

Borradores de ECONOMÍA

Relación entre los valores en riesgo de los principales mercados financieros colombianos: un enfoque a través de modelos multivariados de regresión cuantílica.

Por: Daniel Mariño-Ustacara,
Luis Fernando Melo-Velandia

Núm. 975
2016



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

**RELACIÓN ENTRE LOS VALORES EN RIESGO DE LOS PRINCIPALES
MERCADOS FINANCIEROS COLOMBIANOS:
UN ENFOQUE A TRAVÉS DE MODELOS MULTIVARIADOS DE REGRESIÓN CUANTÍLICA.**

DANIEL MARIÑO-USTACARA
jdmarinou@unal.edu.co
LUIS FERNANDO MELO-VELANDIA
lmelovel@banrep.gov.co

RESUMEN. En este documento se estima el valor en riesgo a partir de un modelo multivariado de regresión cuantílica. Este tipo de modelos permiten capturar hechos estilizados de las series financieras y evitan imponer supuestos relacionados con la distribución de estas variables. A diferencia de las metodologías usuales de enfoque univariado, ésta toma en cuenta interrelaciones con riesgos de mercado de otras variables. Adicionalmente, este tipo de modelos permite calcular funciones de pseudo impulso-respuesta. Este modelo se estimó sobre el índice de mercado bursátil de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio con respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES) para la muestra comprendida entre el periodo 04/Ene/2008 y 23/Nov/2015. Al comparar el VaR obtenido por este modelo con técnicas tradicionales, se encontró que las medidas de riesgo de mercado bajo esta metodología tienen un buen desempeño. Adicionalmente, las funciones de pseudo impulso-respuesta indican que los choques generados en las variables TRM e IDXTES presentan respuestas negativas y persistentes en sus propios valores en riesgo. Por otro lado, los mayores impactos cruzados en los valores en riesgo se presentan en las series TRM y COLCAP ante choques en IDXTES; y en IDXTES ante choques en TRM.

Palabras Clave. Valor en riesgo, regresión cuantílica multivariada, procesos CAViAR, funciones de pseudo impulso-respuesta.

Clasificación JEL. C32, C52, C58, G10.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los mercados financieros de países emergentes ha ganado interés en la literatura en años recientes. La reciente crisis financiera internacional, iniciada en el mercado de vivienda de los Estados Unidos, llevó a que se diera una gran turbulencia en los mercados financieros de las economías desarrolladas y a que los inversionistas internacionales buscaran alternativas de inversión en economías emergentes. Dentro de estas, los países de América Latina fueron importantes receptores de flujos de capitales, debido en gran medida al relativamente buen desempeño que presentaron frente a economías emergentes de otras regiones del mundo (ver Espinosa-Torres et

Date: 13 de diciembre de 2016.

* Los autores son, en su orden, economista de la Universidad Nacional y econometrista principal de la Unidad de Econometría del Banco de la República. Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Se agradecen los invaluable comentarios y sugerencias de Wilmar Cabrera y José Eduardo Gómez-González.

al. [2016]).

Colombia ha sido un país de desempeño destacado, al compararlo con sus pares de la región, durante las dos últimas décadas. Debido a las mejoras sistemáticas en las calificaciones de deuda recibidas por parte de Standard & Poor's y Fitch, el país se ha perfilado como un importante receptor de flujos de capitales, que se han dirigido hacia sus mercados de deuda pública y privada, cambiario y accionario. Especialmente a partir de 2014, año en el cual Colombia fue incluida en el índice GBI de JP Morgan, la participación de inversionistas internacionales dentro del total de inversionistas en mercados financieros colombianos aumentó considerablemente.

Por esta razón, el estudio de la interdependencia entre mercados financieros colombianos se ha vuelto muy relevante. Por una parte, es muy importante para los inversionistas comprender mejor cómo choques en un mercado afectan los rendimientos en ese y otros mercados, con el fin de tomar mejores decisiones de inversión basadas en el riesgo y retorno de sus portafolios. Por otra parte, es relevante para los supervisiones y reguladores de los mercados el comprender los riesgos derivados de eventos que ocurren en un mercado y su incidencia sobre otros.

Una de las medidas de riesgo de mercado más utilizadas por las instituciones financieras y entidades regulatorias es el Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés). Esta medida corresponde a la mínima pérdida esperada en el $(1 - \theta)100\%$ de los peores casos para un horizonte de tiempo específico [Becerra y Melo, 2006]. De este modo, se puede suponer que la pérdida esperada de su inversión no será mayor al VaR con una probabilidad θ . En términos estadísticos, el VaR corresponde al θ -ésimo cuantil asociado a la función de distribución de pérdidas y ganancias de un activo o portafolio financiero. Dada su relevancia, es importante contar con una metodología confiable que genere las mejores estimaciones de este valor. Por tal razón, en la literatura se encuentran diversos enfoques propuestos para la estimación de esta medida, tanto paramétricos como no paramétricos.

Sin embargo, los métodos usuales para calcular el VaR son de carácter univariado, ignorando el hecho de que el riesgo de mercado asociado a un activo financiero puede estar relacionado con el riesgo de otros activos. Una forma natural de capturar dicha interdependencia es a través de modelos VaR multivariados.

Uno de estos modelos es el de Vectores Autorregresivos para Valores en Riesgo (VAR para VaR), propuesto por White et al. [2015]. En este, el cuantil condicional de un activo financiero se puede expresar en términos de rezagos del cuantil y de rezagos de los cuantiles de las demás series. Esta estructura es análoga a la familia de modelos CAViAR (*Conditional Autorregresive Value at Risk*, por sus siglas en inglés) propuestos por Engle y Manganelli [2004], donde el cuantil condicional de una variable aleatoria es una función de cuantiles pasados. Adicionalmente, esta estructura permite analizar el grado de interdependencia entre los valores en riesgo de varios activos financieros a través de funciones de pseudo impulso-respuesta.

El presente documento tiene como objetivo analizar la relación entre los valores en riesgo de tres series asociadas a los principales mercados financieros colombianos: el índice de mercado bursátil

de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES); para la muestra comprendida entre el periodo 04/Ene/2008 y 23/Nov/2015.

Es de notar que los análisis de interdependencia entre mercados en el contexto de América Latina se han centrado a estudiar estas relaciones entre países en el contexto de un mercado particular (por ejemplo, Loaiza et al. [2015b] y Loaiza et al. [2015a]). Pocos estudios se han enfocado en estudiar los efectos entre mercados dentro de un país particular de la región (ver Gómez-González y Melo-Velandia [2014]). Y, en particular, no se conocen estudios sobre la interacción del riesgo de mercado entre distintos mercados en Colombia. Este estudio se constituye en el primero en estudiar dicha interdependencia.

Además de esta introducción, este documento contiene otras 4 secciones. En la segunda sección, se introduce el modelo VAR para VaR (o MVMQ-CAViaR). En la tercera sección, se presentan los resultados de un ejercicio empírico sobre las series mencionadas anteriormente, así como el análisis de las funciones de pseudo impulso-respuesta derivadas para este ejercicio. Finalmente, se presentan algunos comentarios finales.

2. VAR PARA VAR

El modelo que se presenta a continuación es una extensión del proceso CAViaR - Multicuantil propuesto por White et al. [2010]. Este modelo recibe el nombre de MVMQ-CAViaR (*Multivariate - Multi Quantile Conditional Autoregressive Value at Risk*) o VAR para VaR. El principal objetivo de este modelo es analizar el grado de dependencia entre las colas de la distribución de un conjunto de variables aleatorias [White et al., 2015]. En la siguiente sección se explica en detalle este proceso.

2.1. El proceso MVMQ-CAViaR [White et al., 2015]. Sea θ , $\theta \in (0, 1)$, el nivel de probabilidad de interés; y $\{\mathbf{R}_t, \mathbf{X}_t\}_{t=1}^T$ un proceso estocástico estacionario y ergódico donde $\mathbf{R}'_t = (r_t^1, \dots, r_t^n)$ es un vector de variables aleatorias; típicamente asociado a un vector de retornos financieros, de dimensión $n \times 1$ y $\mathbf{X}'_t = (1, x_t^1, \dots, x_t^k)$ un vector variables observables en t de dimensión $(k+1) \times 1$. Por lo tanto, el conjunto de información disponible en $t-1$ es el siguiente:

$$\mathcal{F}_{t-1} := \{(\mathbf{R}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-1}), (\mathbf{R}_{t-2}, \mathbf{X}_{t-2}), \dots\}$$

Adicionalmente, sea $\Pi_\theta \equiv (\mathbf{C}(\theta), A_\theta, B_\theta)$ un conjunto de parámetros desconocidos, donde $\mathbf{C}(\theta)$ es un vector de tamaño $n \times 1$; $A_\theta \equiv (A_1(\theta), \dots, A_r(\theta))$ y $B_\theta \equiv (B_1(\theta), \dots, B_m(\theta))$ son un conjunto de matrices de coeficientes de tamaño $n \times k$ y $n \times n$ respectivamente.

Definiendo a:

$$q_t^i(\theta | t-1) \equiv q_{r_t^i}(\theta_i | \mathcal{F}_{t-1}, \Pi_\theta) \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Como el θ -ésimo cuantil del i -ésimo retorno financiero condicionado a la información disponible en $t-1$; el proceso MVMQ-CAViaR supone que el cuantil condicionado se genera de la siguiente

forma:

$$\mathbf{Q}_t(\boldsymbol{\theta} | t-1) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^r A_j(\boldsymbol{\theta}) l(\mathbf{X}_{t-j}) + \sum_{j=1}^m B_j(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}_{t-j}(\boldsymbol{\theta} | t-j-1) \quad (2)$$

Siendo $l(\mathbf{X}_t) := (l(x_t^1), \dots, l(x_t^k))'$ una función que vincula la información de las variables observables en \mathcal{F}_{t-1} con $\mathbf{Q}_t(\cdot)$, y $\mathbf{Q}_{t-j}(\boldsymbol{\theta} | t-j-1) := (q_{t-j}^1(\boldsymbol{\theta} | t-j-1), \dots, q_{t-j}^n(\boldsymbol{\theta} | t-j-1))'$ para $j = 0, 1, \dots, m$.

Un caso particular del proceso (2), con un forma funcional de $l(\cdot)$ conocida, se puede derivar a partir del siguiente proceso generador de datos para \mathbf{R}_t :

$$\begin{pmatrix} r_t^1 \\ r_t^2 \\ \vdots \\ r_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21,t} & \gamma_{22,t} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1,t} & \gamma_{n2,t} & \gamma_{n3,t} & \cdots & \gamma_{nn,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \vdots \\ \eta_t^n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Donde $\gamma_{ij,t}$ es medible en \mathcal{F}_{t-1} y $\boldsymbol{\eta}_t \stackrel{iid}{\sim} (\mathbf{0}, I_n)$. Adicionalmente, $\boldsymbol{\eta}_t' = (\eta_t^1, \dots, \eta_t^n)$ y sus funciones de densidad y distribución son f y F , respectivamente.

Este sistema se puede expresar de forma compacta como:

$$\mathbf{R}_t = \Gamma_t \boldsymbol{\eta}_t \quad (4)$$

Dado este proceso, el primer y segundo momento condicional de \mathbf{R}_t son respectivamente:

$$E_t(\mathbf{R}_t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$E_t(\mathbf{R}_t \mathbf{R}_t') = \Gamma_t \Gamma_t' \equiv \Sigma_t \quad (6)$$

Donde Σ_t es una matriz definida positiva, cuyos elementos diagonales son:

$$\sigma_{i,t}^2 = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij,t}^2 \quad (7)$$

Si se imponen ciertas condiciones sobre los valores de $\gamma_{ij,t}$, se obtiene el siguiente proceso tipo GARCH lineal sobre las desviaciones estándar condicionales:

$$\boldsymbol{\Sigma}_t^* = \mathbf{C} + A_1 |\mathbf{R}_{t-1}| + B_1 \boldsymbol{\Sigma}_{t-1}^* \quad (8)$$

Donde \mathbf{C} es un vector de parámetros de dimensión $n \times 1$; A y B son matrices $n \times n$, respectivamente y $\boldsymbol{\Sigma}_t^* = (\sigma_{1,t}, \dots, \sigma_{n,t})'$ es el vector de desviaciones estándar condicionales. Al igual que en el caso univariado, puede observarse que el cuantil condicional esta dado por el modelo de localización-escala de la forma:

$$q_{t-j}^i(\boldsymbol{\theta} | t-j-1) = \sigma_{i,t-j} F^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \quad (9)$$

Al multiplicar la expresión (8) por $F^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, teniendo en cuenta la ecuación (9), se obtiene la siguiente representación denominada MVMQ-SAV-CAViaR(1,1):

$$\mathbf{Q}_t(\theta | t-1) = \mathbf{C}(\theta) + A_1(\theta)|\mathbf{R}_{t-1}| + B_1(\theta)\mathbf{Q}_{t-1}(\theta | t-2) \quad (10)$$

Donde $\mathbf{C}(\theta) = \mathbf{C}F^{-1}(\theta)$, $A_1(\theta) = A_1F^{-1}(\theta)$, $B_1(\theta) = B_1$. Este modelo corresponde a una adaptación multivariada del proceso CAViaR-SAV univariado propuesto por Engle y Manganelli [2004].

2.2. Estimación. En esta sección se describen los métodos de estimación para el modelo MVMQ-CAViaR. La estimación de los coeficientes del modelo (2) se basa en los métodos de regresión cuantílica [Koenker y Bassett, 1978] y de regresión cuantílica no lineal [Koenker y Park, 1996]. Esta metodología es muy útil para el modelamiento de cuantiles condicionales puesto que sus resultados son robustos ante valores atípicos y adicionalmente, no impone supuestos distribucionales.

La metodología de regresión cuantílica estándar parte del modelo: $y_t = \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta} + v_t$, donde $\{y_t : t = 1, \dots, T\}$ es un proceso estocástico asociado a la variable aleatoria Y , $\{\mathbf{x}_t : t = 1, \dots, T\}$ es una sucesión de vectores fila de una matriz X de tamaño $(t \times K)$ y v_t corresponde a un proceso *i.i.d.* con funciones de distribución y densidad, F_v y f_v , respectivamente.

El objetivo de esta técnica es estimar los parámetros del modelo asociados al θ -ésimo cuantil de y_t ¹, notado como $\boldsymbol{\beta}_\theta$. Este se obtiene por medio de la solución del siguiente problema de programación lineal:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta \in \mathbb{R}^K} \sum_{t: y_t \geq \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta} \theta |y_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta| + \sum_{t: y_t < \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta} (1 - \theta) |y_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta| \quad (11)$$

o de forma equivalente:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta} \rho_\theta(y_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta) \quad (12)$$

Donde $\rho_\theta(e) = e\psi_\theta(e)$; $\psi_\theta(e) = \theta - I(e \leq 0)$ e $I(\cdot)$ es la función indicadora.

Adicionalmente, si se supone que y_t sigue un proceso:

$$y_t = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\theta) + v_t,$$

con $g(\cdot)$ una función no lineal, la estimación del cuantil condicionado se obtiene a partir de la solución del siguiente problema de regresión cuantílica no lineal (NLQR por sus siglas en inglés):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_\theta = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_\theta} \rho_\theta(y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}_\theta)) \quad (13)$$

De Rossi y Harvey [2006] muestran que al asumir una función de densidad de Laplace, la solución del problema de programación lineal de la regresión cuantílica es equivalente a resolver un problema de máxima verosimilitud sobre esta función. Al respecto, White et al. [2015] proponen

¹ Es importante mencionar que este cuantil es condicionado a la información disponible, es decir, $q_{y_t}(\theta | \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}_\theta)$.

implementar el método de cuasi-máxima verosimilitud, donde el conjunto de parámetros Π_θ se obtiene al maximizar la siguiente función de cuasi-log verosimilitud:

$$\widehat{\Pi}_\theta = \arg \min_{\Pi_\theta} T^{-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \rho_\theta(r_t^i - q_t^i(\theta | t-1)) \right\} \quad (14)$$

El término entre llaves de la ecuación (14) corresponde a la función de cuasi-log verosimilitud asociada a la distribución de Laplace para la t -ésima observación. [White et al., 2015]. Los autores señalan las condiciones bajo las cuales el estimador obtenido por este método es consistente. También concluyen que, bajo ciertos supuestos, se obtiene el siguiente resultado asintótico:

$$T^{1/2} \left(\widehat{\Pi}_\theta - \Pi_\theta \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, Q^{*-1} V^* Q^{*-1}) \quad (15)$$

Con:

$$\begin{aligned} Q^* &:= E \left[\sum_{i=1}^n f_{i,t}(0 | \mathcal{F}_{t-1}) \nabla q_t^i(\Pi_\theta) \nabla' q_t^i(\Pi_\theta) \right], \\ V^* &:= E(\eta_t^* \eta_t^{*\prime}), \\ \eta_t^* &:= \sum_{i=1}^n \nabla q_t^i(\Pi_\theta) \psi(\varepsilon_{i,t}), \end{aligned}$$

siendo $\varepsilon_{i,t} := r_t^i - q_t^i(\theta | t-1)$, $\psi(\varepsilon_{i,t}) := \theta - I(\varepsilon_{i,t} \leq 0)$, $\nabla q_t^i(\cdot)$ es el gradiente de $q_t^i(\theta | t-1)$ y $f_{i,t}(0 | \mathcal{F}_{t-1})$ es la función de densidad de $\varepsilon_{i,t}$ evaluada en cero y condicionada a la información del conjunto \mathcal{F}_{t-1} .

Adicionalmente, los autores proponen los siguientes estimadores:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_T &= (2\widehat{c}_T T^{-1}) \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T I(-\widehat{c}_T \leq \widehat{\varepsilon}_{i,t} \leq \widehat{c}_T) \nabla q_t^i(\widehat{\Pi}_\theta) \times \nabla' q_t^i(\widehat{\Pi}_\theta) \\ \widehat{V}_T &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \widehat{\eta}_t^* \widehat{\eta}_t^{*\prime} \\ \widehat{\eta}_t &= \sum_{i=1}^n \nabla q_t^i(\widehat{\Pi}_\theta) \psi(\widehat{\varepsilon}_{i,t}) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, $\widehat{\varepsilon}_{i,t} = r_t^i - q_t^i(\widehat{\Pi}_\theta)$. El término \widehat{c}_T corresponde al ancho de banda utilizado para evaluar la precisión de los cuantiles condicionales [Koenker, 2005, pp.77-78].

2.3. La función de pseudo-impulso respuesta. Como se explicó al inicio de esta sección, el objetivo de este modelo es capturar la interdependencia que se genera en las colas de las distribuciones. Es decir, se pretende analizar la dinámica de los cuantiles (o VaR) de una serie ante choques en otras variables. Para ello se puede utilizar la metodología propuesta por [White et al., 2015] denominada función de pseudo-impulso respuesta.

Debido a que los modelos de regresión cuantílica, como el propuesto en la ecuación (10), no se encuentran completamente especificados de forma paramétrica, no es posible derivar una función de impulso-respuesta estándar sobre las innovaciones $\varepsilon_{j,t}$. Por ende, White et al. suponen que el choque exógeno de magnitud $\delta \in \mathbb{R}$ se realiza sobre la serie r_t^j sólo en el instante t . Es decir, el choque afecta la trayectoria del j -ésimo retorno únicamente en t dejando como resultado: $\tilde{r}_t^j := r_t^j + \delta$. Por lo tanto, las trayectorias de la j -ésima serie con y sin choque son:

$$\left\{ \dots, r_{t-2}^j, r_{t-1}^j, \tilde{r}_t^j, r_{t+1}^j, r_{t+2}^j \dots \right\}$$

$$\left\{ \dots, r_{t-2}^j, r_{t-1}^j, r_t^j, r_{t+1}^j, r_{t+2}^j \dots \right\}$$

Adicionalmente, se define la *función de pseudo-impulso respuesta* de la serie i en el periodo $t + s$ dado un choque de magnitud δ sobre la serie j en el periodo t como:

$$\Delta_{i,s}(\tilde{r}_t^j) := \tilde{q}_{t+s}^i(\theta | t + s - 1) - q_{t+s}^i(\theta | t + s - 1) \quad (16)$$

Donde $\tilde{q}_{t+s}^i(\theta | t + s - 1)$ corresponde al θ -ésimo cuantil de la serie r_{t+s}^i dado un choque de magnitud δ sobre la j -ésima serie en el periodo t y $q_{t+s}^i(\theta | t + s - 1)$ es el θ -ésimo cuantil de la serie r_{t+s}^i sin considerar ningún choque.

De acuerdo al modelo MVMQ-SAV-CAViaR(1,1) presentado en la ecuación (10); sean $A(\theta)$ y $B(\theta)$ las matrices de coeficientes asociadas al modelo y definiendo $\tilde{\mathbf{R}}_t' := (r_t^1, \dots, \tilde{r}_t^j, \dots, r_t^n)$ como el vector de retornos que incorpora un choque en la variable j ; entonces la función de pseudo-impulso respuesta, $\Delta_s(\tilde{r}_t^j)' = (\Delta_{1,s}(\tilde{r}_t^j), \dots, \Delta_{n,s}(\tilde{r}_t^j))$, es:

$$\Delta_s(\tilde{r}_t^j) = \begin{cases} A(\theta)(|\tilde{\mathbf{R}}_t| - |\mathbf{R}_t|) & \text{para } s = 1 \\ B(\theta)\Delta_{s-1}(\tilde{r}_t^j) & \text{para } s > 1 \end{cases} \quad (17)$$

Tomando en cuenta el resultado obtenido en la ecuación (6), la serie con choques en t puede obtenerse como $\tilde{\mathbf{R}}_t = L\delta_j'$, donde $\delta_j = (0, \dots, \delta, \dots, 0)'$ y L es la matriz asociada a la descomposición de Cholesky de Σ_t .

Adicionalmente, los autores muestran que los errores estándar de la función de pseudo impulso-respuesta se pueden derivar del siguiente resultado asintótico:

$$T^{1/2} \left(\Delta_s(\tilde{r}_t^j; \hat{\Pi}_\theta) - \Delta_s(\tilde{r}_t^j; \Pi_\theta) \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, G_s(Q^{*-1}V^*Q^{*-1})G_s') \quad (18)$$

Siendo $G_s := \frac{\partial \Delta_s(\tilde{r}_t^j; \Pi_\theta)}{\partial \Pi_\theta}$.

3. EJERCICIO EMPÍRICO

El ejercicio empírico consiste en la estimación del valor en riesgo a través del modelo multivariado de regresión cuantílica MVMQ-SAV-CAViaR sobre los retornos² de tres series financieras

² Los retornos se calcularon como la primera diferencia del logaritmo natural de la series multiplicado por 100.

colombianas: El índice de mercado bursátil de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio del peso colombiano con respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES).³ La estimación se realiza para la muestra comprendida entre 04/Ene/2008 y 23/Nov/2015. Las primeras 1438 observaciones se usaron para la estimación inicial del VaR y las restantes para las evaluaciones de su desempeño (en adelante, *Backtesting*). Como es usual en las series financieras, las tres variables analizadas presentan conglomerados de volatilidad y colas pesadas; tal como se aprecia en el Gráfico 1 del apéndice A.

3.1. Prueba de especificación de cuantiles condicionales. En primera instancia se calcula la prueba de correcta especificación de cuantiles propuesta por Kim y White [2003]⁴ para el modelo MVMQ-SAV-CAViaR especificado en la ecuación (10) usando la muestra completa. Los resultados de esta prueba, presentados en el Cuadro 1, indican que en todos los casos no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de correcta especificación a un nivel de significancia del 5%.

CUADRO 1. Prueba de correcta especificación de cuantiles.

Serie	Estadístico	Valor-P	g.l.
TRM	20.027	0.520	21
COLCAP	12.698	0.919	21
IDXTES	14.727	0.836	21

3.2. Pruebas de Backtesting. Posteriormente, se realizan las pruebas de *backtesting* sobre los valores en riesgo obtenidos de la estimación *rolling* del modelo MVMQ-SAV-CAViaR. En este ejercicio se estimó el VaR para un horizonte de pronóstico de un día a un nivel de probabilidad $\theta = 0,05$, notado como $VaR_{i,t|t-1}^{\theta}$ para $i = \text{TRM, COLCAP, IDXTES}$. De un total de 1918 observaciones, las primeras 1438 se usaron para la estimación inicial del VaR y las restantes para las pruebas de *Backtesting*.

La evaluación del desempeño del VaR se realizó por medio de la prueba de de cubrimiento condicional propuesta por Christoffersen [2012]. Esta prueba se calcula en términos de la series de fallas, la cual se define en este caso de la siguiente forma:

$$J_{t|t-1}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t^i < VaR_{i,t|t-1}^{\theta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (19)$$

Por su parte, el $VaR_{i,t|t-1}^{\theta}$ se estima de forma recurrente para $i = \text{TRM, COLCAP, IDXTES}$, tal como se describe a continuación:

³ Este índice es propuesto en Reveiz y León [2008].

⁴ Una breve explicación de esta prueba se encuentra en el Apéndice B.

- i. Inicialmente, se estima el modelo evaluado para la muestra $1, \dots, T_0$, y se calcula el $VaR_{i,t|t-1}^\theta$, donde $t = T_0 + 1$. En esta aplicación, T_0 corresponde a la observación 1438.
- ii. Posteriormente, se estima el modelo para la muestra ampliada en una observación, es decir, $1, \dots, T_0 + 1$ y se calcula el $VaR_{i,t|t-1}^\theta$ para $t = T_0 + 2$.
- iii. Luego se repite el procedimiento anterior hasta que se alcance el tamaño total de la muestra, $t = T$. En el actual ejercicio, $T = 1918$.

La prueba de cubrimiento condicional de Christoffersen evalúa de forma conjunta las hipótesis de cubrimiento incondicional y de independencia. Por un lado, la prueba de cubrimiento incondicional considera la hipótesis nula de que la proporción de fallas sea la correcta, es decir, igual a θ . Por otro lado, la prueba de independencia evalúa la hipótesis de que cualquier par de elementos de la serie de fallas sean independientes.

Los resultados de esta prueba se encuentran en el Cuadro 2. Esta tabla reporta los estadísticos de la prueba de cubrimiento condicional con su respectivo *Valor-P*, para una muestra de 481 observaciones. Los resultados indican que no existe evidencia de una mala especificación al nivel de significancia del 5%.

CUADRO 2. Prueba de cubrimiento condicional de Christoffersen

Estadístico	TRM		COLCAP		IDXTES	
	χ^2	Valor-P	χ^2	Valor-P	χ^2	Valor-P
LR_{cc}	1,8143	0,4037	5,7869	0,0554	5,9671	0,0506

Adicionalmente, las Figuras 2 a 4 del Apéndice D corresponden a los gráficos de Backtesting asociadas al VaR de la metodología estimada, para las tres series analizadas, y calculados al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$. La línea continua corresponde a los retornos, la punteada al VaR y los círculos a la serie de excesos de retorno.⁵ En general, se observa que el valor en riesgo sigue la dinámica de los retornos y presenta un número de excesos aceptable.

3.3. Comparación con otros modelo VaR. Con el fin de analizar el desempeño relativo del valor en riesgo obtenido del modelo MVMQ-SAV-CAViaR, estos resultados se compararon con los de otras metodologías. Los métodos alternos que se consideraron incluyen 5 modelos de la familia CAViaR (CAViaR-SAV, CAViaR-AS, CAViaR-IG, AR(1)-CAViaR-IG, GARCH lineal) y 3 modelos tradicionales (*RiskMetrics*[®], ARMA-GARCH, y ARMA-apGARCH).⁶

En el Cuadro 3 del Apéndice C se presentan los resultados de la prueba de cubrimiento condicional de Christoffersen [2012] para todos los modelos considerados. Estos resultados indican que,

⁵ En este caso, la serie de excesos de retorno se define como r_t^i si $r_t^i < VaR_{i,t|t-1}^\theta$ y cero en otro caso.

⁶ Una descripción de estos modelos se encuentra en Mariño y Melo [2016].

en general, no existe evidencia de una mala especificación en los valores en riesgo estimados. Sin embargo, de los 27 modelos evaluados, dos tienen un desempeño inapropiado puesto que rechazan esta prueba de hipótesis a un nivel de significancia del 1 %.

Adicionalmente, en el Cuadro 4 del Apéndice C se presentan los valores de las funciones de pérdida de López y las de Caporín (F_1 , F_2 y F_3).⁷ Estas funciones permiten clasificar las metodologías según su desempeño en términos del tamaño de los excesos, de tal forma que menores valores implican que se tiene un modelo con mejor comportamiento. Los resultados obtenidos indican que, comparados con los modelos restantes, el modelo MVMQ-SAV-CAViaR presenta un buen desempeño. Es así como de los 12 casos analizados, para 3 series y 4 especificaciones de la función de pérdida, en 8 se obtienen los mejores resultados para esta metodología.

3.4. Funciones de Pseudo Impulso-Respuesta. Finalmente, se presentan los resultados del análisis de las funciones de pseudo impulso-respuesta para el ejercicio empírico. Este análisis consiste en estimar el impacto sobre los valores en riesgo de las series consideradas dado un choque inicial de dos desviaciones estándar sobre cada una de las variables. Específicamente, se calcula la diferencia entre los valores en riesgo con y sin choque; tal como se indicó en la sección 2.3. En las Figuras 5, 6 y 7 del Apéndice E se encuentran los gráficos de estas funciones. El eje horizontal corresponde al número de periodos analizados después del choque, mientras que el vertical corresponde a las respuesta del valor en riesgo ante este impacto.

El ejercicio realizado considera el VaR a un nivel $\theta = 0,05$, por lo cual se enfoca en la cola izquierda de la distribución. En ese sentido, una respuesta negativa indica un aumento de la pérdida extrema, es decir, un aumento en la magnitud del valor en riesgo asociado a esta cola.

Para el caso de un choque en los retornos de la TRM, se observa que la respuesta en la variación de su VaR es negativa y significativa; es decir, como es de esperarse se incrementa su riesgo de mercado. Adicionalmente, el efecto de este choque tarda más de 30 días en desaparecer. Respecto a la respuesta en el VaR de los retornos de la serie COLCAP, se observa que el efecto es negativo pero no significativo. Con relación a los retornos de la serie IDXTES, su respuesta en la variación del VaR es negativa y significativa durante 7 días.

Para el caso de un choque en COLCAP, la respuesta en el VaR de la TRM es negativa aunque no resulta significativa. El efecto en su propio VaR es negativo, pero sólo resulta significativo durante un periodo. Con respecto a la respuesta del VaR del IDXTES, también se obtiene un resultado negativo y su efecto desaparece luego de 3 días.

Finalmente, ante un choque en la serie IDXTES, la respuesta en su propio VaR es negativa y significativa durante 30 días. El efecto en el VaR de la serie TRM es negativo y significativo por 5 días. Para el caso de la respuesta en el VaR de la serie COLCAP, esta es negativa y significativa por 2 periodos.

⁷ La definición de estas funciones se puede encontrar en Granados y Melo [2011], entre otros.

El análisis de los ejercicios de pseudo impulso-respuesta indican dos resultados relevantes. En primer lugar, que los choques en la tasa de cambio y en el índice de títulos de deuda pública son persistentes. Choques en estas variables aumentan el valor en riesgo de sus propios mercados significativamente, y sus efectos permanecen alrededor de 30 días adicionales.

El segundo resultado indica que los valores en riesgo de los tres mercados colombianos aquí considerados (cambiario, deuda pública y accionario) se encuentran relacionados. Choques en el mercado de deuda pública incrementan significativamente el valor en riesgo del mercado accionario y del cambiario por varios días consecutivos. Por otro lado, el valor en riesgo del mercado de deuda pública también se ve afectado por choques en el mercado accionario o por choques en el mercado cambiario. Estos resultados son coherentes con la profundidad y el tamaño de estos mercados en Colombia. Mientras que el mercado de títulos públicos en el país es grande y profundo, el accionario es pequeño y poco profundo. Por esa razón, es de esperar que la transmisión de los choques al valor en riesgo presente un comportamiento como el mostrado en este trabajo.

Es importante resaltar que los resultados obtenidos muestran la relevancia del enfoque multivariado propuesto en este documento. Así, se puede obtener una medida de riesgo de mercado más apropiada al modelar las interdependencias entre los activos financieros considerados.

4. COMENTARIOS FINALES

Este documento presenta los resultados de la estimación del valor en riesgo a partir de un modelo multivariado de regresión cuantílica, denominado MVMQ-SAV-CAViaR o VAR para VaR. Este modelo se estimó sobre las series de tres de los principales mercados financieros colombianos: el índice de mercado bursátil de la bolsa de valores (COLCAP), la tasa de cambio con respecto al dólar (TRM) y un índice de precios de títulos de deuda pública (IDXTES); para la muestra comprendida entre el periodo 04/Ene/2008 y 23/Nov/2015.

La metodología presentada en este trabajo permite evaluar de forma más adecuada el riesgo de mercado al que se enfrenta un inversionista. Al tener en cuenta las relaciones entre éstas series se consideran las posibles transmisiones del riesgo que pueden darse entre los diferentes mercados que representan. Adicionalmente, este tipo de modelos permite calcular funciones de pseudo impulso-respuesta; es decir, se puede estimar el impacto sobre los valores en riesgo de las series consideradas ante un choque sobre una de estas variables.

Los resultados de las pruebas de backtesting indican que el desempeño del VaR obtenido a través de este modelo es apropiado. Adicionalmente, al comparar estos resultados con el VaR estimado por otras metodologías, el MVMQ-SAV-CAViaR presenta un buen desempeño.

Por otro lado, las funciones de pseudo impulso-respuesta indican que los choques generados en las variables TRM e IDXTES presentan respuestas negativas y persistentes en sus propios valores en riesgo. Además, se observa que los mayores impactos en los valores en riesgo se presentan en las series TRM y COLCAP ante choques en IDXTES; y en IDXTES ante choques en TRM. Esto es consistente con la profundidad y el tamaño de estos mercados en Colombia.

REFERENCIAS

- BECERRA, O., Y L. F. MELO (2006): *Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: Una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia*, Colección Lecciones de la Facultad de economía del Rosario. Centro editorial Universidad del Rosario.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. (2012): *Elements of financial risk management*. Academic Press, 2 edn.
- DE ROSSI, G., Y A. C. HARVEY (2006): *Time-varying quantiles*. University of Cambridge, Faculty of Economics.
- ENGLE, R. F., Y S. MANGANELLI (2004): "CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles.," *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4), 367 – 381.
- ESPINOSA-TORRES, J., J. GÓMEZ-GONZÁLEZ, L. F. MELO-VELANDIA, Y J. MORENO-GUTIÉRREZ (2016): "The International transmission of risk: Causal relations among developed and emerging countries' term premia," *Research in International Business and Finance*, 37, 646–654.
- GÓMEZ-GONZÁLEZ, J., Y L. F. MELO-VELANDIA (2014): "Efectos de "ángeles caídos" en el mercado accionario colombiano: estudio de eventos del caso Interbolsa," *Ensayos sobre política económica*, 32(75), 23–27.
- KIM, T.-H., Y H. WHITE (2003): "Estimation, inference, and specification testing for possibly misspecified quantile regression," *Advances in Econometrics*, 17, 107–132.
- KOENKER, R. (2005): *Quantile regression*, no. 38. Cambridge university press.
- KOENKER, R., Y G. BASSETT (1978): "Regression Quantiles," *Econometrica*, 46(1), 33–50.
- KOENKER, R., Y B. J. PARK (1996): "An interior point algorithm for nonlinear quantile regression," *Journal of Econometrics*, 71(1), 265–283.
- LOAIZA, R., J. GÓMEZ-GONZÁLEZ, Y L. F. MELO-VELANDIA (2015a): "Exchange Rate Contagion in Latin America," *Research in International Business and Finance*, 34, 355–367.
- (2015b): "Latin American exchange rate dependencies: A regular vine copula approach," *Contemporary Economic Policy*, 33(3), 535–549.
- MARIÑO, J., Y L. F. MELO (2016): "Regresión cuantílica dinámica para la medición del Valor en Riesgo: una aplicación a datos colombianos," Borradores de Economía 939, Banco de la República de Colombia.
- REVEIZ, A., Y C. LEÓN (2008): "Índice representativo del mercado de deuda pública interna: IDXTES," Borradores de Economía 488, Banco de la República.
- WHITE, H., T.-H. KIM, Y S. MANGANELLI (2010): *Modeling Autoregressive Conditional Skewness and Kurtosis with Multi-quantile CAViaR*.pp. 231 – 256. Edited by Tim Bollerslev, Jeffrey R. Russell, and Mark W. Watson. Advanced Texts in Econometrics. Oxford and New York: Oxford University Press, Unlisted.
- (2015): "VAR for VaR: Measuring tail dependence using multivariate regression quantiles," *Journal of Econometrics*, 187(1), 169–188.

APÉNDICE A. GRÁFICOS DE LOS RETORNOS Y GRÁFICOS QQ

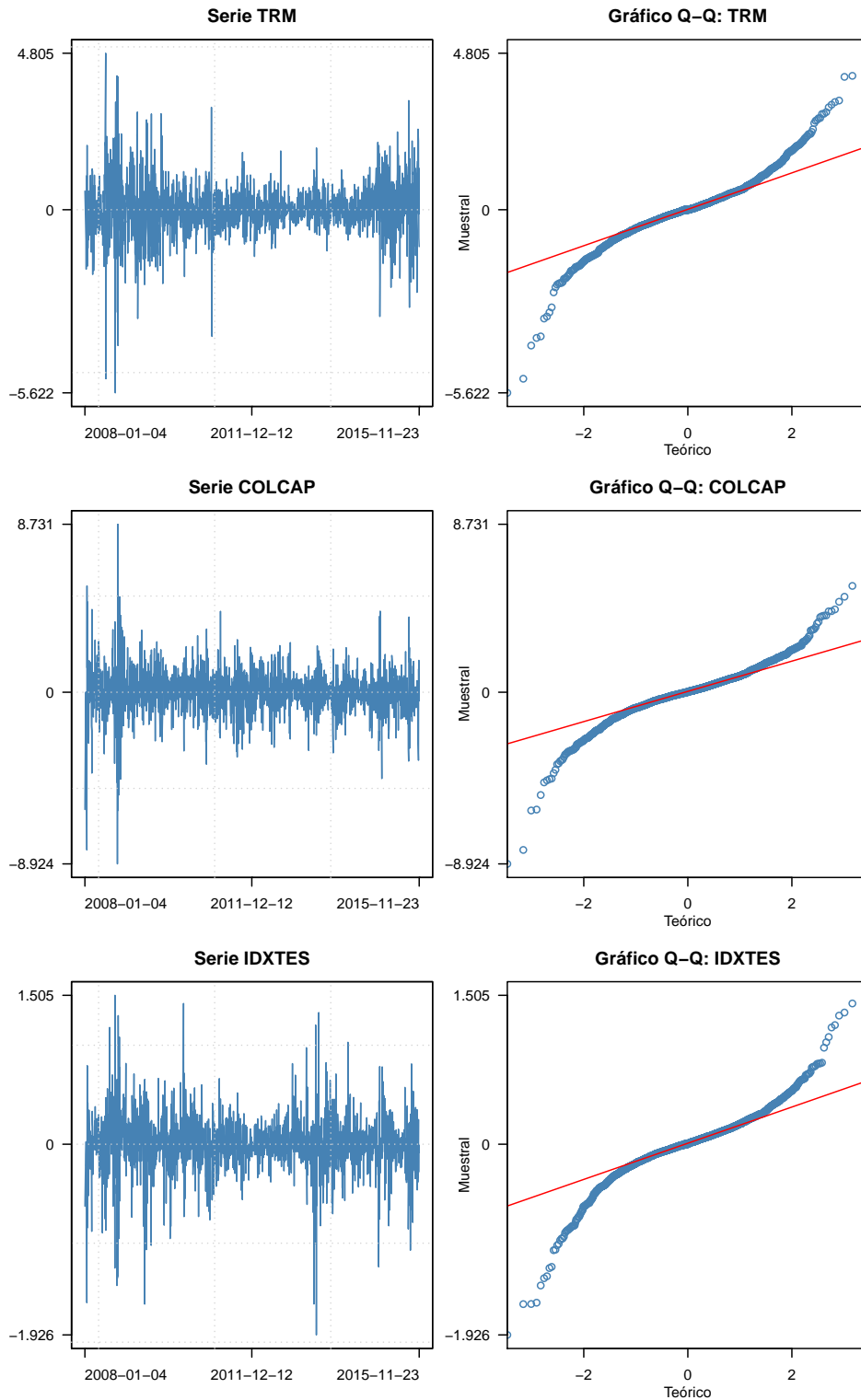


GRÁFICO 1. Retornos y gráficos QQ para las series TRM, COLCAP e IDXTES entre el 04/Ene/2008 y el 23/Nov/2015.

APÉNDICE B. PRUEBA DE CORRECTA ESPECIFICACIÓN DE CUANTILES

En el contexto de modelos de regresión cuantílica, Kim y White [2003] proponen una prueba para evaluar la hipótesis nula de que los cuantiles condicionales se encuentran correctamente especificados.

En esta prueba se parte del modelo lineal: $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + v_t$, donde $u_t \equiv \psi_\theta(v_t)$. Si el modelo se encuentra correctamente especificado, se cumple que:

$$E(u_t | \mathbf{x}_t) = 0 \quad (20)$$

Y a su vez:

$$E(u_t^2 | \mathbf{x}_t) = E(u_t^2)E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t') = \sigma_u^2 Q \quad (21)$$

con $Q = E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t')$ y $\sigma_u^2 = \theta(1 - \theta)$. Bajo la hipótesis nula de correcta especificación se tiene que:

$$E[h(\mathbf{x}_t)(u_t^2 - \sigma_u^2)] = 0 \quad (22)$$

O de forma equivalente,

$$E[h(\mathbf{x}_t)\psi_\theta(v_t)] = 0 \quad (23)$$

donde $h(\mathbf{x}_t)$ es una función vectorial de dimensión $s \times 1$, esta función selecciona elementos de la matriz $\mathbf{x}_t' \mathbf{x}_t$. Para el caso de esta prueba, $h(\mathbf{x}_t) = \text{vech}(J \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' J')$ que corresponde a un vector de dimensión $s = (K - 1)(K)/2$ que contiene los elementos de la triangular inferior y de la diagonal de la matriz $J \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' J'$. En esta expresión $J \equiv [\mathbf{0}_{(K-1) \times 1} \ I_{(K-1) \times (K-1)}]$.

La versión muestral de la ecuación (23) corresponde a:

$$m_T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta) = T^{-1} h(\mathbf{x}_t) \psi_\theta(y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta) \quad (24)$$

Finalmente, el estadístico de la prueba es:

$$T m_T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta)' \hat{\Sigma}^{-1} m_T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\theta) \xrightarrow{H_0} \chi_s^2 \quad (25)$$

Donde $\hat{\Sigma} = \theta(1 - \theta) [\hat{A}'_{0,T} \hat{Q}_{0,T}^{-1} \hat{Q}_T \hat{Q}_{0,T}^{-1} \hat{A}_{0,T} - \hat{A}'_{0,T} \hat{Q}_{0,T}^{-1} \hat{A}_T - \hat{A}'_T \hat{Q}_{0,T}^{-1} \hat{A}_{0,T} + \hat{D}_T]$ y:

$$\begin{aligned} \hat{A}'_T &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t h(\mathbf{x}_t)' \\ \hat{A}'_{0,T} &= (2\hat{c}_T T)^{-1} \sum_{t=1}^T I(-\hat{c}_T \leq \hat{v}_t \leq \hat{c}_T) \mathbf{x}_t h(\mathbf{x}_t)' \\ \hat{D}'_T &= T^{-1} \sum_{t=1}^T h(\mathbf{x}_t) h(\mathbf{x}_t)', \quad \hat{Q}'_T = T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \\ \hat{Q}'_{0,T} &= (2\hat{c}_T T)^{-1} \sum_{t=1}^T I(-\hat{c}_T \leq \hat{v}_t \leq \hat{c}_T) \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \end{aligned}$$

APÉNDICE C. PRUEBAS DE BACKTESTING

Modelos	TRM		COLCAP		IDXTES	
	LR_{cc}	$Valor-P$	LR_{cc}	$Valor-P$	LR_{cc}	$Valor-P$
CAViaR - SAV	1.911	0.385	6.359	0.042	1.069	0.586
CAViaR - AS	1.911	0.385	1.911	0.385	3.151	0.207
CAViaR - IG	0.502	0.778	6.792	0.034	0.755	0.686
AR(1) - CAViaR - IG	5.044	0.080	5.044	0.080	0.180	0.914
GARCH Lineal	6.359	0.042	15.260	0.000	3.921	0.141
RiskMetrics	4.282	0.118	11.115	0.004	4.951	0.084
ARMA-GARCH	0.055	0.973	3.619	0.164	0.420	0.811
ARMA-apGARCH	0.039	0.981	1.882	0.390	0.039	0.981
MVMQ-SAV-CAViaR	1.814	0.404	5.787	0.055	5.967	0.051

CUADRO 3. Resultados de la prueba de cubrimiento condicional de Christoffersen para el VaR de las series TRM, IDXTES y COLCAP entre diciembre de 2013 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para el nivel de probabilidad $\theta = 0,05$.

Modelos	TRM				COLCAP				IDXTES			
	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3	López	F_1	F_2	F_3
CAViaR - SAV	30.54	6.93	3.71	8.38	31.13	14.89	6.33	5.08	45.23	10.8	10.85	17.11
CAViaR - AS	30.49	7.05	3.71	8.41	27.70	12.55	4.58	4.34	33.95	6.33	5.02	10.57
CAViaR - IG	29.85	7.26	3.98	8.64	30.02	13.8	5.72	4.92	44.25	10.74	10.65	17.22
AR(1) - CAViaR - IG	15.78	1.38	0.39	2.40	22.35	3.97	0.58	2.11	21.50	3.30	2.72	7.16
GARCH Lineal	37.70	12.27	10.23	12.06	46.20	11.07	12.52	17.66	28.19	13.25	5.46	5.17
RiskMetrics	30.93	6.74	3.83	8.13	36.29	16.82	7.02	5.64	58.62	15.49	16.87	21.72
ARMA-GARCH	28.03	6.39	3.52	7.90	27.94	12.28	5.33	4.64	48.51	12.16	11.52	18.38
ARMA-apGARCH	28.42	5.98	3.00	7.39	25.77	10.94	4.65	4.26	43.36	9.93	8.48	15.86
MVMQ-SAV-CAViaR	28.26	4.80	1.03	4.35	19.42	3.67	2.79	6.87	14.58	4.60	1.09	2.06

CUADRO 4. Funciones de pérdida del VaR para las series TRM, IDXTES y COLCAP entre diciembre de 2013 y noviembre de 2015 con horizonte de pronóstico de un día para el nivel de probabilidad $\theta = 0,05$.

APÉNDICE D. GRÁFICOS DE BACKTESTING

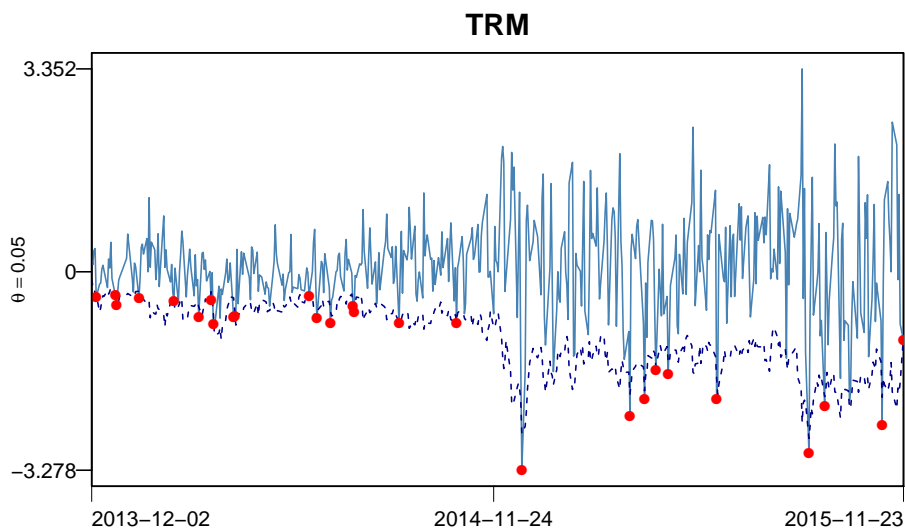


GRÁFICO 2. Gráficos de Backtesting del VaR del modelo MVMQ-SAV-CAViaR de la serie de retornos de la TRM al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$. La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al VaR y los puntos a las series de excesos de retorno.

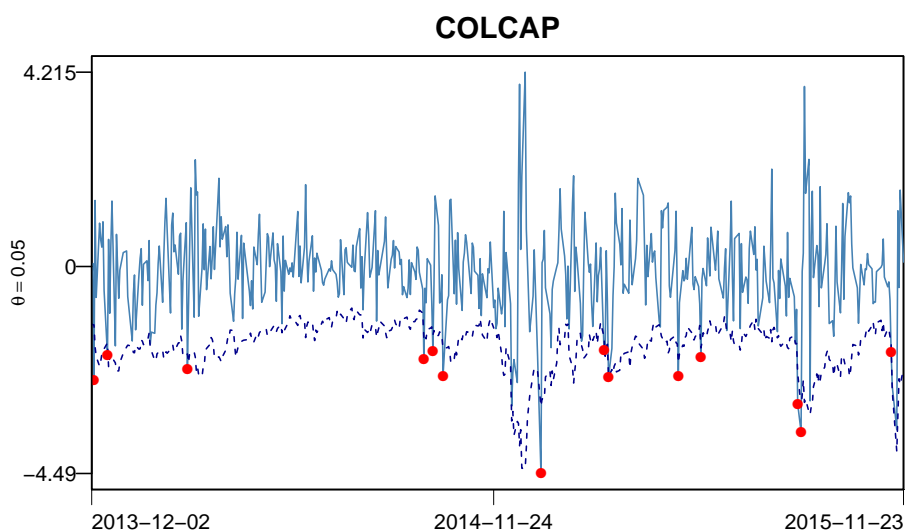


GRÁFICO 3. Gráficos de Backtesting del VaR del modelo MVMQ-SAV-CAViaR de la serie de retornos del COLCAP al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$. La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al VaR y los puntos a las series de excesos de retorno.

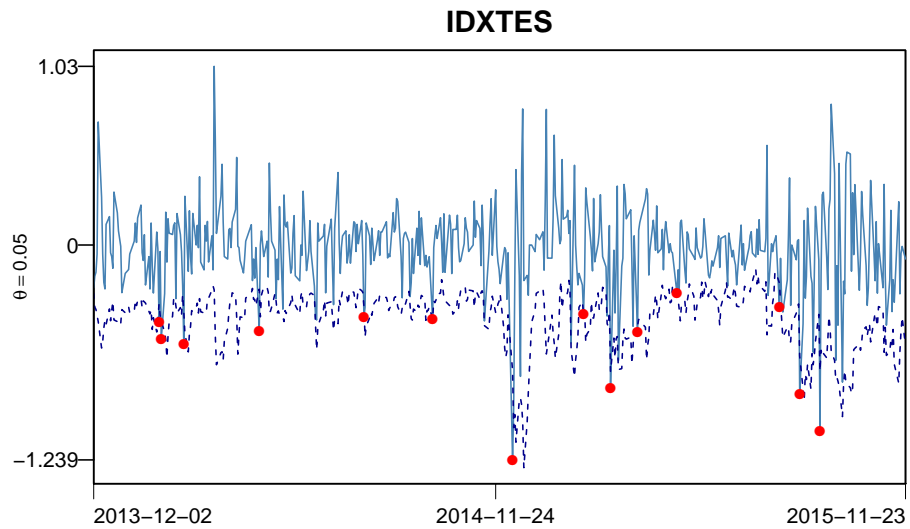


GRÁFICO 4. Gráficos de Backtesting del VaR del modelo MVMQ-SAV-CAViaR de la serie de retornos del IDXTES al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$. La línea continua corresponde a los retornos, la discontinua al VaR y los puntos a las series de excesos de retorno.

APÉNDICE E. FUNCIONES DE PSEUDO IMPULSO - RESPUESTA

E.1. Choque en la serie TRM.

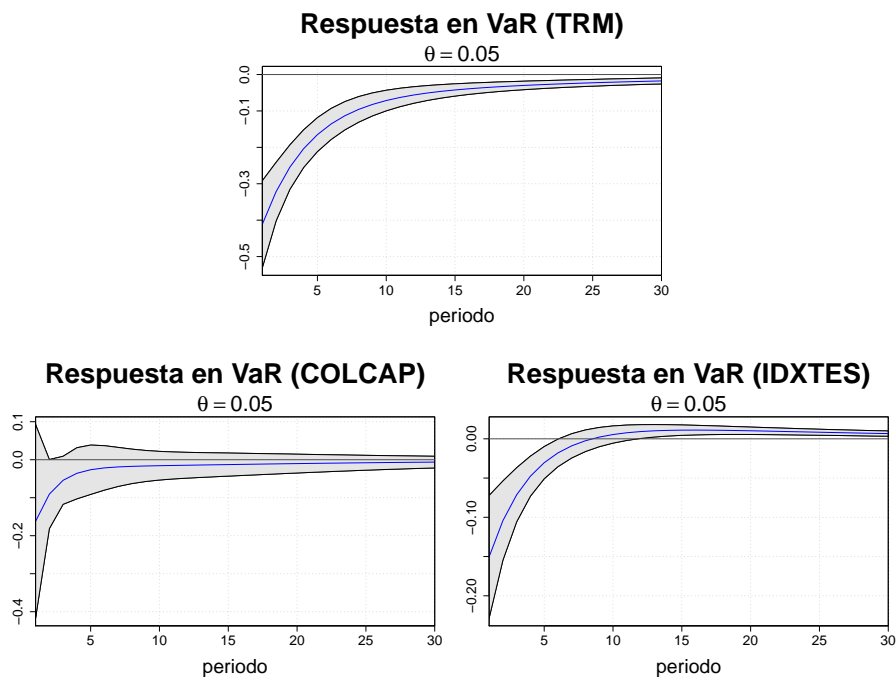


GRÁFICO 5. Función de Pseudo Impulso - Respuesta para el VaR de las series TRM, COLCAP e IDXTES al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$, ante un choque de dos desviaciones estándar de la serie TRM. Intervalos de confianza al 95 %.

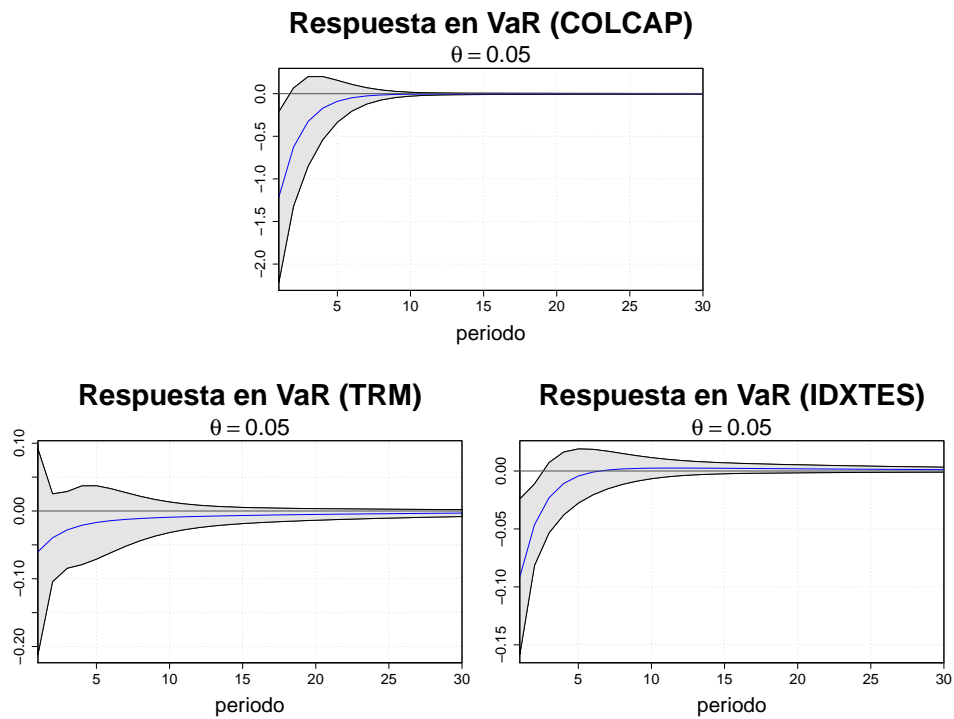
E.2. Choque en la serie COLCAP.

GRÁFICO 6. Función de Pseudo Impulso - Respuesta para el VaR de las series TRM, COLCAP e IDXTES al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$, ante un choque de dos desviaciones estándar de la serie COLCAP. Intervalos de confianza al 95 %.

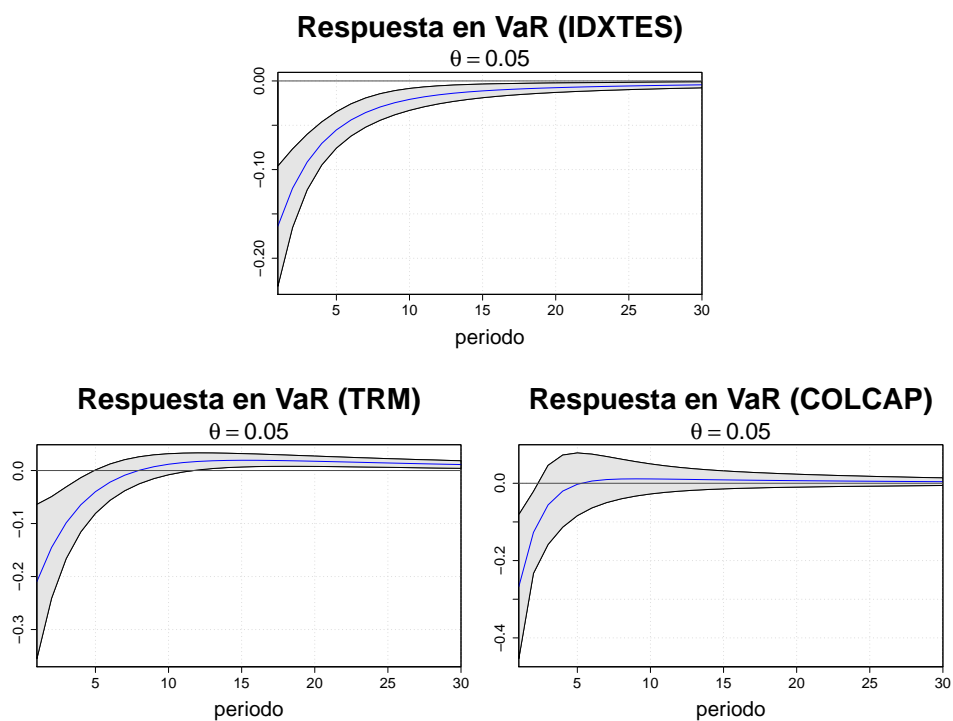
E.3. Choque en la serie IDXTES.

GRÁFICO 7. Función de Pseudo Impulso - Respuesta para el VaR de las series TRM, COLCAP e IDXTES al nivel de probabilidad $\theta = 0,05$, ante un choque de dos desviaciones estándar de la serie IDXTES. Intervalos de confianza al 95 %.

