

Regresión Cuantílica Dinámica para la  
Medición del Valor en Riesgo: una  
Aplicación a Datos Colombianos

Por: Daniel Mariño Ustacara  
Luis Fernando Melo Velandia

Núm. 939  
2016

# Borradores de ECONOMÍA



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col



# REGRESIÓN CUANTÍLICA DINÁMICA PARA LA MEDICIÓN DEL VALOR EN RIESGO: UNA APLICACIÓN A DATOS COLOMBIANOS

DANIEL MARIÑO USTACARA

(jdmarinou@unal.edu.co)

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA

(lmelevel@banrep.gov.co)

**RESUMEN.** En este documento se estima el valor en riesgo utilizando métodos semiparamétricos basados en regresión cuantílica lineal y no lineal. En particular, se usan varias especificaciones de la familia de modelos CAViaR. Estos modelos permiten capturar hechos estilizados de las series financieras y evitan imponer supuestos relacionados con la distribución de los activos financieros. Adicionalmente, estas metodologías son comparadas con técnicas de VaR tradicionales para la tasa de cambio representativa del mercado, un índice de precios de bonos de deuda pública, y el índice de la bolsa de valores de Colombia, durante el periodo comprendido entre diciembre de 2007 y noviembre de 2015. En general, se encontró que las medidas de riesgo de mercado bajo estas metodologías tienen un mejor desempeño respecto a las tradicionales.

*Palabras Clave.* Valor en riesgo, regresión cuantílica, regresión cuantílica no lineal, procesos CA-ViaR.

*Clasificación JEL.* C32, C52, G10.

## 1. INTRODUCCIÓN

El valor en riesgo (VaR, por sus siglas en inglés) se ha convertido en una de las medidas de riesgo de mercado más utilizadas por las entidades financieras. Esta medida corresponde a la mínima pérdida esperada en el  $(1 - \theta)100\%$  de los peores casos para un horizonte de tiempo específico [Becerra y Melo, 2006]. De este modo, se puede suponer que la pérdida esperada de su inversión no será mayor al VaR con una probabilidad  $\theta$ . En términos estadísticos, el  $VaR_{t|t-1}^{\theta}$  es el  $\theta$ -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias futuras del activo en el siguiente periodo. Su fácil interpretación y aplicación lo han convertido en una medida estándar de riesgo de mercado, tanto para entidades financieras como regulatorias.

Dada su relevancia, es necesario contar con metodologías confiables para la estimación del VaR. La mayoría de las metodologías utilizadas para su cálculo tienen en cuenta varios hechos estilizados de las series financieras. Sin embargo, algunas de las limitaciones que presentan las técnicas

---

\* Los autores son, en su orden, asistente de investigación y econometrista principal de la Unidad de Econometría del Banco de la República. Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Se agradecen los comentarios y sugerencias de Wilmar Cabrera y Santiago Gamba.

con enfoque paramétrico están relacionadas con los supuestos que se imponen sobre la distribución de los retornos de los activos financieros.

La regresión cuantílica es un método de estimación que permite lidiar con este tipo de limitantes. Este método permite calcular el cuantil condicionado de forma directa, sin necesidad de imponer supuestos sobre la distribución del término del error asociado al modelo. Adicionalmente, sus estimadores son robustos ante datos atípicos. Es de notar que la especificación del cuantil condicionado puede incluir una especificación autorregresiva con la cual se puede modelar de forma adecuada los clusters o conglomerados de volatilidad, como lo sugieren los hechos estilizados de las series financieras. Este tipo de modelos se pueden especificar mediante procesos CAViAR (Conditional Autoregressive Value at Risk).

En general, los modelos CAViAR presentan un buen desempeño en comparación a las técnicas tradicionales usadas en la estimación del VaR. Al respecto, Engle y Manganelli [2001] llevan a cabo simulaciones Monte Carlo para evaluar el desempeño tanto de métodos tradicionales como del CAViAR. Los resultados indican que estos últimos tienen un buen desempeño para casos donde las distribuciones presentan colas pesadas. Por otra parte, Xiliang y Xi [2009] calculan el VaR para la serie de precios del petróleo Brent y WTI. Sus resultados muestran que los modelos CAViAR y los GED-GARCH son los que presentan mejor desempeño frente a otros modelos. En otro documento, [Gaglianone et al., 2008] proponen una nueva prueba de *backtesting* basada en regresión cuantílica y la implementan para evaluar el desempeño del VaR de la serie S&P-500 calculado por 5 métodos de estimación. En estos ejercicios, el modelo CAViAR es el único que no muestra indicios de mala especificación y tiene el mejor desempeño de acuerdo a funciones de pérdida.

En la literatura también se tienen trabajos que estiman el valor en riesgo usando métodos de regresión cuantílica aplicados a mercados financieros colombianos. [Cabrera et al., 2012] estiman el VaR y el CoVaR para el portafolio de deuda pública de las entidades financieras de Colombia usando un modelo de regresión cuantílica con efectos ARCH. Por otro lado, Londoño [2011] realiza una aproximación del modelo CAViAR sobre el índice general de la bolsa de valores, con el fin de determinar los patrones que influyen el riesgo de mercado a través de un modelo de redes neuronales de regresión cuantílica. Adicionalmente, [Londoño et al., 2014] estiman varios modelos incluyendo el CAViAR usando regresión cuantílica Bayesiana para el mercado de valores colombiano. Sin embargo, en los dos últimos trabajos sólo se modela una de las especificaciones CAViAR.

El objetivo de este trabajo consiste en estimar la familia de modelos CAViAR propuestos por Engle y Manganelli [2004], Kuester et al. [2006] y Koenker y Xiao [2009] para tres series financieras colombianas, el índice de mercado bursátil de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES); para la muestra comprendida entre el periodo 12/Dic/2007 y 20/Nov/2015. Estas series están asociadas a tres de los principales mercados financieros de Colombia y por tal motivo, es importante contar con medidas confiables de riesgo relacionado con estos mercados.

A diferencia de los trabajos mencionados anteriormente que están relacionados con aplicaciones a mercados financieros colombianos, en este documento se estiman diversas especificaciones de los procesos CAViaR. Estas incluyen modelos que tienen en cuenta el efecto *leverage* de los retornos financieros, entre otras extensiones. Los resultados de la aplicación realizada en este trabajo muestran que al comparar el desempeño de estos modelos frente a técnicas tradicionales se obtiene que las especificaciones CAViaR presentan, en general, un mejor desempeño en términos de funciones de pérdida.

Además de la presente introducción, el documento se compone de otras cuatro secciones. La segunda contiene una definición formal del VaR. En la tercera sección se expone la familia de modelos CAViaR, basados en regresión cuantílica lineal y no lineal, y sus metodologías de estimación. En la cuarta se muestra un ejercicio empírico donde se aplican estos modelos. Finalmente, en la quinta sección se presentan algunas conclusiones.

## 2. VALOR EN RIESGO

El valor en riesgo es una medida de riesgo de mercado y se puede interpretar como la mínima pérdida posible bajo condiciones extraordinarias de mercado [Tsay, 2005].

Sea  $\{r_t\}_{t=1,\dots,T}$  una sucesión de variables aleatorias asociada a un vector de retornos financieros. En este contexto, el  $VaR_{t|t-1}^\theta$  corresponde al  $\theta$ -ésimo cuantil de la función de distribución futura de los retornos de un activo financiero y está dado por:

$$Pr \left[ r_{t|t-1} \leq VaR_{t|t-1}^\theta \right] = F_t \left( VaR_{t|t-1}^\theta \right) = \theta \quad (1)$$

Siendo  $F_t(\cdot)$  la función de distribución de  $r_t$ . Si esta función es conocida, el VaR se obtiene simplemente calculando el  $\theta$ -ésimo cuantil:

$$q_t(\theta | t-1) \equiv F_t^{-1}(\theta | t-1) = VaR_{t|t-1}^\theta \quad (2)$$

donde  $F_t^{-1}(\theta | t-1)$  es la función inversa de la función de distribución de  $r_t$  condicional a la información disponible hasta el periodo  $t-1$  y se define como:

$$F_t^{-1}(\theta | t-1) \equiv \inf \{ r_{t|t-1} | F_t(r_{t|t-1}) \geq \theta \} \quad (3)$$

Existen diversas estrategias para estimar el VaR. El enfoque paramétrico se centra en modelar este cuantil de forma indirecta a través de momentos que caracterizan la distribución de  $r_t$ . Adicionalmente, este enfoque puede contemplar varios de los hechos estilizados de las series financieras, tales como la presencia de clusters de volatilidad, exceso de curtosis y efecto *leverage*, por ejemplo usando modelos ARMA-GARCH. En general, el VaR se calcula para pérdidas extremas, asociadas a valores de  $\theta$  ubicados en las colas de la función de distribución. Por tal motivo, algunas de estas metodologías utilizan la teoría de valores extremos.

Por otro lado, los modelos tipo CAViaR que se presentan a continuación se concentran en la estimación del cuantil de forma directa, sin necesidad de asumir una función de distribución específica. Adicionalmente, este tipo de estimaciones del cuantil tiene en cuenta dependencias autorregresivas en el tiempo. Este tipo de comportamiento se incorpora en el modelo debido a que el

VaR está asociado a la desviación estándar de la distribución, y por lo tanto, si éste sigue un proceso autorregresivo se obtiene este tipo de dinámica asociada con los conglomerados de volatilidad [Engle y Manganelli, 2004].

En las siguientes secciones se definen los modelo CAViaR y sus técnicas de estimación basadas en regresión cuantílica y regresión cuantílica no lineal (NLQR por sus siglas en inglés).

### 3. METODOLOGÍA

Esta sección se compone de dos partes. En la primera se describen los modelos de regresión cuantílica que son considerados en este documento, mientras que en la segunda se explican sus metodologías de estimación.

**3.1. Modelos.** Una de las primeras aproximaciones para estimar el valor en riesgo usando modelos de regresión cuantílica fue desarrollada por [Koenker y Zhao, 1996], esta metodología se basa en la modelación de cuantiles condicionados bajo la presencia de efectos ARCH.

Aunque los modelos ARCH tienen en cuenta ciertos hechos estilizados de las series financieras, realizan supuestos fuertes sobre las innovaciones del proceso, lo cual puede llevar a errores de especificación. Una forma alterna de realizar este tipo de modelación, sin este tipo de restricciones, es mediante regresión cuantílica con efectos ARCH.

Sea  $\{\tilde{r}_t\}_{t=1,\dots,T}$  una serie de retornos financieros definidos en la sección anterior. Adicionalmente, se supone que el proceso generador de los datos (DGP por sus siglas en inglés) viene dado por la siguiente especificación:

$$\tilde{r}_t = \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^p \tilde{a}_i \tilde{r}_{t-i} + \tilde{u}_t \quad (4)$$

donde el término  $\tilde{u}_t$  tiene la siguiente dinámica:

$$\tilde{u}_t = \left( \tilde{b}_0 + \sum_{j=1}^q \tilde{b}_j |\tilde{u}_{t-j}| \right) \tilde{\varepsilon}_t \quad (5)$$

con  $\tilde{b}_0 > 0; \tilde{b}_j \geq 0, j = 1, \dots, q$ ; y  $\{\tilde{\varepsilon}_t\}$  son variables aleatorias *i.i.d* con media igual a cero, varianza finita y con funciones de densidad y distribución  $\tilde{f}$  y  $\tilde{F}$ , respectivamente.

Con base en ello, el cuantil  $\theta$  condicionado a la información disponible en  $t - 1$  está dado por:

$$q_{\tilde{r}_t}(\theta | t - 1) = \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^p \tilde{a}_i \tilde{r}_{t-i} + \left( \tilde{b}_0 + \sum_{j=1}^q \tilde{b}_j |\tilde{u}_{t-j}| \right) \tilde{F}_t^{-1}(\theta | t - 1) \quad (6)$$

A pesar de que esta metodología estima el cuantil directamente, no incluye una estructura autorregresiva.<sup>1</sup> A continuación se muestran algunos modelos CAViaR que sí lo hacen y que por lo tanto, pueden modelar directamente algunos hechos estilizados de las series financieras.<sup>2</sup>

*3.1.1. El proceso CAViaR [Engle y Manganelli, 2004].* Estos autores proponen modelar directamente el cuantil de una serie de retornos  $\{r_t\}_{t=1,\dots,T}$ . Para ello definen  $\mathbf{x}_t \subseteq \mathcal{F}_{t-1}$  como un vector de variables observables del conjunto de información  $\mathcal{F}_{t-1}$  y  $\boldsymbol{\gamma}_\theta \equiv (\boldsymbol{\alpha}'_\theta, \boldsymbol{\beta}'_\theta)$  un vector de parámetros desconocidos de dimensión  $p+q+1$ . El  $\theta$ -ésimo cuantil de  $r_t$  condicionado a la información disponible en  $t-1$ , se define como  $q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) \equiv q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}'_\theta, \boldsymbol{\beta}'_\theta)$ .

De este modo, el proceso CAViaR asume que la dinámica de la evolución de los cuantiles en el tiempo es la siguiente:

$$q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) = \alpha_0(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) l(\mathbf{x}_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j(\boldsymbol{\theta}) q_{r_{t-j}}(\boldsymbol{\theta} | t-j-1) \quad (7)$$

Donde  $l(\cdot)$  es una función de variables observables,  $\mathbf{x}_t$ . Los autores proponen cuatro formas funcionales de  $q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1)$ :

(a) Adaptativo (CAViaR-AD):

$$q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) = \alpha_1(\boldsymbol{\theta}) [I(r_{t-1} \leq q_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta} | t-2)) - \theta] + q_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta} | t-2) \quad (8)$$

donde  $I(\cdot)$  corresponde a la función indicadora.

(b) Valor absoluto simétrico (CAViaR-SAV):

$$q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) = \alpha_0(\boldsymbol{\theta}) + \alpha_1(\boldsymbol{\theta}) |r_{t-1}| + \beta_1(\boldsymbol{\theta}) q_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta} | t-2) \quad (9)$$

(c) Pendiente asimétrica (CAViaR-AS):

$$q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) = \alpha_0(\boldsymbol{\theta}) + \alpha_1(\boldsymbol{\theta}) (r_{t-1})^+ + \alpha_2(\boldsymbol{\theta}) (r_{t-1})^- + \beta_1(\boldsymbol{\theta}) q_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta} | t-2) \quad (10)$$

con  $(x)^+ \equiv \max(0, x)$  y  $(x)^- \equiv \min(0, x)$ .

(d) GARCH(1,1) indirecto (CAViaR-IG) :

$$q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1) = [\alpha_0(\boldsymbol{\theta}) + \alpha_1(\boldsymbol{\theta}) (r_{t-1})^2 + \beta_1(\boldsymbol{\theta}) (q_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta} | t-2))^2]^{1/2} \quad (11)$$

De este modo, en todas las formas funcionales se tiene una especificación autorregresiva del cuantil condicional. En particular, el modelo CAViaR-AD (por sus siglas en inglés) descrito en (8) incorpora la siguiente regla de decisión: Si la pérdida observada excede al VaR en el periodo anterior, el VaR se debe incrementar en el siguiente periodo. En caso contrario, el VaR deberá decrecer. A diferencia del modelo CAViaR-AD, las especificaciones CAViaR-SAV y CAViaR-AS incorporan la magnitud del retorno, donde esta última asigna una ponderación distinta dependiendo del

<sup>1</sup>Es importante anotar que la estructura autorregresiva es sobre el cuantil condicional.

<sup>2</sup>Debido a que el cuantil condicionado depende de la desviación estándar; si se tiene un proceso autorregresivo sobre el cuantil, también se tiene este tipo de dinámica sobre la desviación; y por lo tanto, este proceso implica conglomerados de volatilidad.

signo de la serie en el periodo anterior.

Por otro lado, la especificación CAViaR-IG es utilizada si el proceso sigue un modelo de tipo localización-escala de la forma:

$$VaR_{t|t-1}^{\theta} \equiv q_{r_t}(\theta | t-1) = \mu_t + F_t^{-1}(\theta | t-1) \sigma_{t|\mathcal{F}_{t-1}} \quad (12)$$

con  $\mu_t \equiv E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$  y  $F_t^{-1}(\theta | t-1) \sigma_{t|\mathcal{F}_{t-1}}$  sigue la especificación en (11). Kuester et al. [2006] relajan el supuesto de  $\mu_t = 0$ , asumiendo que  $\mu_t = ar_{t-1}$  en (12).

Una forma de justificar la ecuación (11), incluyendo  $\mu_t = ar_{t-1}$ , es suponiendo el siguiente proceso sobre la desviación estándar condicional:

$$\sigma_{t|\mathcal{F}_{t-1}} = \left[ \alpha_0(\theta) + \alpha_1(\theta) (r_{t-1} - ar_{t-2})^2 + \beta_1(\theta) (\sigma_{t-1|\mathcal{F}_{t-1}})^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

Al despejar  $\sigma_{t|\mathcal{F}_{t-1}}$  de la ecuación (12), y a su vez reemplazando este resultado en (13) y renombrando términos, se llega a la especificación del modelo CAViaR-IG, AR(1)-CAViaR-IG:

$$q_{r_t}(\theta | t-1) = ar_{t-1} + \left[ \alpha_0^*(\theta) + \alpha_1^*(\theta) (r_{t-1} - ar_{t-2})^2 + \beta_1^*(\theta) (q_{r_{t-1}}(\theta | t-2) - ar_{t-1})^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

La estimación de los coeficientes de las ecuaciones (8) a (11) y (14) se lleva a cabo usando métodos de regresión cuantílica no lineal.

Sin embargo, estos modelos presentan algunos problemas relacionados con las propiedades de las funciones cuantílicas, principalmente la de monotonicidad que ocasiona el inconveniente de cuantiles cruzados [Gourieroux y Jasiak, 2008]. En particular, sólo el modelo CAViaR-SAV garantiza el cumplimiento de dicha propiedad, siempre que el cuantil condicionado se encuentre entre 0 y 1.

*Cuantiles condicionales para modelos GARCH lineales [Koenker y Xiao, 2009].* En la estimación de los modelos expuestos anteriormente, los regresores  $q_{r_{t-j}}(\theta | t-j-1)$  son latentes y dependen de parámetros desconocidos. Como consecuencia, la estimación por el método NLQR no es directamente aplicable en estos casos [Koenker y Xiao, 2009]. A este respecto, los autores proponen un proceso de estimación de dos etapas para los modelos tipo CAViaR(p,q)-SAV, utilizando modelos GARCH lineales. La relación entre estos dos tipos de modelos se describe a continuación.

Sea  $u_t$  una variable aleatoria con primer y segundo momento finitos. Por simplicidad, se supone que su primer momento es igual a cero. Entonces,  $u_t$  sigue un proceso GARCH( $p, q$ ) lineal si:

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (15)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i |u_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j} \quad (16)$$

donde  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria con primer y segundo momento finitos y funciones de densidad y distribución  $f$  y  $F$ , respectivamente.

Adicionalmente, los autores suponen que el cuantil condicionado a la información disponible en  $t - 1$  sigue un proceso de localización-escala y está dado por:

$$q_{u_t}(\theta | t - 1) = \boldsymbol{\gamma}'_t \mathbf{z}_t \quad (17)$$

con  $\boldsymbol{\gamma}'_t = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)F^{-1}(\theta)$  y  $\mathbf{z}_t = (1, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-p}|, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-q})'$ . Por lo tanto,  $q_{u_{t-j}}(\theta | t - j - 1) = \sigma_{t-j}F^{-1}(\theta)$  y el proceso (16) tiene la siguiente representación CAViaR(p, q)-SAV:

$$q_{u_t}(\theta | t - 1) = \alpha_0(\theta) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta)|u_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \beta_j(\theta)q_{u_{t-j}}(\theta | t - j - 1), \quad (18)$$

Con  $\alpha_0(\theta) = \alpha_0F^{-1}(\theta)$ ;  $\alpha_i(\theta) = \alpha_iF^{-1}(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, p$ ;  $\beta_j(\theta) = \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

Es importante notar que los coeficientes  $\beta_j(\theta) = \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , son globales en el sentido de que no dependen del cuantil  $\theta$ , mientras que los parámetros  $\alpha_i(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sí dependen del cuantil y por ende son locales.

**3.2. Estimación.** En esta sección se describe la metodología de estimación de la familia de modelos expuestos anteriormente. Esta se lleva a cabo usando las herramientas de la regresión cuantílica [Koenker y Bassett, 1978] y la regresión cuantílica no lineal [Koenker y Park, 1996]. Esta técnica es directamente aplicable para el modelamiento de cuantiles condicionales, es robusta a valores atípicos y no impone supuestos distribucionales [Koenker y Xiao, 2009].

La metodología de regresión cuantílica estándar parte del modelo:  $y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + v_t$ , donde  $\{y_t : t = 1, \dots, T\}$  es un proceso estocástico asociado a la variable aleatoria  $Y$ ,  $\{\mathbf{x}_t : t = 1, \dots, T\}$  es una sucesión de vectores fila de una matriz  $X$  de tamaño  $(t \times K)$  y  $v_t$  corresponde a un proceso *i.i.d.* con funciones de distribución y densidad,  $F_v$  y  $f_v$ , respectivamente.

El objetivo de esta técnica es estimar los parámetros del modelo asociados al  $\theta$ -ésimo cuantil de  $y_t$ <sup>3</sup>, notado como  $\boldsymbol{\beta}_\theta$ . Este se obtiene por medio de la solución del siguiente problema de programación lineal:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta \in \mathbb{R}^K} \sum_{t: y_t \geq \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta} \theta |y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta| + \sum_{t: y_t < \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta} (1 - \theta) |y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta| \quad (19)$$

o de forma equivalente:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta} T^{-1} \sum_{t=1}^T [\theta - I(y_t < \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta)] [y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta], \quad (20)$$

Sin embargo, algunos de los procesos definidos en secciones anteriores no son lineales y por lo tanto, requieren de métodos de regresión cuantílica no lineal (NLQR). En este caso,  $y_t$  puede ser

<sup>3</sup>Es importante mencionar que este cuantil es condicionado a la información disponible, es decir,  $q_{y_t}(\theta | \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_\theta)$ .



representado por  $y_t = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\theta) + v_t$ , donde  $g(\cdot)$  es una función no lineal y la estimación del cuantil condicionado se obtiene a partir de la solución del siguiente problema:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta} T^{-1} \sum_{t=1}^T [\theta - I(y_t < g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\theta))] [y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\theta)] \quad (21)$$

Hasta el momento solo se ha descrito la técnica de estimación general para los cuantiles condicionales asociados a la regresión cuantílica lineal y no lineal. A continuación se describen el uso de estas metodologías para la estimación de los modelos presentados en la sección 3.1.

3.2.1. *Modelo CAViaR*. La estimación de los coeficientes  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta = (\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_\theta, \hat{\boldsymbol{\beta}}'_\theta)$  se realiza por medio de la solución del siguiente problema de optimización:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}_\theta} T^{-1} \sum_{t=1}^T [\theta - I(r_t < q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1))] [r_t - q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1)], \quad (22)$$

donde  $q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1)$  depende de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\theta$  y  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta$  de acuerdo a la ecuación (7).

Engle y Manganeli demuestran que  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta$  es consistente. Además, obtienen el siguiente resultado de convergencia en distribución:

$$\sqrt{T} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta - \boldsymbol{\gamma}_\theta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, D_T^{-1} A_T D_T^{-1}) \quad (23)$$

con:

$$A_T = E \left[ T^{-1} \theta (1 - \theta) \sum_{t=1}^T \nabla q'_t \nabla q_t \right]$$

$$D_T = E \left[ T^{-1} f_t(0 | \Omega_t) \sum_{t=1}^T \nabla q'_t \nabla q_t \right]$$

Siendo  $\nabla q_t$  el gradiente de  $q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1)$  de dimensión  $(p+q+1) \times 1$ ,  $f_t(0 | \Omega_t)$  la función de densidad de  $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$  evaluada en cero y condicionada a la información disponible en  $t$  con  $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \equiv r_t - q_{r_t}(\boldsymbol{\theta} | t-1)$ . Adicionalmente, en el Apéndice E se encuentran unos estimadores consistentes de las matrices  $\hat{A}_T$  y  $\hat{D}_T$  propuestos por estos autores.

Por otra parte, Koenker y Xiao [2009] mencionan que la estimación NLQR de los parámetros del modelo GARCH lineal, planteado en (15) y (16), ignora la condición global de los coeficientes asociados a los rezagos de los cuantiles condicionales; tal como se mencionó al final de la sección 3.1.1. Al respecto, estos autores proponen como alternativa un método de estimación de dos etapas que incorpora esta condición.

En la primera etapa se realiza una estimación de los cuantiles condicionales asociados al modelo GARCH lineal usando regresión cuantílica, con el fin de obtener un estimador de la serie de la desviación estándar  $\hat{\sigma}_t$ . En la segunda se reemplaza  $\sigma_t$  por dicho estimador y se estima por NLQR la representación CAViaR-SAV del modelo GARCH lineal.

Para estimar los cuantiles condicionales del modelo GARCH lineal usando regresión cuantílica, inicialmente se representa el modelo descrito en (16) como un ARCH( $\infty$ ) lineal de la siguiente forma:

$$\sigma_t = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |u_{t-j}| \quad (24)$$

Reemplazando la ecuación (15),  $u_t = \sigma_t \varepsilon_t$ , en la anterior expresión se obtiene:

$$u_t = \left( a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |u_{t-j}| \right) \varepsilon_t \quad (25)$$

y por lo tanto, el cuantil condicionado de  $u_t$  está dado por el siguiente modelo  $QAR(\infty)$ :

$$q_{u_t}(\theta | t-1) = \delta_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(\theta) |u_{t-j}| \quad (26)$$

donde  $\delta_j(\theta) = a_j q_{\varepsilon_t}(\theta)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Adicionalmente, bajo las condiciones usuales de especificación, este proceso es estacionario y por ende, los coeficientes  $\delta_j$  decrecen geoméricamente. Por consiguiente, el modelo (26) puede aproximarse a un  $QAR(m)$ :

$$q_{u_t}(\theta | t-1) \approx \delta_0(\theta) + \delta_1(\theta) |u_{t-1}| + \dots + \delta_m(\theta) |u_{t-m}| \quad (27)$$

Tomando en cuenta el anterior resultado, en el cual se aproxima un cuantil condicionado del proceso GARCH lineal mediante un modelo  $QAR(m)$ , la primera etapa de la metodología de Koenker y Xiao consiste en estimar los parámetros  $\boldsymbol{\delta}'_{\theta} = (\delta_0(\theta), \delta_1(\theta), \dots, \delta_m(\theta))$  de la ecuación (27) mediante regresión cuantílica, con el fin de estimar  $\sigma_t$ . Sin embargo, el vector de parámetros  $\boldsymbol{\delta}_{\theta}$  no determina directamente a  $\sigma_t$ .

Los estimadores de los parámetros necesarios para generar  $\sigma_t$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , y adicionalmente  $q_{\varepsilon_t}$ , se pueden obtener a través de la solución del siguiente problema de distancia mínima:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \left( \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\theta} - \phi(\mathbf{a}) \right)' A_{m+1} \left( \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\theta} - \phi(\mathbf{a}) \right), \quad (28)$$

donde  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m, q_{\varepsilon_t})'$ ,  $\phi(\mathbf{a}) = q_{\varepsilon_t}(1, a_1, \dots, a_m)'$  y  $A_{m+1}$  es una matriz definida positiva de dimensión  $(m+1) \times (m+1)$ .<sup>4</sup> Como supuesto de identificación, en esta estimación se asume que  $\hat{a}_0 = 1$ .<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Típicamente, se asume que  $A_{m+1}$  es la matriz identidad.

<sup>5</sup> Es importante notar que es recomendable implementar la primera etapa de la metodología para varios cuantiles,  $\theta_k, k = 1, \dots, K$ , de forma que se obtenga una solución global. En este caso,  $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \left( \hat{\boldsymbol{\delta}}'_{\theta_1}, \dots, \hat{\boldsymbol{\delta}}'_{\theta_K} \right)'$  corresponde a las estimaciones de los parámetros de los modelos  $QAR$  descrito en (27) para los  $K$  cuantiles, y se pretende estimar el vector de coeficientes  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m, q_{\varepsilon_{t,1}}, \dots, q_{\varepsilon_{t,K}})'$  tal que  $\hat{a}_0 = 1$ , a través de la solución del siguiente problema de distancia mínima:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \left( \hat{\boldsymbol{\pi}} - \phi(\mathbf{a}) \right)' A \left( \hat{\boldsymbol{\pi}} - \phi(\mathbf{a}) \right),$$

con  $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{g} = (q_{\varepsilon_{t,1}}, \dots, q_{\varepsilon_{t,K}})'$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (1, a_1, \dots, a_m)'$  y  $A$  es una matriz definida positiva de dimensión  $K(m+1) \times K(m+1)$ .

Posteriormente, los autores proponen estimar  $\sigma_t$  a partir del vector  $(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m)$  obtenido en la optimización (28) como sigue:

$$\hat{\sigma}_t = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^m \hat{a}_j |u_{t-j}| \quad (29)$$

Finalmente, en la segunda etapa se estima mediante el método NLQR el vector de parámetros  $\boldsymbol{\gamma}_\theta = (\beta_0(\theta), \beta_1(\theta), \dots, \beta_p(\theta), \alpha_1(\theta), \dots, \alpha_q(\theta))$ , asociado al cuantil condicional descrito en la ecuación (18); teniendo en cuenta que  $\sigma_t$  es reemplazado por su estimador obtenido en (29):

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}_\theta} T^{-1} \sum_{t=1}^T [\theta - I(u_t < \boldsymbol{\gamma}_\theta' \hat{\boldsymbol{z}}_t)] [u_t - \boldsymbol{\gamma}_\theta' \hat{\boldsymbol{z}}_t], \quad (30)$$

con  $\hat{\boldsymbol{z}}_t = (1, \hat{\sigma}_{t-1}, \dots, \hat{\sigma}_{t-p}, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-1}|)'$ . De este modo, el  $\theta$ -ésimo cuantil condicional de  $u_t$  está dado por:

$$\hat{q}_{u_t}(\theta | t-1) = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta' \hat{\boldsymbol{z}}_t \quad (31)$$

Las propiedades asintóticas de los estimadores en la primera y segunda etapa se encuentran descritas en detalle en [Koenker y Xiao, 2009]

#### 4. EJERCICIO EMPÍRICO

El ejercicio empírico consiste en la estimación del valor en riesgo bajo las metodologías de regresión cuantílica expuestas en la sección 3. Para este fin, se estimó el VaR para un horizonte de pronóstico de un día y seis niveles de probabilidad (0,005, 0,01, 0,05, 0,95, 0,99 y 0,995)<sup>6</sup>, sobre los retornos<sup>7</sup> de tres series financieras colombianas: El índice de mercado bursátil de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio del peso colombiano con respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES).<sup>8</sup> El tamaño total de la muestra es de 1918 observaciones, entre el periodo 12/Dic/2007 y 20/Nov/2015. Las primeras 1438 observaciones se usaron para la estimación inicial del VaR y las restantes para las evaluaciones de su desempeño (en adelante, Backtesting). Tal como se aprecia en la Figura 1 del apéndice A, estas series cumplen con los hechos estilizados de las series financieras, puesto que presentan conglomerados de volatilidad y sus distribuciones presentan colas pesadas.

En particular, se estimaron 5 modelos utilizando la metodología de regresión cuantílica. Estos corresponden a 3 procesos CAViaR (CAViaR-SAV, CAViaR-AS y CAViaR-IG), a la extensión del modelo CAViaR-IG (AR(1)-CAViaR-IG), y al modelo GARCH lineal con representación CAViaR(p,q)-SAV (RQ-GARCH lineal). Con el fin de comparar las anteriores metodologías con las usadas en el literatura estándar, se estimó el VaR por medio de tres modelos adicionales:

<sup>6</sup>Los tres primeros niveles están asociados a valores extremos de la serie en la cola izquierda de su distribución, mientras que los tres últimos a la cola derecha.

<sup>7</sup>Los retornos se calcularon como la primera diferencia del logaritmo natural de la series multiplicado por 100.

<sup>8</sup>Este índice es propuesto en Reveiz y León [2008].

*RiskMetrics*<sup>®</sup>, ARMA-GARCH(1,1), y ARMA-apGARCH(1,1).<sup>9 10</sup>

A continuación se presentan los resultados de las pruebas de Backtesting de los modelos VaR mencionados anteriormente.

**4.1. Backtesting.** Con el fin de evaluar el desempeño del VaR de los modelos considerados, se implementó la prueba de Backtesting propuesta por Leccadito et al. [2014]. El estadístico de esta prueba se calcula a partir de un conjunto de estimaciones obtenidas de forma recurrente, tal como se describe a continuación:

- Inicialmente, se estima el modelo evaluado (por ejemplo, CAViaR-IG) para la muestra  $1, \dots, T_0$ , y se calcula el  $VaR_{t|t-1}^\theta$ , donde  $t = T_0 + 1$ . En esta aplicación,  $T_0$  corresponde a la observación 1438.
- Posteriormente, se estima el modelo para la muestra ampliada en una observación, es decir,  $1, \dots, T_0 + 1$  y se calcula el  $VaR_{t|t-1}^\theta$  para  $t = T_0 + 2$ .
- Luego se repite el procedimiento anterior hasta que se alcance el tamaño total de la muestra,  $t = T$ . En el actual ejercicio,  $T = 1918$ .

La prueba de Pearson Multinivel de Leccadito et al. [2014] evalúa la propiedad de cubrimiento condicional del VaR, para un conjunto de valores de  $\theta$  simultáneamente.<sup>11</sup> Esta prueba se calcula sobre la serie de fallas,  $J_{t|t-1}$ , definida de la siguiente forma:

$$J_{t|t-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } VaR_{t|t-1}^{\theta_k} < r_t < VaR_{t|t-1}^{\theta_{k+1}} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (32)$$

Con  $0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < \theta_{k+1} < 1$ .

Los Cuadros 1 y 2 del apéndice B contienen los resultados de esta prueba. Estas tablas reportan los valores-p asociados a la prueba de hipótesis de cubrimiento condicional evaluada hasta el rezago  $m = 15$  para una muestra de 480 observaciones. Los resultados indican que no existe evidencia de una mala especificación de los valores en riesgo analizados para los modelos de regresión cuantílica. El único modelo que rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 1% es el *RiskMetrics*<sup>®</sup> en ambas colas.

Por otra parte, las Figuras 2 a 9 del Apéndice C corresponden a los gráficos de Backtesting de cada metodología empleada para las tres series analizadas, y calculados a los seis niveles de probabilidad. La línea continua corresponde a los retornos, la punteada al VaR y los círculos a la serie

<sup>9</sup>Las siglas apGARCH hacen referencia al modelo *asymmetric power GARCH*.

<sup>10</sup>El valor  $\lambda$  escogido para el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>®</sup> se fijó en 0,94. La selección de los órdenes  $p$  y  $q$  del modelo ARMA se escogieron a partir del criterio de información AIC. Adicionalmente, la función de distribución de los errores estandarizados corresponde a la distribución *t-student*.

<sup>11</sup>Ver [Jiménez y Melo, 2015] para una descripción más detallada de esta prueba.

de excesos de retorno.<sup>12</sup> En general, se observa que el valor en riesgo sigue la dinámica de los retornos en la mayoría de los modelos y presenta un número de excesos aceptable.

Finalmente, en los Cuadros 3 al 8 del apéndice D se presentan los valores de las funciones de pérdida de López y las de Caporin ( $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ ).<sup>13</sup> Estas funciones permiten clasificar las metodologías según su desempeño en términos del tamaño de los excesos, de tal forma que menores valores implican que se tiene un modelo con mejor comportamiento. Estos resultados indican que comparados con los modelos tradicionales, en general, los modelos de regresión cuantílica presentan el mejor desempeño. Es así como de los 18 casos analizados, para 3 series y 6 niveles de probabilidad, solo en 4 se obtienen los mejores resultados para las metodologías tradicionales.

## 5. COMENTARIOS FINALES

Este documento presenta un grupo de metodologías para el cálculo del valor en riesgo basadas en la estimación por regresión cuantílica y regresión cuantílica no lineal. Estas técnicas tienen ciertas ventajas en la modelación del cuantil condicionado, ya que sus estimadores son robustos ante valores atípicos y no imponen supuestos distribucionales. Adicionalmente, los modelos expuestos incluyen una especificación autorregresiva en el proceso generador de los datos con el fin de capturar uno de los hechos estilizados de las series financieras asociados a los conglomerados de volatilidad en el tiempo.

Posteriormente, se estima el valor en riesgo para los retornos de tres series financieras colombianas usando tanto metodologías de regresión cuantílica (RQ) como técnicas tradicionales. Los resultados de las pruebas de backtesting del VaR muestran que los modelos RQ no presentan evidencia de una mala especificación, mientras que algunas metodologías tradicionales presentan este tipo de problemas.

Es importante señalar que comparando con las técnicas tradicionales; los mejores resultados, en términos de funciones de pérdida, se obtienen para las metodologías de regresión cuantílica en la mayoría de ejercicios realizados. Este resultado es de especial utilidad, puesto que permite obtener una medida del riesgo con mejor desempeño, que tiene el potencial de modelar directamente el cuantil sin necesidad de realizar ciertos supuestos.

## REFERENCIAS

- BECERRA, O., y L. F. MELO (2006): *Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: Una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia*, Colección Lecciones de la Facultad de economía del Rosario. Centro editorial Universidad del Rosario.
- CABRERA, W., L. F. MELO, J. C. MENDOZA, y S. TÉLLEZ (2012): “Valor en Riesgo Condicional para el portafolio de deuda pública de las entidades financieras,” *Temas de estabilidad financiera*, 72, Banco de la República.

<sup>12</sup>La serie de excesos de retorno se define como  $r_t$  si  $|r_t| > |VaR_{t|t-1}^\theta|$  y cero en otro caso.

<sup>13</sup>La definición de estas funciones se puede encontrar en Granados y Melo [2011], entre otros.

- ENGLE, R. F., Y S. MANGANELLI (2001): "Value at Risk models in finance," Working paper series 75, European Central Bank.
- (2004): "CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles," *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4), 367 – 381.
- GAGLIANONE, W. P., L. R. LIMA, Y O. LINTON (2008): "Evaluating Value-at-Risk Models via Quantile Regression," Working paper series 161, Banco Central do Brasil.
- GOURIEROUX, C., Y J. JASIAK (2008): "Dynamic Quantile Models.," *Journal of Econometrics*, 147(1), 198 – 205.
- GRANADOS, J. C., Y L. F. MELO (2011): "Regulación y valor en riesgo," *Ensayos sobre Política Económica*, 29(64), 110–177.
- JIMÉNEZ, A. E., Y L. F. MELO (2015): "Modelación de la asimetría y curtosis condicionales: una aplicación VaR para series Colombianas," *Revista Desarrollo y Sociedad*, 1(76), 279–321.
- KOENKER, R. (2005): *Quantile regression*. Cambridge University Press.
- KOENKER, R., Y G. BASSETT (1978): "Regression Quantiles," *Econometrica*, 46(1), 33–50.
- KOENKER, R., Y B. J. PARK (1996): "An interior point algorithm for nonlinear quantile regression," *Journal of Econometrics*, 71(1), 265–283.
- KOENKER, R., Y Z. XIAO (2009): "Conditional Quantile Estimation for Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models," *Journal of the American Statistical Association*, 104(488), 1696–1712.
- KOENKER, R., Y Q. ZHAO (1996): "Conditional Quantile Estimation and Inference for Arch Models," *Econometric Theory*, 12(5), 793–813.
- KUESTER, K., S. MITTNIK, Y M. S. PAOLELLA (2006): "Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies," *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), 53–89.
- LECCADITO, A., S. BOFFELLI, Y G. URGA (2014): "Evaluating the accuracy of value-at-risk forecasts: New multilevel tests," *International Journal of Forecasting*, 30(2), 206 – 216.
- LONDOÑO, C. A. (2011): "Regresión del cuantil aplicada al modelo de redes neuronales artificiales. Una aproximación de la estructura CAViaR para el mercado de valores colombiano," *Ensayos sobre Política Económica*, 29(64), 62–109.
- LONDOÑO, C. A., J. C. CORREA, Y M. LOPERA (2014): "Estimación bayesiana del valor en riesgo: Una aplicación para el mercado de valores colombiano," *Cuadernos de Economía*, 33(63), 635–678.
- REVEIZ, A., Y C. LEÓN (2008): "Índice representativo del mercado de deuda pública interna: IDXTES," Borradores de Economía 488, Banco de la República.
- TSAY, R. S. (2005): *Analysis of financial time series*, vol. 543. John Wiley & Sons.
- XILIAN, Z., Y Z. XI (2009): *Cutting-Edge Research Topics on Multiple Criteria Decision Making*, cap. Estimation of Value-at-Risk for Energy Commodities via CAViaR Model, pp. 429–437. Springer Berlin Heidelberg.

## APÉNDICE A. GRÁFICOS DE LAS SERIES DE RETORNOS Y GRÁFICOS QQ

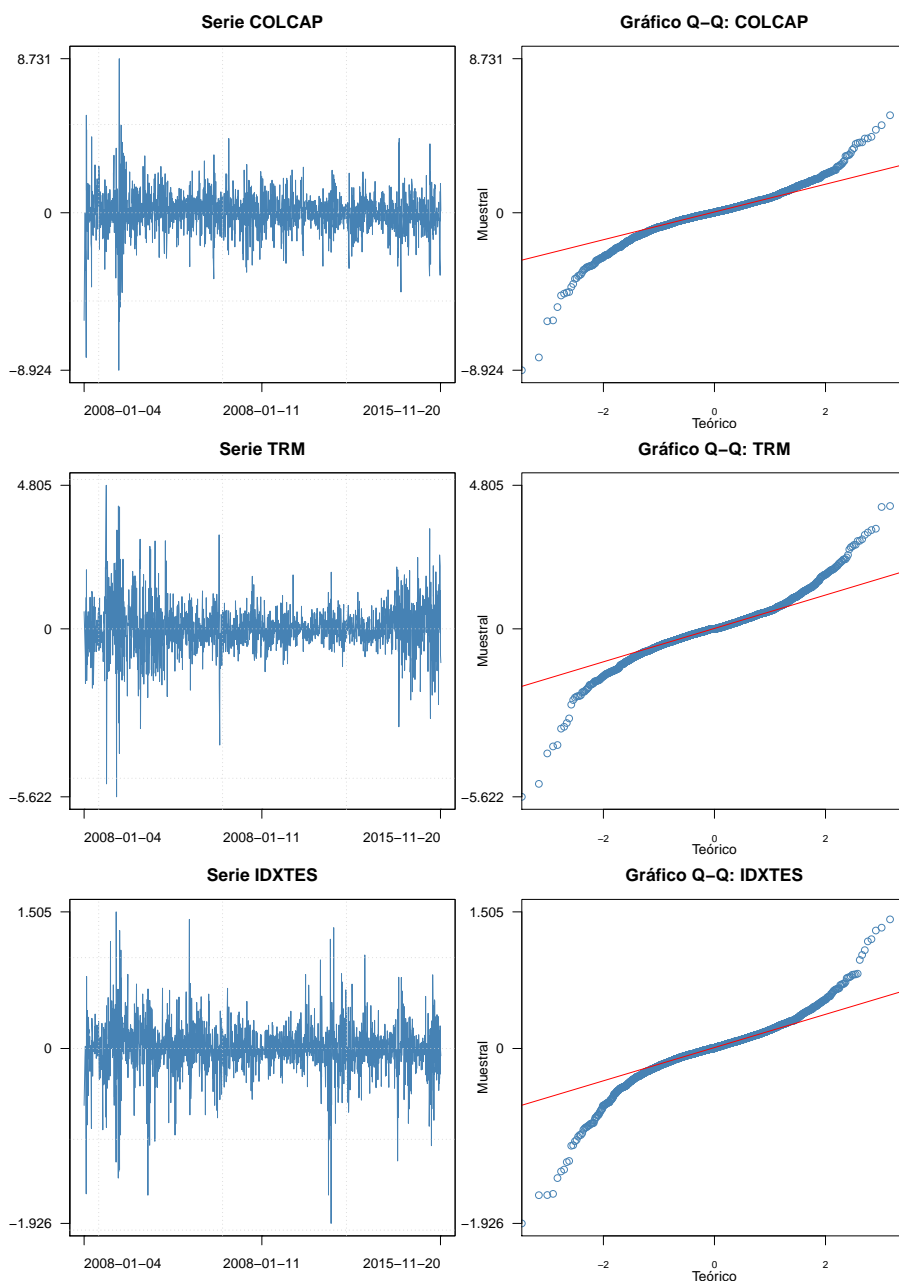


FIGURA 1. Retornos y gráficos QQ para las series TRM, COLCAP e IDXTES entre el 01-Abr-2008 y el 20-Nov-2015.

## APÉNDICE B. PRUEBAS DE LECADDITO PARA LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL VAR

Modelos	COLCAP	TRM	IDXTES
	$LR_{Cond}$	$LR_{Cond}$	$LR_{Cond}$
CAViaR - SAV	0.7145	0.8392	0.1642
CAViaR - AS	0.8463	0.8392	0.9674
CAViaR - IG	0.6340	0.8919	0.5978
AR(1)-CAViaR-IG	0.4440	0.4935	0.6001
RQ-GARCH Lineal	0.4216	0.1050	0.2367
RQ ARCH	0.3162	0.0773	0.2846
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	0.0003	0.0469	0.0017
ARMA GARCH	0.5321	0.6074	0.2926
ARMA-apGARCH	0.5851	0.4016	0.5880

CUADRO 1. Resultados de las pruebas de Pearson-Multinivel para la serie de retornos del COLCAP, TRM e IDXTES. para  $\theta = 0,005, 0,01$  y  $0,05$  (cola izquierda). Los valores reportados corresponden a los valores-p de las pruebas de hipótesis de cubrimiento condicional.

Modelos	COLCAP	TRM	IDXTES
	$LR_{Cond}$	$LR_{Cond}$	$LR_{Cond}$
CAViaR - SAV	0.4221	0.1610	0.5958
CAViaR - AS	0.5598	0.6993	0.4823
CAViaR - IG	0.2784	0.3240	0.8466
AR(1)-CAViaR-IG	0.3257	0.2264	0.3090
RQ-GARCH Lineal	0.5448	0.0108	0.3321
RQ ARCH	0.4314	0.1280	0.6609
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	0.1825	0.0012	0.7687
ARMA GARCH	0.7209	0.2265	0.3594
ARMA-apGARCH	0.4427	0.6249	0.3182

CUADRO 2. Resultados de las pruebas de Pearson-Multinivel para la serie de retornos del COLCAP, TRM e IDXTES para  $\theta = 0,95, 0,99$  y  $0,995$  (cola derecha). Los valores reportados corresponden a los valores-p de las pruebas de hipótesis de cubrimiento condicional.



## APÉNDICE C. GRÁFICOS DE BACKTESTING

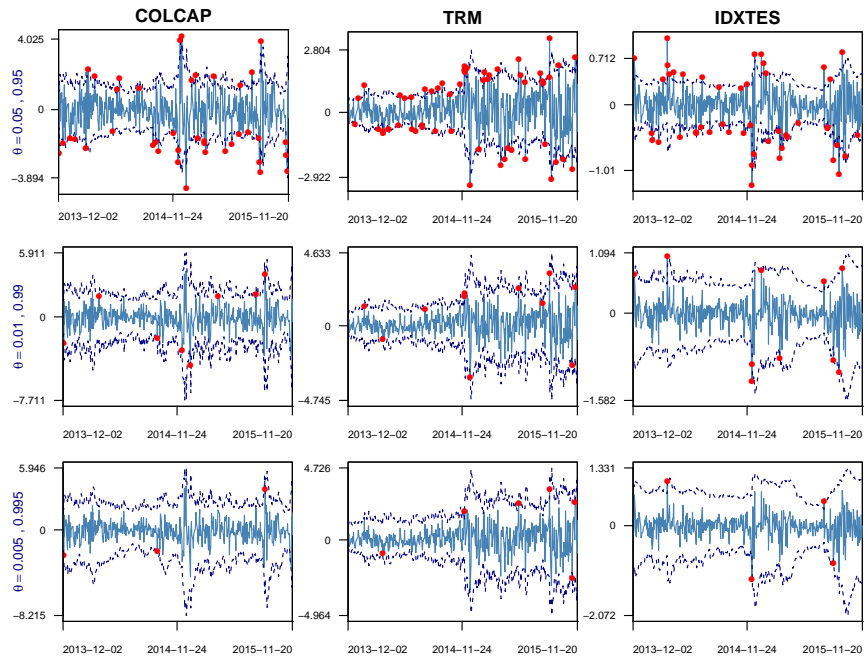


FIGURA 2. Gráficos de Backtesting del VaR del modelo CAViaR - SAV de la serie de retornos del COLCAP, TRM e IDXTES y para 6 niveles de  $\theta$ . La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al VaR y los puntos a las series de excesos de retorno.

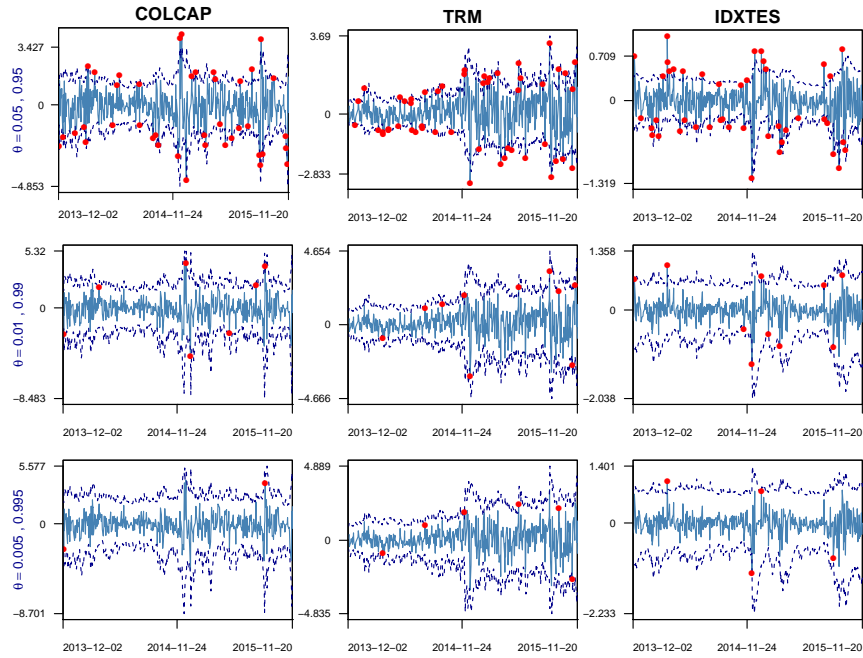


FIGURA 3. Modelo CAViAR - AS

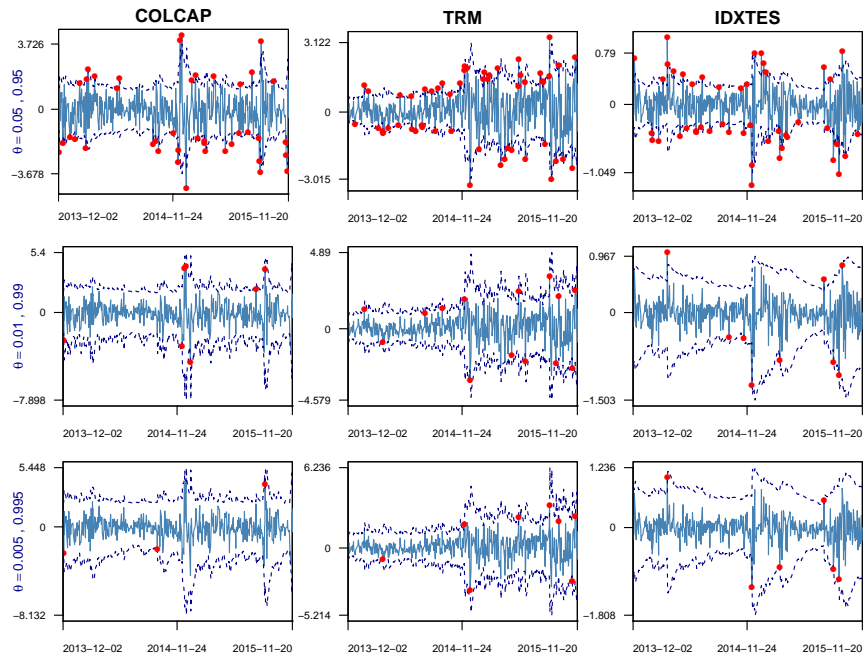


FIGURA 4. VaR - Modelo CAViAR - IG

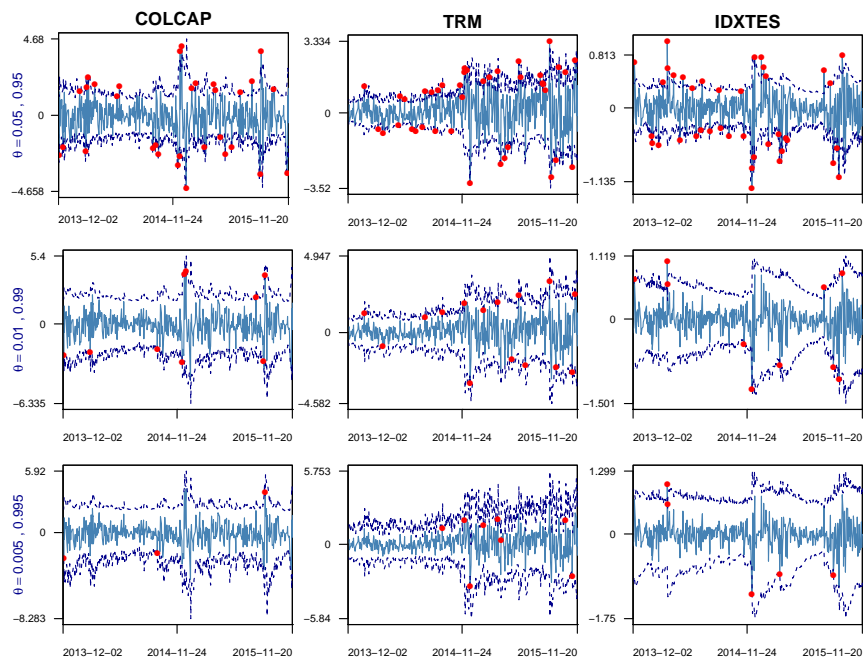


FIGURA 5. VaR - Modelo AR(1) - CAViaR - IG

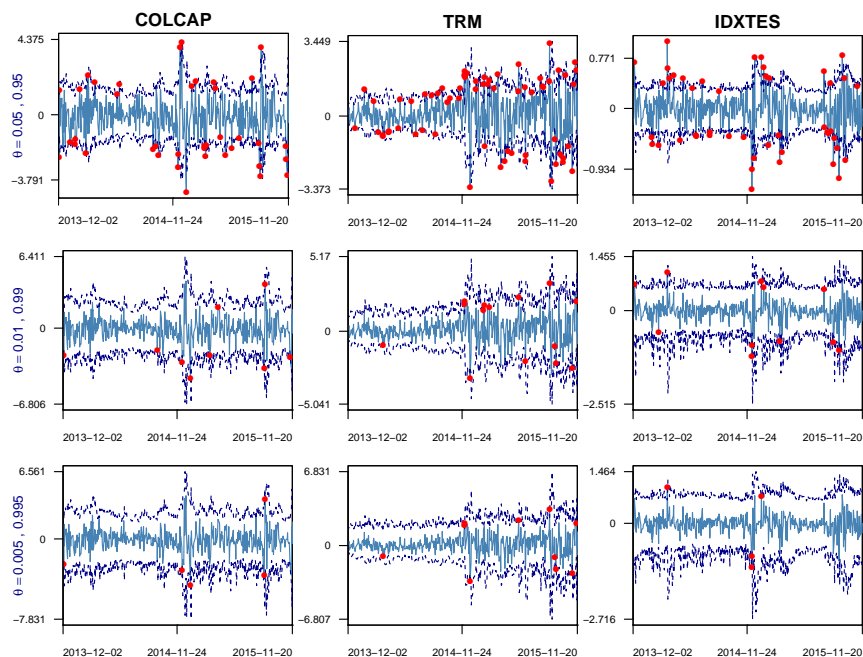
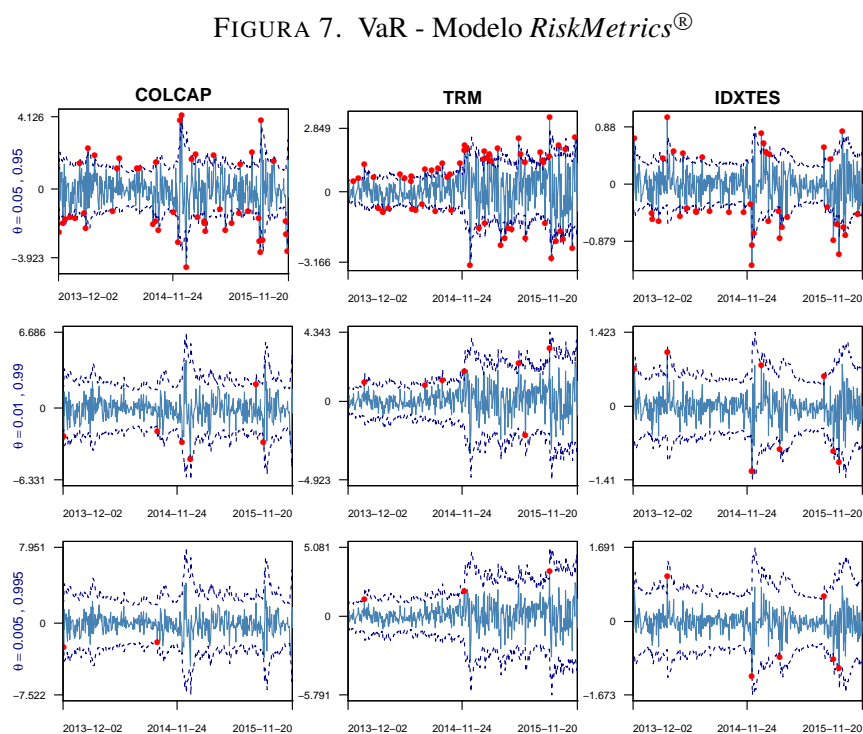
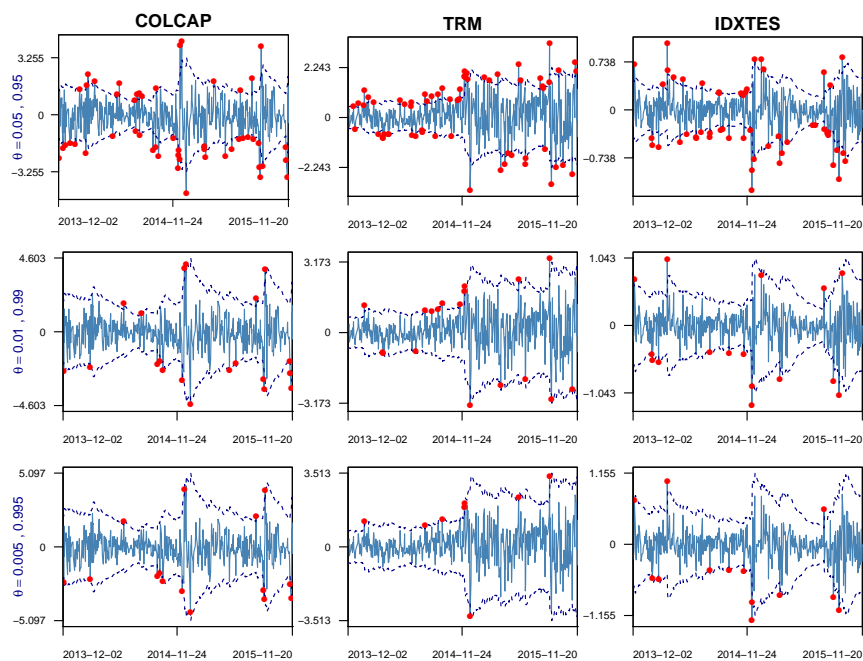


FIGURA 6. VaR - Modelo GARCH lineal



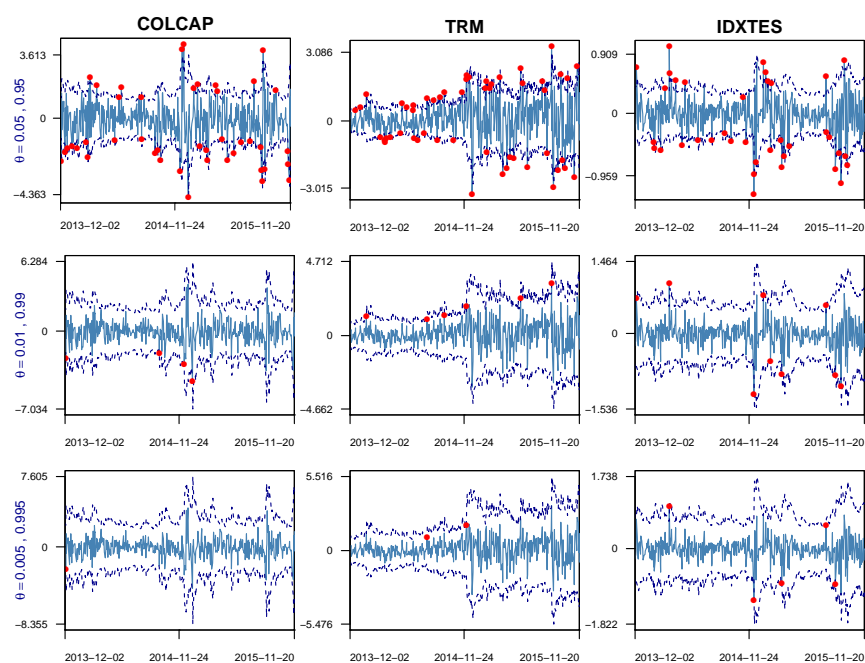


FIGURA 9. VaR - Modelo ARMA-apGARCH

## APÉNDICE D. FUNCIONES DE PÉRDIDA.

Modelos	$\theta = 0,05$				$\theta = 0,01$				$\theta = 0,005$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	45.23	10.80	10.85	17.11	5.07	0.77	0.59	1.53	2.42	0.47	0.23	0.87
CAViaR - AS	33.95	6.33	5.02	10.57	3.37	0.35	0.16	0.87	1.02	0.06	0.01	0.14
CAViaR - IG	44.25	10.74	10.65	17.22	3.66	0.54	0.27	1.37	2.03	0.11	0.02	0.20
AR(1)-CAViaR-IG	21.50	3.30	2.72	7.16	5.13	0.32	0.05	0.76	2.06	0.15	0.03	0.32
RQ-GARCH Lineal	46.20	11.07	12.52	17.66	10.19	1.31	1.12	3.46	5.97	0.68	0.63	2.04
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	58.62	15.49	16.87	21.72	21.03	4.48	3.71	8.50	14.96	2.79	2.00	5.62
ARMA-GARCH	48.51	12.16	11.52	18.38	5.80	0.86	0.37	1.91	2.04	0.09	0.02	0.21
ARMA-apGARCH	43.36	9.93	8.48	15.86	4.42	0.47	0.19	1.11	1.02	0.06	0.01	0.14

CUADRO 3. Funciones de pérdida del VaR de la serie COLCAP entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola izquierda.

Modelos	$\theta = 0,05$				$\theta = 0,01$				$\theta = 0,005$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	30.54	6.93	3.71	8.38	3.27	0.52	0.16	0.75	2.12	0.27	0.06	0.42
CAViaR - AS	30.49	7.05	3.71	8.41	3.34	0.57	0.20	0.85	2.19	0.48	0.13	0.58
CAViaR - IG	29.85	7.26	3.98	8.64	6.68	0.75	0.33	1.40	3.14	0.25	0.07	0.46
AR(1)-CAViaR-IG	15.78	1.38	0.39	2.40	6.74	0.75	0.34	1.50	2.80	0.53	0.34	1.24
RQ-GARCH Lineal	37.70	12.27	10.23	12.06	8.43	2.22	1.62	3.14	6.19	1.02	0.69	1.81
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	30.93	6.74	3.83	8.13	8.76	0.64	0.31	1.38	1.31	0.21	0.11	0.56
ARMA-GARCH	28.03	6.39	3.52	7.90	1.03	0.09	0.02	0.18	-	-	-	-
ARMA-apGARCH	28.42	5.98	3.00	7.39	-	-	-	-	-	-	-	-

CUADRO 4. Funciones de pérdida del VaR de la serie TRM entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola izquierda. Los valores reportados con (-) indican que para este nivel de probabilidad la serie no excede en valor absoluto al VaR estimado en ningún periodo.

Modelos	$\theta = 0,05$				$\theta = 0,01$				$\theta = 0,005$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	31.13	14.89	6.33	5.08	5.64	2.30	1.18	1.36	2.41	1.21	0.67	0.76
CAViaR - AS	27.70	12.55	4.58	4.34	5.36	1.45	0.55	0.90	2.24	0.68	0.33	0.51
CAViaR - IG	30.02	13.80	5.72	4.92	6.61	2.27	1.13	1.29	4.44	1.31	0.74	0.81
AR(1)-CAViaR-IG	22.35	3.97	0.58	2.11	5.66	2.42	1.25	1.38	3.43	1.31	0.73	0.81
RQ-GARCH Lineal	28.19	13.25	5.46	5.17	6.23	1.39	0.34	0.99	2.02	0.19	0.03	0.16
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	36.29	16.82	7.02	5.64	12.18	5.59	2.74	2.53	10.95	4.04	2.04	1.99
ARMA-GARCH	27.94	12.28	5.33	4.64	4.67	2.41	1.17	1.44	4.39	1.35	0.58	0.94
ARMA-apGARCH	25.77	10.94	4.65	4.26	5.55	2.06	0.92	1.28	3.31	1.01	0.44	0.72

CUADRO 5. Funciones de pérdida del VaR de la serie IDXTES entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola izquierda.

Modelos	$\theta = 0,95$				$\theta = 0,99$				$\theta = 0,995$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	20.18	4.46	3.84	7.53	4.76	0.45	0.26	1.16	1.22	0.14	0.06	0.47
CAViaR - AS	22.56	4.41	3.79	7.73	4.53	0.36	0.17	1.01	1.22	0.14	0.07	0.47
CAViaR - IG	22.63	4.59	3.86	8.05	4.22	0.25	0.07	0.73	1.11	0.09	0.03	0.33
AR(1)-CAViaR-IG	24.27	5.21	4.39	8.66	4.24	0.23	0.08	0.67	1.10	0.09	0.03	0.31
RQ-GARCH Lineal	19.80	4.15	2.81	7.28	2.01	0.05	-	0.11	1.00	0.02	0.01	0.06
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	27.87	6.60	5.96	9.93	7.85	1.29	0.75	2.95	4.63	0.64	0.25	1.52
ARMA-GARCH	23.81	4.45	3.52	7.66	1.02	0.06	0.01	0.13	-	-	-	-
ARMA-apGARCH	20.12	4.00	3.14	6.98	-	-	-	-	-	-	-	-

CUADRO 6. Funciones de pérdida del VaR de la serie COLCAP entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola derecha. Los valores reportados con (-) indican que para este nivel de probabilidad la serie no excede en valor absoluto al VaR estimado en ningún periodo.

Modelos	$\theta = 0,95$				$\theta = 0,99$				$\theta = 0,995$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	37.85	9.30	6.20	10.94	8.94	1.27	0.61	2.05	4.52	0.67	0.32	1.17
CAViaR - AS	31.76	9.65	5.92	10.18	7.56	0.90	0.37	1.46	4.33	0.52	0.23	0.78
CAViaR - IG	36.81	9.25	6.16	10.76	9.19	1.33	0.67	2.24	5.82	0.90	0.43	1.72
AR(1)-CAViaR-IG	32.84	10.21	7.03	10.68	10.24	1.96	0.75	2.98	6.40	0.93	0.28	1.20
RQ-GARCH Lineal	52.54	17.50	16.50	16.31	11.16	2.83	2.24	4.02	6.06	0.89	0.50	1.77
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	46.90	13.43	9.07	12.98	12.94	3.14	1.93	4.09	8.81	1.98	1.07	2.88
ARMA-GARCH	44.55	12.99	8.57	13.19	6.88	1.33	0.52	1.98	3.12	0.29	0.07	0.52
ARMA-apGARCH	35.94	11.25	6.94	11.54	6.34	0.89	0.24	1.24	2.03	0.11	0.02	0.19

CUADRO 7. Funciones de pérdida del VaR de la serie TRM entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola derecha.

Modelos	$\theta = 0,95$				$\theta = 0,99$				$\theta = 0,995$			
	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$	López	$F_1$	$F_2$	$F_3$
CAViaR - SAV	19.16	9.35	3.54	3.24	5.29	1.72	0.57	0.87	2.12	0.90	0.21	0.48
CAViaR - AS	19.20	9.84	3.70	3.36	5.26	1.53	0.46	0.88	2.08	0.40	0.11	0.30
CAViaR - IG	19.17	9.37	3.74	3.12	3.29	1.60	0.59	0.76	2.15	0.82	0.24	0.49
AR(1)-CAViaR-IG	18.22	9.75	3.76	3.30	5.36	2.56	0.79	1.12	2.09	0.54	0.13	0.37
RQ-GARCH Lineal	21.46	12.51	5.07	3.83	5.23	1.10	0.40	0.65	2.14	0.58	0.21	0.39
<i>RiskMetrics</i> <sup>®</sup>	19.95	8.49	3.25	2.68	5.48	3.00	1.32	1.06	3.40	2.39	1.01	0.90
ARMA-GARCH	13.95	6.87	2.87	2.42	4.29	1.52	0.57	0.77	2.17	0.79	0.27	0.48
ARMA-apGARCH	13.97	7.26	2.78	2.63	4.25	1.40	0.46	0.75	2.13	0.67	0.20	0.43

CUADRO 8. Funciones de pérdida del VaR de la serie IDXTES entre diciembre de 2011 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para la cola derecha.

#### APÉNDICE E. PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE LOS ESTIMADORES DEL PROCESO CAVIAR.

En los Apéndices A y B del documento de Engle y Manganelli [2004] se encuentran los supuestos requeridos y las demostraciones de consistencia y convergencia de los estimadores  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta$  obtenidos en la solución del problema (22). Bajo dichas condiciones, se tiene el siguiente resultado de convergencia:

$$\begin{aligned}\hat{A}_T &\xrightarrow{p} A_T \\ \hat{D}_T &\xrightarrow{p} D_T\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\hat{A}_T &\equiv T^{-1}\theta(1-\theta)\nabla'q(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta)\nabla q(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta) \\ \hat{D}_T &\equiv (2T\hat{c}_T)^{-1}\sum_{t=1}^T I(|y_t - q_t(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta)| < \hat{c}_T)\nabla'q_t(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta)\nabla q_t(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\theta)\end{aligned}$$

Con  $\nabla q(\cdot)$  una matriz de dimensión  $T \times (p + q + 1)$  cuya  $t$ -ésima fila es  $\nabla q_t(\cdot)$ . El término  $\hat{c}_T$  corresponde al ancho de banda utilizado para evaluar la precisión de los cuantiles condicionales [Koenker, 2005, pp.77-78].



