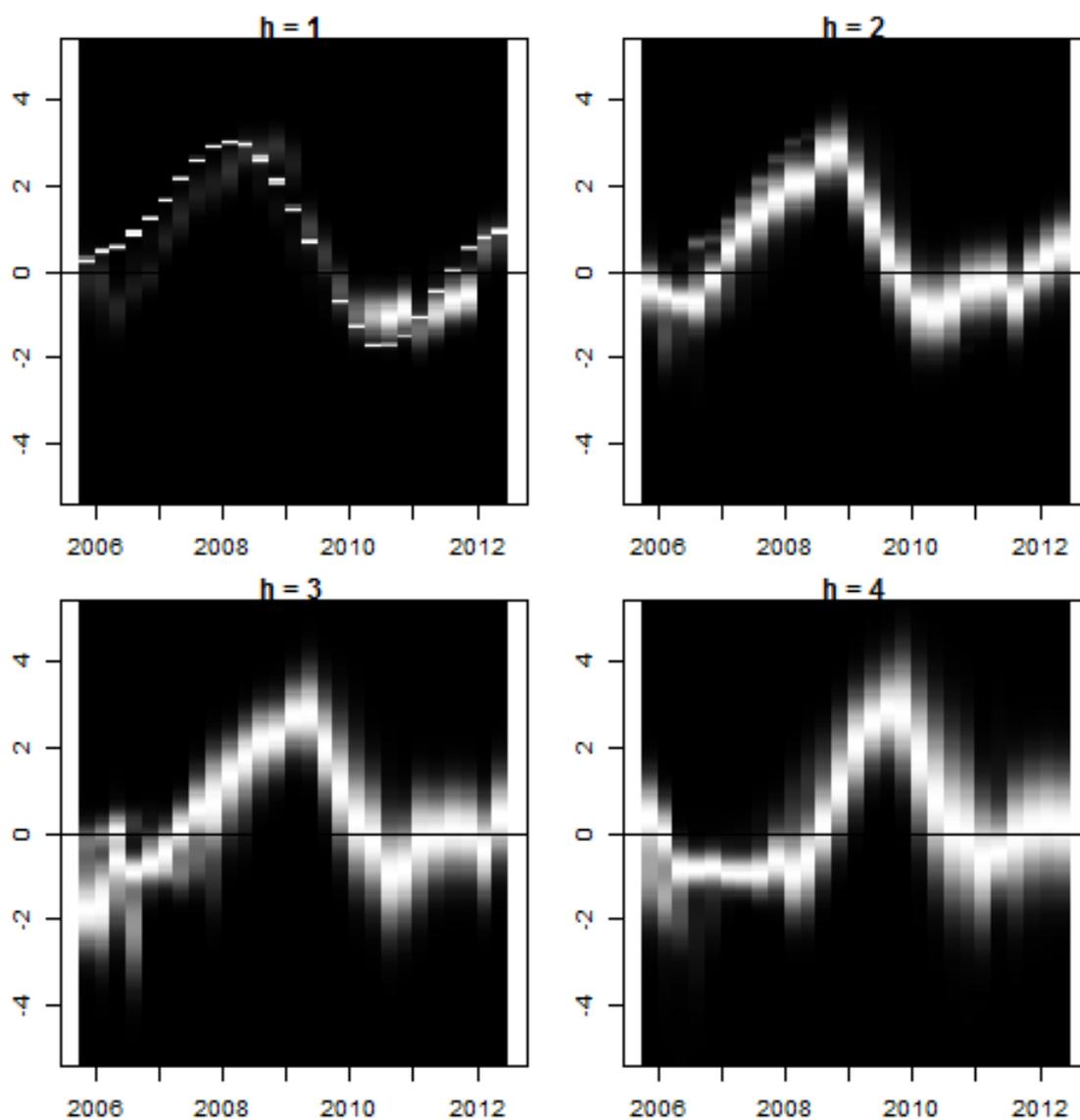


FIGURA 3. Densidades combinadas de la brecha bajo el esquema de ponderación logarítmico para horizontes de pronósticos de uno, dos, tres y cuatro trimestres adelante.

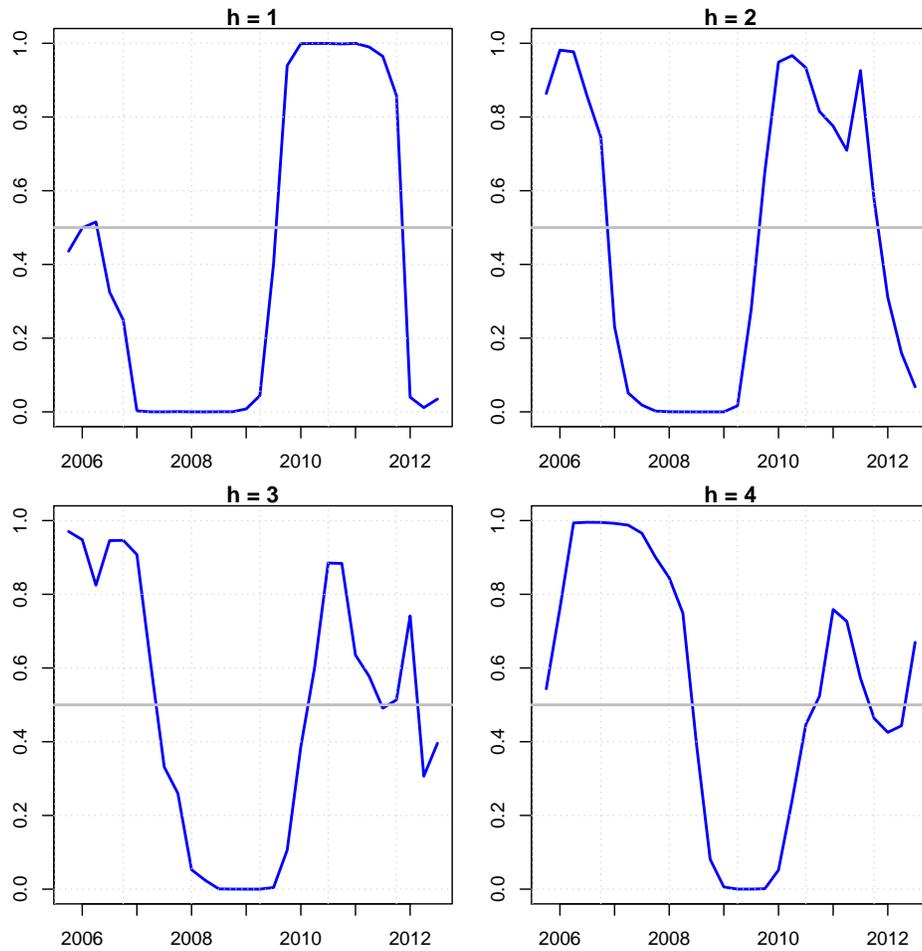


FIGURA 4. Probabilidad de que la brecha del producto sea negativa para horizontes de pronósticos de uno, dos, tres y cuatro trimestres adelante. Estas estimaciones son calculadas a partir de la densidad combinada de la brecha bajo el esquema de ponderación logarítmico

APÉNDICE B. PUNTUACIONES DE RANGO DE PROBABILIDAD CONTINUO

Sea P un conjunto de medidas de probabilidad de Borel sobre la línea real \mathfrak{R} . Todo miembro de P se identifica como un pronóstico de probabilidad y se caracteriza por medio de su función de distribución acumulada, denominada por F .

La puntuación de rango de probabilidad continua (CRPS) se define como:

$$CRPS(F, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} (F(y) - \Lambda\{y \geq x\})^2 dy$$

Siendo $\Lambda\{\cdot\}$ una función indicadora. Gneiting y Raftery [2007] argumentan que la aplicación de las puntuaciones CRPS está limitada por dificultades analíticas en el cálculo de la integral. Alternativamente, las puntuaciones se pueden calcular por medio de la siguiente expresión:

$$CRPS(F, x) = \frac{1}{2} E_F |X - X'| - E_F |X - x|$$

Donde X y X' son copias independientes de una variable aleatoria con distribución F y momento de primer orden finito. Si en particular la densidad de pronóstico es normal con media μ y varianza σ^2 , las puntuaciones se pueden calcular como:

$$CRPS(N(\mu, \sigma^2), x) = \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} - 2\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{x-\mu}{\sigma} \left(2\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - 1 \right) \right]$$

Siendo $\varphi\{\cdot\}$ y $\Phi\{\cdot\}$ la función de densidad y la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, respectivamente.

APÉNDICE C. PRUEBAS DE NORMALIDAD SOBRE LOS ERRORES DE PRONÓSTICO DE LOS
MODELOS VAR

CUADRO 4. Pruebas de normalidad sobre los errores para un horizonte de un trimestre

Prueba	Metodologías de cálculo de la Brecha							
	BR	BA	HPP	MA	CP	FP	HP	MEDIA
Anderson-Darling	0.15	0.30	0.97	0.48	0.72	0.57	0.26	0.62
Cramer Von-Mises	0.11	0.28	0.94	0.47	0.73	0.59	0.21	0.61
Kolmogorov-Smirnov	0.11	0.52	0.99	0.37	0.79	0.61	0.33	0.62
Pearson	0.21	0.59	0.59	0.05	0.53	0.10	0.13	0.59
Shapiro-Francia	0.18	0.37	0.98	0.59	0.84	0.68	0.37	0.67
Shapiro-Wilk	0.21	0.41	0.96	0.56	0.74	0.57	0.40	0.72

Notas: Valores-p para diferentes pruebas de normalidad sobre los errores de pronóstico de la brecha de inflación del modelo VAR especificado en (1) y (2). La hipótesis nula indica que la serie se distribuye normal. BR: indica brecha racional, BA: brecha adaptativa, HPP: Hodrick-Prescott con restricciones, MA: Media móvil de HPP, CP: Componentes principales, FP: Función de producción, HP: Hodrick-Prescott, Media: Media aritmética

CUADRO 5. Pruebas de normalidad sobre los errores para horizontes de dos trimestres

Prueba	Metodologías de cálculo de la Brecha							
	BR	BA	HPP	PM	CP	FP	HP	MEDIA
Anderson-Darling	0.33	0.26	0.49	0.13	0.05	0.51	0.46	0.14
Cramer Von-Mises	0.47	0.38	0.52	0.22	0.05	0.59	0.61	0.22
Kolmogorov-Smirnov	0.51	0.31	0.33	0.52	0.05	0.57	0.43	0.39
Pearson	0.37	0.18	0.37	0.32	0.08	0.53	0.42	0.32
Shapiro-Francia	0.32	0.27	0.58	0.13	0.05	0.60	0.39	0.17
Shapiro-Wilk	0.33	0.26	0.58	0.12	0.04	0.48	0.43	0.16

Notas: Valores-p para diferentes pruebas de normalidad sobre los errores de pronóstico de la brecha de inflación del modelo VAR especificado en (1) y (2). La hipótesis nula indica que la serie se distribuye normal. BR: indica brecha racional, BA: brecha adaptativa, HPP: Hodrick-Prescott con restricciones, MA: Media móvil de HPP, CP: Componentes principales, FP: Función de producción, HP: Hodrick-Prescott, Media: Media aritmética

CUADRO 6. Pruebas de normalidad sobre los errores para horizontes de tres trimestres

Prueba	Metodologías de cálculo de la Brecha							
	BR	BA	HPP	MA	CP	FP	HP	MEDIA
Anderson-Darling	0.21	0.14	0.02	0.01	0.48	0.04	0.11	0.28
Cramer Von-Mises	0.27	0.17	0.03	0.02	0.62	0.08	0.11	0.34
Kolmogorov-Smirnov	0.38	0.16	0.08	0.00	0.74	0.48	0.12	0.80
Pearson	0.47	0.32	0.10	0.07	0.66	0.42	0.47	0.37
Shapiro-Francia	0.22	0.22	0.07	0.03	0.32	0.05	0.18	0.36
Shapiro-Wilk	0.13	0.13	0.05	0.02	0.32	0.02	0.11	0.25

Notas: Valores-p para diferentes pruebas de normalidad sobre los errores de pronóstico de la brecha de inflación del modelo VAR especificado en (1) y (2). La hipótesis nula indica que la serie se distribuye normal. BR: indica brecha racional, BA: brecha adaptativa, HPP: Hodrick-Prescott con restricciones, MA: Media móvil de HPP, CP: Componentes principales, FP: Función de producción, HP: Hodrick-Prescott, Media: Media aritmética

CUADRO 7. Pruebas de normalidad sobre los errores para horizontes de cuatro trimestres

Prueba	Metodologías de cálculo de la Brecha							
	BR	BA	HPP	MA	CP	FP	HP	MEDIA
Anderson-Darling	0.43	0.04	0.20	0.19	0.51	0.19	0.94	0.19
Cramer Von-Mises	0.38	0.05	0.25	0.22	0.63	0.29	0.94	0.27
Kolmogorov-Smirnov	0.37	0.15	0.19	0.20	0.35	0.39	0.69	0.37
Pearson	0.66	0.11	0.21	0.42	0.59	0.06	0.97	0.72
Shapiro-Francia	0.52	0.04	0.21	0.21	0.41	0.20	0.93	0.14
Shapiro-Wilk	0.44	0.02	0.14	0.13	0.25	0.11	0.87	0.09

Notas: Valores-p para diferentes pruebas de normalidad sobre los errores de pronóstico de la brecha de inflación del modelo VAR especificado en (1) y (2). La hipótesis nula indica que la serie se distribuye normal. BR: indica brecha racional, BA: brecha adaptativa, HPP: Hodrick-Prescott con restricciones, MA: Media móvil de HPP, CP: Componentes principales, FP: Función de producción, HP: Hodrick-Prescott, Media: Media aritmética