

Modelación de la asimetría y curtosis
condicionales: una aplicación VaR para
series colombianas

Por: Andrés Eduardo Jiménez Gómez,
Luis Fernando Melo Velandia

Núm. 834
2014

Borradores de ECONOMÍA



ta - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col



MODELACIÓN DE LA ASIMETRÍA Y CURTOSIS CONDICIONALES: UNA APLICACIÓN VaR PARA SERIES COLOMBIANAS

ANDRÉS EDUARDO JIMÉNEZ GOMÉZ
(andres.jimenez-g@mail.escuelaing.edu.co)

LUIS FERNANDO MELO VELANDÍA
(lmelevel@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

RESUMEN. Las metodologías tradicionales utilizadas para calcular el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional usualmente modelan el primer y segundo momento de las series, suponiendo que el tercer y cuarto momento son constantes. En este documento se utiliza la metodología de Hansen [1994] para modelar los primeros cuatro momentos de la serie, en particular, se usan varias formas paramétricas para modelar la asimetría y curtosis. Las medidas de VaR y CVaR tradicionales y las propuestas son calculadas para la Tasa Representativa del Mercado, los TES, y el IGBC para el periodo diario comprendido entre enero de 2008 y febrero de 2014. En general, se encuentra que las medidas de riesgo de mercado presentan mejor desempeño al modelar la asimetría y la curtosis.

Palabras claves: Valor en riesgo, valor en riesgo condicional, backtesting, asimetría, curtosis.
Códigos de clasificación JEL: C51, C52, G17.

1. INTRODUCCIÓN

Para las instituciones financieras es importante contar con instrumentos adecuados de gestión del riesgo de mercado, dado que estos permiten cuantificar el riesgo al cual un activo o un portafolio está expuesto. En el caso Colombiano, las instituciones financieras están obligadas a mantener un capital de reserva para cubrir los riesgos percibidos en el mercado.

Usualmente se utiliza el *Valor en Riesgo*, VaR^α , para cuantificar el riesgo de mercado. Esta medida corresponde a la mínima pérdida esperada en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ de los peores casos. Así, con una probabilidad α el administrador de riesgo esperaría que la pérdida de su inversión no será mayor al VaR. En términos estadísticos, el VaR^α es el cuantil α -ésimo de la distribución de pérdidas y ganancias del activo.

Fecha: Julio de 2014.

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Se agradecen los comentarios de Carmen Delgado.

Algunas metodologías tradicionales usadas para calcular el *VaR* son: Simulación histórica, Normalidad, RiskMetrics[©] y ARMA-GARCH. La simulación histórica obtiene directamente el *VaR* a partir del cuantil empírico de los retornos del activo, sin suponer que estos sigan alguna distribución paramétrica. Sin embargo, supone que todos los momentos de la serie son constantes. Por otra parte, la metodología de Normalidad o de varianza-covarianza asume que los retornos siguen una distribución normal, a pesar de que su estimación es sencilla, este método también supone que todos los momentos son constantes. Por el contrario, RiskMetrics[©] modela la varianza de los retornos a partir de un modelo de suavizamiento exponencial; pero debido a su construcción no permite obtener volatilidad de largo plazo (varianza no condicional). Finalmente, la metodología ARMA-GARCH modela los primeros dos momentos condicionales de los retornos del activo.

Es importante notar que las últimas tres metodologías mencionadas suponen normalidad¹, mientras que las series financieras con datos de alta frecuencia, en general, se asocian a distribuciones de colas pesadas y en algunos casos asimétricas.

Jondeau et al. [2007] resaltan la necesidad de hacer una correcta especificación de la distribución de los retornos. Estos autores proponen que modelar la asimetría y curtosis permite tener una descripción más adecuada de la distribución de los retornos, esta información adicional es útil para modelar datos de frecuencia alta o cuando se tienen retornos con distribuciones de colas muy pesadas. Este enfoque puede ser utilizado, por ejemplo, en las herramientas empleadas por inversionistas para la toma de decisiones, dado que estos deben tener en cuenta la asimetría y la curtosis de los retornos de los activos; en general, se espera que los inversionistas prefieran asimetrías positivas y presenten comportamiento adverso a la curtosis; por otra parte, la modelación de los dos momentos adicionales puede mejorar el desempeño de las medidas de riesgo de mercado.

Este documento sigue la metodología propuesta inicialmente por Hansen [1994] y ampliada posteriormente por Jondeau y Rockinger [2003]. Bajo esta metodología los errores estandarizados de un modelo ARMA-GARCH siguen una distribución *t* student asimétrica. Adicionalmente, los autores proponen modelar los grados de libertad y el parámetro de asimetría de la distribución, de tal forma que los momentos condicionales tres y cuatro pueden ser calculados analíticamente a partir de estos parámetros variantes.

El resto de este documento se divide en seis secciones, la sección 2 define formalmente el Valor en Riesgo (*VaR*) y el Valor en Riesgo Condicional (*CVaR*). A continuación en la sección 3 se presentan las metodologías usualmente utilizadas para modelar el *VaR* y también se muestra la propuesta metodológica de Hansen [1994] y Jondeau y Rockinger [2003]. Posteriormente, en la sección 4 se exponen algunas de las pruebas de *backtesting* más usadas en la literatura, y se incluye la prueba propuesta recientemente por Leccadito et al. [2014]. En la sección 5 se presentan los modelos y las series que se utilizarán en este documento. Posteriormente, en la sección 6 se muestran los resultados de las estimaciones del *VaR* y *CVaR* junto con las pruebas de *Backtesting*

¹Cabe señalar que los modelos ARMA-GARCH permiten definir otras funciones de distribución para los errores estandarizados, en su versión más sencilla se asume normalidad.

para cada modelo. Finalmente, en la sección 7 se realizan comentarios sobre las metodologías y resultados encontrados.

2. VALOR EN RIESGO Y VALOR EN RIESGO CONDICIONAL

2.1. Valor en Riesgo. El VaR es una medida altamente aceptada y difundida entre quienes manejan portafolios de activos financieros, su aceptación se debe principalmente a que condensa gran cantidad de información en un número. El $VaR_{t|t-k}^\alpha$ de un portafolio, es la máxima pérdida posible en el $\alpha \times 100\%$ de los mejores escenarios o equivalentemente a la mínima pérdida en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ de los peores casos, para el periodo t , con información disponible hasta $t - k$ y con un horizonte de pronósticos k .

Por ejemplo, asumiendo que los retornos de un activo siguen una distribución normal estándar, la máxima pérdida en el 95 % de los mejores escenarios, será el 1,65 % del valor del portafolio.

Para facilitar el manejo y notación de las expresiones utilizadas en este documento se supone que r_t corresponde a los retornos negativos de un activo. Por lo tanto, valores positivos altos de r_t corresponden a pérdidas grandes.

El $VaR_{t|t-k}^\alpha$ con horizonte de pronóstico $k = 1$ e información hasta t , se define como:

$$P[r_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^\alpha] = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = F_r^{-1}(\alpha) \quad (2)$$

$$F_r^{-1}(\alpha) = \inf\{r \in \mathbb{R} : F_r(r) \geq \alpha\} \quad (3)$$

donde $F_r^{-1}(\alpha)$ es la función inversa de la distribución acumulada de los retornos.²

A pesar de su gran aceptación, el VaR es objeto de numerosas críticas. Principalmente, la de no cumplir con la condición de subaditividad de Artzner et al. [1999]. La subaditividad hace referencia al principio de diversificación, en el cual el riesgo de un portafolio debería ser menor o igual a la suma de los riesgos individuales de los activos que lo componen. Puesto que el VaR no siempre cumple con esta propiedad, este podría llevar a resultados contradictorios para el administrador de riesgo.

2.2. Valor en riesgo condicional. Una medida de riesgo de mercado que efectivamente cumple con la condición de subaditividad es el valor en riesgo condicional ($CVaR$), esta medida se define como el valor esperado de las pérdidas que exceden el VaR, formalmente:

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = E(r_{t+1} | r_{t+1} > VaR_{t+1|t}^\alpha) \quad (4)$$

El CVaR se entiende como el promedio de los retornos en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ peores casos, este se obtiene a partir de:

²Es importante resaltar que dicha función no necesariamente tiene una solución analítica.

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \frac{1}{1 - F_r(VaR_{t+1|t}^\alpha)} \int_{VaR_{t+1|t}^\alpha}^U r_t f_r(r) dr \quad (5)$$

Donde, $F_r(\cdot)$ y $f_r(\cdot)$ corresponden a la función de distribución y de densidad de los retornos, respectivamente y U es la pérdida máxima que puede sufrir el activo.

3. METODOLOGÍA

En esta sección se presenta un resumen de las metodologías tradicionales empleadas para calcular el VaR y el CVaR, y se expone la metodología propuesta para modelar la asimetría y curtosis condicional.

3.1. Metodologías tradicionales.

3.1.1. *Simulación histórica.* Este método obtiene el VaR a partir del cuantil empírico de los retornos del activo, se define como:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = PE(\{r_s\}_{s=1,\dots,t}, \alpha) \quad (6)$$

y el CVaR:

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \frac{1}{(1 - \alpha)t} \sum_{s=1}^t r_s \times \mathbf{1}(r_s > VaR_{t+1|t}^\alpha) \quad (7)$$

Donde PE es el cuantil α -ésimo de la distribución empírica y $\mathbf{1}(\cdot)$ es la función indicadora, que toma el valor de 1 si la condición al interior del paréntesis se cumple.

Esta metodología no paramétrica es sensible al tamaño de muestra utilizado y a la inclusión de nuevos datos, además supone que todos los momentos de la distribución de los retornos son constantes.

3.1.2. *Normalidad.* Es el caso más sencillo en el que se hace algún supuesto sobre la distribución de los retornos, en esta metodología se asume: $r_t \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$, a partir de la ecuación (1) el VaR se deduce como:

$$P \left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR_{t+1|t}^\alpha - \mu}{\sigma} \right] = 1 - \alpha \quad (8)$$

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \mu + \sigma Z_\alpha \quad (9)$$

Donde $Z_\alpha \equiv \Phi^{-1}(\alpha)$ y $\Phi^{-1}(\alpha)$ es la función inversa de la distribución normal estándar acumulada.

y el CVaR:

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \quad (10)$$

Al igual que en la simulación histórica el VaR por normalidad es ampliamente usado por su facilidad de estimación. Sin embargo, un hecho estilizado en las series financieras de alta frecuencia es que presentan distribuciones con colas pesadas y asimetría. Estas series, en general, no siguen una distribución normal. Igualmente, esta metodología asume que todos los momentos de los retornos son constantes en el tiempo.

3.1.3. *RiskMetrics*®. Este método propuesto por Morgan [1996] consiste en utilizar la técnica de suavizamiento exponencial, en la cual la varianza se determina como un promedio ponderado de los retornos cuadráticos pasados, es decir:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{t-i}^2 \quad (11)$$

suponiendo que las ponderaciones decaen exponencialmente de forma constante: $\alpha_{i+1}/\alpha_i = \lambda$ con $\lambda \in (0, 1)$, y si n es grande se puede demostrar que el componente de volatilidad de la serie se obtiene a partir de:

$$\sigma_t^2 \approx \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (12)$$

RiskMetrics® supone que $r_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_t^2)$, por consiguiente el VaR y el CVaR se obtienen a partir de las ecuaciones (1) y (12) como:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\sigma}_{t+1|t} Z_\alpha \quad (13)$$

y:

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\sigma}_{t+1|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \quad (14)$$

Donde $\hat{\sigma}_{t+1|t}$ es el pronóstico de la volatilidad calculado a través de la ecuación (12). Usualmente el parámetro λ toma valores entre 0,94 y 0,99. A medida λ es mayor, la varianza condicional tendrá un comportamiento más suave. Sin embargo, la varianza no condicional (volatilidad de largo plazo) para este método no está definida.

3.1.4. *ARMA-GARCH*. Esta metodología modela el primer y segundo momento condicional de la serie a partir de un proceso *ARMA* y uno *GARCH* respectivamente. Formalmente:

$$\Phi(B)r_t = \xi + \Theta(B)\varepsilon_t \quad (15)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad (16)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (17)$$

Donde las ecuaciones (15) y (17) modelan la media y varianza condicional de los retornos, adicionalmente con el fin de garantizar la no negatividad de σ se imponen las siguientes restricciones: $\alpha_0 > 0$; $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, p$; $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, q$.

Si se definen $\hat{\mu}_{t+1|t}$ y $\hat{\sigma}_{t+1|t}$ como el pronóstico de la media y la volatilidad condicional obtenidos por medio de las ecuaciones (15) y (17) y se supone que $z_t \sim N(0, 1)$, el VaR y el CVaR se calculan como:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\mu}_{t+1|t} + \hat{\sigma}_{t+1|t} Z_\alpha \quad (18)$$

y

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\mu}_{t+1|t} + \hat{\sigma}_{t+1|t} \frac{\phi(Z_\alpha)}{1 - \Phi(Z_\alpha)} \quad (19)$$

3.2. Modelación de Asimetría y Curtosis.

En su versión más simple, la metodología ARMA-GARCH asume que z_t sigue una distribución normal estándar. Sin embargo, es posible utilizar una distribución más flexible que permita incorporar colas pesadas y asimetría, con el fin de tener un mayor acercamiento a la evidencia empírica para datos de alta frecuencia.

En la siguiente sección se define la distribución *t Student Asimétrica* propuesta por Hansen [1994], la cual se utiliza como función de distribución de z_t , y posteriormente, se presenta el concepto de *Densidad condicional autoregresiva* para modelar la asimetría y curtosis condicional.

3.2.1. *Distribución t Student Asimétrica.* La función de densidad de una variable aleatoria distribuida *t student asimétrica* con v grados de libertad y con parámetro de asimetría λ es:

$$g(z|v, \lambda) = b \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi(v-2)}\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{\zeta^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (20)$$

donde

$$\zeta = \begin{cases} (bz+a)/(1-\lambda) & \text{si } z < -a/b \\ (bz+a)/(1+\lambda) & \text{si } z \geq -a/b \end{cases}$$

y la función de distribución (*cdf*) es:

$$G(z|v, \lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)T\left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\sqrt{\frac{v}{v-2}}|v\right) & \text{si } z < -a/b \\ (1+\lambda)T\left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\sqrt{\frac{v}{v-2}}|v\right) - \lambda & \text{si } z \geq -a/b \end{cases} \quad (21)$$

donde $T(x|v)$ es la *cdf* de la distribución estándar t con v grados de libertad y los términos a y b son:

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda c \frac{v-2}{v-1} \\ b^2 &= 1 + 3\lambda^2 - a^2 \end{aligned}$$

donde:

$$c = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi(v-2)}\Gamma(\frac{v}{2})}$$

Jondeau et al. [2007] muestran que $g(z|v, \lambda)$ está definida si el dominio de los parámetros es: $(v, \lambda) \in]2, +\infty[\times]-1, 1[$. En la Figura 1 se encuentra la comparación de una variable aleatoria distribuida t estándar con una distribuida t asimétrica para distintos grados de libertad y parámetros de asimetría.

El concepto de *densidad condicional autoregresiva* se aplica cuando los parámetros de grados de libertad y asimetría varían en el tiempo. Básicamente, la idea detrás de este enfoque es especificar una dinámica para los parámetros v_t y λ_t ; siguiendo a Hansen [1994], Jondeau y Rockinger [2003], Jondeau et al. [2007] y Lambert y Laurent [2002] en este documento se consideran las siguientes especificaciones para los dos parámetros:

$$\text{Dinámica 1} \begin{cases} \tilde{v}_t = a_1 + b_1 \varepsilon_{t-1} \\ \tilde{\lambda}_t = a_2 + b_2 \varepsilon_{t-1} \end{cases} \quad (22)$$

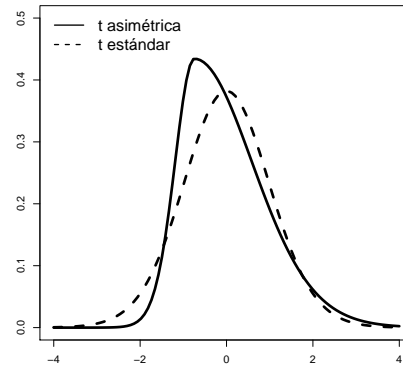
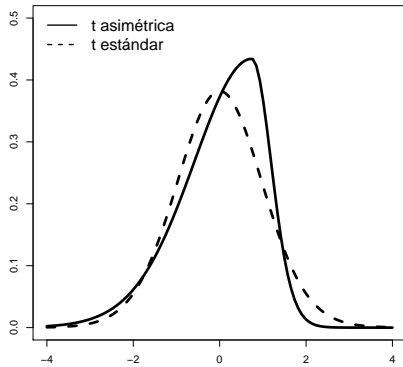
$$\text{Dinámica 2} \begin{cases} \tilde{v}_t = a_1 + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-1}^2 \\ \tilde{\lambda}_t = a_2 + b_3 \varepsilon_{t-1} + b_4 \varepsilon_{t-1}^2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{Dinámica 3} \begin{cases} \tilde{v}_t = a_1 + b_1^+ \varepsilon_{t-1}^+ + b_1^- \varepsilon_{t-1}^- + c_1 \tilde{v}_{t-1} \\ \tilde{\lambda}_t = a_2 + b_2^+ \varepsilon_{t-1}^+ + b_2^- \varepsilon_{t-1}^- + c_2 \tilde{\lambda}_{t-1} \\ \varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0) \text{ y } \varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0) \end{cases} \quad (24)$$

FIGURA 1. Comparación de una variable aleatoria distribuida *t* estándar y una distribuida *t*-asimétrica.

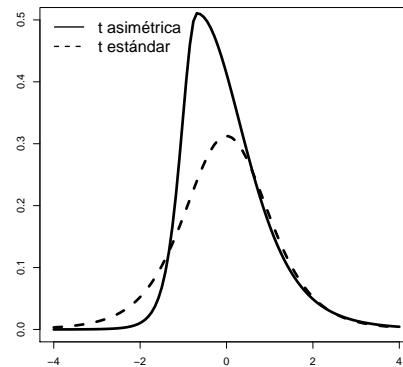
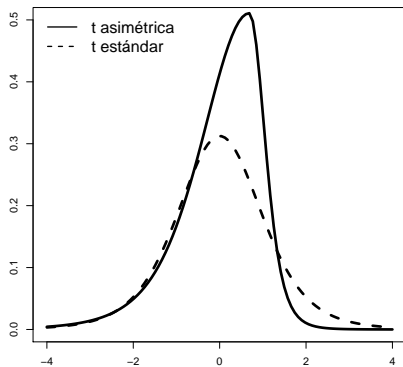
t asimétrica con $v = 30$ y $\lambda = -0,5$ y *t* estándar con 30 grados de libertad

t asimétrica con $v = 30$ y $\lambda = 0,5$ y *t* estándar con 30 grados de libertad



t asimétrica con $v = 6$ y $\lambda = -0,5$ y *t* estándar con 6 grados de libertad

t asimétrica con $v = 6$ y $\lambda = 0,5$ y *t* estándar con 6 grados de libertad



Con $v_t = l_{]2,30[}(\tilde{v}_t)$ y $\lambda_t = l_{]-1,1[}(\tilde{\lambda}_t)$, tal que $l_{]L,U[}$ es la transformación logística; esto permite asegurar que los parámetros estén en el dominio para el cual la densidad está definida³. A partir de las series λ_t y v_t , la asimetría y la curtosis condicionales de la distribución se obtienen de forma analítica usando las ecuaciones (25) y (26) respectivamente:

³Cabe señalar que dicha acotación a los parámetros no asegura la existencia de la asimetría o de la curtosis, al igual que en Jondeau y Rockinger [2003] no se restringe el dominio de los parámetros a $v_t \geq 4$, con el fin de que sean los datos quienes determinen la existencia del tercer y cuarto momento.

$$S = \frac{M_3 - 3aM_2 + 2a^3}{b^3} \quad (25)$$

$$K = \frac{M_4 - 4aM_3 + 6a^2M_2 - 3a^4}{b^4} \quad (26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} M_1 &= a \\ M_2 &= 1 + 3\lambda^2 = b^2 + a^2 \\ M_3 &= 16c\lambda(1 + \lambda^2) \frac{(v-2)^2}{(v-1)(v-3)} \quad \text{si } v > 3 \\ M_4 &= 3 \frac{v-2}{v-4} (1 + 10\lambda^2 + 5\lambda^4) \quad \text{si } v > 4 \end{aligned} \quad (27)$$

Existen varios aspectos a resaltar de la distribución *t Student Asimétrica*, por ejemplo si $\lambda = 0$ la función de densidad presentada en (20) toma la forma de una *t student* tradicional, adicionalmente si $v \rightarrow \infty$ esta se reduce a una distribución normal estándar.

3.2.2. VaR y CVaR.

Para capturar la presencia de colas pesadas y asimetría, se asume que z_t sigue una distribución t-asimétrica, en donde el tercer y cuarto momento son modelados a partir de diferentes especificaciones para los parámetros de grados de libertad y asimetría, esto permite que la distribución varíe en el tiempo y sea más flexible. Así, el VaR y el CVaR bajo esta metodología son:

$$VaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\mu}_{t+1|t} + \hat{\sigma}_{t+1|t} G^{-1}(\alpha, \hat{v}_t, \hat{\lambda}_t) \quad (28)$$

y

$$CVaR_{t+1|t}^\alpha = \hat{\mu}_{t+1|t} + \frac{\hat{\sigma}_{t+1|t}}{1-\alpha} \int_{VaR}^{\infty} z_t g(z_t | \hat{v}_t, \hat{\lambda}_t) dz \quad (29)$$

Donde $G^{-1}(\alpha, \hat{v}_t, \hat{\lambda}_t)$ es la función inversa de la distribución t asimétrica.⁴

En este documento, además de incorporar la función de distribución t-asimétrica para z_t , fueron incluidas algunas especificaciones adicionales de la volatilidad, con el objetivo de modelar mejor las asimetrías de los retornos sobre la volatilidad de las series. Es de esperar, que el mercado reaccione de forma distinta ante un retorno negativo que ante uno positivo (*leverage effect*), en el primer caso puede que el mercado reaccione de una forma más fuerte, dado que los retornos

⁴Esta función está definida en Jondeau et al. [2007].

negativos no son deseados por los inversionistas. Específicamente, las definiciones de volatilidad utilizadas para capturar dichas asimetrías son:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (30)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1^+ \varepsilon_{t-1}^{+2} + \alpha_1^- \varepsilon_{t-1}^{-2} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (31)$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1} - \gamma \varepsilon_{t-1}|)^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta \quad (32)$$

Las especificaciones de volatilidad de las ecuaciones (30), (31) y (32) fueron propuestas por Hansen [1994], Jondeau et al. [2007] y Ding et al. [1993], respectivamente.

4. BACKTESTING

Las pruebas de backtesting permiten verificar si el desempeño del VaR es adecuado. Para esto se construye la serie de excepciones o fallas $I_{t+1|t}$ que se define como:

$$I_{t+1|t}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^\alpha \\ 0 & \text{si } r_{t+1} < VaR_{t+1|t}^\alpha \end{cases}$$

De forma tal que $I_{t+1|t} \stackrel{iid}{\sim} Bernoulli(p)$ con $p = 1 - \alpha = E(I_{t+1|t}(\alpha))$, si el VaR está bien especificado, esta serie cumple con dos propiedades:

1. *Cubrimiento incondicional*: Esta propiedad hace referencia a que la probabilidad con la que se generan pérdidas superiores al VaR (excepciones) debe ser exactamente $1 - \alpha$, si esta probabilidad es mayor (menor) el riesgo se está subestimando (sobrestimando).
2. *Independencia*: Es la propiedad de que cualquier par de observaciones $(I_{t+j|t+j-1}, I_{t+k|t+k-1}) \forall j \neq k$ deben ser independientes.

A continuación se describen las pruebas de backtesting utilizadas en este documento.

4.1. Kupiec. Esta prueba verifica el cumplimiento de la propiedad de cubrimiento incondicional utilizando la hipótesis nula $H_0 : p = 1 - \alpha$, la cual se puede contrastar usando una prueba de razón de verosimilitud, definida como:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{p^x (1-p)^{m-x}}{\tilde{p}^x (1-\tilde{p})^{m-x}} \right)$$

donde x es el número de excepciones, m el número de observaciones incluidas en el backtesting y $\tilde{p} = \frac{x}{m}$. Bajo la hipótesis nula, la distribución asintótica de esta prueba es χ^2 con un grado de libertad.

4.2. Pruebas de Christoffersen. Estas pruebas verifican las dos propiedades comentadas anteriormente, para tal efecto, Christoffersen et al. [2003] suponen que las realizaciones de la sucesión de variables aleatorias $\{I_{t+1|t}(\alpha)\}_{n_1}^{n-1}$ siguen una cadena de Markov de orden uno, de forma que la matriz de transición de la serie es:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

donde $\pi_{ij} = P(I_{t+1|t}(\alpha) = j | I_{t|t-1}(\alpha) = i)$ con $i, j = \{0, 1\}$ son las probabilidades de transmisión de la cadena de Markov, tal que $\pi_{i0} + \pi_{i1} = 1$, con lo cual la matriz de transición se puede reescribir como:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

y cuya función de verosimilitud es:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{m_{00}} \pi_{01}^{m_{01}} (1 - \pi_{11})^{m_{10}} \pi_{11}^{m_{11}}$$

m_{ij} es el número de observaciones en las cuales $I_{t+1|t}(\alpha) = j$ e $I_{t|t-1}(\alpha) = i$, con $m_{00} + m_{01} + m_{10} + m_{11} = m$, siendo m el número total de observaciones usadas en el backtesting, donde el estimador de máxima verosimilitud de Π_1 es:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_{00}}{m_{00} + m_{01}} & \frac{m_{01}}{m_{00} + m_{01}} \\ \frac{m_{10}}{m_{10} + m_{11}} & \frac{m_{11}}{m_{10} + m_{11}} \end{bmatrix}$$

Bajo el supuesto de independencia $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$, la matriz de transición toma la forma:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 - \pi & \pi \\ 1 - \pi & \pi \end{bmatrix}$$

Christoffersen et al. [2003] prueban la hipótesis nula $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}$ con una prueba de razón de verosimilitud que se distribuye asintóticamente χ^2 con un grado de libertad:

$$LR_{ind} = 2 \left(l(\hat{\Pi}_1) - l(\hat{\Pi}_0) \right)$$

donde $l(\cdot) = \log(L(\cdot))$ y $\hat{\Pi}_0$ es la matriz de transición Π_0 evaluada en $\hat{\pi}$, y $\hat{\pi} = \frac{m_{01} + m_{11}}{m}$.

La propiedad de cubrimiento incondicional que anteriormente se verificó mediante la prueba de Kupiec también puede ser calculada en el contexto de Christoffersen, en esta prueba la hipótesis nula es $H_0 : p = 1 - \alpha$ y su estadístico se basa en una prueba de razón de verosimilitud:

$$LR_{uc} = 2 \left(l \left(\widehat{\Pi}_0 \right) - l \left(\Pi_p \right) \right)$$

Donde Π_p corresponde a la matriz de transición Π_0 evaluada en $\pi = p = (1 - \alpha)$.

Si se desea probar simultáneamente las propiedades de cubrimiento incondicional e independencia, se debe cumplir que: $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = p$, esta hipótesis se puede probar utilizando la siguiente prueba de razón de verosimilitud:

$$LR_{cc} = 2 \left(l \left(\widehat{\Pi}_1 \right) - l \left(\Pi_p \right) \right)$$

bajo la hipótesis nula el estadístico LR_{cc} se distribuye asintóticamente χ^2 con dos grados de libertad, Christoffersen et al. [2003] demuestran que este estadístico puede ser también calculado como:

$$LR_{cc} = LR_{ind} + LR_{uc}$$

4.3. Backtesting sobre el CVaR. En Becerra y Melo [2008] se menciona una prueba para evaluar el CVaR. Esta prueba parte del hecho que la diferencia entre el promedio de las perdidas mayores al VaR y el CVaR debería ser cero. Para esto se construye la serie de excesos $H_{t|t-1}(\alpha)$ definida como:

$$H_{t|t-1}(\alpha) = \left(r_t - CVaR_{t|t-1}^\alpha \right) I_{t|t-1}(\alpha)$$

Si el CVaR está bien especificado, $H_{t|t-1}(\alpha)$ no debería ser significativamente diferente de cero. La hipótesis nula $H_{t|t-1}(\alpha) = 0$ es evaluada como lo recomiendan McNeil et al. [2010], a partir de un estadístico t calculado con técnicas *bootstrap*, estos autores recomiendan ponderar a $H_{t|t-1}(\alpha)$ por $\frac{1}{\widehat{\sigma}_{t|t-1}}$ dado que en general este proceso tiene una varianza que no es constante en el tiempo.

4.4. Backtesting multinivel. Usualmente, las estimaciones VaR son realizadas para diferentes valores α . En este contexto, Leccadito et al. [2014] proponen dos pruebas para realizar backtesting multinivel. Es decir, en lugar de realizar pruebas de backtesting para cada nivel α por separado, estos autores prueban de forma conjunta si el VaR está bien especificado para distintos valores α . A continuación se describe la metodología propuesta.

Suponiendo que se tienen K diferentes niveles de confianza para estimar el VaR: $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_K$, tal que $VaR_{t+1|t}^{\alpha_1} > VaR_{t+1|t}^{\alpha_2} > \dots > VaR_{t+1|t}^{\alpha_K}$, se construye la siguiente serie de fallas:

$$J_{i,t+1|t} = \begin{cases} 1 & \text{si } VaR_{t+1|t}^{\alpha_{i+1}} < r_{t+1} \leq VaR_{t+1|t}^{\alpha_i} \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, K$, con $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{K+1} = 0$, $VaR_{t+1|t}^{\alpha_{K+1}} = -\infty$ y $J_{0,t+1|t} = \prod_{i=1}^K (1 - J_{i,t+1|t})$; adicionalmente, es necesario construir la serie N_t , tal que $N_t = i$ cuando $J_{i,t+1|t} = 1$ para $i = 1, \dots, K$.

La primera prueba que los autores proponen es una generalización del test de Christoffersen [1998]. En el caso multinivel se considera la siguiente matriz de transición:

$$\Pi = [\pi_{i,j}]_{i,j=0,\dots,K}$$

donde $\pi_{i,j} = P(J_{j,t+1}|t = 1|J_{i,t}|t-1 = 1)$, bajo la hipótesis de independencia, todas las filas en la matrix Π son iguales: $H_{o,ind} : \pi_{0,j} = \pi_{1,j} = \dots = \pi_{K,j}$ para $j = 0, \dots, K-1$. La función log-verosimilitud asociada a esta prueba es:

$$l(\Pi) = \sum_{\substack{0 < i \leq K \\ 0 < j \leq K}} T_{i,j} \ln(\pi_{i,j})$$

por lo cual, el estadístico de razón de verosimilitud es:

$$LR_{ind} = 2 \left(\sum_{\substack{0 < i \leq K \\ 0 < j \leq K}} T_{i,j} \ln(\hat{\pi}_{i,j}) - \sum_{i=0}^K T_i \ln(\hat{\pi}_i) \right)$$

donde $\hat{\pi}_{i,j} = T_{i,j}/T_i$ y $\hat{\pi}_i = T_i/T$, donde $T_{i,j}$ denota el número de observaciones en la muestra de N_t en las cuales las fallas pasan del caso i al caso j , con $i, j = 0, \dots, K$, y T_i es el número total de fallas de tipo i . Esta prueba se distribuye asintóticamente χ^2 con K^2 grados de libertad.

En este contexto, la propiedad de cubrimiento incondicional, se evalúa usando la siguiente prueba de razón de verosimilitud:

$$LR_{uc} = 2 \left(\sum_{i=0}^K \ln(\hat{\pi}_i/\theta_i)^{T_i} \right)$$

donde $\theta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, K$, si $K = 1$ se obtiene el test de Kupiec descrito anteriormente. Esta prueba se distribuye asintóticamente χ^2 con K grados de libertad.

Por último, en la prueba de cubrimiento condicional donde simultáneamente se prueban las propiedades de independencia y cubrimiento incondicional, la hipótesis nula es: $H_{0,cc} : \pi_{0,j} = \pi_{1,j} = \dots = \pi_{K,j} = \theta_j$ para $j = 0, \dots, K-1$, en este caso la prueba de razón de verosimilitud es:

$$LR_{cc} = 2 \left(\sum_{\substack{0 < i \leq K \\ 0 < j \leq K}} T_{i,j} \ln(\hat{\pi}_{i,j}) - \sum_{i=0}^K T_i \ln(\theta_i) \right)$$

Esta prueba se distribuye asintóticamente χ^2 con $K^2 + K$ grados de libertad.

La segunda prueba propuesta por los autores, es la multinivel de Pearson, en la cual se considera la siguiente distribución bivariada:

$$P_{N_t, N_{t-j}} = P(N_t = x, N_{t-j} = y)$$

Bajo la hipótesis nula de cubrimiento condicional, se tiene que:

$$P_{N_t, N_{t-j}}(x, y) = P(N_t = x)P(N_{t-j} = y) = \theta_x \theta_y \quad \forall x, y$$

El estadístico para esta prueba es:

$$X_m = \sum_{j=1}^m X^{(j)}$$

con

$$X^{(j)} = \sum_{x,y} \frac{(T_{x,y}^{(j)} - (T-j)\theta_x\theta_y)^2}{(T-j)\theta_x\theta_y}$$

Donde $T_{x,y}^{(j)}$ es el número de observaciones en la muestra para las cuales $N_t = x$ y $N_{t-j} = y$.

El estadístico X_m corresponde a la suma de variables aleatorias dependientes χ^2 . Su distribución no es estándar, inclusive para muestras grandes. Leccadito et al. [2014] proponen utilizar un procedimiento de Monte Carlo para calcular los valores críticos asociados a esta prueba.

4.5. Funciones de pérdida. Es conveniente además de probar el cumplimiento de las propiedades de la serie $I_{t+1|t}(\alpha)$, tener en cuenta las magnitudes de las pérdidas superiores al VaR. Por ejemplo, cuando se cuente con dos estimaciones del VaR apropiadas para un activo, se preferiría aquella que genere las menores pérdidas. En la literatura se encuentran diversas pruebas que evalúan las pérdidas del VaR, que en general, asignan un puntaje a través de una función de pérdida. La idea en este enfoque es generar una función de la forma:

$$C_t = \begin{cases} f(r_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) & \text{si } r_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ g(r_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) & \text{si } r_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

Esta función debe cumplir con la propiedad $f(r_t, VaR_{t|t-1}^\alpha) \geq g(r_t, VaR_{t|t-1}^\alpha)$, de tal forma que implica mayores valores cuando existe una pérdida superior al VaR.

Posteriormente, se construye un índice de desempeño definido como:

$$C = \sum_{t=1}^m C_t \tag{33}$$

Bajo este contexto, el mejor modelo es aquel que minimiza el índice C . Algunas de las funciones propuestas para este índice son:

1. La Frecuencia de pérdidas en las colas ajustada por el tamaño (López II) es propuesta por Lopez [1998], bajo esta medida la función de C_t se define como:

$$C_t = \begin{cases} 1 + (r_t - VaR_{t|t-1}^\alpha)^2 & \text{si } r_t > VaR_{t|t-1}^\alpha \\ 0 & \text{si } r_t \leq VaR_{t|t-1}^\alpha \end{cases}$$

2. Caporin [2003] argumenta que las funciones propuestas por Lopez [1998] tienden a descartar modelos apropiados para la medición de riesgo cuando estos presentan excepciones de gran tamaño. Por lo tanto, propone el uso de las siguientes funciones de pérdidas menos sensibles a valores atípicos; siendo $g(\cdot) = 0$ y $f(\cdot) = F_i$ para $i = 1, 2, 3$ con:

$$F_1 = \left| 1 - \frac{r_t}{VaR_{t|t-1}^\alpha} \right|$$

$$F_2 = \frac{\left(|r_t| - VaR_{t|t-1}^\alpha \right)^2}{|VaR_{t|t-1}^\alpha|}$$

$$F_3 = \left| r_t - VaR_{t|t-1}^\alpha \right|$$

5. EJERCICIO EMPÍRICO

En este documento se utilizan las siguientes series para calcular el VaR; el índice general de la bolsa de Colombia IGBC desde 02/01/2008 hasta el 21/02/2014, la tasa de cambio representativa del mercado TRM desde 02/01/2008 hasta el 21/02/2014 y finalmente se emplearon los TES a 20 años del 20/03/2009 hasta 21/02/2014. En total se consideraron 10 métodos para modelar el VaR de cada una de estas series, 6 de estos incluyen la función de distribución t student asimétrica; de estos 6, 4 de ellos modelan la asimetría y la curtosis. Finalmente, los 4 restantes corresponden a los métodos usuales (Simulación histórica, Normalidad, RiskMetrics y ARMA-GARCH). Las 6 metodologías alternativas son:

1. Jondeau Rockinger 2007: Esta metodología considera un $ARMA(p, q)$ para modelar el primer momento de los retornos, mientras que para el segundo momento se utiliza la siguiente especificación: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1^+ \varepsilon_{t-1}^{+2} + \alpha_1^- \varepsilon_{t-1}^{-2} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$; por otra parte, se asume que el error estandarizado z_t sigue una distribución t-asimétrica con la dinámica 3 (ecuación (24)) para los parámetros ν_t y λ_t .
2. Hansen 1994: En este caso se utiliza un $ARMA(p, q)$ para el primer momento de los retornos, la varianza se modela usando: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ y los errores z_t se distribuyen t-asimétricos con la dinámica 2 (ecuación (23)).
3. Jondeau Rockinger 2007 ν y λ constantes: Esta metodología modela los primeros dos momentos de forma similar a la alternativa 1 (Jondeau Rockinger 2007), aunque se asume que z_t sigue una distribución t-asimétrica con ν y λ constantes en el tiempo.
4. Jondeau Rockinger 2003: En este caso se utiliza un $ARMA(p, q)$ para el primer momento de r_t , mientras que la varianza condicional es descrita por: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ y z_t se distribuye t-asimétrica utilizando la dinámica 1 (ecuación (22)) para los parámetros de la distribución.
5. ARMA-APGARCH: Con el objetivo de incorporar el impacto diferencial que pueden tener un retorno negativo o uno positivo en la volatilidad condicional, en esta metodología

se utiliza un APGARCH para la volatilidad: $\sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$. Los demás componentes son modelados al igual que la alternativa 1 (Jondeau Rockinger 2007).

6. ARMA-APGARCH constante: Este método modela el primer y segundo momento de forma análoga a la alternativa 5 (ARMA-APGARCH), mientras que z_t sigue una distribución t-asimétrica con ν y λ constantes.

6. RESULTADOS

En las Figuras 2 a la 11 del Apéndice C se encuentran los gráficos de Backtesting del VaR del IGBC, TRM y los TES para cada metodología empleada con un horizonte de pronóstico de un día y $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 0,995$. La línea continua corresponde a los retornos, la punteada al VaR y los círculos negros a la serie de excesos. En general, aquellas series que modelan la varianza condicional presentan un mejor comportamiento, y aquellas que modelan el tercer y cuarto momento de los retornos incorporan comportamientos asociados a distribuciones de colas más pesadas que las metodologías tradicionales.

Los Cuadros 1, 2 y 3 del Apéndice A muestran las pruebas de *backtesting* propuestas por Christoffersen et al. [2003] para el VaR del IGBC, la TRM y los TES, en estas tablas se presentan los *valores-p* para los estadísticos de razón de verosimilitud LR_{uc} , LR_{ind} , LR_{cc} . En el Cuadro 4 se presentan los resultados del test empleado para verificar el desempeño del CVaR de cada serie. Tanto en los Cuadros de especificación de Christoffersen como en los del CVaR se encuentran los resultados para los tres niveles de confianza utilizados en el ejercicio ($\alpha_1 = 0,95$, $\alpha_2 = 0,99$ y $\alpha_3 = 0,995$).

Las pruebas de backtesting del VaR para el IGBC, no muestran indicios de mala especificación para 6 de las 10 metodologías, específicamente para Jondeau Rockinger 2007, Hansen 1994, Jondeau Rockinger 2007 constante, Jondeau Rockinger 2003, ARMA-APGARCH y ARMA-APGARCH constante, este hecho es verificado por el test de Markov multinivel, ya que al evaluar la especificación del valor en riesgo para los 3 niveles de confianza conjuntamente, no muestra evidencia de no cumplimiento del supuesto de cubrimiento incondicional o del de independencia. Contrariamente, este test señala que las metodologías restantes (RiskMetrics, Normalidad, ARMA-GARCH y simulación histórica) no cumplen el supuesto de cubrimiento incondicional, este mismo resultado se repite con la prueba de Pearson.

Por otra parte, para el VaR de la TRM, únicamente las metodologías de Hansen 1994 y ARMA-GARCH no muestran evidencia de mala especificación según los test presentados. En este caso, se encuentra evidencia para rechazar la hipótesis de cubrimiento incondicional para la mayoría de modelos, adicionalmente en 5 metodologías (Jondeau Rockinger 2007, Jondeau Rockinger 2007 constante, Jondeau Rockinger 2003, ARMA-APGARCH y ARMA-APGARCH constante) se rechaza la hipótesis nula de desempeño adecuado del CVaR.

En cuanto al VaR de los TES, se encuentra que 7 de las 10 metodologías (Jondeau Rockinger 2007, Hansen 1994, Jondeau Rockinger 2007 constante, Jondeau Rockinger 2003, ARMA-APGARCH, ARMA-APGARCH constante y ARMA-GARCH) no presentan evidencia de mala especificación de acuerdo a las pruebas empleadas, mientras que las metodologías RiskMetrics, Normalidad y simulación histórica rechazan la hipótesis nula de cubrimiento condicional.

En los Cuadros 5 y 6 se muestran los *p-values* asociados a las pruebas de especificación conjunta del VaR (*Markov y Pearson Multinivel*) para los 3 niveles de confianza empleados. Para el IGBC se encuentra que en las metodologías de RiskMetrics, Normalidad, ARMA-GARCH y simulación histórica se rechaza la hipótesis nula de cubrimiento condicional del test de Pearson y de cubrimiento incondicional de la prueba de Markov, mientras que en el VaR de la TRM y de los TES por RiskMetrics, Normalidad y simulación histórica hay evidencia de mala especificación de acuerdo a las dos pruebas multinivel.

Por último, en los Cuadros 7, 8 y 9 del Apéndice B se presentan las funciones de pérdida de López II y las de Caporin (F_1 , F_2 y F_3). En general, se encuentra que aquellas metodologías que utilizan la función de distribución t-asimétrica presentan menores puntuaciones en las funciones de pérdida. Ahora bien, tomando en cuenta únicamente las metodologías que tienen un desempeño adecuado según las pruebas de Christoffersen y las multinivel, se tiene que las metodologías con mejores resultados son: Jondeau Rockinger 2007, Hansen 1994 y ARMA-APGARCH, para las series IGBC, TRM y TES respectivamente. Cabe señalar que en el caso del VaR de los TES, con $\alpha = 0,95$ la mejor metodología es ARMA-GARCH; sin embargo, al incrementar el nivel de confianza del VaR ($\alpha = 0,99$ y $\alpha = 0,995$) el método ARMA-APGARCH presenta los mejores resultados en término de desempeño de las funciones de pérdida.

Partiendo de las metodologías que presentaron mejor desempeño en el VaR para el IGBC, TRM y los TES, en las Figuras 12, 13 y 14 del Apéndice D, se presentan la curtosis y asimetría condicionales⁵, junto a su densidad empírica. En dichas gráficas se observa que para las tres series empleadas los momentos 3 y 4 presentan alta volatilidad a lo largo del tiempo, en el caso de la curtosis, esta llega a tomar valores muy altos seguida de periodos en los cuales tiene caídas repentinas, también cabe señalar que este hecho no puede ser modelado con las metodologías tradicionales dado que suponen que el tercer y cuarto momento son invariantes en el tiempo.

En resumen, el desempeño de las medidas de riesgo que utilizan la distribución t student asimétrica es adecuado. Así mismo, estas metodologías presentan mejores desempeños en términos de las funciones de pérdida. Específicamente, las técnicas con mejores resultados son las de Jondeau Rockinger 2007, la de Hansen 1994 y la de ARMA-APGARCH; es importante señalar que estas tres metodologías modelan la asimetría y curtosis condicional. Por otro lado, en la mayor parte de los ejercicios relacionados con las metodologías tradicionales para calcular el VaR (RiskMetrics, Normalidad, ARMA-GARCH, simulación histórica) presentan evidencia de mala especificación

⁵La curtosis y asimetría condicionales se calculan a partir de las ecuaciones (26), (25) y (27) utilizando los parámetros modelados (v_t y λ_t) según la dinámica de cada metodología.

para niveles altos de confianza ($\alpha = 0,995^6$).

En el análisis de riesgo de mercado es muy relevante realizar evaluaciones para eventos muy extremos (niveles de confianza muy altos). A este respecto, los anteriores resultados indican que cuando se presentan este tipo de eventos, las medidas VaR y CVaR deben considerar metodologías que modelen de forma apropiada las colas pesadas de las distribuciones en consideración. Los ejercicios realizados muestran que un tipo de metodologías que logran modelar estos comportamientos de forma adecuada son aquellas que utilizan la distribución t asimétrica y que modelan la asimetría y curtosis condicional.

7. CONCLUSIÓN

En este documento se calculó el VaR y el CVaR, para tres series financieras colombianas utilizando metodologías tradicionales y otras que incluyen la modelación de la asimetría y curtosis condicional, posteriormente se realizaron varias pruebas de especificación para cada medida de riesgo y se calcularon varias funciones de pérdida para evaluar el desempeño de cada metodología.

En síntesis, la mayoría de metodologías utilizadas para calcular el VaR y el CVaR no presentaron evidencia de mala especificación para el IGBC y los TES, en el caso de la TRM se debe ser más cuidadoso, ya que únicamente 2 metodologías (Hansen 1994 y ARMA-GARCH) logran modelar de forma adecuada el VaR y el CVaR. Cabe señalar que para las 3 series empleadas, el desempeño de aquellas metodologías que modelan la asimetría y curtosis condicional es, en general, superior a las metodologías tradicionales. Este resultado es de especial utilidad, ya que permite obtener una medida de riesgo con mejor desempeño que tiene el potencial de modelar comportamientos asimétricos y de colas pesadas.

REFERENCIAS

- ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER, Y D. HEATH (1999): "Coherent measures of risk," *Mathematical finance*, 9(3), 203–228.
- BECERRA, O., Y L. MELO (2008): "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones," *Borradores de Economía*, 489.
- CAPORIN, M. (2003): "Evaluating value-at-risk measures in presence of long memory conditional volatility," *GRETA*, 5.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. (1998): "Evaluating interval forecasts," *International economic review*, pp. 841–862.
- CHRISTOFFERSEN, P. F., F. X. DIEBOLD, Y A. M. SANTOMERO (2003): *Elements of Financial Risk Management*. Citeseer.
- DING, Z., C. W. GRANGER, Y R. F. ENGLE (1993): "A long memory property of stock market returns and a new model," *Journal of empirical finance*, 1(1), 83–106.
- HANSEN, B. E. (1994): "AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL DENSITY ESTIMATION," *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- JONDEAU, E., S.-H. POON, Y M. ROCKINGER (2007): *Financial modeling under non-Gaussian distributions*. Springer.

⁶Este tipo de resultados también se obtiene para algunos casos cuando se utiliza un nivel de confianza de $\alpha = 0,99$.

- JONDEAU, E., Y M. ROCKINGER (2003): “Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(10), 1699–1737.
- LAMBERT, P., Y S. LAURENT (2002): “Modelling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions,” *Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve Discussion Paper*, 119.
- LECCADITO, A., S. BOFFELLI, Y G. URGA (2014): “Evaluating the accuracy of value-at-risk forecasts: New multilevel tests,” *International Journal of Forecasting*, 30(2), 206–216.
- LOPEZ, J. A. (1998): “Methods for evaluating value-at-risk estimates,” Discussion paper, Federal Reserve Bank of New York.
- MCNEIL, A. J., R. FREY, Y P. EMBRECHTS (2010): *Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools*. Princeton university press.
- MORGAN, J. (1996): *Riskmetrics: technical document*. Morgan Guaranty Trust Company of New York.

APÉNDICE A. PRUEBAS DE BACKTESTING

CUADRO 1. Pruebas de especificación de Christoffersen para el VaR del IGBC entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
	Con $\alpha = 0,95$			Con $\alpha = 0,99$			Con $\alpha = 0,995$		
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.6234	0.7546	0.8442	0.8296	0.7389	0.9243	0.8793	0.8679	0.9750
Hansen 1994	0.9571	0.5603	0.8428	0.8296	0.7389	0.9243	0.8793	0.8679	0.9750
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.8167	0.5352	0.8032	0.8581	0.6971	0.9124	0.8793	0.8679	0.9750
Jondeau Rockinger 2003	0.8997	0.6401	0.8894	0.8296	0.7389	0.9243	0.8793	0.8679	0.9750
ARMA-APGARCH	0.4495	0.0377	0.0868	0.5793	0.6562	0.7767	0.6958	0.8244	0.9039
ARMA-APGARCH constante	0.6831	0.0499	0.1346	0.8296	0.7389	0.9243	0.6958	0.8244	0.9039
RiskMetrics	0.3534	0.3579	0.4260	0.0000	0.2613	0.0001	0.0000	0.3703	0.0000
Normalidad	0.8167	0.5352	0.8032	0.0001	0.2862	0.0002	0.0000	0.3128	0.0000
ARMA-GARCH	0.9571	0.5864	0.8612	0.0006	0.3408	0.0018	0.0008	0.5395	0.0029
Simulación histórica	0.2050	0.6824	0.4119	0.0044	0.4013	0.0123	0.0008	0.5395	0.0029

Pruebas de cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional para el IGBC.

CUADRO 2. Pruebas de especificación de Christoffersen para el VaR del TRM entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{ind}	LR_{cc}
	Con $\alpha = 0,95$			Con $\alpha = 0,99$			Con $\alpha = 0,995$		
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.6831	0.4633	0.7031	0.5278	0.7813	0.7883	0.0105	1.0000	0.0377
Hansen 1994	0.8167	0.8564	0.9577	0.8581	0.6971	0.9124	0.1400	0.9559	0.3360
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.2923	0.1272	0.1795	0.0066	0.9559	0.0250	0.0105	1.0000	0.0377
Jondeau Rockinger 2003	0.8167	0.0534	0.1507	0.2821	0.8244	0.5472	0.0105	1.0000	0.0377
ARMA-APGARCH	0.0078	0.2862	0.0165	0.0003	1.0000	0.0014	0.0105	1.0000	0.0377
ARMA-APGARCH constante	0.2132	0.1422	0.1570	0.0066	0.9559	0.0250	0.0105	1.0000	0.0377
RiskMetrics	0.0063	0.8546	0.0235	0.0000	0.6372	0.0001	0.0002	0.2097	0.0004
Normalidad	0.0039	0.5306	0.0126	0.0006	0.4560	0.0021	0.0028	0.1369	0.0037
ARMA-GARCH	0.9571	0.0610	0.1728	0.5793	0.6562	0.7767	0.8793	0.8679	0.9750
Simulación histórica	0.0773	0.2054	0.0942	0.0002	0.5143	0.0008	0.0008	0.1713	0.0014

Pruebas de razón de verosimilitud cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional para la TRM.

CUADRO 3. Pruebas de especificación de Christoffersen para el VaR del TES entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	LR_{uc} LR_{ind} LR_{cc}			LR_{uc} LR_{ind} LR_{cc}			LR_{uc} LR_{ind} LR_{cc}		
	Con $\alpha = 0,95$			Con $\alpha = 0,99$			Con $\alpha = 0,995$		
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.9571	0.5603	0.8428	0.5278	0.7813	0.7883	0.4479	0.9118	0.7452
Hansen 1994	0.6831	0.4633	0.7031	0.5278	0.7813	0.7883	0.4479	0.9118	0.7452
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.8167	0.5104	0.7839	0.5278	0.7813	0.7883	0.8793	0.8679	0.9750
Jondeau Rockinger 2003	0.7584	0.0790	0.2038	0.5278	0.7813	0.7883	0.4479	0.9118	0.7452
ARMA-APGARCH	0.4495	0.3775	0.5089	0.5278	0.7813	0.7883	0.8793	0.8679	0.9750
ARMA-APGARCH constante	0.9571	0.0610	0.1728	0.5278	0.7813	0.7883	0.4479	0.9118	0.7452
RiskMetrics	0.3534	0.3388	0.4114	0.0252	0.4677	0.0628	0.0028	0.5773	0.0097
Normalidad	0.6831	0.0466	0.1270	0.0252	0.4677	0.0628	0.0002	0.5030	0.0008
ARMA-GARCH	0.1020	0.1762	0.1052	0.8581	0.6971	0.9124	0.3738	0.7813	0.6479
Simulación histórica	0.4495	0.0351	0.0816	0.0017	0.3703	0.0049	0.0028	0.5773	0.0097

Pruebas de cubrimiento incondicional, independencia y cubrimiento condicional para los TES.

CUADRO 4. Backtesting del CVaR para el IGBC, TRM y los TES entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	IGBC			TRM			TES		
	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,995$
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.4830	0.5090	0.5070	0.5120	0.5380	-	0.4820	0.4800	0.4410
Hansen 1994	0.4850	0.5070	0.5230	0.4940	0.5410	0.4880	0.4640	0.4650	0.5020
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.4900	0.5090	0.4930	0.5280	0.4540	-	0.4640	0.4550	0.5420
Jondeau Rockinger 2003	0.4840	0.4870	0.4900	0.5110	0.4980	-	0.4790	0.4740	0.4730
ARMA-APGARCH	0.4480	0.4980	0.5520	0.5290	-	-	0.4550	0.5020	0.5450
ARMA-APGARCH constante	0.4610	0.4530	0.4740	0.5110	0.5400	-	0.4720	0.4890	0.4270
RiskMetrics	0.4640	0.4760	0.4540	0.4910	0.4790	0.4560	0.4680	0.4750	0.4940
Normalidad	0.4570	0.4740	0.4690	0.4900	0.4660	0.4600	0.4620	0.4580	0.4530
ARMA-GARCH	0.4330	0.4580	0.4790	0.4810	0.4930	0.4610	0.4500	0.4760	0.4620
Simulación histórica	0.4750	0.4890	0.4670	0.4860	0.4970	0.4910	0.4810	0.4890	0.4740

P-Values de la prueba de McNeil et al. [2010] de desempeño del CVaR.

CUADRO 5. Pruebas de Markov-Multinivel para el IGBC, TRM y los TES entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	IGBC			TRM			TES		
	LR_{uc}	LR_{md}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{md}	LR_{cc}	LR_{uc}	LR_{md}	LR_{cc}
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.9692	0.9889	0.9851	0.0489	1.0000	0.8481	0.8680	1.0000	0.9999
Hansen 1994	0.9950	1.0000	1.0000	0.2594	0.9999	0.9410	0.7685	1.0000	0.9994
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.9775	0.9904	0.9877	0.0323	1.0000	0.6863	0.8272	1.0000	0.9996
Jondeau Rockinger 2003	0.9971	0.9856	0.9847	0.0650	0.9996	0.6971	0.8947	0.9968	0.9918
ARMA-APGARCH	0.8923	0.9983	0.9949	0.0014	1.0000	0.2532	0.6087	1.0000	0.9952
ARMA-APGARCH constante	0.7954	0.9994	0.9955	0.0313	1.0000	0.6950	0.8680	0.9936	0.9842
RiskMetrics	0.0000	0.9873	0.0013	0.0002	0.8318	0.0087	0.0293	0.9716	0.3310
Normalidad	0.0000	0.9955	0.0000	0.0027	0.6264	0.0200	0.0008	0.9836	0.0564
ARMA-GARCH	0.0005	0.9888	0.0461	0.8349	0.9926	0.9795	0.1595	0.9997	0.8640
Simulación histórica	0.0093	0.9914	0.2440	0.6331	0.0178	0.0018	0.0080	0.9735	0.1782

Prueba de especificación multinivel de Markov con $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 0,995$.

CUADRO 6. Pruebas de Pearson-Multinivel para el IGBC, TRM y los TES entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	IGBC			TRM			TES		
	m=1	m=5	m=10	m=1	m=5	m=10	m=1	m=5	m=10
	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value	P-Value
Jondeau Rockinger 2007	0.5990	0.8774	0.9549	0.4433	0.3933	0.3590	0.9741	0.6229	0.7134
Hansen 1994	0.9982	0.7294	0.9279	0.4957	0.3768	0.3859	0.9150	0.5594	0.6107
Jondeau Rockinger 2007 constante	0.6236	0.5389	0.7718	0.4239	0.5464	0.6112	0.9559	0.8111	0.7877
Jondeau Rockinger 2003	0.6226	0.8228	0.9491	0.4448	0.5127	0.5782	0.9338	0.6294	0.7149
ARMA-APGARCH	0.8532	0.5998	0.7142	0.1896	0.2672	0.2629	0.8086	0.8168	0.6761
ARMA-APGARCH constante	0.8409	0.6165	0.4730	0.4252	0.4624	0.5602	0.8921	0.6052	0.7061
RiskMetrics	0.0021	0.0001	0.0001	0.0019	0.0001	0.0001	0.0845	0.0583	0.0032
Normalidad	0.0007	0.0001	0.0001	0.0019	0.0001	0.0001	0.0613	0.0008	0.0001
ARMA-GARCH	0.0614	0.0041	0.0002	0.8510	0.2545	0.5097	0.4677	0.4857	0.3523
Simulación histórica	0.0664	0.0033	0.0029	0.0001	0.0001	0.0001	0.0723	0.0045	0.0002

Prueba de especificación multinivel de Pearson con $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 0,995$.

APÉNDICE B. FUNCIONES DE PÉRDIDA

CUADRO 7. Pruebas de función de pérdida para el VaR del IGBC entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3
	Con $\alpha = 0,95$				Con $\alpha = 0,99$				Con $\alpha = 0,995$			
Jondeau Rockinger 2007	69.067	17.290	27.340	25.831	14.018	2.311	3.460	5.380	6.360	1.118	1.181	3.173
Hansen 1994	76.208	19.998	32.797	28.079	15.833	2.764	4.588	5.939	7.578	1.390	1.711	3.703
Jondeau Rockinger 2007 constante	75.227	18.526	28.731	27.591	15.734	2.565	3.835	5.912	7.011	1.255	1.443	3.462
Jondeau Rockinger 2003	72.650	18.512	28.930	27.169	14.723	2.522	3.864	5.746	6.937	1.245	1.420	3.433
ARMA-APGARCH	83.415	20.900	33.124	30.606	17.305	2.760	4.135	6.271	8.002	1.255	1.435	3.482
ARMA-APGARCH constante	80.241	21.624	36.346	29.382	17.327	3.486	6.229	6.648	9.923	1.831	2.816	4.108
RiskMetrics	92.362	27.697	47.837	33.781	47.434	11.129	19.373	17.292	37.877	8.345	14.514	13.691
Normalidad	86.452	23.373	41.059	31.648	44.436	9.464	15.490	16.940	37.561	6.746	11.152	12.851
ARMA-GARCH	78.256	19.919	32.118	29.498	35.526	6.413	9.998	12.686	24.714	4.326	6.821	9.005
Simulación histórica	94.269	26.678	44.425	34.063	31.598	5.807	8.089	12.166	22.508	3.692	5.181	8.442

Funciones de pérdidas (López, F_1 , F_2 , y F_3) para el IGBC, con horizonte de pronóstico a un día.

CUADRO 8. Pruebas de función de pérdida para el VaR de la TRM entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3
	Con $\alpha = 0,95$				Con $\alpha = 0,99$				Con $\alpha = 0,995$			
Jondeau Rockinger 2007	37.371	10.410	3.257	6.939	5.061	0.492	0.053	0.497	0.000	0.000	0.000	0.000
Hansen 1994	36.989	12.109	4.198	7.871	7.122	0.816	0.118	0.791	1.004	0.086	0.005	0.060
Jondeau Rockinger 2007 constante	27.997	5.913	1.353	4.137	1.000	0.022	0.000	0.019	0.000	0.000	0.000	0.000
Jondeau Rockinger 2003	35.854	8.863	2.540	5.936	4.027	0.371	0.031	0.330	0.000	0.000	0.000	0.000
ARMA-APGARCH	19.927	4.555	1.109	3.456	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ARMA-APGARCH constante	27.358	5.542	1.538	4.299	1.002	0.027	0.001	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
RiskMetrics	54.571	20.978	8.862	12.257	21.663	4.908	1.874	4.054	13.031	2.807	1.059	2.590
Normalidad	55.990	18.793	9.323	11.442	19.301	4.961	2.565	4.375	11.620	3.083	1.654	3.020
ARMA-GARCH	35.436	9.635	3.437	6.180	8.464	1.281	0.404	1.303	3.219	0.598	0.167	0.740
Simulación histórica	49.332	19.119	9.956	11.519	20.043	4.935	2.245	4.313	12.493	3.433	1.550	3.227

Funciones de pérdidas (López, F_1 , F_2 , y F_3) para la TRM, con horizonte de pronóstico a un día.

CUADRO 9. Pruebas de función de pérdida para el VaR del los TES entre junio de 2011 y febrero de 2014 con horizonte de pronóstico de un día.

	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3
	Con $\alpha = 0,95$				Con $\alpha = 0,99$				Con $\alpha = 0,995$			
Jondeau Rockinger 2007	64.361	16.163	22.666	20.977	12.628	1.987	3.351	4.473	5.864	1.006	1.384	2.763
Hansen 1994	67.101	15.828	23.070	21.128	13.383	2.087	3.722	4.845	6.584	1.059	1.669	2.884
Jondeau Rockinger 2007 constante	67.976	17.414	25.037	22.524	13.361	2.218	3.689	5.121	7.063	1.054	1.469	2.875
Jondeau Rockinger 2003	63.929	16.372	23.953	21.585	14.149	2.262	4.227	5.068	7.423	1.213	2.088	3.136
ARMA-APGARCH	69.078	17.753	25.021	21.803	12.978	2.115	3.591	4.400	6.833	1.028	1.337	2.822
ARMA-APGARCH constante	68.048	18.011	25.994	22.921	13.625	2.329	3.776	5.420	6.045	1.046	1.473	2.830
RiskMetrics	64.800	16.717	18.927	20.446	23.993	4.637	5.670	7.867	18.209	3.097	3.809	5.797
Normalidad	63.233	14.939	17.774	20.422	24.514	4.713	5.356	8.579	20.212	3.183	3.495	6.492
ARMA-GARCH	45.246	9.753	13.391	14.455	16.199	2.948	4.441	5.764	11.973	2.126	3.069	4.613
Simulación histórica	74.062	19.928	25.024	25.019	29.718	5.388	6.668	9.248	17.682	3.424	3.415	6.446

Funciones de pérdidas (López, F_1 , F_2 , y F_3) para los TES, con horizonte de pronóstico a un día.

APÉNDICE C. GRÁFICOS DE BACKTESTING PARA EL VaR

FIGURA 2. Gráficos de Backtesting para el VaR del IGBC, TRM y los TES por metodología Jondeau Rockinger 2007 para horizonte de un día con $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 0,995$. La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al VaR y los puntos la serie de excesos.

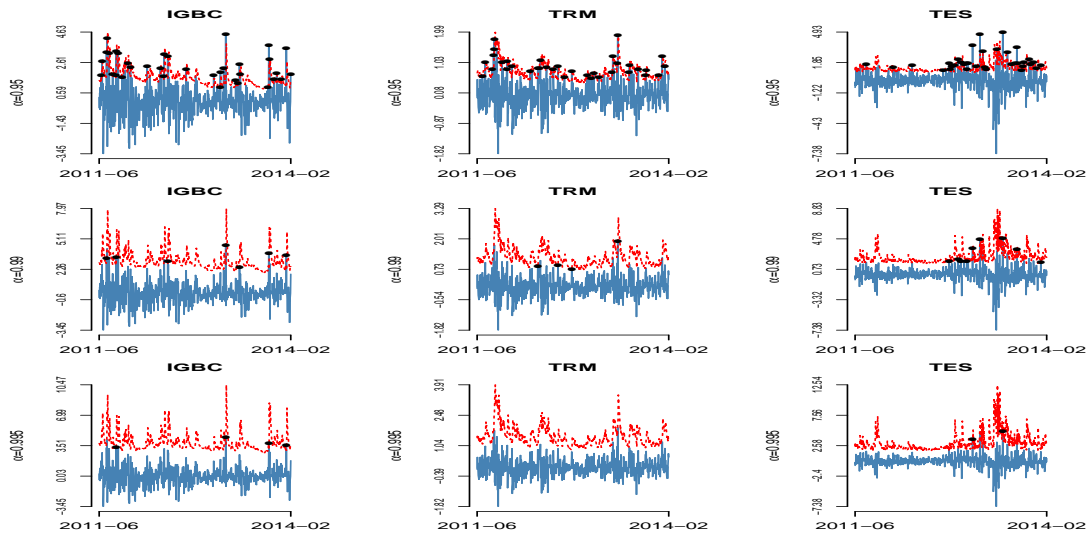


FIGURA 3. VaR - Hansen 1994.

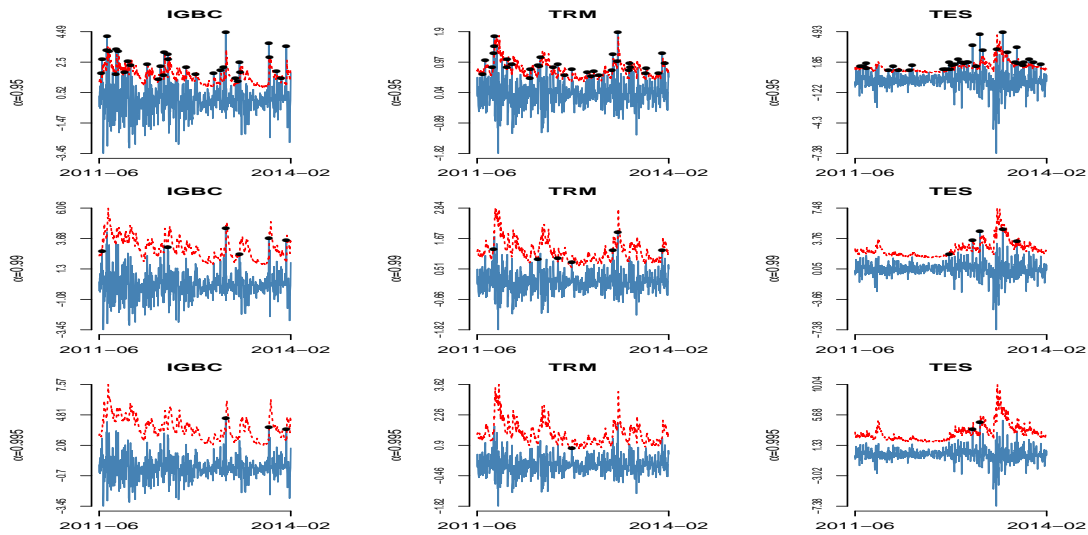


FIGURA 4. VaR - Jondeau Rockinger 2007 constante.

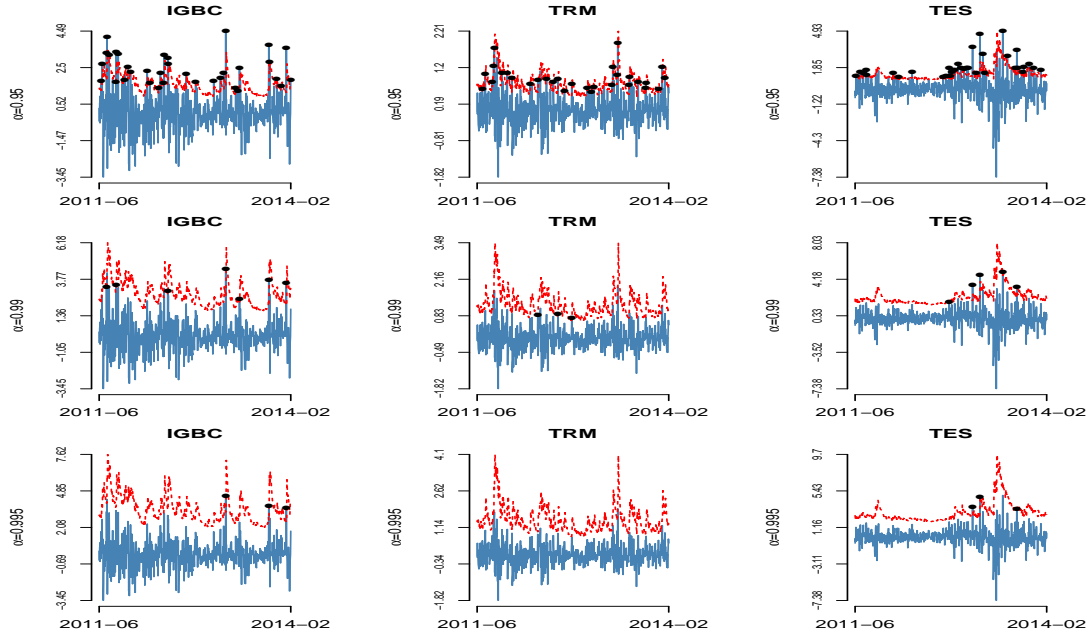


FIGURA 5. VaR - Jondeau Rockinger 2003.

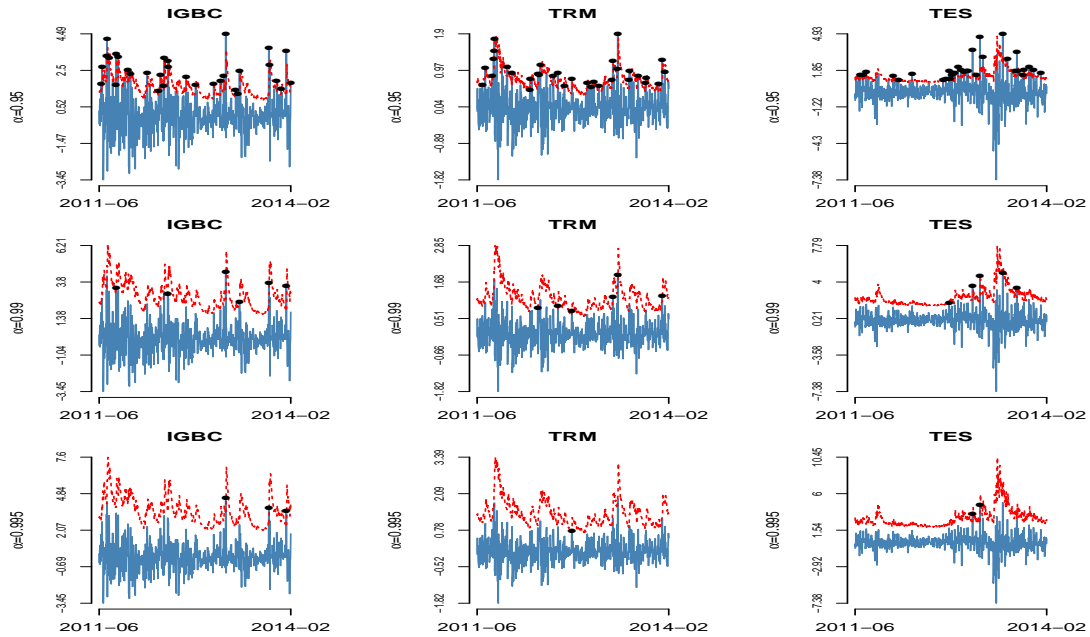


FIGURA 6. VaR - ARMA-APGARCH.

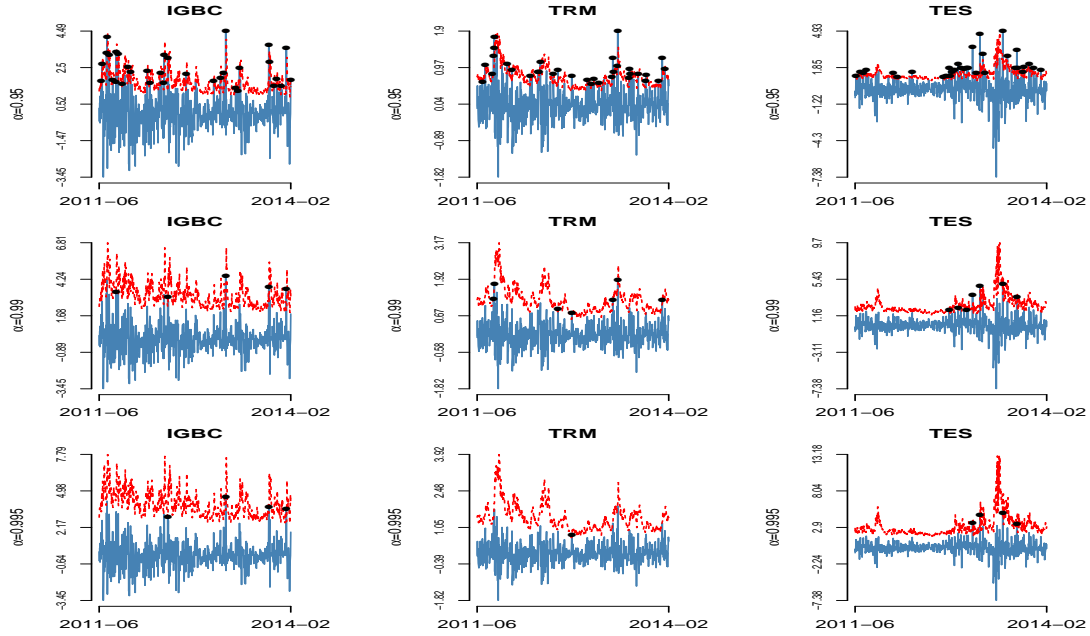


FIGURA 7. VaR - ARMA-APGARCH constante.

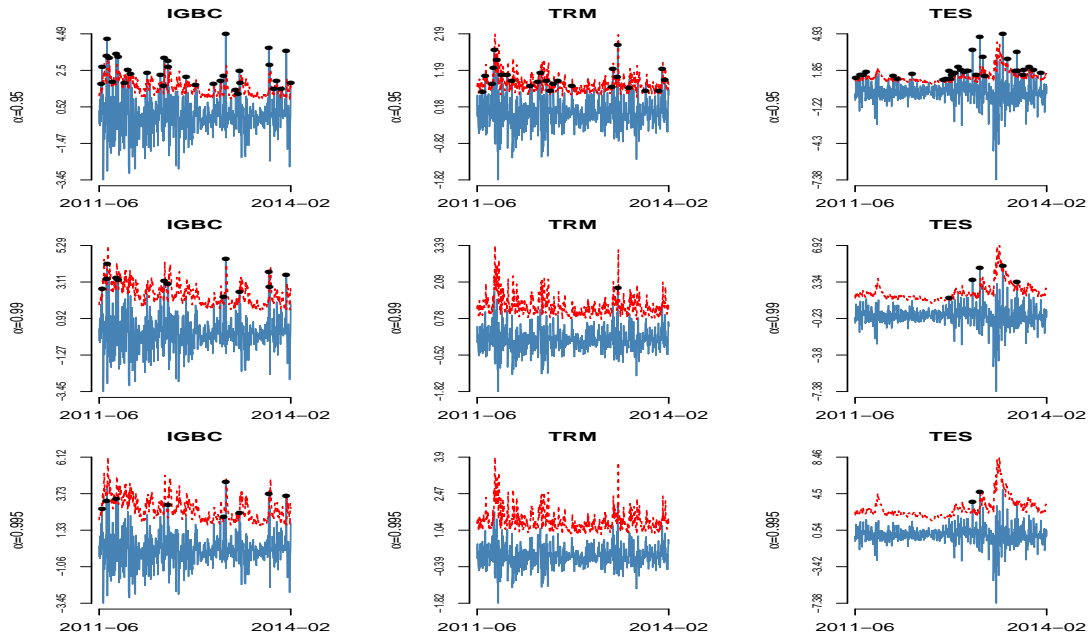


FIGURA 8. VaR - RiskMetrics.

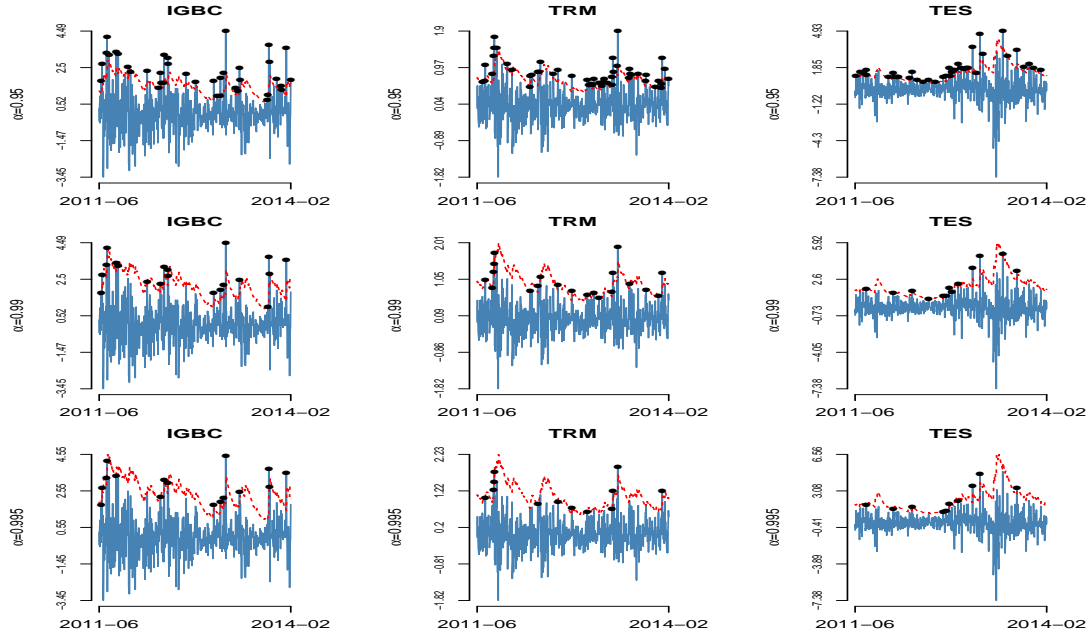


FIGURA 9. VaR - Normalidad.

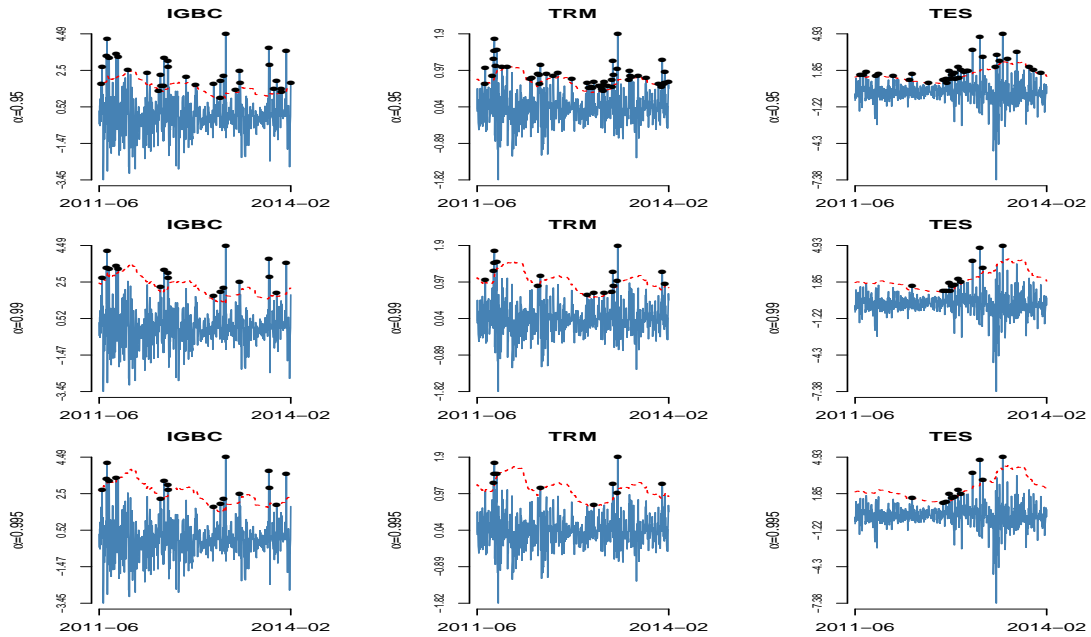


FIGURA 10. VaR - ARMA-GARCH.

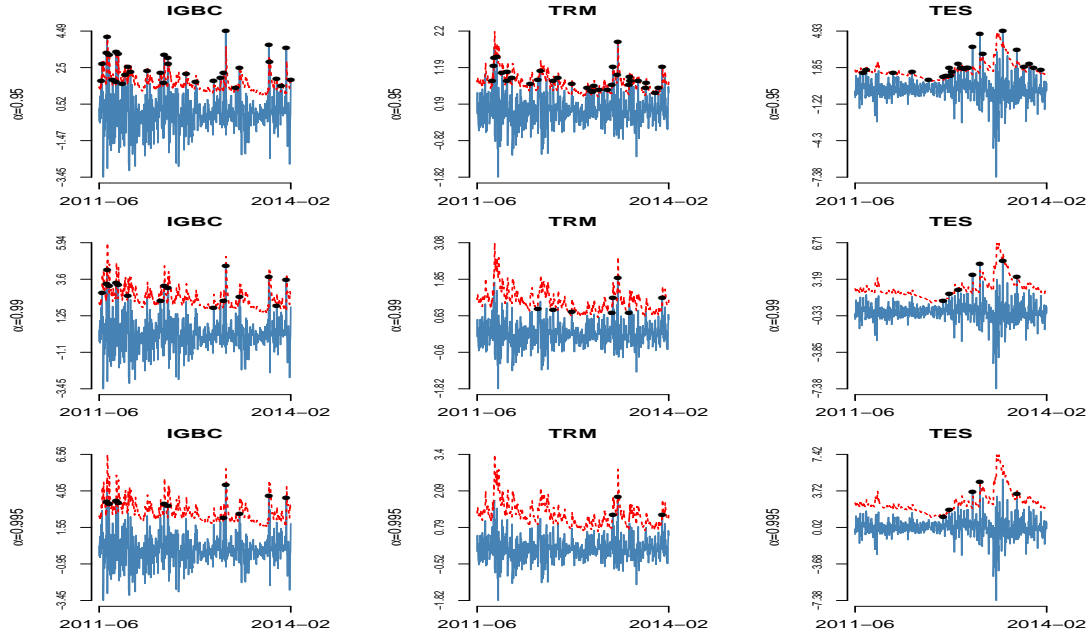
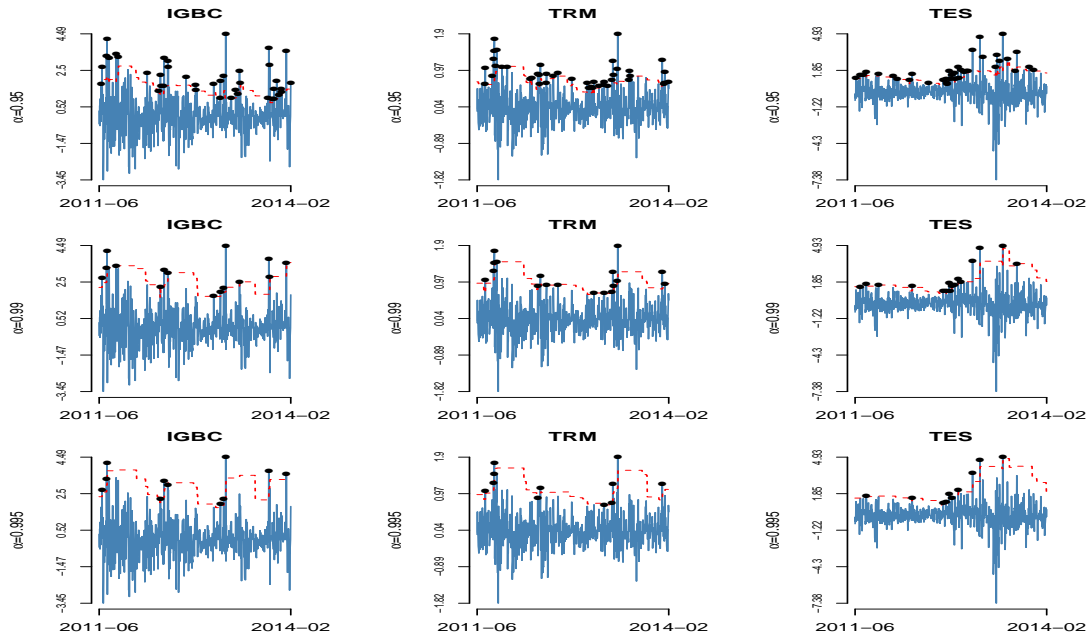


FIGURA 11. VaR - Simulación histórica.



APÉNDICE D. CURTOSIS Y ASIMETRÍA CONDICIONAL

FIGURA 12. En la parte izquierda se presenta la curtosis y asimetría condicional del IGBC para el periodo de junio de 2011 a febrero de 2014, en el lado derecho se encuentra la función de densidad calculada para cada serie respectivamente. Estos resultados se obtuvieron bajo el modelo Jondeau Rockinger 2007, el cual tuvo el mejor desempeño en términos de las funciones de pérdida.

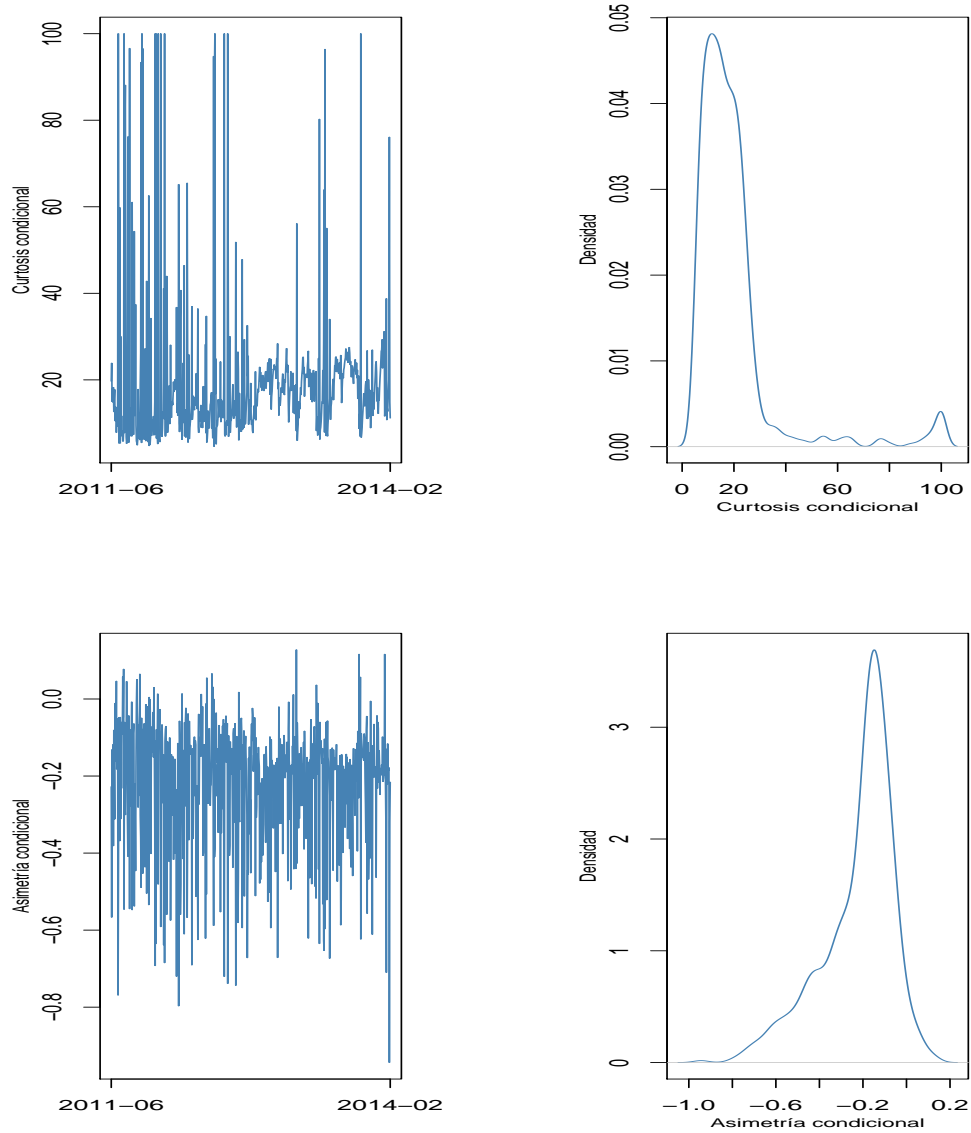


FIGURA 13. En la parte izquierda se presenta la curtosis y asimetría condicional de la TRM para el periodo de junio de 2011 a febrero de 2014, en el lado derecho se encuentra la función de densidad calculada para cada serie respectivamente. Estos resultados se obtuvieron bajo el modelo Hansen 1994, el cual tuvo el mejor desempeño en términos de las funciones de pérdida.

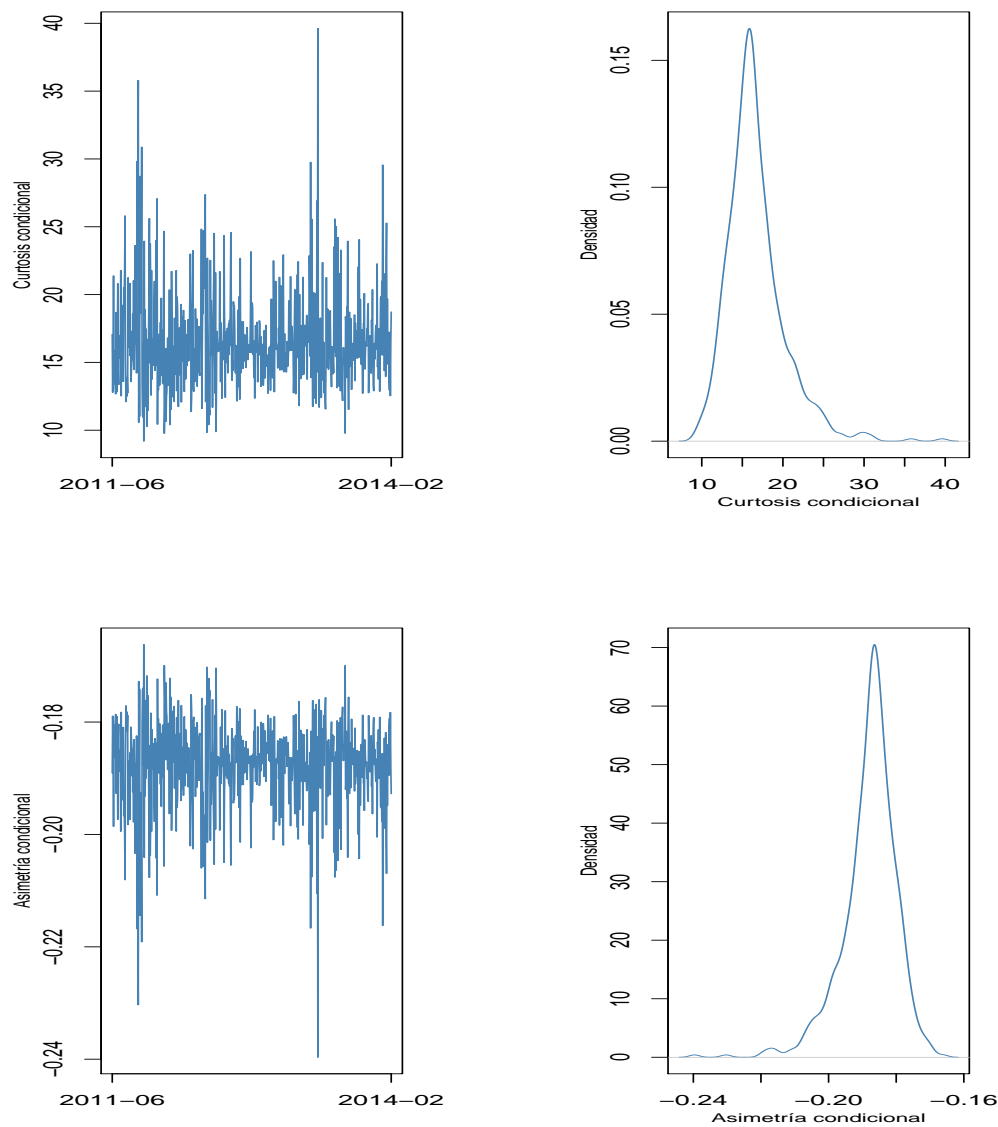


FIGURA 14. En la parte izquierda se presenta la curtosis y asimetría condicional de los TES para el periodo de junio de 2011 a febrero de 2014, en el lado derecho se encuentra la función de densidad calculada para cada serie respectivamente. Estos resultados se obtuvieron bajo el modelo ARMA-APGARCH, el cual tuvo el mejor desempeño en términos de las funciones de pérdida.

