

Tasa de interés de largo plazo, interés técnico y pasivo pensional

Por

Luis Eduardo Arango^{*♥}, Wilmar Cabrera^{*}, Esteban Gómez[♦] y
Juan Carlos Mendoza[†]

Banco de la República

Resumen

Este artículo se pregunta si es oportuno modificar la tasa de interés técnica utilizada para descontar el pasivo pensional del nivel actual de 4% anual, dada, por un lado, la trayectoria reciente que ha tenido la tasa de interés real y, por otro, las circunstancias diferentes que vive la economía en relación con 1994 cuando fue fijada en dicho nivel. Se hacen diferentes pronósticos y simulaciones utilizando distintos enfoques estadísticos y financieros. Así mismo, se toma en cuenta la restricción macroeconómica que impone el crecimiento de muy largo plazo de la economía. Los resultados sugieren que no se debería mover la tasa de descuento del pasivo pensional y que ésta debería continuar en el 4% anual.

Clasificación JEL: E44, H55.

Palabras clave: tasa de interés real, tasa de interés técnica, pasivo pensional, regla de oro.

* Las opiniones expresadas en este documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen ni al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Los errores son también su responsabilidad exclusiva. Se agradecen los comentarios, sugerencias y correcciones de Pamela Cardozo, Dairo Estrada, Luis Ignacio Lozano, Gabriel Piraquive, Carlos Esteban Posada y Hernando Vargas y la asistencia de investigación de Gabriela Bonilla y Laura Fuerte de la Unidad de Investigaciones y la Dirección de Programación e Inflación, respectivamente.

♥ Investigador principal de la Unidad de Investigaciones Económicas.

* Profesional especializado del Departamento de Estabilidad Financiera.

♦ Director del Departamento de Estabilidad Financiera.

† Profesional experto del Departamento de Estabilidad Financiera.

1. Introducción

La tasa de interés técnica es un elemento básico de cálculo de la reserva matemática; esto es, del monto que deben mantener los aseguradores para cumplir con sus obligaciones frente a los asegurados (Cuevas, 2011). Por lo anterior, el comportamiento reciente de las tasas de interés en Colombia y en el mundo ha puesto en boga la pregunta sobre cuál debe ser la tasa de descuento adecuada para calcular el valor presente del pasivo pensional público, asociado con el régimen de prima media¹.

La tasa de interés real de largo plazo en Colombia, medida como la tasa real *ex post* de los títulos de deuda del gobierno a 10 años, ha tenido tendencia a la baja durante los últimos quince o veinte años, lo que la ha llevado a situarse de manera persistente en niveles que oscilan entre 3% y 3,5% anual. Este y algunos otros resultados que se han presentado durante este período en Colombia, han sido el reflejo de cambios importantes en las dimensiones micro y macroeconómica. Entre ellos se encuentran la manera de ejecutar la política monetaria, incluyendo el mayor flujo de información y transparencia, el mejor desempeño fiscal, las mejoras en seguridad, la profundización financiera en muchos aspectos y la mayor apertura de la economía.

En el concierto internacional, los cambios compatibles con la caída en la tasa de interés real mundial no han sido pocos: la irrupción en la escena mundial de países como Brasil, Rusia, China y otras economías asiáticas como Indonesia, Malasia, Filipinas, Singapur y Tailandia que han afectado los mercados de ahorro e inversión; las crisis financieras de Estados Unidos (2008), Grecia, Irlanda, Italia, Portugal y España (2010 y posteriores) que han justificado una mayor liquidez; la mayor movilidad de capitales en conjunto con el incremento en las innovaciones financieras y los altos volúmenes de ahorro; y la tendencia al alza y la mayor volatilidad de los precios de los *commodities*, entre otros.

La relevancia de los cambios mencionados en el entorno nacional e internacional para el tema pensional, radica en el hecho de que cuanto menor es la tasa de interés, mayor es la reserva matemática, ya que el valor presente descontado de las obligaciones futuras se incrementa. En tal sentido, se argumenta que la tasa de interés real de 4%, que viene siendo utilizada en Colombia para establecer dicha reserva², puede ser muy baja, elevando demasiado dicha reserva (García, 2013). En contraste con lo anterior, Salazar y Arbeláez (2007) han sugerido adoptar un nivel de tasa de interés técnica más bajo, en concordancia con la evolución futura de las tasas de interés reales de largo plazo y con el propósito de reducir los riesgos de tasa de interés y de reinversión³.

Para dar cuenta de la importancia del tema, algunas simulaciones del Departamento Nacional de Planeación, amablemente suministradas a este grupo de investigadores,⁴ muestran que pasar de una tasa de descuento de 4% a 6%, reduciría el valor presente del pasivo pensional, como proporción del PIB, en cerca de 40 puntos porcentuales, al pasar de 113,6% a 74,0%.

En tal sentido, este documento se pregunta si, dados los cambios estructurales que ha experimentado la economía colombiana fundamentalmente en cuanto se refiere al crecimiento poblacional, es oportuno contemplar cambios a la tasa de interés técnica.

¹ En Colombia véase Arbeláez, Botero, González, Salamanca, y Suarez (2011); véanse también *The Economist* (2013) y Novy-Marx (2012), entre otros.

² Tasa vigente según resolución 610 del 14 de abril de 1994 expedida por la Superintendencia Bancaria.

³ Citadas por Arbeláez *et al.* (2011, pág. 299).

⁴ Pasivo Pensional a Cargo de la Nación. DNP-DEE. Mayo 26 de 2012.

Sin embargo, analizar las tasas de interés es importante no sólo por su relación con el valor presente de las pensiones, sino también porque su comportamiento afecta las decisiones intertemporales de consumo e inversión de los agentes, el nivel de endeudamiento doméstico y la posición neta frente al resto del mundo y la riqueza de los individuos.

El propósito de este documento es mostrar el comportamiento reciente de la tasa de interés en Colombia y en el exterior, plantear posibles escenarios sobre su trayectoria futura y, con base en lo anterior, sugerir algunos criterios que se deben tener en cuenta al momento de establecer la nueva tasa de descuento del pasivo pensional.

Además de esta primera sección, el artículo consta de cuatro secciones más. La segunda analiza las tasas de interés de largo plazo local y externa, y provee argumentos que explican sus trayectorias. La tercera sección desarrolla el análisis de la tasa de interés técnica y realiza distintos ejercicios que nos permiten hacer algunas conjeturas sobre la trayectoria de la tasa de interés en los próximos años. Los enfoques incluyen modelos univariados, estadísticos, financieros y un modelo de cointegración entre las tasas de interés interna y externa, que se apoya en el concepto de diferencial de tasas. La cuarta sección incorpora la restricción macroeconómica al análisis y la última presenta nuestra conjetura sobre la tasa de interés técnico en Colombia.

2. Tasa de interés de largo plazo

2.1. Tasa doméstica

Las tasas de interés nominales en el mercado interno han tenido, en los últimos años, una tendencia a la baja que las ubica, hoy en día, cerca de 5%. En efecto, según se observa en el Gráfico 1, hace 25 años la DTF⁵ estaba alrededor de 30%, mientras que en 1999 la tasa cero cupón de los TES a 10 años era cercana a 22%.

Gráfico 1. Tasas de interés de bonos del gobierno con vencimiento a 10 años y DTF



Fuente: BVC y Banco de la República; cálculos de los autores.

El comportamiento de las tasas se explica por factores tanto externos como internos. En lo que respecta a los primeros, aunque en la sub-sección 2.2 se analiza el comportamiento de las

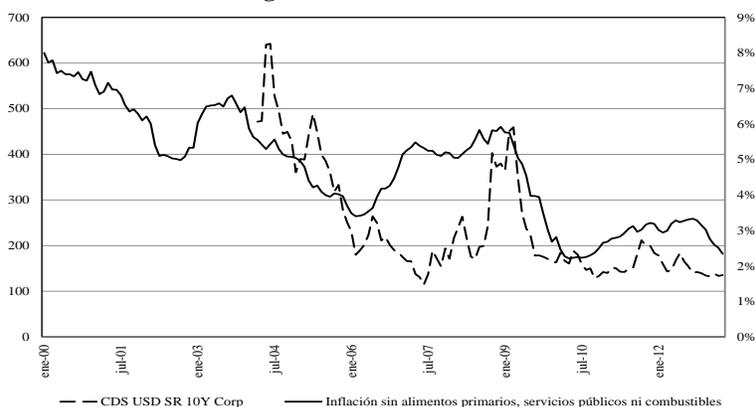
⁵ Si bien la DTF no es una tasa de largo plazo, ha sido un referente usual de las tasas de interés en Colombia. Adicionalmente, se dispone de ella desde hace más tiempo, lo cual ofrece un panorama más amplio.

tasas de Estados Unidos y el Reino Unido, se puede adelantar que éstas también han registrado caídas persistentes, para lo cual existen diferentes argumentos, no necesariamente excluyentes. En cuanto al mercado interno, si se invoca la teoría de expectativas y la ecuación de Fisher, el comportamiento de las tasas de interés de largo plazo se explica por el movimiento de las expectativas de inflación y las tasas de interés reales, las cuales responden tanto a cambios en factores macroeconómicos como en la percepción de riesgo⁶.

En efecto, las expectativas de inflación, aproximadas por la inflación básica⁷, pasaron de niveles cercanos a 8% en el año 2000 a 2,5% en el período más reciente. La prima de riesgo también ha caído (ver Gráfico 2), en coincidencia con un mejor desempeño de indicadores como la deuda neta del SPNF, que pasó de niveles cercanos a 45% del PIB en el año 2002 a 32% al cierre del año 2012⁸, la recuperación del grado de inversión, las ganancias en credibilidad de la política monetaria, la mayor apertura de la cuenta financiera, las mejoras en seguridad y la menor volatilidad relativa de la economía en los últimos años⁹. La menor percepción de riesgo también ha contribuido a explicar, al menos parcialmente, la caída en la tasa de interés real *ex post* (ver Gráfico 3).

Sin embargo, como se explica más adelante, una tasa de interés real¹⁰ muy baja en relación con el crecimiento de largo plazo del consumo o del producto agregados, puede estar reflejando excesos de inversión que no necesariamente corresponden a situaciones de equilibrio ni de cumplimiento de condiciones terminales o restricciones intertemporales que, se entiende, debe cumplir una economía.

Gráfico 2. Inflación básica y CDS de títulos de endeudamiento del gobierno colombiano



Fuente: DANE, Banco de la República, cálculos de los autores.

⁶ Kienzler (2012) y Bernanke (2013), entre otros, utilizan estos mismos determinantes para explicar el comportamiento de las tasas de interés en Estados Unidos.

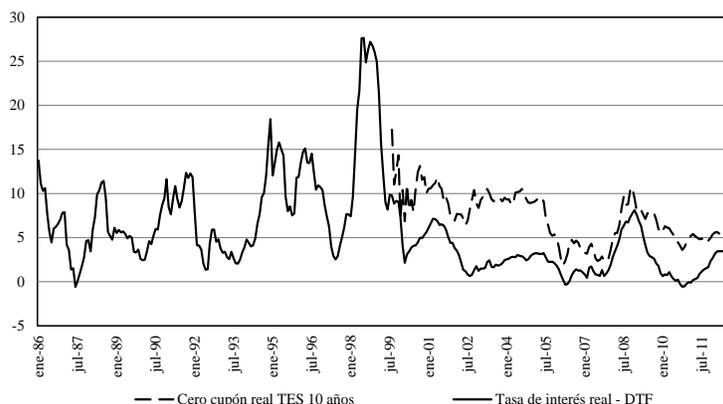
⁷ Véase Bandholz *et al.* (2009) quien hace esa aproximación para el caso de Estados Unidos.

⁸ Según la Dirección General de Política Macroeconómica- Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

⁹ Como evidencia de ello, puede señalarse, por ejemplo, que el coeficiente de variación del crecimiento anual del *PIB* en frecuencia trimestral entre 1991 y 2000 (1,27) fue superior al del período 2001- 2011, el cual se situó en 0,49.

¹⁰ Correspondiente al referente teórico de la productividad marginal del capital neta de depreciación.

Gráfico 3. Tasas de interés *spot* reales de bonos del gobierno con vencimiento a 10 años y DTF¹¹



Fuente: BVC, Banco de la República, DANE; cálculos de los autores.

2.2. Tasas externas

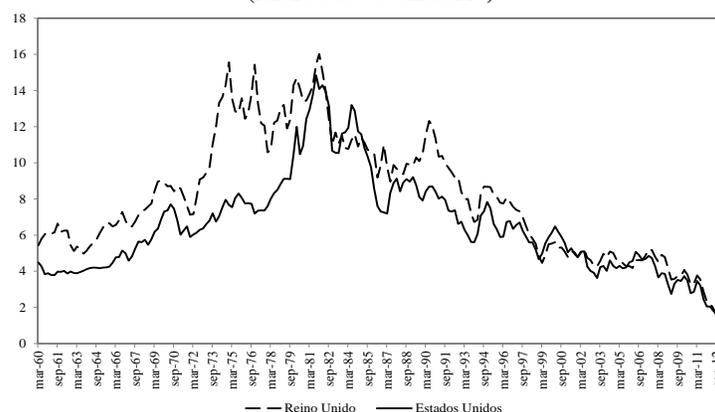
Desde comienzos de la década de los ochenta, las tasas de interés de los títulos a 10 años de Estados Unidos e Inglaterra han tenido una tendencia a la baja, después de haber subido por muchos años (ver Gráfico 4). Pese a que las tasas han venido cayendo desde hace tanto tiempo, los análisis se han concentrado en el período posterior a 1995. Los más recientes se han dado en el marco de lo que se conoce como desequilibrios globales (*global imbalances*), una de cuyas principales características han sido los excesos de ahorro (*savings glut*) (Bernanke, 2005).

En principio, la caída en las tasas de interés puede entenderse mejor si se recurre a su descomposición entre las expectativas de inflación, las tasas de interés reales (*ex post*) y las primas de riesgo. Bandholz *et al.* (2009, Tabla 2) muestran una caída tendencial de las expectativas de inflación en Estados Unidos, medidas mediante la inflación básica, de 5,5% a 2,5% desde 1990. De igual forma, Kienzler (2012) reporta caídas de la prima de riesgo, ésta última gracias a una menor variabilidad macroeconómica¹² y de la tasa de interés real (Gráfico 5).

¹¹ En el Gráfico 3 se presenta la tasa cero cupón real de TES pesos calculada como la diferencia entre la tasa nominal y la inflación esperada, donde ésta última se aproxima con la inflación observada un año adelante (i.e. supuesto de previsión perfecta de los agentes). Para verificar la idoneidad de esta serie, se calculó su correlación con la serie de la tasa cero cupón de TES UVR a 10 años. Específicamente, se encontraron dos coeficientes de correlación, el primero para las series en niveles y el segundo para las series purgadas de autocorrelación. Los resultados de los coeficientes son del orden de 0,75 y 0,62, respectivamente. En este trabajo utilizamos la serie de tasas nominales de los TES pesos en vez de usar la serie de tasas reales de la curva de TES UVR pues éste último mercado es menos líquido que el primero, por lo que varios puntos de la curva deben ser extrapolados y no necesariamente reflejan cambios en el mercado con la misma velocidad que la curva de TES pesos.

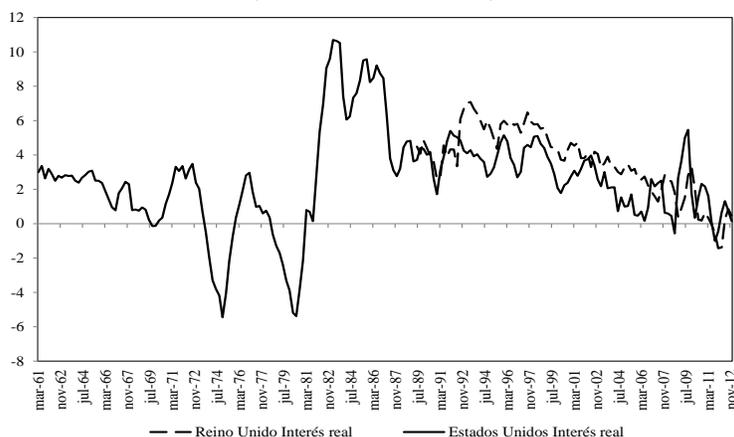
¹² Rudebusch *et al.* (2006) estiman que la volatilidad de la tasa de crecimiento del PIB de Estados Unidos pasó de 5% en 1980 a 1% en 2006 (citado por Kienzler, 2012). Bernanke (2013) también descompone el *yield* de largo plazo entre: *i*) la inflación esperada sobre el período del bono; *ii*) la trayectoria esperada de la tasa de interés real de corto plazo; y, *iii*) el componente residual asociado a la prima y muestra que los tres componentes han caído desde 2007.

**Gráfico 4. Tasas de interés de bonos de gobierno con vencimiento a 10 años
(Mercado secundario)**



Fuente: OECD United Kingdom (EOUKR001 Index) and United States (EOUSR001 Index) long-term interest rate on government bonds.

**Gráfico 5. Tasas de interés reales de bonos de gobierno con vencimiento a 10 años
(Mercado secundario)**



Fuente: OECD United Kingdom (EOUKR001 Index) and United States (EOUSR001 Index) long-term interest rate on government bonds.

Entre las razones para la caída en las tasas de interés reales se han identificado básicamente tres: *i)* la caída en la volatilidad de la inflación y un menor riesgo inflacionario¹³; *ii)* las innovaciones financieras y la mayor capacidad del mercado para administrar riesgos¹⁴; y, *iii)* el mayor deseo de ahorrar de las personas con un crecimiento consecuente de la relación crédito a *PIB*¹⁵ (Knight, 2006).

¹³ La tasa de interés real es menor con una inflación más baja y menos volátil que con una tasa de inflación alta y con mayor volatilidad. Así, un riesgo importante de tener activos de renta (nominal) fija es que si la inflación se incrementa, tendrán un menor retorno que el esperado en la medida en que los bancos centrales aumenten sus tasas de política. Menores tasas de inflación han reducido dicho riesgo.

¹⁴ Por ejemplo, el surgimiento de los *CDS*.

¹⁵ Lo cual no ha tenido consecuencias inflacionarias debido a la contención de salarios y la presión a la baja de los costos laborales unitarios y los precios debido a la penetración de países como China, India, Brasil y Rusia.

El aumento en la oferta de ahorros¹⁶ tiene varias explicaciones. En primer lugar, los esfuerzos adicionales de algunos países para apoyar a los futuros pensionados, dada la expectativa de envejecimiento de la población que se refleja en un crecimiento de la relación entre la población retirada y la población trabajadora (Bernanke, 2005). En segundo término, la presión a la baja de las tasas de rendimiento de largo plazo¹⁷ que ha ejercido la intención de los fondos de pensiones y compañías de seguros de extender el plazo de los activos para mejorar el emparejamiento con el de sus pasivos actuariales, (Knight, 2006). En tercer lugar, los desequilibrios globales (*global imbalances*), que han llevado el ahorro de las economías emergentes a países desarrollados (Estados Unidos), debido a la mayor probabilidad de *default* en las primeras (Andolfatto, 2012). A lo anterior se suma el comportamiento del precio de los *commodities*, en especial del petróleo¹⁸, que ha mejorado la posición acreedora de los países ricos en materias primas y bienes básicos.

Pese a que la tasa de interés real ha estado en niveles bajos en los últimos años, es improbable que continúe allí. Entre las razones para ello, están: *i*) la posible disminución del ahorro de los países exportadores de *commodities* del sector energético, ya que es previsible que sus precios detengan su ascenso; *ii*) la posibilidad de un cambio en la posición neta ahorradora entre países como consecuencia de un mayor ahorro por parte de países de Europa Occidental y Japón. Lo anterior dadas las escasas oportunidades de inversión internas de dichos países (la mano de obra es limitada y la relación capital trabajo es alta¹⁹), así como por un mayor esfuerzo para contribuir con las pensiones de quienes en poco tiempo pasarán al retiro. Por lo tanto, se prevé que en el largo plazo los países desarrollados generarán superávit de cuenta corriente y se constituirán en prestamistas, mientras que los países emergentes serán prestatarios. Así las cosas, se esperaría un mayor retorno a las inversiones de los ahorradores de los países avanzados (Bernanke, 2005).

En el mismo sentido, desde el punto de vista monetario, y a un plazo inferior, Bernanke (2013) anotaba:

“Many commentators have noted, however, that both an extended period of low rates and the transition back toward normal levels may pose some risks to financial stability. If, as the FOMC anticipates, the economic recovery continues at a moderate pace, with unemployment slowly declining and inflation expectations remaining near 2 percent, then long-term interest rates would be expected to rise gradually toward more normal levels over the next several years. This rise would occur as the market’s view of the expected date at which the Federal Reserve will begin the removal of policy accommodation draws nearer and then as accommodation is removed. Some normalization of the term premium might also contribute to a rise in long-term rates”.

En síntesis, el análisis previo sobre las tasas de interés sugiere un comportamiento persistente a la baja durante largo tiempo y la previsión de que posiblemente suban en el mediano plazo.

¹⁶ Los ahorros crecieron gradualmente desde 1993 y mucho más rápido desde 2002.

¹⁷ Aunque para Knight (2012) este hecho no ha sido un detonante de la caída en las tasas de interés, sí le imprimió una mayor velocidad.

¹⁸ Esto ha hecho que los flujos de crédito cambien de sentido y las economías emergentes pasen de tener posiciones deudoras a acreedoras.

¹⁹ A diferencia de lo que ocurre en los países en desarrollo donde las tasas de retorno al capital pueden ser más altas.

3. Aplicación: tasa de interés y pasivo pensional en Colombia

En esta sección se revisan algunas prácticas utilizadas para descontar el pasivo pensional en otros países y se hacen algunas predicciones sobre el nivel o la trayectoria de la tasa de interés real en Colombia que luego se utilizarán como referencia para sugerir el valor en que debería situarse la tasa de interés técnica.

3.1 La práctica de Towers-Watson

En el ámbito internacional se emplean diferentes metodologías para calcular la tasa de descuento. Por ejemplo, en Estados Unidos los fondos de pensiones públicos calculan esta variable con base en el retorno esperado de largo plazo que tenga el portafolio administrado. No obstante, dada la relación inversa que existe entre la tasa y el valor de las obligaciones pensionales, esta aproximación podría llevar a los administradores de los recursos a tomar un exceso de riesgo con el fin de tener mayor rentabilidad y a la vez disminuir sus pasivos pensionales (Merton, 2012)²⁰.

Alternativamente, la tasa de descuento podría recoger el bajo riesgo que tienen los pagos de las pensiones en estos esquemas, que están garantizados por ley. Esta metodología propone la utilización de tasas libres de riesgo o de riesgo mínimo, como podrían ser las tasas de los bonos de los gobiernos o bonos corporativos de alta calidad. De esta forma, en Estados Unidos y en Europa, los fondos de pensiones privados emplean las tasas de los bonos corporativos de largo plazo con calificación AA para estimar su pasivo pensional. En Canadá, tanto los fondos privados como los públicos realizan el cálculo de las obligaciones pensionales basados en los bonos corporativos de alta calidad.

La firma consultora Towers-Watson, calcula la tasa de descuento promedio utilizada por las compañías en la valoración de dicho pasivo, la cual toma como referencia las tasas de los bonos corporativos de alta calidad en los distintos países. Con ello, realiza una publicación trimestral sobre el estado de los pasivos pensionales de empresas privadas en diferentes mercados²¹. Según el Gráfico 6, entre 2008 y 2012 las tasas de descuento registraron poca volatilidad y, con excepción de Japón, una tendencia a la baja.

Dicha firma consultora, en otro informe, calcula también la tasa de descuento promedio empleada para el cálculo del pasivo pensional de un grupo de 606 empresas en Estados Unidos²². En general, todas las compañías basan su cálculo en las tasas de los bonos corporativos con calificación AA, la cual se ubica siempre por encima de la tasa de los títulos del Tesoro (Gráfico 7). Al igual que en el análisis realizado para distintos países, la tasa de descuento empleada por las empresas norteamericanas ha disminuido en los años recientes, lo que ha llevado a una reducción en la cobertura de las obligaciones pensionales.

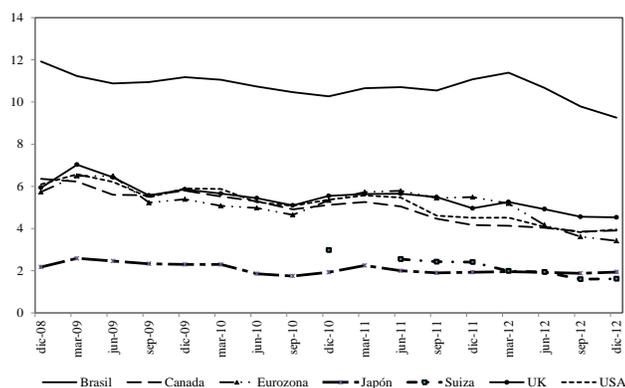
En resumen, para la valoración de los pasivos pensionales, la mayoría de países utilizan tasas de mercado de largo plazo (20 años en adelante), privilegiando la información de los bonos corporativos de alta calidad, en lugar de tasas de descuento calculadas con base en modelos estadísticos. No obstante, para fondos de carácter público se recomienda también el uso de las tasas de los bonos de los gobiernos (Biggs, 2012).

²⁰ Para Andonov *et al.* (2012) este comportamiento se ha evidenciado en los años más recientes, a pesar de que la edad promedio de los afiliados se ha incrementado.

²¹ Se emplean los datos presentados en el informe trimestral *Global Pension Finance Watch* elaborado por Towers-Watson.

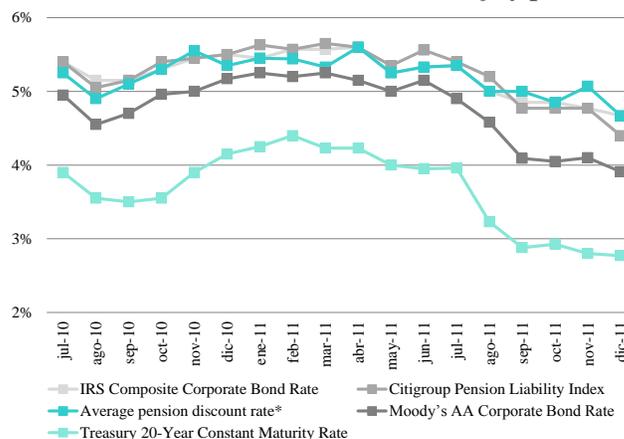
²² Se emplean los datos presentados en el informe trimestral *Accounting for Defined Benefit Pensions and Other Postretirement Benefits* (2012) elaborado por Towers-Watson.

Gráfico 6. Tasa de descuento utilizada para el cálculo del pasivo pensional



Fuente: Towers-Watson, Global Pension Finance Watch. Distintas ediciones.

Gráfico 7. Tasas de descuento de títulos de renta fija y pensiones, 2010 – 2011

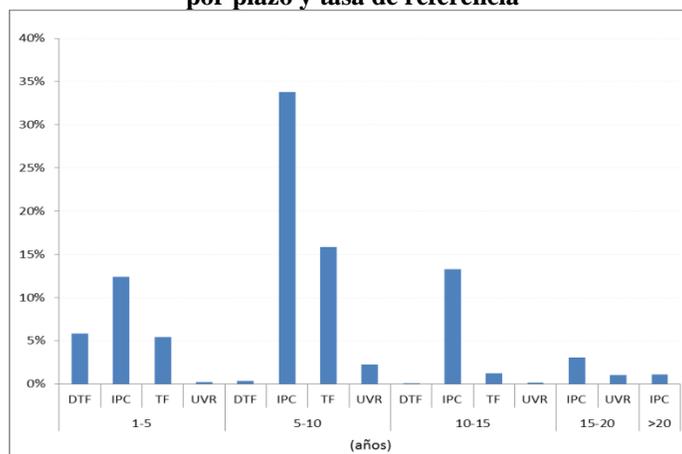


Fuente: Towers-Watson, Accounting for Defined Benefit Pensions and Other Postretirement Benefits, 2012, Gráfico 3

En Colombia, una práctica como la de utilizar la información de los bonos corporativos para el cálculo de la tasa de descuento sería más difícil, ya que el 80% de los títulos emitidos desde 2006 están colocados a menos de 10 años, y muy pocos, el 1,1%, a más de 20 años (Gráfico 8). Por otro lado, según un estudio técnico de la Bolsa de Valores de Colombia en 2011, sólo el 0,93% de los bonos emitidos generaron precios en el mercado, por lo que la mayoría se valoran con precios teóricos²³. De esta forma, dada la baja liquidez del mercado y que la información de tasas que se tiene de estos títulos no refleja las expectativas de mercado, todavía es muy prematuro pensar en las tasas de los bonos de deuda privada como base o referencia para descontar el pasivo pensional.

²³ Estudio técnico BVC, *Mercado de Renta Fija Colombiano Evolución y Diagnóstico*, Octubre de 2012.

Gráfico 8. Distribución del monto colocado de bonos privados por plazo y tasa de referencia



Fuente: Bolsa de Valores de Colombia; cálculos de los autores.

Con base en lo anterior, en el caso colombiano resultaría conveniente tener como referencia, para el cálculo de la tasa de descuento del pasivo pensional, las tasas de los bonos de deuda pública interna, TES. Lo anterior debido a varias razones, entre las cuales están²⁴:

i) El mercado de deuda pública interna es bastante líquido y se tienen tasas de mercado para las referencias o bonos a diferentes plazos.

ii) Si el gobierno necesita recursos para cubrir el pasivo pensional puede emitir deuda a un costo de fondeo equivalente al de las tasas de los TES.

Alternativamente, se podría considerar la recomendación de Arbeláez *et al.* (2011), en relación con la posibilidad de emitir un título de deuda pública de largo plazo (20-30 años) para tener un referente de estas características²⁵.

3.2. Previsiones sobre la tasa de interés futura y la tasa de descuento del pasivo pensional

Para establecer una posible tasa de interés que permita descontar el pasivo pensional, utilizamos varios enfoques. En primer lugar, están los modelos de tasa de interés real que suponen que la misma sigue un proceso de difusión estacionario. Aquí se estima, en primera medida, un modelo tipo Ornstein y Uhlenbeck (1930), que corresponde al proceso estocástico más común en la modelación de tasas de interés, utilizado, entre otros, en el modelo de equilibrio general intertemporal de precios de activos de Cox, Ingersoll y Ross (1985), en el modelo de Vasicek (1977), así como en la estimación de Vásquez (2003) de la tasa de interés real de largo plazo en Colombia. Adicionalmente, se emplea una variante del modelo de Vasicek (1977), en la cual se considera la existencia de dos factores independientes que gobiernan el proceso estocástico de la tasa de interés de corto plazo. En segundo término, verificamos la existencia de una relación de largo plazo (o comovimiento) entre la tasa de interés externa y la tasa doméstica y, con base en las previsiones hechas al finalizar la sección anterior sobre la primera, plantear una posible

²⁴ Estas son, adicionalmente, las razones por las cuales los gráficos de la primera parte de este documento tienen información de los TES a 10 años.

²⁵ El TES en pesos de mayor plazo que se ha emitido tenía una madurez de 16 años (emitido en 2012 con vencimiento en 2028). Por su parte, el título en UVR de mayor plazo es de 20 años (emitido en 2013 y vence en 2033). Es importante mencionar que los TES en UVR tienden a tener baja liquidez en el mercado.

trayectoria futura de la última. De igual manera, apoyados en la relación entre la tasa de interés interna y externa, se propone un *fan-chart* sobre su comportamiento probable.

3.2.1. Modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck para la tasa de interés real

Siguiendo la especificación de Ornstein y Uhlenbeck (1930), posteriormente utilizada por Vásquez (2003), el proceso de la tasa de interés está dado por:

$$dr_t = \lambda(\bar{r} - r_{t-1}) + \sigma dw_t,$$

donde dr_t es el crecimiento de la tasa de interés, $\lambda (\geq 0)$ es la velocidad de reversión hacia la media, σ es la volatilidad del crecimiento de r y dw_t es un proceso estocástico de Wiener (o movimiento Browniano). En este modelo se supone que la tasa de interés real fluctúa alrededor de una tasa de interés constante de largo plazo \bar{r} .

Para estimar el modelo, utilizamos la tasa real *spot* de los TES a diez años entre 2003 y 2013, en frecuencia mensual. Debido a que la dinámica de esta variable ha cambiado de manera significativa en el tiempo, realizamos pruebas de cambio estructural utilizando los estadísticos propuestos por Andrews (1993) y Andrews y Ploberger (1994), en donde se plantean tres posibles modificaciones a la prueba de Chow (1960)²⁶. Sin embargo, los resultados de las mismas apuntan a que no existe evidencia para rechazar la hipótesis de no cambio estructural.

Aplicando el modelo propuesto sobre la tasa de interés real se puede afirmar, con un nivel de confianza de 95%, que el valor de largo plazo se sitúa entre 4,9% y 6,0%, con un punto medio de 5,5%. Por lo tanto, si suponemos que la inflación se ubica en la meta de largo plazo (3% anual), la tasa de interés nominal estará entonces entre 7,9% y 9,0%, con punto medio en 8,5%. Este modelo también se estimó utilizando la serie de tasa cero cupón de los TES UVR calculada por la BVC y se encontró que la tasa de interés real se encuentra, con un 95% de confianza, entre 4,0% y 4,9% con un punto medio de 4,5%²⁷.

3.2.2 Modelo de dos factores de Vasicek

El modelo original de Vasicek (1977), es uno de los modelos de tasa de interés de corto plazo más reconocidos de la literatura de renta fija. Lo anterior, se debe en gran medida a que es considerado el primer modelo estocástico de tasas de interés en incorporar la noción de reversión a la media. Sin embargo, la sencillez misma del modelo, al depender únicamente de una fuente de riesgo (*i.e.*, un único factor), lo hacía poco flexible, resultando en una curva de rendimientos con poca curvatura y con correlación perfecta entre las tasas de interés a lo largo de la estructura a plazo. En contraste, la utilización de dos factores, permiten al modelo conservar los atributos deseables de la versión original (*i.e.*, la reversión a la media) así como una mayor flexibilidad en la curva de rendimientos.

Intuitivamente, el modelo de Vasicek busca, mediante la modelación de la dinámica de la tasa de interés de corto plazo, una representación general de la estructura a plazo de la tasa de interés nominal²⁸. En efecto, una de las ventajas de este enfoque, es que la tasa de interés $r_t(\tau)$ a un plazo τ cualquiera (y el precio del bono cero cupón correspondiente) puede escribirse en términos de la tasa de corto plazo r_t y de una tasa de largo plazo $r_{l,t}$ con madurez τ_l (*e.g.*, 10 años). La importancia de lo anterior radica en que podemos aproximar el valor de la tasa de interés en

²⁶ Para mayor detalle sobre estas pruebas, ver Anexo 1.

²⁷ De estos cálculos se desprende que la prima de riesgo inflacionario para el período de análisis fue de 100 puntos básicos. Esto es, la diferencia entre el retorno real de los títulos denominados en COP (5,5%) y los denominados en UVR (4,5%).

²⁸ La derivación formal del modelo de Vasicek de dos factores se encuentra en el Anexo 2.

plazos donde no exista información de mercado adecuada utilizando dos puntos líquidos de la curva.

Una vez se obtiene la ecuación que representa el precio de un título cero cupón con madurez τ derivado en el modelo, el precio teórico se compara con el precio observado en el mercado para un título con el mismo vencimiento. Lo anterior, con el fin de minimizar la diferencia entre ambos y así calibrar los parámetros exógenos del modelo para aproximar de manera adecuada la curva de rendimientos a los plazos relevantes.

En el ejercicio empírico se utilizó la tasa *spot* de los TES a 1 mes como la tasa de corto plazo y la tasa *spot* de los TES a 10 años como la tasa de largo plazo²⁹. Para obtener los precios de los bonos, se utilizaron los vértices construidos para los ejercicios de riesgo de mercado del REF (ver Martínez y Uribe, 2008). Para la calibración de los parámetros se tuvieron en cuenta diversos escenarios, cada uno de los cuales proporciona una tasa de interés real a 20 años específica.

La información y los diferentes ejercicios realizados se pueden resumir de la siguiente manera:

- Se utiliza información diaria de los precios y tasas de los TES en cada uno de los vértices de tiempo.
- Las series de tasas de interés corresponden a los TES UVR (tasa real), TES pesos expresada en términos reales (i.e. la tasa nominal ajustada por las expectativas de inflación, dónde se utilizó la inflación observada un año después para ajustar los rendimientos a todos los plazos sobre la curva) y las de los TES pesos en términos nominales.
- Adicionalmente, la calibración se hace para dos períodos de tiempo: 2008Q1-2013Q1 y 2010Q1-2013Q1³⁰.
- Por último, se consideran dos escenarios en el ejercicio de calibración, uno en el que se incluye una restricción adicional sobre el valor del parámetro $\bar{\phi}_1$, y otro en el cual se deja libre. En términos económicos, dicho parámetro representa la media de la tasa de interés de muy corto plazo (i.e. tasa instantánea). La restricción que se incluye es fijar el parámetro en el valor promedio observado de la tasa de interés a un mes en el periodo de análisis.
- El ajuste del modelo, en el periodo analizado, se hace con base en precios y tasas promedio.

Los resultados de la calibración se resumen en el Cuadro 1, donde la tasa de interés real de largo plazo (20 años) se sitúa en un rango comprendido entre 4,09% y 6,65%. Es importante mencionar que todas las tasas están en términos reales y representan el punto a 20 años en la curva cero cupón. La tasa de TES pesos nominal a 20 años se expresa en términos reales descontándole la meta de inflación de largo plazo (i.e. 3%).

3.2.3. Relación entre la tasa doméstica y la tasa externa

Un enfoque final utilizado para predecir el comportamiento de la tasa de interés nominal, consiste en la utilización de la paridad de intereses para encontrar una relación entre aquella y la tasa de interés externa.

²⁹ La idea básica es expresar la tasa que se quiere encontrar (la de 20 años) en términos de dos tasas, una corta (1 mes) y una larga (10 años). Se explota el hecho de que se cuenta con información de tasas a 10 años.

³⁰ Sin embargo, hay que aclarar que para la tasa de los TES pesos en términos reales no se tiene información más allá de junio de 2012, pues se desconoce la dinámica de la inflación posterior a junio de 2013. Por tanto, para esa serie en particular los periodos son 2007Q2-2012Q2 y 2010Q1-2012Q2.

Cuadro 1. Calibración del modelo de Vasicek de dos factores

Sin restricción	2008Q1 - 2013Q1			2010Q1 - 2013Q1		
	TES UVR	TES pesos real		TES UVR	TES pesos real	TES pesos nominal
$\bar{\phi}_1^*$	0,0415	0,0796		0,0399	0,2032	0,0333
γ_1^*	-0,0996	0,8328		-0,0678	0,4473	0,4655
γ_2^*	0,9379	0,1754		0,5367	-0,0074	-0,0009
$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	0,0111	0,0259		0,0079	0,0182	0,0129
Tasa real 20 años	5,09%	6,25%		4,12%	5,15%	5,13%
Con restricción	2008Q1 - 2013Q1			2010Q1 - 2013Q1		
	TES UVR	TES pesos real	TES pesos nominal	TES UVR	TES pesos real	TES pesos nominal
$\bar{\phi}_1^*$	0,0122	0,0193	0,0486	0,0115	0,0067	0,0391
γ_1^*	-0,0193	-0,0223	-0,0247	-0,0097	0,0201	-0,001
γ_2^*	0,9643	0,7231	0,6318	0,5410	0,4398	0,4655
$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	0,0111	0,0259	0,0255	0,0079	0,0182	0,0129
Tasa real 20 años	4,94%	6,54%	6,65%	4,09%	5,18%	5,13%

Nota: para el período 2008Q1-2013Q1, el ejercicio de TES pesos nominal es altamente inestable por eso no se reportan resultados en esta celda. Fuente: Cálculos de los autores

El propósito es predecir la tasa interna mediante una expresión como:

$$i_t = \beta_0 + \beta_1 i_t^* + \beta_2 \Delta s_{t+1}^e + \beta_3 r p_t + \mu_t$$

donde i_t es la tasa de interés doméstica, i_t^* la tasa de interés externa, Δs_{t+1}^e la variación esperada en el tipo de cambio nominal y $r p_t$ una prima de riesgo. La previsión de la tasa de interés doméstica toma en cuenta las predicciones hechas por Bernanke (ver sub-sección 2.2) sobre la trayectoria futura de la tasa de interés de Estados Unidos y hace algunos supuestos sobre el tipo de cambio nominal y la prima de riesgo.

Para el ejercicio de cointegración³¹ se utilizó información mensual entre enero de 2003 y febrero de 2013. La tasa de interés local corresponde a la tasa *spot* nominal de los TES con vencimiento a 10 años y la tasa externa a la tasa *spot* nominal de los títulos del Tesoro de los Estados Unidos con un vencimiento similar; la devaluación esperada se calculó como la variación observada del tipo de cambio (suponiendo previsión perfecta)³² y; finalmente, la prima de riesgo fue aproximada mediante el *EMBI-Colombia*. Los resultados de este ejercicio aparecen en el Cuadro 2, en el que los coeficientes, tanto de la tasa de interés como de la prima de riesgo, tienen los signos adecuados; no así el correspondiente a la variación anual de la TRM. Así mismo, se observa que la relación entre la tasa de interés interna y la externa es, prácticamente, uno a uno.

³¹ Las propiedades estadísticas de las variables y de los modelos están disponibles para los lectores interesados en el Anexo 3. La estimación se realizó por mínimos cuadrados dinámicos.

³² Las tasas de interés están expresadas en términos efectivos anuales. La variación del tipo de cambio es anual aunque, en sentido estricto, debería ser una transformación anual de la devaluación esperada a 10 años. En un ejercicio adicional utilizamos también la depreciación anual esperada según la encuesta de expectativas del Banco de la República, pero ninguno de los modelos que utilizó esta variable resultó satisfactorio.

Cuadro 2. Parámetros de la ecuación de paridad

Parámetro	Modelo con rezagos no independientes
$\hat{\beta}_0$	0,455
$\hat{\beta}_1$	1,014***
$\hat{\beta}_2$	-0,139*
$\hat{\beta}_3$	0,02***

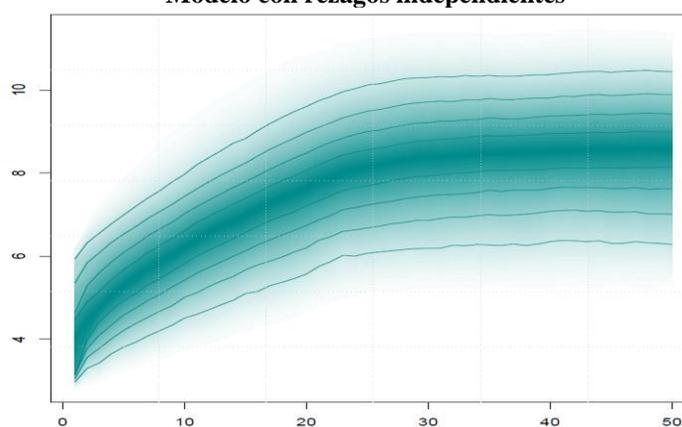
Nota: este modelo satisface todas las propiedades estadísticas; *** denota significancia al 0.1%, ** al 1%, * al 5% y · al 10%. Fuente: Cálculos de los autores.

Aunque los resultados de este ejercicio deben tomarse con cautela, el mismo permite encontrar los posibles valores que puede tomar la tasa de interés nominal en Colombia ante diferentes escenarios sobre la evolución de las variables explicativas. Las sendas utilizadas para dichas variables son las siguientes³³:

- Variación entre -0,5% y 0,5% (por periodo) de la tasa cero cupón a 10 años de Estados Unidos, sujeto a que la misma no sea menor al 2,0% y no supere el 5,0%³⁴.
- El *EMBI* aumenta durante el horizonte de análisis, sujeto a la restricción que el aumento no puede superar 100 puntos básicos en ningún momento del horizonte analizado.
- Las expectativas de devaluación se ubican entre 0% y 1% por periodo (diferencia entre la meta de inflación de largo plazo de Colombia y la inflación de largo plazo de Estados Unidos).

El Gráfico 10, elaborado con base en las anteriores sendas, presenta los posibles valores de la tasa cero cupón de Colombia.

**Gráfico 10. Fan-chart tasa de interés nominal.
Modelo con rezagos independientes**



Fuente: Cálculos de los autores.

Como se observa en el gráfico, la tasa de interés nominal bajo las posibles sendas que toman las variables exógenas se sitúa, con mayor probabilidad, cerca de 8%. En efecto, se tiene que la media de dicha tasa es de 8,5%, y que el 50% de las observaciones alrededor de dicho valor se encuentran entre 7,3% y 9,7%. Si a estas tasas nominales se les resta la inflación de largo plazo

³³ Dado que la tasa de interés de Estados Unidos y el *EMBI* se encuentran en niveles bajos, se espera un aumento frente al valor actual en estas series.

³⁴ Interpretando de esta forma las declaraciones de Bernanke (2005 y 2013).

tendríamos tasas de interés reales entre 4,3% y 6,7%, con un punto medio de 5,5%. En este modelo, la tasa real se sitúa con una probabilidad de 95% entre 2,5% y 8,1%.

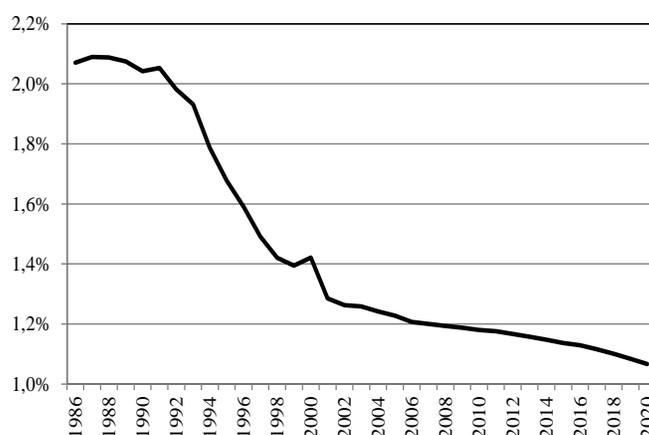
4. Restricción macroeconómica de estado estacionario.

Las bajas tasas de interés reales de largo plazo tienen múltiples efectos sobre la economía, relacionados con la promoción de un mayor consumo presente y el aumento de la riqueza de los agentes por un mayor precio de los activos, en valor presente. Sin embargo, para transitar una senda hacia un estado estable, la tasa de interés real debe ser, al menos, igual a la tasa de crecimiento de la economía en el largo plazo.

Según el modelo Solow-Swan (ver Anexo 4), un referente del análisis de largo plazo, la economía tiende, sin ambigüedades, al estado estacionario dada la tasa de ahorro exógena. Sin embargo, existe una tasa de ahorro para la cual el consumo es máximo, la cual se conoce como tasa de ahorro de oro. Tener un *stock* de capital por encima del nivel de oro constituye una situación de ineficiencia dinámica, ya que el consumo será inferior al consumo de oro y la tasa de interés real (el retorno marginal del capital neto de la tasa de depreciación) será inferior al crecimiento de la economía, dado por las tasas de crecimiento de la población y el progreso tecnológico. Para retornar al nivel de consumo de oro, debe revertirse la inversión hecha en capital físico y aumentar el nivel de consumo (véase también el modelo de Diamond, 1965).

El Gráfico 11 muestra la evolución de la tasa de crecimiento anual de la población, incluyendo las previsiones del Departamento Administrativo Nacional de Estadística (*DANE*) hasta el año 2020. En efecto, según este organismo, la tasa de crecimiento de la población reflejará un efecto de transición al finalizar esta década, ubicándose, para entonces, cerca de 1,0%.

Gráfico 11. Tasa de crecimiento de la población. 1985-2020.



Fuente: DANE, <http://www.dane.gov.co/index.php/poblacion-y-demografia/series-de-poblacion>. Cálculos propios.

Para efectos de la determinación del piso de la tasa de interés real de largo plazo puede preverse una tasa de crecimiento de la población, n , entre 1% y 1,5% en el futuro, de manera que,

con un cambio técnico, g_A , de 1,5% anual³⁵, la tasa de interés real de largo plazo debería tener un piso aproximado de 3,0% anual, equivalente al crecimiento esperado de muy largo plazo del PIB total³⁶. En el entendido que la economía colombiana aún se encuentra distante de su estado estacionario, esta tasa de crecimiento es menor que la de crecimiento actual del PIB potencial.

Una tasa de interés real inferior a 3% anual, nos colocaría en una zona de ineficiencia dinámica con una sobre inversión y un consumo inferior al de regla de oro (véanse Romer, 2012 y Sala-i-Martin, 2000). Sin embargo, para llegar a ese nivel de tasa de interés, la tasa de ahorro (en un sentido amplio) debe ser igual, en una función de producción neoclásica, a la elasticidad del producto al capital (agregado, per-cápita o en unidades de eficiencia) cuyos valores para Colombia están alrededor de 0,38 (GRECO, 2003).

Un segundo referente del análisis de largo plazo es el modelo Ramsey-Cass-Koopmans, en el que la tasa de ahorro no es exógena sino que, en un ambiente dinámico, se determina de manera óptima por parte de las familias. Según el modelo, una tasa de interés real de largo plazo inferior a la tasa de crecimiento puede sugerir la adopción de una trayectoria inestable de sobreacumulación de activos (de ahorro) no necesariamente beneficiosa para la economía. Específicamente, una situación en la que la tasa de interés real es inferior al crecimiento del producto puede implicar una situación explosiva de sobre-inversión que puede llevar a la economía al incumplimiento de la restricción intertemporal, alejándola de la senda de crecimiento equilibrado (Romer, 2012; ver Anexo 4)³⁷.

Por virtud de la tasa de impaciencia, incorporada en el modelo Ramsey-Cass-Koopmans, el *stock* de capital de estado estacionario es inferior al de regla de oro del modelo Solow-Swan. El cumplimiento de la restricción intertemporal (que excluye conductas tipo Ponzi) requiere que en la medida en que el *stock* de capital tienda al estado estacionario, la productividad marginal del capital neta de depreciación tienda a $\rho + \theta g_A$, donde los parámetros ρ , θ y g_A representan, respectivamente, la tasa subjetiva de descuento, la aversión al riesgo y el cambio técnico.

De igual forma, para que la utilidad de las familias esté acotada y se cumpla la restricción de presupuesto intertemporal, el modelo dinámico establece el cumplimiento de la desigualdad:

$$\rho - n - (1 - \theta)g_A > 0 \Rightarrow \rho + \theta g_A > n + g_A$$

³⁵ Este número se apoya en distintas fuentes. Por un lado, están los modelos macroeconómicos compatibles con los hechos estilizados de la economía colombiana (véanse, por ejemplo, Arango, Obando y Posada, 2013; Bonaldi, González y Rodríguez, 2011; Iregui y Melo 2009) que lo sitúan alrededor de 1,5% como se observa en el Cuadro 3. Por otro lado, el GRECO (página 15, Tabla 3) estimó que entre 1905 y 1996 el cambio técnico fue 3,27% anual y 0,16% entre 1976 y 1996. Clavijo (2003) señala que entre 1950 y 2002 Colombia tuvo ganancias en productividad laboral del orden de 0,6%, mientras que en Chile alcanzaron el 2% anual; en nuestro país la productividad pasó de promediar 1,8% anual entre los años 1950 y 1980 a -1% anual entre 1981 y 2002, mientras que en Chile se aceleró de 1,7% a 2,3% anual en los mismos subperíodos. Por su parte, Cárdenas (2007, página 223, Tabla 3) estima para el período 1955-1979 una contribución de la productividad al crecimiento del PIB per-cápita de 1,05% mientras que para el período 2000-2005 la estima en -0,06%. El Consejo Privado de Competitividad (2007, página 11) sostiene que el índice de productividad multifactorial pasó de 126, aproximadamente, a 143,7 entre 1970 y 2007, lo cual da un crecimiento anual promedio de 0,31% de la productividad total de los factores.

³⁶ Los cálculos del Greco (2002, pág. 14, Tabla 2) estimaron el crecimiento del PIB entre 1905 y 1996 en 4,74%.

³⁷ Cálculos realizados permiten señalar que entre septiembre de 1998 y junio de 2008, con interrupción entre septiembre de 2001 y diciembre de 2003, en Estados Unidos se presentó una situación de tasas de crecimiento superiores a la tasa de interés (el período del *bond yield conundrum*). En el caso del Reino Unido, dicha situación se produjo entre diciembre de 2003 y septiembre de 2008. Si bien se trató de un desajuste transitorio, por un período corto, pudo tener efectos persistentes como los que sugieren la ineficiencia dinámica o de sobreinversión como los expuestos en el modelo Ramsey-Cass-Koopmans.

Es decir, según este enfoque, la tasa de interés real de largo plazo debe ser mayor que la suma de la tasa de crecimiento de la población y el cambio técnico la cual, de acuerdo con lo señalado arriba, podría ser cercana a 3% anual. El Cuadro 3 presenta los valores resultantes de la tasa de interés real de largo plazo para diferentes valores de los parámetros ρ , θ y g_A utilizados por diferentes autores (véanse, entre otros, Arango, Obando y Posada, 2013; Bonaldi, González y Rodríguez, 2011; Iregui y Melo 2009) los cuales incorporan una prima de riesgo que podría suponerse cercana a 150 puntos básicos. Dicha estimación corresponde a la prima media encontrada al comparar la diferencia entre el promedio de la razón utilidad sobre precio del IGBC y la tasa de los TES UVR a 10 años en tres periodos muestrales (ver Cuadro 4). En tal sentido, la tasa de interés de largo plazo libre de riesgo se situaría entre 2,0% y 10,7%, con un valor medio de 4,8%.

Cuadro 3. Valores plausibles de la tasa de interés real anual (neta de impuestos)

ρ	θ	g_A	Tasa de interés real ($\rho + \theta g_A$)	Tasa de interés real neta de prima de riesgo
2,5%	1,00	1,0%	3,5%	2,0%
	2,47	1,0%	5,0%	3,5%
	3,00	1,0%	5,5%	4,0%
	1,00	1,5%	4,0%	2,5%
	2,47	1,5%	6,2%	4,7%
	3,00	1,5%	7,0%	5,5%
	1,00	2,0%	4,5%	3,0%
	2,47	2,0%	7,4%	5,9%
	3,00	2,0%	8,5%	7,0%
3,0%	1,00	1,0%	4,0%	2,5%
	2,47	1,0%	5,5%	4,0%
	3,00	1,0%	6,0%	4,5%
	1,00	1,5%	4,5%	3,0%
	2,47	1,5%	6,7%	5,2%
	3,00	1,5%	7,5%	6,0%
	1,00	2,0%	5,0%	3,5%
	2,47	2,0%	7,9%	6,4%
	3,00	2,0%	9,0%	7,5%
2,48%	3,9971	2,42%	12,2%	10,7%
Promedio			6,3%	4,8%

Nota: los valores de la última línea corresponden a Bonaldi, González y Rodríguez (2011) usualmente asociados con el modelo Patacón del Banco de la República. Se supone una prima de riesgo de la rentabilidad del capital de 1,5% anual. Fuente: cálculos de los autores.

Cuadro 4. Cálculo de la prima de riesgo

	Razón U/P	Tasa cero cupón TES UVR 10 años	Prima de riesgo (en pb)
Media 2003-2013	6,56%	5,18%	137,60
Media 2008-2013	5,48%	4,19%	129,35
Media 2010-2013	5,45%	3,63%	181,98

Fuente: cálculos de los autores.

Ahora bien, suponer que la tasa para el cálculo de la reserva matemática puede ser, de forma permanente, menor que la tasa de crecimiento de largo plazo de la economía colombiana en el futuro (al menos 3,0% anual) significaría, como hemos dicho, aceptar un número que no es consistente con la regla de oro, o que conduce a una situación explosiva de sobre-inversión en la que el proceso de acumulación puede llevar a un incumplimiento de la restricción intertemporal³⁸. Así, el promedio de las tasas reales de interés de largo plazo netas de la prima de riesgo del Cuadro 3 que cumplen con la condición de ser superiores a $n+g_A$ se sitúa en 4,8% anual. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en la transición al estado estacionario, la tasa de interés real puede ser superior a dicho valor.

5. ¿Qué hacer con la tasa de interés técnica?

Sugerir un valor de la tasa de interés real que pueda ser utilizado para calcular la reserva matemática implica asumir riesgos asociados con la previsión que se debe hacer de la trayectoria futura de la tasa. En la primera sección de este documento pudo verse que las tasas de interés, tanto nominales como reales, tienen períodos prolongados de tendencias al alza o a la baja y el desconocimiento del momento del quiebre hace aún más difícil el ejercicio.

Antes de hacer una sugerencia, reiteramos la importancia de tener en cuenta, por un lado, las prácticas que se realizan en los Estados Unidos, Canadá y el Reino Unido, las cuales utilizan los retornos de los títulos a largo plazo para descontar el pasivo pensional y, por otro, la recomendación de Arbeláez *et al.* (2011) en el sentido de evaluar la posibilidad de emitir un título de largo plazo (20-30 años) por parte del gobierno nacional que permita tener un referente más claro para determinar la tasa de descuento y que, a la vez, reduzca el descalce entre activos y pasivos en lo referente al sistema pensional.

Además de las estimaciones realizadas en la sección 3, que ubican la tasa de interés real de largo plazo entre 4,0%³⁹ y 6,7%⁴⁰ (el ejercicio de cointegración da un punto medio de 5,5%), una candidata natural para ser referente de la tasa de descuento podría ser la tasa *spot* real de los TES pesos a 10 años (por ser una referencia con adecuada liquidez), la cual tuvo una media de 5,0%, con desviación estándar cercana a 1% en el periodo 2010-2012, situándose en un rango consistente con las estimaciones de la trayectoria del *fan-chart*.

Ahora bien, suponer que la tasa para el cálculo de la reserva matemática puede ser, de forma permanente, menor que la tasa prevista de crecimiento real de muy largo plazo de la economía colombiana (3,0% anual) significaría aceptar un número que no es consistente con el equilibrio de largo plazo (ni posiblemente con el equilibrio de regla de oro), o que conduce a una situación explosiva de sobre-inversión en la que el proceso de acumulación puede llevar a un incumplimiento de la restricción intertemporal. Dada esta restricción, la tasa de interés es 4,8% anual.

³⁸ La tasa de interés real de largo plazo también suele compararse con la tasa de crecimiento de la economía para escoger niveles de deuda sostenibles y hacer análisis elementales de solvencia basados en la restricción presupuestal del gobierno (o de los particulares). En el caso en que la tasa sea inferior al crecimiento agregado, el valor presente descontado de un superávit futuro será mayor que el propio valor futuro. Por lo tanto, modestos superávits primarios futuros serán compatibles con una deuda actual importante como proporción del *PIB*.

³⁹ El límite inferior del modelo Ornstein – Uhlenbeck al 95% de confianza utilizando la tasa de los TES UVR.

⁴⁰ La tasa más alta resultante del modelo de Vasicek de 2 factores.

Para sugerir una tasa de interés técnica, además de todo lo anterior, debe tenerse en cuenta que los riesgos asociados con la subestimación del valor presente del pasivo pensional son mayores que los riesgos de sobrestimarlo⁴¹. En tal sentido, manteniendo un espíritu conservador, es recomendable continuar con una tasa real de 4% anual para descontar el pasivo pensional. Como se señaló al comienzo, según el DNP un aumento de un punto porcentual en la tasa de interés técnica reduciría el valor presente del pasivo pensional, como proporción del PIB, en cerca de 20 puntos porcentuales.

Referencias

Andolfatto, D. “*Liquidity Shocks, Real Interest Rates, and Global Imbalances*”, the Federal Reserve Bank of St. Louis *Review*, Mayo/Junio, 2012, 94(3), pp. 187-95

Andonov, A., Bauer, R. y Cremers, M., “Pension Fund Asset Allocation and Liability Discount Rate: Camouflage and Reckless Risk Taking by U.S. Public Plans”, Mayo de 2012.

Andrews, D. W. K., “Tests for parameter instability and structural change with unknown change point” *Econometrica*, 61:821–856, 1993.

Andrews, D. W. K. y Ploberger, W., “Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative”, *Econometrica*, 62:1383–1414, 1994.

Arbeláez, M.A., Botero, J.H., González, A., Salamanca, C., y Suarez, D., “Sostenibilidad del Seguro Previsional en Colombia”, Estudio Fedesarrollo, Fasecolda 35 años, febrero, 2011.

Bandholz, H., Clotermann, J. y Seitz, F., “Explaining the US bond yield conundrum”, *Applied Financial Economics*, 19, 7, 539-550.

Bernanke, B. “*The Global Saving Glut and the U.S. Current Account Deficit*”, Remarks by Governor Ben S. Bernanke at the Sandridge lecture, Virginia Association of Economists, Richmond, Virginia, The Federal Reserve Board, marzo 10, 2005.

Bernanke, B., “*Long-term interest rates*”, Speech by Mr Ben S Bernanke, Chairman of the Board of Governors of the Federal Reserve System, at the Annual Monetary/Macroeconomics Conference “The past and future of monetary policy”, sponsored by the Federal Reserve Bank of San Francisco, California,

"http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=bis&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCsQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.bis.org%2F&ei=AJF-UdntEe-34A00xYHQDg&usg=AFQjCNGQi0y_wcybxA_7TI9ebn--jvVmqq&bvm=bv.45645796,d.dmg", marzo 1, 2013.

Biggs, Andrew, “Public sector pensions: How well funded are they, really?”, State Budget Solutions, Julio de 2012.

Bonaldi, P., González, A., y Rodríguez, D., “Importancia de las rigideces nominales y reales en Colombia: un enfoque de equilibrio general dinámico y estocástico”, *Ensayos sobre Política Económica*, Vol.29, 66, Banco de la República, 2011, pp. 48-78.

⁴¹ Salazar y Arbeláez (2007), citadas por Arbeláez *et al.* (2011, pág. 299), señalan que una tasa de descuento baja reduce los riesgos más relevantes a los que se expone un fondo pensional.

- Cárdenas, M., “Economic Growth in Colombia: A reversal of ‘fortune’?”, *Ensayos sobre Política Económica*, Vol.25, 53, Edición Especial Productividad y Crecimiento, Banco de la República, 2007, pp. 220-259.
- Chow, G. C., “Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions”, *Econometrica*, 28:591–605, 1960.
- Clavijo, S., “Crecimiento, Productividad y la ‘Nueva Economía’: implicaciones para Colombia”, *Borradores de Economía*, 228, Banco de la República, enero, 2003.
- Consejo Privado de Competitividad, Informe Nacional de Competitividad 2007, 2007
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E. y Ross, S.A. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53: 385–407, 1985.
- Cuevas, M.C., “El Régimen de Reservas Técnicas en Colombia. Retos Futuros”, Fasecolda 35 años, junio, 2011.
- Diamond, P., 1965, “National Debt in a Neoclassical Growth Model”, *American Economic Review*, 55, 1126-1150.
- García, G., “¿Es necesaria una reforma al sistema pensional colombiano?”, Confederación Democrática de Pensionados, Mesa de concertación reforma pensional, 2013.
- GRECO, “El crecimiento económico colombiano en el siglo XX”, Banco de la República, FCE, 2002.
- Hull, J.C., “Options, Futures and Other Derivatives”. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006.
- Iregui, A. y Melo, L., “La transmisión de la política monetaria sobre el consumo en presencia de restricciones de liquidez” en Jail, M. y Mahadeva, L.(editores), *Mecanismos de Transmisión de la política monetaria en Colombia*, Banco de la República, 2010, pp. 247-296.
- Julio, J.M., Mera, S.J y Revéiz, A., “La curva Spot (Cero Cupón): Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos”, *Borradores de Economía*, 213, Banco de la República, junio, 2002.
- Kienzler, D. “*Global imbalances and long-term interest rates*”, *Balanced Growth: Finding Strategies for Sustainable Development*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 23-42, 2012.
- Knight, M. “*Why have long-term interest rates been so low? Is the global interest rate cycle beginning to turn?*”,
http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=bis&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCsQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.bis.org%2F&ei=AJF-UdntEe-34A00xYHQDg&usg=AFQjCNGQi0y_wcybxA_7TI9ebn--jvVmqg&bvm=bv.45645796,d.dmg, mayo 12, 2006.
- Merton, Robert, “Introduction to Pension Finance”, M. Barton Waring, Wiley Finance, 2012.
- Martínez, O. y Uribe, J.M., “Una aproximación dinámica a la medición del riesgo de mercado para los bancos comerciales en Colombia”, *Temas de Estabilidad Financiera*, No. 31, Banco de la Republica de Colombia, marzo, 2008.
- Ministerio de Hacienda y Crédito Público, “Marco Fiscal de Mediano Plazo”, junio, 2013.
- Novy-Marx, R., “Logical Implications of GASB’s Methodology for Valuing Pensions Liabilities”, University of Rochester, June, 2012.
- Prada, J.D. y Rojas, J.E., “La elasticidad de Frisch y la transmisión de la política monetaria en Colombia”, *Borradores de Economía* No. 555, marzo, 2009.

- Romer, D., *Macroeconomía avanzada*, McGraw Hill, Cuarta edición, 2012.
- Rudebusch, G.D., Swanson T.E. y Wu, T., “The bond yield ‘conundrum’ from a micro-finance perspective”, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working paper, 2006-16, 2006.
- Sala-i-Martin, X., *Apuntes de crecimiento económico*, Antoni Bosch, Segunda edición, 2000.
- The Economist, “Money to burn. The muddle-headed world of American public-pension accounting”, edición escrita, Mayo 4, 2103.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - fourth quarter 2009, febrero de 2010.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - first quarter 2010, mayo de 2010.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - second quarter 2010, agosto de 2010.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - third quarter 2010, noviembre de 2010.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - fourth quarter 2010, febrero de 2011.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - first quarter 2011, abril de 2011.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - second quarter 2011, julio de 2011.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - third quarter 2011, octubre de 2011.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - fourth quarter 2011, enero de 2012.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - first quarter 2012, abril de 2012.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - second quarter 2012, agosto de 2012.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - third quarter 2012, octubre de 2012.
- Towers-Watson, Global Pension Finance Watch - fourth quarter 2012, enero de 2013.
- Uhlenbeck, G.E., y Ornstein, L.S., "On the theory of Brownian Motion", *Phys.Rev.*, 36:823–841, 1930.
- Vasicek, O., “An Equilibrium Characterisation of the Term Structure”. *Journal of Financial Economics*, 5: 177–188, 1977.
- Vásquez, D. “Mecanismo de cobertura para el riesgo de tasa de interés real de los bancos hipotecarios colombianos”, Borradores de Economía, 265, Banco de la República, 2003.
- Veronesi, P., “Fixed Income Securities: Valuation, Risk and Management”, New York, John Wiley & Sons, 2010.

Anexo 1. Pruebas de cambio estructural

Para verificar la hipótesis de cambio estructural se empleó la prueba F, que compara dos modelos, el primero calculado con las observaciones hasta el posible punto de quiebre (i_0) y el segundo empleando todas las observaciones, para luego verificar si hay evidencia de un cambio significativo en los coeficientes encontrados.

Debido a que el punto de quiebre no es conocido Andrews y Ploberger (1994) proponen calcular la estadística F para un rango de posibles puntos de quiebre, adicionalmente presentan tres estadísticos que agrupan esta secuencia de pruebas F para verificar la hipótesis nula de no cambio estructural.

$$\begin{aligned} \text{sup}F &= \sup_{i_{min} < i < i_{max}} F_i \\ \text{ave}F &= \frac{1}{i_{max} - i_{min} + 1} \sum_{i_{min}}^{i_{max}} F_i \\ \text{exp}F &= \frac{1}{i_{max} - i_{min} + 1} \sum_{i_{min}}^{i_{max}} e^{0.5F_i} \end{aligned}$$

Siendo i_{min} , i_{max} son el primer y último posible punto de quiebre que se va a evaluar. Los resultados de estas pruebas son:

Prueba de cambio estructural Andrews and Ploberger (1994)	
Estadístico	P-valor
supF	0,13
aveF	0,30
expF	0,30

Anexo 2. Modelo de dos factores de Vasicek

El modelo original de Vasicek (1977), es uno de los modelos de tasa de interés de corto plazo más reconocidos de la literatura de renta fija. Lo anterior, se debe en gran medida a que es considerado el primer modelo estocástico de tasas de interés en incorporar la noción de reversión a la media. Sin embargo, la sencillez misma del modelo, al depender únicamente de una fuente de riesgo (*i.e.*, un único factor), lo hacía poco flexible, resultando en una curva de rendimientos con poca curvatura y con correlación perfecta entre las tasas de interés a lo largo de la estructura a plazo. Los dos factores del modelo, permiten, en cambio, conservar los atributos deseables de la versión original (*i.e.*, la reversión a la media) e introducen una mayor flexibilidad en la curva de rendimientos.

Este modelo supone que la tasa de interés de corto plazo puede expresarse como la suma de dos factores independientes:

$$r_t = \phi_{1,t} + \phi_{2,t}$$

donde cada uno de ellos sigue un proceso con reversión a la media y varianza constante (*i.e.*, tipo Vasicek). Esto es:

$$\begin{aligned} d\phi_{1,t} &= \gamma_1^*(\overline{\phi_1^*} - \phi_{1,t})dt + \sigma_1 dX_{1,t} \\ d\phi_{2,t} &= \gamma_2^*(\overline{\phi_2^*} - \phi_{2,t})dt + \sigma_2 dX_{2,t} \end{aligned}$$

Dado que se supone independencia entre los factores, aplicando el teorema de Ito ($dr_t = d\phi_{1,t} + d\phi_{2,t}$) y sustituyendo los valores de $d\phi_{1,t}$ y $d\phi_{2,t}$ se tiene que el proceso de difusión que sigue la tasa de interés de corto plazo puede expresarse como:

$$dr_t = [\gamma_1^*(\overline{\phi_1^*} - r_t) + \gamma_2^*\overline{\phi_2^*} + (\gamma_1^* - \gamma_2^*)\phi_{2,t}]dt + \sigma_1 dX_{1,t} + \sigma_2 dX_{2,t}$$

La ecuación diferencial que representa dicho proceso puede resolverse explícitamente, lo que permite obtener las siguientes expresiones generales para una tasa de interés con vencimiento $\tau = T - t$ así como para el precio de un bono cero cupón con el mismo vencimiento:

$$\begin{aligned} r_t(\tau) &= -\frac{\log(Z(\tau))}{\tau} = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{B_1(\tau)}{\tau}r_t + \frac{C(\tau)}{\tau}\phi_{2,t} \\ Z(\tau) &= e^{A(\tau) - B_1(\tau)r_t - C(\tau)\phi_{2,t}} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} B_i(\tau) &= \frac{1}{\gamma_i^*} (1 - e^{-\gamma_i^*\tau}) \quad \forall i = 1, 2 \\ A(\tau) &= (B_1(\tau) - \tau) \left(\overline{\phi_1^*} - \frac{\sigma_1^2}{2(\gamma_1^*)^2} \right) - \frac{\sigma_1^2}{4\gamma_1^*} B_1(\tau)^2 + (B_2(\tau) - \tau) \left(\overline{\phi_2^*} - \frac{\sigma_2^2}{2(\gamma_2^*)^2} \right) - \frac{\sigma_2^2}{4\gamma_2^*} B_2(\tau)^2 \\ C(\tau) &= B_2(\tau) - B_1(\tau) \end{aligned}$$

Una de las ventajas de este enfoque, es que la tasa de interés $r_t(\tau)$ a un plazo τ cualquiera (y el precio del bono cero cupón correspondiente) puede escribirse en términos de la tasa de corto plazo r_t y de una tasa de largo plazo $r_{l,t}$ con madurez τ_l (*e.g.*, 5 años) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_t(\tau) &= -\frac{A_{\tau_l}(\tau)}{\tau} + \frac{B_{\tau_l,1}(\tau)}{\tau}r_t + \frac{C_{\tau_l}(\tau)}{\tau}r_{l,t} \\ Z(\tau) &= e^{A_{\tau_l}(\tau) - B_{\tau_l,1}(\tau)r_t - C_{\tau_l}(\tau)r_{l,t}} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{\tau_l}(\tau) &= A(\tau) - C(\tau) * \frac{A(\tau_l)}{C(\tau_l)} \\ B_{\tau_l,1}(\tau) &= B_1(\tau) - C(\tau) * \frac{B_1(\tau_l)}{C(\tau_l)} \\ C_{\tau_l}(\tau) &= C(\tau) + \frac{\tau_l}{C(\tau_l)} \end{aligned}$$

Una vez se tienen estas ecuaciones, se minimiza la diferencia cuadrática entre el precio del bono cero cupón con madurez τ derivado en el modelo y el precio observado en el mercado para un título con el mismo vencimiento. Específicamente, se tiene la siguiente función objetivo:

$$\begin{aligned} J(\gamma_1^*, \overline{\phi_1^*}, \sigma_1, \gamma_2^*, \sigma_2) &= \sum_{j=1}^n (P_i^{\text{observado}} - P_i^{\text{modelo}})^2 \\ \text{s. a.} \quad 1. \quad \overline{\phi_2^*} &= 0 \\ 2. \quad \text{Volatilidad de la tasa de corto plazo} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

3. Media de la tasa de corto plazo = $\overline{\phi_1^*}$

Anexo 3. Propiedades estadísticas del modelo de cointegración: Relación entre la tasa doméstica y la tasa externa.

Pruebas de raíz unitaria sobre las series en niveles

Series	ADF		PP		ERS		KPSS	
	Estadístico	Valor crítico						
TES	-1,76	-1,95	-1,09	-2,89	0,38	-1,94	1,93	0,46
TES_USA	-1,15	-1,95	-1,13	-2,89	-0,40	-1,94	1,84	0,46
L_TRM	-3,73	-3,43	-3,60	-3,45	-3,37	-2,93	0,20	0,15
EMBI	-1,60	-1,95	-2,85	-2,89	-0,51	-1,94	1,29	0,46

Pruebas de raíz unitaria sobre las series en diferencias

Series	ADF		PP		ERS		KPSS	
	Estadístico	Valor crítico						
TES	-8,97	-3,43	-13,72	-3,45	-7,15	-2,93	0,07	0,15
TES_USA	-10,75	-3,43	-12,35	-3,45	-11,12	-2,93	0,03	0,15
L_TRM	-9,54	-3,43	-12,28	-3,45	-10,13	-2,93	0,03	0,15
EMBI	-8,78	-3,43	-12,17	-3,45	-6,47	-2,93	0,06	0,15

Pruebas de cointegración

Prueba de Phillips-Ouliaris	
Estadístico Phillips-Ouliaris	P-valor
	0,01

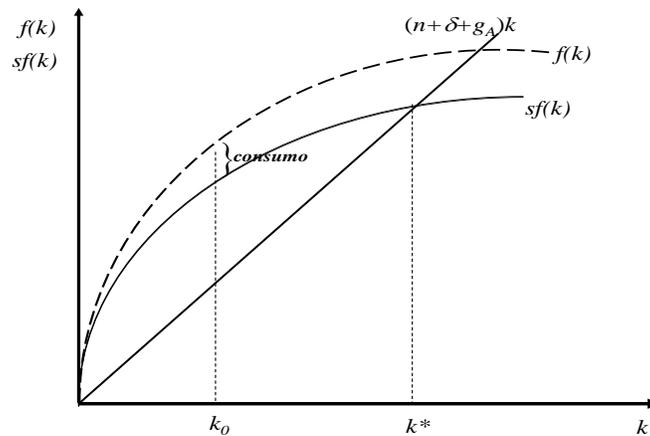
Pruebas de especificación

Prueba	P-valor
Engel-Arch	0,9701328
Ljung-box	0,09178913
Jarque Bera	0,4439167
Shapiro wilk	0,08402287

Anexo 4. Referentes de largo plazo para hacer la previsión de la tasa de interés real⁴².

Para aclarar estos puntos consideremos en primer lugar el modelo de Solow-Swan, cuya ecuación fundamental está dada por: $\dot{k} = sf(k) - (n + \delta + g_A)k$, siendo s la tasa de ahorro, k el capital per cápita, n la tasa de crecimiento poblacional, δ la tasa de depreciación, y g_A la tasa de progreso tecnológico. Por lo tanto, $sf(k)$ es el ahorro o inversión bruta por trabajador eficiente y $(n + \delta + g_A)k$, la inversión requerida por unidad eficiente de trabajo. El Gráfico A1 muestra la situación de equilibrio.

Gráfico A1. Equilibrio en el modelo Solow-Swan



En estado estacionario las variables relevantes crecen a una tasa constante: $sf(k^*) = (n + \delta + g_A)k^*$. La constancia de las “magnitudes por trabajador eficiente” implica que los niveles de las variables agregadas (capital, K , producto, Y , y consumo, C) crecen en el estado estacionario al mismo ritmo en que lo hacen la población n y el progreso tecnológico, g_A .

En estado estacionario, el consumo, está dado por:

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*)$$

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta + g_A)k^*$$

La cantidad c^* aumenta con s para niveles bajos de la tasa de ahorro y decrece al aumentar s para niveles elevados de s . El máximo consumo está en s_{oro} (ver Gráficos A2 y A3) el cual se obtiene al hacer:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left\{ f' [k^*(s, n, \delta, g_A)] - (n + \delta + g_A) \right\} \frac{\partial k^*(s, n, \delta, g_A)}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow f'(k_{oro}) = n + \delta + g_A$$

$$\Rightarrow c_{oro} = f(k_{oro}) - (n + \delta + g_A) k_{oro}$$

⁴² Basado en Sala-i-Martin (2000) y Romer (2012).

Gráfico A2. Tasa de ahorro de oro, consumo de oro y stock de capital en el modelo Solow-Swan

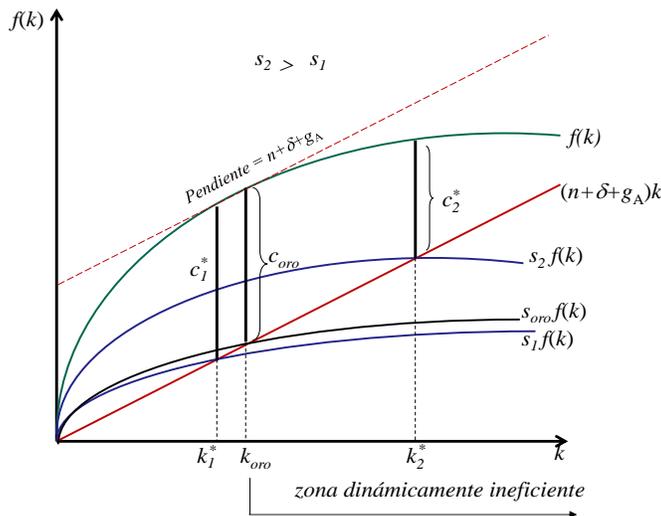
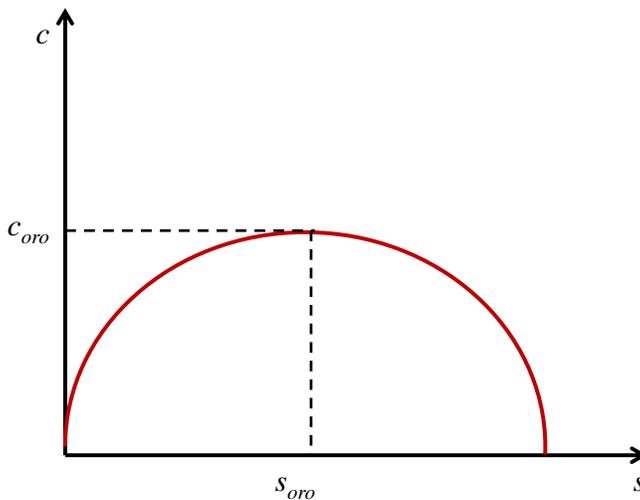


Gráfico A3. Comportamiento del consumo en el modelo Solow-Swan



Por lo tanto, la sociedad estará disfrutando de su máximo nivel de consumo cuando en estado estacionario, la rentabilidad del capital, neta de la tasa de depreciación, sea igual a la tasa de crecimiento de la población y del nivel tecnológico.

Si $s > s_{oro}$, la economía está ahorrando en exceso, ya que el consumo por trabajador podría aumentarse en todo momento reduciendo la tasa de ahorro. En tal caso, se dice que la economía es *dinámicamente ineficiente* pues la senda del consumo por trabajador está por debajo de sendas alternativas alcanzables en todo momento. Si $s < s_{oro}$, el consumo por trabajador en equilibrio estacionario podría aumentarse aumentando la tasa de ahorro.

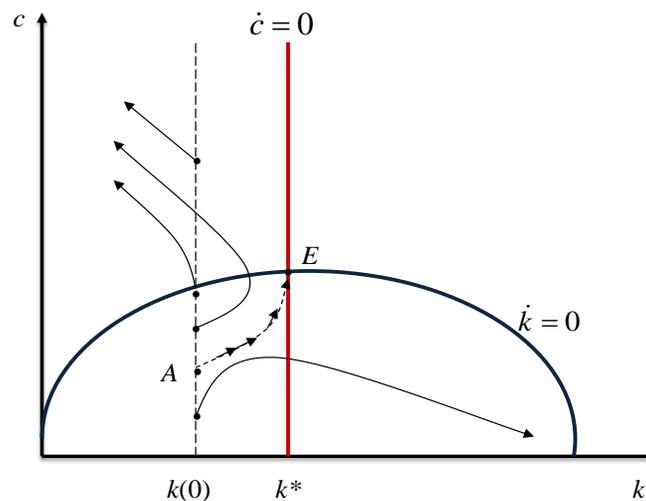
Si $f'(k) > (n + \delta + g_A)$ al aumentar el ahorro, y con él la inversión, habrá más producto adicional que el necesario para mantener k en su nivel más elevado y, por tanto, el consumo aumentará. Sin

embargo, el aumento en la tasa de ahorro reducirá el consumo presente por trabajador y durante parte del periodo de transición.

La restricción macroeconómica también se puede ilustrar a partir del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, que hace explícita la optimización de los agentes e introduce el concepto de impaciencia, altamente relacionado con la tasa de interés real de largo plazo. En este modelo de horizonte infinito, las familias optimizan, alquilan capital y venden los servicios de mano de obra a las firmas para producir. Un número fijo de familias que viven infinitamente ofrecen trabajo, mantienen capital, consumen y ahorran; no hay imperfecciones de mercado. Las firmas maximizan beneficios y deciden la demanda de factores.

En este modelo de crecimiento óptimo, la evolución del *stock* de capital se deriva de la interacción entre familias que maximizan su utilidad y empresas que maximizan beneficios y que operan en mercados competitivos. La tasa de ahorro es endógena: no permanece constante (como en Solow-Swan) y es función del *stock* de capital por trabajador.

Gráfico A4. Tasa de crecimiento de la población. 1985-2020.



El Gráfico A4 muestra la forma como deben evolucionar c y k para satisfacer la condición de optimización intertemporal de las familias:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \delta - \rho - \theta g_A}{\theta}$$

y la ecuación que relaciona el cambio en k con el producto y el consumo:

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n + \delta + g_A)k(t)$$

dados los valores iniciales de c y k . Los parámetros ρ y θ representan la tasa subjetiva de descuento y el coeficiente de aversión al riesgo.

En el Gráfico A4, puntos por encima de la senda de equilibrio, llevarán a que la economía se mueva continuamente hacia arriba y hacia la izquierda. Solamente un punto como A , que está en un punto medio por debajo de la curva $\dot{k}=0$, exhibe las condiciones de $c(0)$ y \dot{k} , tales que eventualmente se alcanza E .

Si la economía comienza en algún punto por encima de A , c es alto y crecerá. Como resultado, de acuerdo con la ecuación $\dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n + \delta + g_A)k(t)$, k podría llegar a ser cero. Para que esta ecuación al igual que $\dot{c}(t)/c(t) = \{f'[k(t)] - \delta - \rho - \theta g_A\}/\theta$ se sigan cumpliendo, c tiene que continuar aumentando y k tiene que hacerse negativo. Pero esto no puede ocurrir ya que cuando k es cero, c se hace cero. Esto significa que entonces la condición de optimización intertemporal $\dot{c}(t)/c(t) = \{f'[k(t)] - \delta - \rho - \theta g_A\}/\theta$ no está siendo satisfecha; por lo tanto estas trayectorias pueden ser excluidas: el agente no estaría escogiendo una senda que maximice su consumo, sino uno que realmente lo minimiza.

Para eliminar sendas que comienzan por debajo de A , se utiliza la restricción presupuestal expresada en el comportamiento en el límite de las tenencias de capital:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-R(s)} e^{(n+\delta+g_A)s} k(s) \geq 0$$

Si la economía empieza por debajo de A , eventualmente k excederá el *stock* de capital de la regla de oro. Como resultado, se tendrá que $f'(k) < (n + \delta + g_A)$, de forma que $e^{-R(s)} e^{(n+\delta+g_A)s}$ estará en aumento. Como k también está en aumento, $e^{-R(s)} e^{(n+\delta+g_A)s} k(s)$ será divergente y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{-R(j)} e^{(n+\delta+g_A)j} k(j)$$

será muy grande (infinito). Esto quiere decir que el ingreso es mucho mayor que el consumo, por lo que dicha senda no puede ser de equilibrio.

Si la economía comienza en A , k convergerá a k^* y r (la tasa de interés real definida como la productividad marginal del capital neta de depreciación) a $f'(k^*) - \delta = \rho + \theta g_A$. En consecuencia, $e^{-R(s)} e^{(n+\delta+g_A)s}$ caerá a la tasa $\rho - n - (1 - \theta)g_A > 0$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-R(s)} e^{(n+\delta+g_A)s} k(s)$ será igual a cero.

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \rho - n - (1 - \theta)g_A &> 0 \\ \rho + \theta g_A &> n + g_A \end{aligned}$$

por eso es la tendencia a cero. Así, la senda que comienza en A es la única posible. Adicionalmente, nótese que la última restricción implica que en este modelo la tasa de interés real de largo plazo (i.e. $\rho + \theta g_A$) también debe ser mayor que la suma de la tasa de crecimiento de la población (n) y el cambio técnico (g_A).