



ENSAYOS

sobre política económica

Valoración de activos en mercados con restricciones de liquidez

Humberto Mora A.

Revista ESPE, No. 29, Art. 03, Junio de 1996
Páginas 59-99



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando nadie obtenga lucro por este concepto y además cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además colocar en su propio website una versión electrónica del documento, siempre y cuando ésta incluya la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción del documento para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa del Editor de ESPE.

Valoración de activos en mercados con restricciones de liquidez

*Humberto Mora A.**

n este trabajo se especifica un modelo β -Consumo para la valoración de activos de riesgo, que incorpora la posibilidad de que un grupo de agentes en la economía enfrente restricciones de liquidez. La validez del modelo se verifica empíricamente para una muestra de empresas y se compara con el modelo β -Consumo sin restricciones de liquidez, así como con el modelo β -CAPM. Se muestra que los resultados econométricos pueden interpretarse bajo la óptica del modelo APT, como estimativos del precio de mercado de distintas fuentes de riesgo sistemático.



* El autor es director de la Carrera de Economía de la Universidad Javeriana. Los comentarios y sugerencias a versiones anteriores realizados por Juan Ricardo Ortega, Alvaro Pachón y un evaluador anónimo designado por ESPE, así como las discusiones en el Seminario de Estudios Económicos del Banco de la República contribuyeron a mejorar este trabajo. Obviamente, las deficiencias subsistentes son de la exclusiva responsabilidad del autor. De otra parte, se agradece a Félix Betancourt, a Alina Choperena y a Astrid Martínez su colaboración en el desarrollo del proyecto. Su elaboración fue financiada por ECOPETROL.

I. INTRODUCCION

En la literatura sobre valoración de los activos existe una amplia diversidad de formulaciones conceptuales que se extienden desde el modelo tradicional *CAPM* ("modelo de valoración de activos de riesgo"), hasta las especificaciones funcionales particulares del "modelo de arbitraje de precios" (*APT*), en distintos mercados. No existe, sin embargo, un consenso sobre la validez global de un modelo particular. Por el contrario, la evidencia empírica ha permitido establecer reiteradamente las deficiencias y virtudes de uno y otro. Si bien el modelo *APT* presenta un mejor ajuste, la identificación de las fuentes múltiples de riesgo que lo caracterizan no tiene un fundamento sólido en la teoría económica, como se explica más adelante.

En este trabajo se especifica un modelo β -Consumo para una economía en la cual una parte del ingreso es recibido por agentes que enfrentan restricciones de liquidez; y se estima econométricamente. Se muestra que dada la existencia de dichas restricciones de liquidez, una especificación de un modelo como el β -Consumo correspondiente a economías con mercados de capitales perfectos produciría estimadores que sobrestiman el riesgo del activo. El fundamento que tiene esta especificación dentro de la teoría del consumidor constituye una base sólida para justificar dos fuentes de riesgo en el modelo *APT*.

El modelo que aquí se propone se encuentra, en esencia, formulado y verificado empíricamente dentro de la teoría del consumo (Campbell y Mankiw (1991)). No obstante, sus implicaciones sobre la valoración de activos de riesgo no han sido desarrolladas. Por ello, el ejercicio que se realiza en la primera parte de este trabajo consiste en ligar diferentes elementos existentes dentro de la teoría del consumo y dentro de la teoría financiera, a fin de obtener la formulación que incorpora restricciones de liquidez al modelo β -Consumo de Mankiw y Shapiro (1986).

Dentro de la teoría financiera, el modelo de "Valoración de Activos de Riesgo" (*CAPM*) ha experimentado el ciclo completo de relativamente amplia aceptación desde su formalización a mediados de los años sesenta por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Black (1972)¹; y de extensa crítica desde finales de los años 70, que se

¹ Referencias tomadas de Fama (1991).

extiende hasta comienzos de los años 90; promovida, inclusive, por uno de sus principales exponentes, Fama (1992).

Según esta teoría, los inversionistas racionales aceptarán emprender inversiones en activos riesgosos solamente si reciben una compensación por el riesgo adicional en que incurrir. El β asignado a cada activo de un portafolio es una medida de la volatilidad de ese activo en relación con el riesgo del mercado como un todo, medida por la relación entre la covarianza de los rendimientos de ambos y la varianza del rendimiento del mercado.

Las críticas más frecuentemente formuladas al modelo β -CAPM se refieren a su incapacidad para reproducir adecuadamente el comportamiento empírico de los precios de los activos. En particular, se menciona la sobreestimación que produce en la valoración de activos con un valor de β mayor que uno; la subestimación para el caso de los activos con un β menor que uno y la sobreestimación de la tasa libre de riesgo. Adicionalmente, si bien en las estimaciones empíricas la relación entre el retorno esperado y el riesgo de un activo es positiva, como lo predice el modelo, esta relación se debilita cuando se incluyen otras variables en la explicación del retorno esperado (véase, por ejemplo, Fama (1991)).

A finales de los años 70, Ross (1978) propuso un modelo multifactorial que incluye fuentes posibles de riesgo sistemático, adicionales a la del retorno del mercado como un todo. La consideración de estas fuentes adicionales permite mejores ajustes en la predicción del valor de los activos. Dicho modelo se ha denominado "Teoría de Arbitraje de Precios" (APT). No obstante su mejor capacidad predictiva, uno de sus principales vacíos es, como se mencionó, la carencia de sustento teórico en la definición de las fuentes adicionales de riesgo sistemático (véase Fama (1991) y Elton, Gruber y Mei (1994)).

De otra parte, dentro de la teoría del consumidor, a partir del desarrollo teórico de Rubinstein (1976), Lucas (1978), Breeden (1979) y Grossman y Shiller (1981), Hansen y Singleton (1983) derivaron y estimaron una relación explícita entre la tasa real de retorno esperada de un activo y los cambios esperados en el consumo, bajo condiciones de mercados de capitales perfectos. Esta formulación fue retomada por Mankiw y Shapiro (1986) para verificar empíricamente la validez del modelo β -Consumo versus el modelo β -CAPM, también bajo el supuesto de que los mercados de capitales son perfectos.

Adicionalmente, dentro de la teoría del consumidor, Campbell y Mankiw (1991) demostraron la validez de un modelo en el cual una parte del ingreso de la economía es recibido por consumidores sujetos a restricciones de liquidez y otra parte, por agentes cuyo patrón de consumo se ajusta a la teoría del ingreso permanente, para un conjunto de países. En este modelo, la tasa de retorno (real) del (único) activo, se supone constante.

En el presente trabajo se utiliza la formulación de Hansen y Singleton (1983), a fin de incorporar el modelo de consumo con restricciones de liquidez propuesto por Campbell y Mankiw (1989,1990,1991) y formular el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez. A diferencia de Campbell y Mankiw (1991), ello significa levantar el supuesto de que la tasa de retorno es fija, e incluir más de un activo en la economía. A diferencia de Mankiw y Shapiro (1986), ello implica considerar la posibilidad de que los mercados de capitales no sean perfectos.

En el primer capítulo se presentan las formulaciones tradicionales de los modelos β -Consumo (sin restricciones de liquidez), β -CAPM y β etas-APT. Adicionalmente, en este capítulo se muestran los vínculos existentes entre la teoría del consumo y la teoría financiera y se procede a desarrollar la especificación del modelo β -Consumo con restricciones de liquidez.

En el segundo capítulo se verifican empíricamente los modelos β -Consumo con restricciones de liquidez y sin ellas, así como el modelo β -CAPM, para una muestra de empresas. Los resultados son utilizados, a la luz del modelo β etas-APT para obtener estimativos del "precio de mercado" de las diferentes fuentes de riesgo. Sin embargo, se destaca que en la formulación que aquí se propone y a diferencia del modelo β etas-APT, las diversas fuentes de riesgo que afectan un activo son definidas por la teoría económica del consumidor. Finalmente, se presentan las conclusiones.

II. MODELOS ALTERNATIVOS PARA LA VALORACION DE ACTIVOS DE RIESGO

El propósito de este capítulo es presentar diferentes modelos que permiten obtener estimativos del riesgo de los activos de la economía.

En la primera sección se discutirán tres versiones diferentes de la formulación que se conoce en la literatura como β -Consumo. En la segunda, se presenta la

formulación del β que se obtiene a partir del *modelo de valoración de activos de capital (CAPM)*. Una versión particular de estas dos formulaciones alternativas se encuentra en Mankiw y Shapiro (1986). Finalmente, se expone el modelo β s-APT.

A. FORMULACION β -CONSUMO

En esta formulación, el coeficiente β que indica el riesgo de un activo, se especifica dentro de la teoría económica del consumo y corresponde a la relación entre la tasa de retorno del activo i y su riesgo sistemático medido, este último, como su covarianza con el crecimiento en el consumo (véase Mankiw y Shapiro (1986)).

Existen, sin embargo, en la literatura económica, diversas teorías sobre el comportamiento del consumidor y, por lo tanto, diversas especificaciones analíticas del β -Consumo. En esta sección se presentan tres de esas formulaciones teóricas y se muestra su incidencia en la especificación del β .

1. El comportamiento del consumidor en condiciones de mercados de capitales perfectos

Las características de la solución al problema del consumidor bajo mercados de capitales perfectos y su relación con el mercado de activos se han tratado en el artículo clásico de Hansen y Singleton (1983). Presentaremos aquí dicho modelo y, posteriormente, mostraremos sus implicaciones en el modelo β -Consumo.

Considérese el problema que enfrenta un consumidor representativo en una economía que produce y consume un solo bien. El consumidor escoge un plan de consumo corriente y futuro que le permita maximizar el valor esperado de su utilidad:

$$(1) \quad U_t = E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-s} U(C_{t+s}) \right]$$

donde ρ es la tasa subjetiva de descuento; $U(C_t)$ denota la utilidad obtenida en el periodo t de consumir C_t unidades del bien; y E_t es el operador de expectativas condicionales a la información que se encuentra disponible en el periodo t . En el diseño de su programa óptimo de consumo, el consumidor representativo enfrenta la siguiente restricción presupuestal:

$$(2) \quad C_t + q_t \cdot A_{t+1} = (q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t$$

donde A_t es un vector de las tenencias de los N activos que posee el consumidor al final del período t ; q_t denota el vector de precios de dichos activos; y q_t^* es el vector de los rendimientos de los N activos en el período t ². Nótese que en (2), todos los precios se han deflactado por el precio del bien de consumo, pues, de lo contrario, en esa ecuación se estarían sumando variables de diferente magnitud.

El lado derecho de la restricción (2) corresponde a las disponibilidades del agente al final del período t . Estas disponibilidades consisten en la suma del valor de sus tenencias de activos, de los ingresos recibidos por el rendimiento de dichos activos, y de los ingresos laborales, Y_t . Las disponibilidades pueden asignarse, según el lado izquierdo, al consumo corriente, o a la adquisición de activos que le permitan acceder al consumo en un futuro³.

En (2), los componentes de A_t pueden ser negativos en uno o varios períodos, en cuyo caso el agente estaría adoptando una posición deudora en el (los) activo(s) correspondiente(s). No obstante, con el fin de eliminar la posibilidad de que el agente desarrolle un juego de *Ponzi* según el cual el pago de los intereses se cubre, período tras período, con la emisión de nueva deuda, se impone la siguiente restricción terminal:

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left[\frac{q_{t+T} \cdot A_{t+T}}{\prod_{s=1}^T (1 + R_{t+l+s})} \right] = 0; \quad (1 + R_{t+l+s}) = \frac{q_{t+l+s} \cdot A_{t+s}}{q_{t+s} \cdot A_{t+s}}$$

La solución al problema de programación dinámica definido por la maximización de (1), sujeta a las restricciones (2) y (3) implica el siguiente conjunto de condiciones de primer orden:

$$(4) \quad E_t \left[\left(\frac{1}{1 + \rho} \right) \left(\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) (1 + R_{t,l+1}) \right] = 1; \quad i = 1, \dots, N$$

² Este vector de rendimientos incluye los cambios en los precios de los activos y los dividendos generados.

³ Nótese que en la ecuación (2) el precio del bien de consumo se igualó a 1.

donde $(1 + R_{i,t+1}) = (q_{i,t+1}/q_{i,t})$ es la tasa real de retorno del activo i expresada en unidades del bien de consumo.

Si se supone que las preferencias del consumidor presentan un coeficiente de aversión relativa al riesgo constante⁴, y que son, por tanto, del tipo:

$$(5) \quad U(C_t) = \frac{C_t^\gamma}{\gamma}; \quad 0 < \gamma < 1$$

entonces (4) puede escribirse como:

$$(6) \quad E_t \left[\left(\frac{1}{1+\rho} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\alpha (1 + R_{i,t+1}) \right] = 1; \quad i = 1, \dots, N$$

donde $\alpha = (\gamma - 1)$. La ecuación anterior también se cumple bajo expectativas incondicionales. Por lo tanto, si se tiene en cuenta que para dos variables aleatorias X_1 y X_2 , $E[X_1 X_2] = Cov[X_1, X_2] + E[X_1]E[X_2]$, se obtiene de (6) que:

$$(7) \quad (1 + E[R_{i,t+1}]) = \left[E \left(\frac{C_{t+1}^\alpha}{(1+\rho)C_t^\alpha} \right) \right]^{-1} \left\{ 1 - Cov \left[R_{i,t+1}, \left(\frac{C_{t+1}^\alpha}{(1+\rho)C_t^\alpha} \right) \right] \right\}$$

Mankiw y Shapiro (1986) aproximan la covarianza que aparece en (7) por:

$$(8) \quad Cov \left[R_{i,t+1}, \left(\frac{C_{t+1}^\alpha}{(1+\rho)C_t^\alpha} \right) \right] \cong \frac{\alpha}{(1+\rho)} Cov \left[R_{i,t+1}, \frac{C_{t+1}}{C_t} \right]$$

caso en el cual, se obtiene de (7) que:

⁴ El coeficiente de aversión relativa al riesgo se define como: $-C_t \frac{U''(C_t)}{U'(C_t)}$ y es una medida del grado de curvatura de la función de utilidad, la cual debe cumplir las condiciones: $U \geq 0, U' \geq 0, U'' \leq 0$.

$$(9) \quad E[R_{i,t+1}] = c_0 + c_1 \beta_{C_i}$$

$$\Leftrightarrow R_i = c_0 + c_1 \beta_{C_i} + v_i$$

donde:

$$(10) \quad c_0 = \left[E \left(\frac{C_{t+1}^\alpha}{(1+\rho) C_t^\alpha} \right) \right]^{-1} - 1$$

$$c_1 = \frac{(1-\gamma) \text{Var}[C_{t+1}/C_t]}{(1+\rho) E \left(\frac{C_{t+1}^\alpha}{(1+\rho) C_t^\alpha} \right)}$$

$$\beta_{C_i} = \frac{\text{Cov} \left[R_{i,t+1}, \frac{C_{t+1}}{C_t} \right]}{\text{Var}[C_{t+1}/C_t]}$$

es decir, β_{C_i} es el coeficiente obtenido de la regresión de $R_{i,t+1}$ sobre (C_{t+1}/C_t) .

Nótese que si el agente representativo tiene preferencias neutrales al riesgo, caso en el cual $\alpha = 0$, $R_{i,t+1}$ se iguala a una constante más un término de error no correlacionado. Por lo tanto, en este caso no existiría una relación entre el rendimiento del activo i y el crecimiento del consumo. Adicionalmente, si la covarianza es positiva, el retorno esperado del activo aumenta con la magnitud de ésta, pues en ese caso el riesgo del activo es mayor.

La ecuación (10) es similar a la obtenida por Mankiw y Shapiro (1986). Vale la pena, sin embargo, especificar la relación funcional entre $(1 + R_{i,t+1})$ y C_{t+1}/C_t que se utiliza para la estimación del β_{C_i} . Para ello, volveremos a (6).

A partir del desarrollo teórico de Rubinstein (1976), Lucas (1978), Breeden (1979) y Grossman y Shiller (1981), Hansen y Singleton (1983) derivan explícitamente la relación entre el valor proyectado del retorno de cada activo y el valor esperado del crecimiento del consumo. Estos últimos autores suponen que el vector $Y_{t+1} = (C_{t+1}/C_t, (1 + R_{1,t+1}), \dots, (1 + R_{N,t+1}))$ tiene distribución lognormal. Por lo tanto, el vector $y_{t+1} = (\Delta c_{t+1}, r_{1,t+1}, \dots, r_{N,t+1})$, donde $c_{t+1} = \text{Log}(C_{t+1})$ y

$r_{i,t+1} = \text{Log}(1 + R_{i,t+1})$, tiene distribución normal. Suponiendo adicionalmente que $y_{i,t+1}$ es estacionario y dado un conjunto de información, Ω_t , que incluye todas las observaciones pasadas de $y_{i,t+1}$, $E[\alpha(c_{t+1} - c_t) + r_{i,t+1} / \Omega_t] = \mu_i$ y $\text{Var}[\alpha(c_{t+1} - c_t) + r_{i,t+1} / \Omega_t] = \sigma_i^2, \forall \tau + 1^5$, de donde dichos autores infieren que:

$$(11) \quad E \left[\left(\frac{1}{1+\rho} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\alpha (1 + R_{i,t+1}) / \Omega_t \right] = \left(\frac{1}{1+\rho} \right) E \left[e^{(\alpha \Delta c_{t+1} + r_{i,t+1})} / \Omega_t \right] \\ = \left(\frac{1}{1+\rho} \right) e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

Como $\Omega_t \subset I_t$, el valor esperado de la expresión dentro de los paréntesis cuadrados en (6), condicional a Ω_t , también es igual a 1. Igualando, por lo tanto, el lado derecho de (11) a 1 y resolviendo para μ_i , se obtiene $\mu_i = \log(1+\rho) - \sigma_i^2/2$. Definiendo $v_{i,t+1} = [\alpha(c_{t+1} - c_t) + r_{i,t+1}] - \mu_i$ y tomando el valor esperado condicional a Ω_t .

$$(12) \quad E[v_{i,t+1} / \Omega_t] = E[\alpha(c_{t+1} - c_t) / \Omega_t] + E[r_{i,t+1} / \Omega_t] - \mu_i = 0 \\ \Rightarrow E[\alpha(c_{t+1} - c_t) / \Omega_t] + E[r_{i,t+1} / \Omega_t] = \log(1+\rho) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

De (12), se obtiene la relación analizada por Hansen y Singleton (1983) entre la parte proyectada del retorno y la parte proyectada de los cambios en el consumo para todo activo $i=1, \dots, N$:

$$(13) \quad E[r_{i,t+1} / \Omega_t] = -\alpha E[(c_{t+1} - c_t) / \Omega_t] + \mu_i^*$$

donde $\mu_i^* = \log(1+\rho) - \sigma_i^2/2$.

⁵ Donde σ_i^2 es función de las varianzas y covarianzas de ΔC_{t+1} y $r_{i,t+1}$.

2. El comportamiento del consumidor sujeto a restricciones de liquidez

Supóngase ahora que, por diferentes motivos, los agentes no pueden acceder libremente al crédito para financiar su consumo cuando su ingreso corriente es inferior a su ingreso esperado.

Existe evidencia de la presencia de este tipo de restricciones aun en economías desarrolladas (véase, por ejemplo, Campbell y Mankiw (1991)). En las economías menos desarrolladas es de esperarse que esta situación sea más acentuada, debido al menor grado de desarrollo relativo de los mercados de crédito al consumidor. Para el caso colombiano, López (1991) encontró que una amplia proporción de los consumidores se encontraba efectivamente sujeto a este tipo de restricciones.

Dentro de la literatura teórica, en los trabajos de Deaton (1990), (1991) se encuentra un planteamiento riguroso del problema. Presentaremos aquí un breve recuento de sus principales ideas. No obstante, en esta presentación continuaremos considerando a $R_{t,t+1}$ y a R_{t+1} como variables aleatorias, a diferencia de su marco de análisis en donde *la tasa de interés* es constante. Esta consideración introduce algunas modificaciones a su planteamiento original, aunque las ideas centrales son las mismas.

La presencia de restricciones al endeudamiento implica que las tenencias de los N activos no pueden ser negativas, lo cual lo denotamos como $A_t \geq 0$.

La inclusión de esta restricción adicional en el ejercicio de programación dinámica introduce ahora dos casos diferentes, en contraste con la ecuación (4). En el primer caso, supóngase que el nivel de consumo que resulta óptimo para el agente en el período t es superior a sus disponibilidades, definidas por el lado derecho de la ecuación (2):

$$(14) \quad C_t > (q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t$$

en este caso, como el agente no puede endeudarse, aunque lo desee, deberá conformarse con consumir, como máximo, lo que sus disponibilidades se lo permitan. Pero entonces (4) deja de cumplirse y, en su lugar, se tiene que:

$$(15) \quad U'[(q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t] > E_t \left[\frac{U'(C_{t+1})(1 + R_{t,t+1})}{(1 + \rho)} \right]$$

pues, según se explicó en la nota de pie de página (3), la utilidad marginal es decreciente en el nivel de consumo. Adicionalmente, en este caso, $A_{t+1} = 0$.

En el segundo caso, las disponibilidades del agente en el período t son más que suficientes para adquirir la cantidad deseada del bien de consumo y , por tanto, la condición (4) se cumple.

Combinando los dos casos anteriores y utilizando (5) se obtiene entonces la siguiente modificación a la condición de primer orden:

$$(16) \quad C_t^\alpha = \text{Max} \left\{ \left[(q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t \right]^\alpha, E_t \left[\frac{C_{t+1}^\alpha (1 + R_{i,t+1})}{(1 + \rho)} \right] \right\}$$

Ante la imposibilidad de obtener una función consumo explícita a partir de (16), Deaton (1990) propone un procedimiento que permite apreciar sus principales características. De lo expuesto anteriormente, puede suponerse que la función consumo tiene como argumento las disponibilidades del agente en t :

$$(17) \quad \begin{aligned} C_t &= f(X_t); \quad X_t \equiv (q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t \\ &\Rightarrow C_{t+1} = f(X_{t+1}) \end{aligned}$$

Sustituyendo (17) en (16), e invirtiendo la función resultante se obtiene:

$$(18) \quad f(X_t) = \text{Min} \left\{ (q_t + q_t^*) \cdot A_t + Y_t, \left\{ E_t \left[\frac{[f(X_{t+1})]^\alpha (1 + R_{i,t+1})}{1 + \rho} \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

De otra parte, utilizando la restricción presupuestal (2) se obtiene que:

$$(19) \quad X_{t+1} = Y_{t+1} + \sum_{i=1}^N R_{i,t+1} \left[X_t - C_t - \sum_{j \neq i} q_{j,t} a_{j,t+1} \right]$$

donde $a_{j,t+1}$ es el componente j -ésimo del vector A_{t+1} .

Si se sustituye (19) en (18) puede apreciarse que la esperanza matemática que aparece en (18) depende de la distribución estadística conjunta del vector $(R_{1,t+1}, \dots, R_{N,t+1}, Y_{t+1})$.

Por lo tanto, a diferencia del caso analizado en la sección 1., lo anterior muestra que ante la mera posibilidad de que en un período particular se presenten restricciones de liquidez, el ingreso se convierte en una de las variables correlacionadas con el consumo, aun si en ese período las disponibilidades resultaran ser efectivamente superiores al consumo deseado y la condición de primer orden se cumpliera con el segundo término a la derecha de (18).

Adicionalmente, si en el período en cuestión se presentaron efectivamente restricciones de liquidez y la condición de primer orden se cumple con el primer término a la derecha de (18), el consumo se relaciona tan sólo con el ingreso.

3. Una situación intermedia

A diferencia de los dos casos extremos que se expusieron en las dos secciones anteriores donde, o bien todos los consumidores⁶ podían acceder libremente al crédito, o bien todos estaban sujetos a restricciones de liquidez, una rama de literatura considera el caso en el que una proporción λ del ingreso total es recibido por la porción de la población que se encuentra sujeta a restricciones de liquidez y la otra proporción, $(1-\lambda)$, es recibida por agentes que toman sus decisiones de consumo en la forma predicha por la teoría del ingreso permanente.

En estas circunstancias, el consumo total observado en la economía será la suma de dos componentes:

$$(20) \quad C = C_\lambda(Y_\lambda) + C_{1-\lambda}(YP)$$

⁶ O, lo que es lo mismo, su agente representativo.

donde el primer componente depende del ingreso corriente y corresponde a la parte de la población sujeta a restricciones de liquidez, mientras que el segundo componente depende del ingreso permanente de los consumidores que pueden acceder libremente al crédito. De hecho, bajo ciertos supuestos⁷, el segundo componente es igual al ingreso permanente de esa parte de la población.

Esta formulación un tanto *ad-hoc* del consumo ha resultado ser bastante apropiada para explicar sus principales características estocásticas en diferentes economías (véase Campbell y Mankiw (1991)).

Bajo esta nueva especificación y teniendo en cuenta lo expuesto en la sección anterior, la ecuación (13) de la sección 1. se convierte en:

$$E_t [r_{i,t+1}] = - \frac{\alpha}{1-\lambda} E_t [\Delta c_{t+1}] + \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} E_t [\Delta y_{t+1}] + \bar{\mu}_i + \frac{\alpha}{1-\lambda} d^*$$

donde las variables en minúsculas denotan, como antes, el logaritmo de las variables, $r_{i,t+1} = \log(1 + R_{i,t+1})$ y d^* es una constante que se define en el apéndice A1. En ese apéndice también se muestra, en mayor detalle, cómo se obtiene la ecuación (21) a partir de la combinación de (20), (13) y (16).

Es importante destacar que de acuerdo con la ecuación anterior, si en la economía existen efectivamente agentes sujetos a restricciones de liquidez y en la especificación se excluye erróneamente el término en $E_t[\Delta y_{t+1}]$, como en (13), se presentaría un sesgo en los estimadores de μ_i^* y de $-\alpha/(1-\lambda)$. En particular, ambos coeficientes estarían subestimados pues, como se recordará, $\alpha < 0$.

En la ecuación (21) el valor esperado del retorno del activo i se relaciona con el valor proyectado del crecimiento del consumo, pues como lo postulan (4) y (6), al aumentar el precio del consumo presente expresado en términos del consumo futuro (al aumentar $r_{i,t+1}$), los agentes no sujetos a restricciones de liquidez reducen el consumo corriente y aumentan el consumo futuro. Nótese, sin embargo, que según lo dicho anteriormente, esta relación solamente se presenta con aquella parte de los cambios esperados en el consumo que corresponde a los agentes no

⁷ Estos supuestos son: 1) Que la función de utilidad sea cuadrática y que, por tanto, la utilidad marginal resulte lineal en el consumo, y 2) Que la tasa de descuento sea igual a "la tasa de interés" del (único) activo.

sujetos a restricciones de liquidez. Como la variable observada en la ecuación (21) es el consumo total, los cambios esperados en el consumo que corresponden a los agentes con restricciones de liquidez y que son, por lo tanto, iguales a los cambios esperados en el ingreso, se excluyen de esta relación con la tasa de retorno.

En la ecuación (21), la relación entre los valores esperados del crecimiento del ingreso y del retorno del activo i es negativa. Según (15), un aumento del nivel corriente del ingreso relaja la restricción presupuestal que enfrentan los agentes sujetos a restricciones de liquidez, permitiendo aumentar el consumo corriente, con lo cual su valoración subjetiva, en términos del consumo futuro (representada por $U'(C_t)/U'(C_{t+1})$), se reduce. Este efecto ocurrirá para todos los niveles de ingreso, $Y_t < Y_t^*$, para los cuales el precio subjetivo del consumo corriente resulte superior a $E_t[(1+R_{i,t+1})/(1+\rho)]^8$. Por lo tanto, esos cambios en el ingreso esperado no estarán correlacionados con la tasa esperada de retorno. A partir de ese punto, aumentos del ingreso corriente (disminuciones de $E_t[\Delta y_{t+1}]$), solamente incentivarán el ahorro y aumentarán el consumo futuro, si $r_{i,t+1}$ aumenta.

B. FORMULACION β -CAPM

El Modelo de Valoración de Activos de Riesgo (CAPM) supone que el mercado de capitales es perfecto, en el sentido de que todos los agentes pueden comprar y vender activos a los precios dados por el mercado y que no existen costos de información ni de transacción. Además, todos los activos son transables y todo el ingreso de la economía proviene del rendimiento de dichos activos.

En este modelo, el agente tiene aversión al riesgo y busca obtener una composición de su portafolio que le permita conseguir el mayor rendimiento posible con el mínimo riesgo. Bajo el supuesto adicional de que los retornos de los activos tienen distribución normal, esta información buscada por el inversionista se obtiene a partir del valor esperado del rendimiento de su portafolio, $E(R_p)$, y de su desviación estándar, $\sigma(R_p)$. Denotando por w_{ip} la participación que tienen los recursos invertidos en el activo i dentro del valor total del portafolio, el valor

⁸ Recuérdese que, según la ecuación (15), la condición de optimalidad no se cumple para $Y < Y^*$. Esta solamente se cumple cuando la valoración subjetiva del consumo corriente, en términos del consumo futuro es igual al precio de mercado descontado por la tasa intertemporal de preferencias.

esperado del rendimiento del portafolio y su desviación estándar, vienen dados, respectivamente, por:

$$(22) \quad E[R_p] = \sum_{i=1}^N \omega_{ip} E[R_{ip}]$$

$$(23) \quad Var[R_p] = \sum_{i=1}^N \omega_{ip}^2 Var[R_{ip}] + \sum_i \sum_{j \neq i} 2 \omega_{ip} \omega_{jp} Cov(R_{ip}, R_{jp})$$

Maximizando (22), sobre los w_{ip} , sujeto a:

$$(24 a) \quad Var[R_p] = Var[R_m]$$

$$(24 b) \quad \sum_{i=1}^N \omega_{ip} = 1$$

donde R_m es el rendimiento del portafolio con composición idéntica a la del mercado, Fama y Macbeth (1973) obtienen:

$$(25) \quad E[R_i] = E[R_m] - S_m \sigma(R_m) + S_m \sigma(R_m) \beta_{Mi},$$

donde S_m es la tasa de cambio de $E[R_p]$ con respecto a un cambio en $\sigma(R_p)$ y $\beta_{Mi} = Cov(R_i, R_m) / Var(R_m)$. β_{Mi} indica entonces el riesgo del activo i dentro del portafolio del mercado. De otra parte, la suma de los dos primeros términos a la derecha de (25) corresponde al rendimiento esperado del activo libre de riesgo:

$$(26) \quad E[R_0] \equiv E[R_m] - S_m \sigma(R_m)$$

De (26) se obtiene:

$$(27) \quad S_m = \frac{E[R_m] - E[R_0]}{\sigma(R_m)}$$

Sustituyendo (27) en (25) se llega, finalmente, a:

$$(28) \quad E[R_i] = E[R_0] + \{E[R_m] - E[R_0]\} \beta_{Mi}$$

Así, pues, en el *CAPM* existe una relación lineal entre el retorno esperado del activo i y su riesgo sistemático medido por β_{Mi} .

Si bien las implicaciones generales de este modelo pueden verificarse empíricamente en forma relativamente sencilla, su aplicación a economías donde una parte (importante) de los activos no son transados resulta en estimativos que sólo pueden interpretarse como valores aproximados al valor que tomarían en la situación hipotética en donde todos los activos son transados.

Esta aclaración es importante, pues llama la atención sobre la medida con que deben tomarse los resultados obtenidos de suponer que todos los activos son efectivamente transados. En particular, su utilización para la valoración de activos puede ser útil en términos relativos, pero no absolutos.

La literatura teórica reciente sobre el tema relaja algunos de los supuestos básicos del *CAPM*, pero sus resultados son particulares a cada situación y, en todo caso, dependen de otros supuestos restrictivos. Así, por ejemplo, Svenson y Werner (1993) consideran el problema de valorar activos de riesgo cuando algunos de los activos son no transados y los ingresos generados por los activos transados no proveen una cobertura de riesgo para los ingresos de los no transados. Encuentran que, en general, el valor del activo depende de la forma específica de la función de utilidad de cada inversionista particular y que, por lo tanto, dicho valor no es el mismo que se obtendría si el activo se transara libremente en el mercado.

C. FORMULACION β ETAS APT

A diferencia del modelo β -*CAPM*, este modelo considera diferentes fuentes de riesgo sistemático, adicionales a la volatilidad del mercado como un todo. El modelo plantea la siguiente relación entre el valor esperado del retorno del activo i y la sensibilidad β_{ji} a las diferentes fuentes de riesgo j :

$$(29) \quad E[R_i] = \lambda_0 + \beta_{1,i} \lambda_1 + \beta_{2,i} \lambda_2 + \dots + \beta_{J,i} \lambda_J$$

donde λ_j es el precio de mercado de la j -ésima fuente de riesgo.

Solamente los cambios no anticipados en las fuentes de riesgo deben modificar los retornos de los diferentes activos, pues los cambios idiosincrásticos ya deben estar incorporados en el precio del activo. No obstante, como ya se mencionó, la mayor deficiencia de este modelo está en que no especifica cuáles deben ser esas fuentes de riesgo.

Nótese sin embargo, que a la luz de este modelo, el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez de la ecuación (21) incorpora dos fuentes de riesgo sistemático, al menos bajo ciertas características estocásticas de las tasas de crecimiento del consumo y del ingreso.

Bajo esta interpretación, de verificarse empíricamente la validez del modelo de la ecuación (21) para los distintos activos, sería factible obtener estimativos del "precio de mercado" por variaciones en el consumo y en el ingreso. Estos "precios de mercado" corresponderían a los valores estimados de los λ_j en la ecuación (29).

III. ESTIMACION DE LOS MODELOS DE VALORACION DE ACTIVOS

En este capítulo se verificará empíricamente la validez de los modelos cuyo valor esperado se definió en las ecuaciones (21) y (28) del capítulo anterior, correspondientes a las formulaciones β -Consumo con Restricciones de Liquidez y β -CAPM, respectivamente. Un caso particular de la ecuación (21) corresponde a la formulación β -Consumo sin Restricciones de Liquidez, el cual también se evaluará empíricamente.

Es preciso resaltar que algunos de los activos incluidos en la muestra no son transados en el mercado. Por ello, en esos casos el aspecto que realmente permite indagar los ejercicios que se desarrollan en este capítulo es cuáles serían los factores de exposición a fuentes alternativas de riesgo, en cada formulación del modelo, para un activo cuyo rendimiento período tras período es igual al del activo en cuestión, pero suponiendo, implícitamente, que el activo se transa en el mercado. Como se explicó en el capítulo anterior, en otras circunstancias, la valoración de activos no transados dependería de los parámetros de la función de utilidad de cada agente particular en la economía.

De otra parte, en el caso de los activos no transados solamente es posible disponer de indicadores de rentabilidad patrimonial, contruidos a partir de la información de los balances.

En sentido estricto, las formulaciones correspondientes a las ecuaciones (21) y (28) se refieren a la rentabilidad que esperan los agentes para cada activo, utilizando toda la información disponible. En mercados de capitales desarrollados, esta información está contenida en el rendimiento esperado para cada acción, conformado tanto por las ganancias de capital (las cuales corresponden al cambio en el precio de la acción), como por los dividendos. En ese caso, cualquier información que resulte relevante para los agentes se refleja inmediatamente en ese indicador, probablemente a través de las variaciones en el precio de mercado de la acción.

No obstante, en mercados de capitales poco dinámicos o con limitaciones de acceso, como lo fue el mercado de capitales colombiano durante la mayor parte del período que aquí se considera (1984.1-1996.2), el indicador de rentabilidad accionaria no sólo puede no reflejar los cambios en el entorno económico de los agentes, sino que puede incorporar una información inferior, en calidad y volumen, a la que puede proporcionar el indicador de rentabilidad patrimonial referido, principalmente, a los resultados económicos *ex-post*, de la gestión de las empresas.

De hecho, durante la mayor parte del período de análisis no existieron transacciones de acciones para la mayor parte de las empresas inscritas en bolsa. Por ello, aun la construcción misma de los indicadores de rentabilidad accionaria debió limitarse a una muestra de empresas todavía más reducida que la correspondiente a los indicadores de rentabilidad patrimonial. Dichos indicadores se utilizaron en algunas de las estimaciones. No obstante, la calidad estadística de los resultados fue inferior a la obtenida cuando se utilizaron los indicadores de rentabilidad patrimonial, como se mostrará más adelante.

Así, pues, si bien desde un punto de vista conceptual, los indicadores de rentabilidad patrimonial no son los más idóneos para la verificación empírica de los modelos discutidos en el capítulo I, pues dejan por fuera el efecto que pueden tener los eventos futuros esperados en las decisiones corrientes de los agentes, sí parecen ser los mejores disponibles para el período de análisis.⁹ Sólo a partir de

⁹ Los indicadores de rentabilidad patrimonial trimestrales corresponden al cociente entre las utilidades generadas en ese período y el valor del patrimonio de la empresa al final del mismo.

períodos relativamente recientes, el mercado de capitales colombiano ha experimentado un mayor grado de transparencia y dinamismo¹⁰.

De otra parte, es preciso anticipar desde ya que la verificación empírica de la validez de los distintos modelos, requiere dos tipos de estimaciones. En primer lugar, deben estimarse las ecuaciones para cada una de las empresas, a fin de obtener los estimativos de los coeficientes de riesgo. En segundo lugar, los resultados obtenidos de las estimaciones individuales han de utilizarse en estimaciones de tipo transversal y temporal para evaluar la relevancia de esos coeficientes en la explicación de las diferencias de las rentabilidades entre empresas, como se muestra más adelante. Los diferentes modelos de portafolio postulan que los activos con mayores niveles de riesgo deben recibir una mayor tasa de retorno. En este segundo tipo de estimación, los coeficientes β obtenidos de las estimaciones para cada empresa son las variables explicativas.

Por razones de espacio y a fin de lograr simplicidad en la presentación del primer tipo de estimaciones individuales, sólo se reportarán, en adelante, los resultados para una sola empresa, *ECOPETROL*. Los resultados de las verificaciones econométricas *globales*, para toda la muestra de empresas, se presentan en el caso de cada modelo. La presentación de los resultados para una empresa individual permitirá ilustrar la forma en que pueden interpretarse los resultados globales en la estimación de los precios de mercado de las distintas fuentes de riesgo, a la luz de la teoría *APT*.

Adicionalmente, debe resaltarse que una verificación minuciosa de las diferentes hipótesis requeriría disponer de la información correspondiente para cada uno de los activos (empresas) existentes; o, cuando menos, para todos los activos transados en la economía. Sin embargo, existen serias limitaciones de acceso en el país para obtener dicha información. Por ello, se optó por intentar elaborar una muestra tan amplia como fuese posible de las empresas que suministran información trimestral a alguna fuente¹¹. Utilizando principalmente la información

¹⁰ En correspondencia con el mayor grado de dinamismo y transparencia del mercado accionario en el período 1991-1996, la calidad de los datos también mejora y, en particular, estos pueden resultar más adecuados para la verificación de, por ejemplo, el modelo β -CAPM, a partir de observaciones de frecuencia mayor a la trimestral. No obstante, para el tipo de modelos cuya validez se verifica y se compara en este trabajo, la mayor frecuencia disponible para la totalidad de las variables requeridas, fueron las observaciones trimestrales (en especial, para las variables Consumo y PIB).

¹¹ En la recolección de la información básica, el autor contó con la colaboración de funcionarios de *ECOPETROL*.

de la Bolsa de Bogotá, así como información de otras fuentes para entidades financieras, se logró construir la muestra de 27 empresas, para el período 1984.1-1996.2, con indicadores de rentabilidad patrimonial.

A. ESTIMACION DEL β -CONSUMO CON RESTRICCIONES DE LIQUIDEZ

Teniendo en cuenta que $\alpha = (\gamma - 1), 0 < \gamma < 1$, la ecuación (21) puede escribirse como:

$$(30) \quad r_{i,t+1} = \mu_i^* + \frac{1-\gamma}{1-\lambda} \Delta c_{t+1} - \frac{1-\gamma}{1-\lambda} \lambda \Delta y_{t+1} + v_{i,t+1}$$

donde las variables en minúsculas denotan, como antes, el logaritmo de las variables, $r_{i,t+1} = \log(1 + R_{i,t+1})$, $R_{i,t+1}$ denota la tasa de interés real¹² y $v_{i,t+1}$ es un término de error con media cero, varianza constante y tal que $E[v_i v_j] = 0, \forall i \neq j$. Definiendo $\beta_c = (1-\gamma)/(1-\lambda)$ y $\beta_y = (1-\gamma)\lambda/(1-\lambda)$ la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$(31) \quad r_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_c \Delta c_{t+1} - \beta_y \Delta y_{t+1} + v_{i,t+1}$$

donde $\beta_c > 0, \beta_y > 0$.

La ecuación (31) difícilmente puede ser estimada por mínimos cuadrados ordinarios, pues el término de error v_i no necesariamente es ortogonal a Δc_{t+1} y a Δy_{t+1} . Dicha ecuación se estimará, por lo tanto, por mínimos cuadrados en dos etapas, utilizando como variables instrumentales la constante, los cambios en el consumo y en el PIB rezagados uno y dos períodos y los cambios en el PIB rezagados cuatro períodos¹³.

¹² Recuérdese que en la ecuación (2) del capítulo I, todos los precios fueron deflactados por el precio del bien de consumo. Por lo tanto, la tasa de rendimiento real se obtiene de descontar de la tasa de rendimiento nominal, el crecimiento porcentual del precio del bien de consumo.

¹³ A partir de los postulados de la teoría económica, los cambios esperados en el consumo y en el ingreso difícilmente pueden considerarse como exógenos. De hecho, en las estimaciones empíricas de funciones estructurales de demanda de dinero, o en las estimaciones de modelos VAR, que utilizan muestras de tamaño relativamente grande, los métodos utilizados corrigen por la endogeneidad del ingreso. De otra parte, una forma de verificar directamente la validez de las variables instrumentales es a través del estadístico formulado por Hausman (1978). Infortunadamente, los resultados de este estadístico sólo son relevantes asintóticamente y por lo tanto, poco potentes para muestras relativamente pequeñas, como las que se usan en este trabajo.

La ecuación (31) se estimó para cada una de las 27 empresas que conforman la muestra. Los resultados de la estimación para *ECOPETROL*, en el período 1984.1-1996.1, se muestran en la Regresión 1. En el apéndice A2 se describen las series utilizadas¹⁴. En el apéndice A3 se muestra que Δc_{t+1} , Δy_{t+1} y el logaritmo de uno más la rentabilidad real trimestral de *ECOPETROL* son variables estacionarias.

Los resultados estadísticos son satisfactorios. Los signos de los coeficientes son los esperados, según la ecuación (31), y las variables individuales son significativas a un nivel de confianza de por lo menos el 7%, con excepción de la constante, la cual no es estadísticamente diferente de cero. Así mismo, la significancia conjunta de las variables incluidas en la Regresión 1 es superior a un nivel de 7% de confianza, como lo indica el estadístico *F*.

No obstante, debe mencionarse que el R^2 es bajo. Ello indica que el modelo (31), por sí solo, no es apropiado para predicción, lo cual no es una preocupación en esta etapa de la verificación del modelo, pues su objetivo es obtener los mejores estimadores posibles de los coeficientes β , dentro de diferentes especificaciones con fundamento en la teoría económica¹⁵. Como se verá más adelante, cuando se incorporan estos coeficientes obtenidos para las regresiones individuales, en la verificación global del modelo, el R^2 aumenta sustancialmente.

Para otros cinco activos de la muestra, la estimación de la ecuación (31) produjo resultados aceptables. Adicionalmente, otros nueve activos se ajustaron al modelo β -Consumo, pero sin restricciones de liquidez. Finalmente, en el caso de otros cuatro activos resultó significativa exclusivamente la variable de cambios en el ingreso. Estos dos últimos modelos constituyen un caso particular de la ecuación (31). Por lo tanto, los tres modelos pueden "anidarse" en la formulación de la ecuación (31).

¹⁴ De acuerdo con lo explicado en la nota 12 de pie de página, la tasa real de rendimiento del activo *i*, en el trimestre $t+1$, $r_{i,t+1}$, se obtuvo de $(1+r_{i,t+1}) = (1+rm_{i,t+1}) / (1+\pi_{c,t+1})$, donde $rm_{i,t+1}$ es el rendimiento nominal en el trimestre $t+1$ y $\pi_{c,t+1}$ es la inflación para los bienes de consumo en ese trimestre.

¹⁵ Al respecto, puede mencionarse que en la verificación de modelos similares, autores como Campbell y Mankiw (1991) reportan R^2 inferiores a 0.11.

Resultados de estimar (31) para *ECOPETROL*, por mínimos cuadrados en dos etapas.

(Instrumentos: $Cte., \Delta c_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \Delta c_{t-2}, \Delta y_{t-2}, \Delta y_{t-4}$)

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>			
Regresión 1:	$\beta_0 = -0.04$	$\beta_c = 3.419$	$\beta_y = -2.820$
$R^2 = 0.149$	$t = -0.820$	$t = 1.821$	$t = -2.354$
$R^2 - Aj = 0.110$			
$D.W. = 2.005$			
Muestra: 1984.1-1996.1			
$F(2,43) = 2.905$			

Con base en estos resultados puede entonces afirmarse que la hipótesis que se planteó en el capítulo anterior sobre la relevancia que podrían tener las restricciones de liquidez en la especificación del β -Consumo tiene fundamento empírico, al menos para el caso de esas seis empresas de la muestra. En otras palabras, una estimación de β -Consumo para este grupo de activos, a partir de una ecuación que no incluya los cambios porcentuales en el ingreso puede presentar problemas de sesgo, por omisión de variables relevantes.

Queda por resolver, sin embargo, el interrogante de cuál es la relevancia *global* del modelo para un conjunto de empresas de la muestra. De verificarse su validez global, los riesgos que implican para cada una de ellas las variaciones en el consumo y en el PIB podrían tener un "precio de mercado" y no constituir riesgos particulares a su actividad. Debe tenerse en cuenta que, en este caso, los coeficientes de las variables pueden tener una interpretación diferente al caso en que los riesgos son específicos a las actividades individuales, pues en el primer caso, corresponderían a los riesgos que pueden "transarse en el mercado".

A partir de los resultados de las regresiones individuales para cada uno de los diecinueve activos, puede entonces evaluarse, para cada momento del tiempo, la relevancia que tienen los distintos vectores $\beta_i = (\beta_{0i}, \beta_{ci}, \beta_{yi})$, en la explicación de las diferencias en las tasas de retorno de los diferentes activos, *i*. Para ello, se puede estimar, para cada momento del tiempo, $t + 1$, la siguiente ecuación:

$$(32) \quad r_{i,t+1} = \delta_{0,t+1} \hat{\beta}_{0i} + \delta_{c,t+1} \hat{\beta}_{ci} + \delta_{y,t+1} \hat{\beta}_{yi} + v_{i,t+1}$$

Si el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez es válido para todos los activos, entonces los coeficientes $\delta_{c,t+1}$ y $\delta_{y,t+1}$ deben ser positivos, pues en (31), $\beta_{0i}, \beta_{ci}, \beta_{yi}$ incluyen su signo. Si el modelo β -Consumo sin restricciones de liquidez es válido, entonces $\delta_{y,t+1}$ debe ser estadísticamente igual a cero y $\delta_{c,t+1}$ debe ser significativamente positivo.

Alternativamente, se puede estimar (32) bajo la hipótesis nula de que los coeficientes δ_{t+1} son los mismos en los diferentes momentos del tiempo a lo largo de la muestra:

$$(33) \quad H_0 \quad \begin{aligned} \delta_{0,t+1} &= \delta_0, \forall t+1 \\ \delta_{c,t+1} &= \delta_c, \forall t+1 \\ \delta_{y,t+1} &= \delta_y, \forall t+1 \end{aligned}$$

Estimando (32), sujeto a (33), por el método de mínimos cuadrados ordinarios, con observaciones transversales y temporales, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Regresión 2¹⁶. Los coeficientes de las variables tienen los signos esperados y son altamente significativas, tanto individualmente, como en conjunto, con niveles de significancia superiores al 1%.

Así, pues, los resultados de la regresión indican que para la muestra de empresas, el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez es adecuado para explicar las diferencias en las rentabilidades de los distintos activos.

Veamos cuál es la implicación de este resultado en la interpretación de los estimativos que se mostraron anteriormente para *ECOPETROL*. En la formulación β -Consumo con restricciones de liquidez, el poseedor de un activo con rentabilidades similares a las de *ECOPETROL* enfrentaría dos fuentes de riesgo, los cambios en el consumo y los cambios en el PIB. Ambas fuentes de riesgo son compartidas por otros activos y, por lo tanto, pueden encontrarse

¹⁶ Para estimar la ecuación (32), bajo la hipótesis nula contenida en (33), se crearon variables conformadas por los vectores β obtenidos para cada una de las empresas, en cada momento del tiempo. Al respecto, vale la pena mencionar que a diferencia de Fama y McBeth (1973), los vectores β están fijos a lo largo del tiempo. En el caso del trabajo de esos autores, los β para cada activo se estimaron recursivamente, a fin de cambiar su valor cada 12 observaciones mensuales.

estimativos de sus "precios de mercado". Dicho estimativo corresponde a los coeficientes δ_c y δ_y de la Regresión 2.

Resultados de estimar (32) sujeto a (33), por mínimos cuadrados ordinarios

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>			
Regresión 2:	$\delta_0 = 0.971$	$\delta_c = 0.0255$	$\delta_y = 0.0263$
$R^2 = 0.4768$	$t = 37.785$	$t = 4.195$	$t = 2.695$
$R^2 - A_j = 0.4757$			
$D.W. = 1.860$			
No. Observaciones: 949			
$F(3,946) = 431.09$			

B. ESTIMACION DEL MODELO β -CAPM

En esta sección se presentan los resultados de estimar la siguiente ecuación para cada activo *i*, asociada con la ecuación (28) del capítulo anterior:

$$(34) \quad R_{i,t} = R_{0,i} + \beta_{Mfi} R_{m,t} + \mu_{i,t}$$

donde $R_{i,t}$ es la rentabilidad nominal del activo *i* en el período *t*, $R_{m,t}$ es la rentabilidad nominal del portafolio del mercado y $\mu_{i,t}$ es un término de error con media cero, varianza constante, σ_i y tal que $E[\mu_i \mu_j] = 0, \forall i \neq j$.

La rentabilidad del "portafolio del mercado" se aproximó por el promedio simple de las rentabilidades nominales patrimoniales de las veintisiete (27) empresas que conforman la muestra disponible.

Los resultados para *ECOPETROL* se muestran en la Regresión 3. Así mismo, se muestra que la tasa de rentabilidad trimestral nominal tanto de *ECOPETROL*, como del "portafolio del mercado" son estacionarias. Puede apreciarse que el ajuste tanto individual de las variables, como en el conjunto del modelo es bastante bueno, con excepción de la constante, cuya significancia es relativamente baja.

Resultados de estimar (34) para *ECOPETROL*, por mínimos cuadrados ordinarios

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>		
Regresión 3:	$\beta_0 = -0.1181$	$\beta_M = 1.534$
$R^2 = 0.1168$	$t = -1.3557$	$t = 2.5198$
$R^2 - A_j = 0.0984$		
$D.W. = 2.0733$		
Muestra: 1984.1 - 1996.2		
$F(1,49) = 6.349$		

Pruebas de estacionariedad

(Dickey - Fuller Aumentado)

Variable: $R_{\text{ECOPETROL}}$ (patrimonial - nominal)	
Modelo: $D(X): C \text{ TEND } X(-1) \text{ DX}(-1) \text{ DX}(-2)$	
Estadístico Dickey - Fuller: -6.5097	
Valores críticos de MacKinnon:	
1%	-4.1630
5%	-3.5066
10%	-3.1828
Variable: R_{MERCADO} (patrimonial - nominal)	
Modelo: $D(X): CX(-1)$	
Estadístico Dickey - Fuller: -4.9803	
Valores críticos de MacKinnon:	
1%	-3.5713
5%	-2.9228
10%	-2.5990

En el apéndice A4 se muestran los resultados de estimar la misma Regresión 3, pero utilizando como indicador del rendimiento del portafolio de mercado un promedio de los indicadores de rentabilidad accionaria para las 27 empresas de la muestra. La calidad estadística de los resultados es inferior a la de los estimativos de la Regresión 3¹⁷. Por ello, en los análisis que siguen se continuará utilizando el indicador de rentabilidad patrimonial para las empresas.

¹⁷ Adicionalmente, como puede apreciarse a continuación de la Regresión 3b del apéndice A4, la estacionariedad de la variable de rentabilidad accionaria es dudosa.

Estimando el modelo para cada una de las empresas restantes, diferentes a *ECOPETROL*, se obtuvieron resultados aceptables para dieciocho (18) empresas. Utilizando los resultados de estas regresiones individuales para cada activo i , (R_{0i}, β_{Mi}) , se estimó el siguiente modelo, por mínimos cuadrados ordinarios:

$$(35) \quad R_{i,t} = \gamma_0 R_{0i} + \gamma_M \beta_{Mi} + \eta_{i,t}$$

el cual incorpora la siguiente hipótesis nula:

$$(36) \quad H_0 : \begin{aligned} \gamma_{0,t} &= \gamma_0, \forall t \\ \gamma_{c,t} &= \gamma_M, \forall t \end{aligned}$$

En (35), γ_M corresponde al "valor de mercado" del riesgo implicado por las variaciones, entre empresas, de los coeficientes β_{Mi} ; y en (36), se ha impuesto la condición de que el valor de los coeficientes γ que pueden obtenerse para cada instante del tiempo son los mismos a lo largo de toda la muestra.

Los resultados se muestran en la Regresión 4 y son bastante buenos. Así, pues, el modelo β -CAPM también parece apropiado para explicar las diferencias en las rentabilidades de las empresas de la muestra a lo largo del tiempo.

A través de la Regresión 5, se realizó el ejercicio, que es usual en la literatura, de estimar conjuntamente la tasa de retorno (nominal, trimestral) del activo "libre de riesgo" y el "premium del mercado sobre la tasa libre de riesgo". A diferencia de la Regresión 4, en la Regresión 5 las variables independientes son los β_{Mi} y la constante. Puede apreciarse que los resultados son, respectivamente, 9.8% (45.35% anual efectivo) y 4.2%, para el período 1984.1-1996.2. En ese mismo período, el promedio de la tasa anual efectiva de los CDT-90 días fue de 32%¹⁸. Por lo tanto, si se tomara esta última tasa como indicativo de la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo, el estimativo obtenido en la Regresión 5 (45.35%) claramente la sobreestima en más del 40%.

¹⁸ Calculado con base en los datos de fin de mes de la encuesta de los CDT del Banco de la República.

Resultados de estimar (35) sujeto a (36), por mínimos cuadrados ordinarios

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>		
Regresión 4:	$\gamma_0 = 1.039$	$\gamma_M = 0.130$
$R^2 = 0.2257$	$t = 15.538$	$t = 21.087$
$R^2 - A_j = 0.2241$		
$D.W. = 2.035$		
No. Observaciones: 949		
$F(1,947) = 137.89$		
Regresión 5:	$R_f = 0.098$	$\gamma_M = 0.042$
$R^2 = 0.0609$	$t = 5.701$	$t = 4.581$
$R^2 - A_j = 0.0589$		
$D.W. = 2.046$		
No. Observaciones: 949		
$F(1,947) = 30.683$		

Los resultados de las dos últimas secciones plantean la necesidad de evaluar la relevancia comparativa de ambos modelos, tanto para el caso de *ECOPETROL*, como para las demás empresas de la muestra tomadas en conjunto.

C. β -CONSUMO VERSUS β -CAPM

A fin de evaluar comparativamente ambos modelos, se estimará una ecuación similar a la propuesta por Mankiw y Shapiro (1986). Pero a diferencia de ésta, aquí también se incluye la posibilidad de que existan restricciones de liquidez. El modelo propuesto es, por lo tanto, el siguiente:

$$(37) \quad r_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_c \Delta c_{i,t+1} - \beta_y \Delta y_{i,t+1} + \beta_M r_{M,t+1} + v_{i,t+1}$$

Las variables son las mismas que se definieron en la ecuación (31), con la única diferencia que aquí se incluye como variable explicativa la rentabilidad patrimonial real trimestral de nuestra *proxi* del "portafolio del mercado", $r_{M,t+1}$.

Los resultados de estimar la ecuación (37) para *ECOPETROL* se muestran en la Regresión 6. La constante, así como la variable $r_{M,t+1}$ resultan no significativas.

En la Regresión 7 se muestra que si se excluye la constante, el coeficiente de la variable $r_{M,t+1}$ sigue siendo estadísticamente igual a cero.

En el Apéndice 3 también se incluyen los resultados de estimar las Regresiones 6 y 7, pero utilizando como indicador del rendimiento del portafolio de mercado la rentabilidad accionaria, en lugar de la patrimonial. Nuevamente, como en el caso del modelo β -CAPM, los resultados tienen una calidad estadística inferior a la de las Regresiones 6 y 7.

Con base en los resultados anteriores, puede concluirse que el modelo más apropiado para *ECOPETROL* es el correspondiente a la especificación del β -Consumo con restricciones de liquidez (ecuación (31)).

Los estimativos obtenidos de realizar un ejercicio similar al que se efectuó en las dos secciones anteriores para verificar la validez del modelo a lo largo de todas las empresas de la muestra y de todas las observaciones temporales, se muestran en la Regresión 8. Puede apreciarse que la significancia de la variable β_y es baja.

No obstante, en las Regresiones 8 y 9 las demás variables tienen una significancia superior al 1%. Nótese, además, que en comparación con los resultados de la Regresión 2, el R^2 en las Regresiones 8 y 9 es más alto, indicando que la rentabilidad del "portafolio" de mercado contribuye efectivamente a explicar las variaciones de la rentabilidad entre empresas y en el tiempo.

Por lo tanto, no puede descartarse la relevancia del modelo "anidado". En particular, no es factible descartar la validez del modelo β -Consumo sin restricciones de liquidez o, alternativamente, la del modelo β -CAPM para el conjunto de empresas que conforman la muestra. De hecho, los resultados de las regresiones anteriores demuestran la validez del modelo β -Consumo-CAPM¹⁹.

Sin embargo, como ya se discutió, para el caso de *ECOPETROL* es más apropiado el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez. Como se

¹⁹ En la literatura reciente, Campbell (1993a) deriva explícitamente una ecuación en la cual las variables explicativas del retorno de un activo son la covarianza del retorno del activo con el crecimiento del consumo; y la covarianza del retorno del activo con el retorno del portafolio de mercado. Campbell (1993b) y Hardouvelis, Kim y Wizman (1996) realizan una verificación empírica de este tipo de modelo.

recordará, los resultados de las ecuaciones 6 y 7 indican que el modelo "anidado" no es relevante para dicha entidad. Adicionalmente, al introducir la rentabilidad real del "portafolio de mercado" en las Regresiones 8 y 9, en comparación con la Regresión 2, la significancia de la variable β_y se reduce sustancialmente. Por lo tanto, los estimativos de los "precios de mercado" por variaciones en el consumo y en el PIB que sí son relevantes para dicha entidad, son los que corresponden a la Regresión 2.

Resultados de estimar (37) para ECOPETROL, por mínimos cuadrados en dos etapas.

(Instrumentos: $Cte.$, Δc_{t-1} , Δy_{t-1} , Δc_{t-2} , Δy_{t-2} , Δy_{t-4})

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>				
Regresión 6:	$\beta_0 = -0.263$	$\beta_c = 4.151$	$\beta_y = -2.566$	$\beta_M = 2.647$
$R^2 = 0.2777$	$t = -0.706$	$t = 1.949$	$t = -2.149$	$t = 0.603$
$R^2 - A_j = 0.2261$				
$D.W. = 1.992$				
Muestra: 1984.1 - 1996.1				
$F(3,43) = 2.350$				
Regresión 7:		$\beta_c = 3.260$	$\beta_y = -2.862$	$\beta_M = -0.428$
$R^2 = 0.0823$		$t = 1.706$	$t = -2.298$	$t = -0.717$
$R^2 - A_j = 0.0397$				
$D.W. = 1.980$				
Muestra: 1984.1 - 1996.1				
$F(3,43) = 2.639$				

D. APLICACION DE LOS RESULTADOS A LA ESTIMACION DE LA TASA DE DESCUENTO, SEGUN EL MODELO β TAS-APT

En las secciones anteriores, los estimativos de los coeficientes δ de la ecuación (33) han sido interpretados como los "precios de mercado" de las distintas fuentes de riesgo en el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez. Esta es una acepción propia del modelo APT. La única diferencia es que en nuestro caso, la definición de las fuentes de riesgo fue obtenida a partir de planteamientos de la teoría económica del consumo.

En esta sección se muestra, brevemente, cómo pueden utilizarse los resultados obtenidos, en la estimación de la tasa de descuento de la inversión en un activo. Esta constituye otra de las aplicaciones del modelo *APT*.

De acuerdo con los resultados de la Regresión 1, los estimativos de los coeficientes de riesgo para *ECOPETROL* son $\beta_c = 3.41$ y $\beta_y = -2.82$. Adicionalmente, según la Regresión 2, el precio de mercado del riesgo por variaciones en el consumo es $\delta_c = 0.0255$; y el correspondiente al riesgo por variaciones en el *PIB* es $\delta_y = 0.0263$.

Resultados de estimar los "Premium" de mercado para los factores de riesgo de la ecuación (37), por mínimos cuadrados ordinarios.

Valores estimados de los coeficientes y estadístico <i>t</i>				
Regresión 8:	$\delta_0 = 0.97$	$\delta_c = 0.017$	$\delta_y = 0.016$	$\delta_M = 0.070$
$R^2 = 0.656$	$t = 55.3$	$t = 2.516$	$t = 1.198$	$t = 8.081$
$R^2\text{-}Aj = 0.655$				
$D.W. = 1.884$				
No. Obs.: 1100				
$F(4,1096) = 697.33$				
Regresión 9:	$\delta_0 = 0.97$	$\delta_c = 0.012$		$\delta_M = 0.074$
$R^2 = 0.656$	$t = 55.69$	$t = 2.346$		$t = 9.014$
$R^2\text{-}Aj = 0.655$				
$D.W. = 1.882$				
No. Obs.: 1100				
$F(3,1097) = 1044.86$				

Incorporando los resultados anteriores a la ecuación (29), especificada en valor esperado para *ECOPETROL*, y sustituyendo el valor medio de Δc y de ΔY por el "precio de mercado" de estas dos fuentes de riesgo, se obtiene:

$$(38) \quad E[r_i] - \bar{r}_f = \hat{\delta}_c \hat{\beta}_{c,i} + \hat{\delta}_Y \hat{\beta}_{y,i} = (0.0255)(3.419) + (0.0263)(-2.82)$$

donde r_f es un estimativo de la tasa (real) libre de riesgo. Por lo tanto, según la expresión (38), el valor promedio estimado de la tasa de descuento real

trimestral para las inversiones en una empresa como *ECOPETROL*, en ese período es del 1.30% (5.31% anual), más el valor de la tasa real libre de riesgo.

IV. CONCLUSIONES

En el primer capítulo de este trabajo se presentaron formulaciones alternativas para la estimación de los coeficientes de riesgo de los activos de capital, y se discutieron los supuestos que se encuentran en la base de cada formulación. De los modelos discutidos, se encontró que, conceptualmente, el modelo β -Consumo con Restricciones de Liquidez es el que incorpora algunas características que han probado ser determinantes en la explicación de aspectos relativos al consumo y al ahorro en países desarrollados y que, se supone, tienen un efecto aún mayor en economías como la colombiana, donde el mercado de crédito al consumo ha tenido, históricamente, un menor grado de desarrollo relativo.

Adicionalmente, en ese capítulo se mostró que el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez puede interpretarse, bajo la óptica del modelo *APT*, como un modelo donde existen dos fuentes de riesgo y que, por lo tanto, podría utilizarse para la estimación de los "precios de mercado" de esas dos fuentes de riesgo.

La validez de dicho modelo, así como de las especificaciones más tradicionales, β -Consumo sin Restricciones de Liquidez y β -CAPM, se verificaron en el capítulo II, para una muestra de empresas. Con ese fin, se utilizaron indicadores de rentabilidad patrimonial y de rentabilidad accionaria.

A través de la estimación de los modelos se encontró que tanto el modelo β -Consumo con Restricciones de Liquidez, como el modelo β -CAPM, evaluados en forma independiente, presentan un buen ajuste para una submuestra de empresas. Sin embargo, cuando se evaluaron comparativamente, el más apropiado para la actividad global de *ECOPETROL* resultó ser el β -Consumo con Restricciones de Liquidez, mientras que para las demás empresas, el modelo más apropiado resultó ser el β -Consumo - CAPM, sin restricciones de liquidez.

Adicionalmente, el modelo β -CAPM tradicional sobreestima la tasa libre de riesgo.

Estos resultados plantean dos tipos de interrogantes. De una parte, cuestionan la relevancia del modelo β -CAPM para la valoración de activos de riesgo para las

empresas de la muestra. De otra parte, en el caso de empresas como *ECOPETROL*, llaman la atención sobre la necesidad de utilizar estimativos de los "precios de mercado" de todos los riesgos que afectan la actividad global de *ECOPETROL*.

Finalmente, no sobra enfatizar que los resultados obtenidos dependen directamente de la muestra de empresas utilizadas en las estimaciones. En particular, no parece casual que el modelo β -Consumo con restricciones de liquidez halla resultado apropiado para una empresa como *ECOPETROL*, cuyo desempeño tiene una alta incidencia en el comportamiento de las variables macroeconómicas del país. Seguramente, la inclusión de un mayor número de este tipo de empresas en la muestra afectaría los resultados de las verificaciones globales de los modelos. Infortunadamente, no fue posible estimar la contribución al *PIB* del conjunto de empresas que conformaban la muestra utilizada en este estudio, ni tampoco obtener información sobre otras empresas que pueden tener una alta incidencia en el desempeño de distintos sectores de la economía.

Por ello, no sería correcto sacar inferencias, a partir de estos resultados, sobre la validez de modelos de consumo, con o sin restricciones de liquidez, para la economía colombiana; si bien el marco de análisis aquí desarrollado puede resultar apropiado para esos fines, siempre y cuando se extienda la muestra hasta incluir las empresas que generan la mayor parte del *PIB*.

Sin embargo, las consideraciones anteriores no constituyen un impedimento conceptual para realizar el ejercicio opuesto. Es decir, aplicar los modelos de consumo y de valoración de activos de riesgo a la valoración de empresas específicas, en la forma como se ilustró en este trabajo.

REFERENCIAS

- Black, Fisher (1972), "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business*, 45, p. 444-455.
- Campbell, John Y. (1993a) "Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data", *American Economic Review* 83, 487-512.
- Campbell, John Y. (1993b) "Understanding Risk and Return", *NBER*, Working paper No. 4554.
- Campbell, John Y. and N. Gregory Mankiw, "The Response of Consumption to Income: A Cross-Country Investigation", *European Economic Review*, 35 (1991), p. 723-767, North Holland.
- Breeden, Douglas (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics* 7, p. 265-296.
- Cubillos, Rafael y Valderrama, Fanny M., "Estimación del PIB Trimestral según los Componentes del Gasto", *Archivos de Macroeconomía*, D.N.P., Doc.13 (1993).
- Deaton, Angus, "Savings in Developing Countries: Theory and Review", *The World Bank*, 1990.
- Deaton, Angus, "Savings and Liquidity Constraints", *Econometrica*, Vol. 59, No. 5 (September 1991), p. 1221-1248.
- Elton, J., Gruber, M., Mei, J. "Cost of Capital Using Arbitrage Pricing Theory", *Financial Markets, Institutions and Instruments*, Vol. 3 (1994).
- Fama, Eugene, "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38 (January, 1965), p. 34-105 (a).
- Fama, Eugene, "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", *Management Sciences* 11 (January 1965), p. 404-419. (b)
- Fama, Eugene F. and James D. MacBeth, "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy* 81 (1973), p. 607-636.
- Fama, Eugene (1991), "Efficient Capital Markets: II", *The Journal of Finance*, Vol. xivi, No. 5, 1992.
- Grossman, Sanford and Shiller, Robert (1981), "The Determinants of the Variability of Stock Market Prices", *American Economic Review* 70, p. 222-227.
- Hardouvelis, G, Kim, D., Wizman T. (1996), "Asset Pricing Models with and without Consumption Data", *Journal of Empirical Finance*, Sept. 1996, p. 267-301.
- Hausman, J. A. (1978) "Specification Tests in Econometrics", *Econometrica*, 46: 1251-1271.
- Lintner, John (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics* 47, p. 13-37.
- Lucas, Robert E. (1978), "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica* 46, p. 1429-1445.
- Mankiw, N. Gregory and Matthew D. Shapiro, "Risk and Return: Consumption Beta Versus Market Beta", *The Review of Economics and Statistics*, August, 1986 No. 3.

- Ross, Steven A., "Return, Risk and Arbitrage", en *Risk and Return in Finance* (1978), Friend & Bicksler, Cambridge, M. A. Ballinger.
- Rubinstein, Mark (1976), "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options" *Bell Journal of Economics and Management Science* 7, p. 407-425.
- Sharpe, W. F., "Capital Asset Prices: "A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance* 19 (1964), p. 425-442.
- Svenson, Lars E. O. and Ingrid M. Werner, "Nontraded Assets in Incomplete Markets: Pricing and Portfolio Choice", *European Economic Review*, Vol. 37 (1993) p. 1083-1100.

APENDICE A1

El propósito de este apéndice es mostrar la derivación de la ecuación (21), a partir de las ecuaciones (20), (13) y (16).

Siguiendo a Campbell y Mankiw (1991), el consumo total en la economía en un período determinado corresponde a la suma del consumo realizado por los agentes sujetos a restricciones de liquidez y por el realizado por los agentes no sujetos a este tipo de restricciones. Ello se expresa en la ecuación (20) del texto.

Por definición, el primer grupo de agentes consume todo el ingreso corriente que recibe, pues de lo contrario no estaría sujeto a restricciones de liquidez, como se expresa en la ecuación (16). Una proporción λ del ingreso total de la economía, Y , es recibido por este grupo de agentes y, por lo tanto, su consumo es $C_\lambda = Y_\lambda = \lambda Y$. La otra parte del ingreso de la economía, $(1-\lambda)$, es recibido por los agentes que consumen su ingreso permanente, $YP: C_{1-\lambda} = YP$. Por lo tanto, si denotamos el consumo total de la economía por C_T es claro que:

$$(A1.1) \quad \begin{aligned} \frac{C_{T,t+1}}{C_{T,t}} &= p_\lambda \frac{C_{\lambda,t+1}}{C_{\lambda,t}} + p_{1-\lambda} \frac{C_{1-\lambda,t+1}}{C_{1-\lambda,t}} \\ &= p_\lambda \frac{Y_{t+1}}{Y_t} + p_{1-\lambda} \frac{C_{1-\lambda,t+1}}{C_{1-\lambda,t}} \end{aligned}$$

donde, p_λ denota la participación en el período t del consumo de los agentes sujetos a restricciones de liquidez en el consumo total de la economía y $p_{1-\lambda}$ corresponde a la participación del consumo de los agentes que no enfrentan restricciones de liquidez.

De otra parte, para una variable $Z = aX + bW$, la función $\log(Z)$ puede aproximarse alrededor del punto (X_0, W_0) , por medio de una expansión de Taylor de primer orden, tal como:

$$\begin{aligned}
 \log(Z) &\cong \log(aX_0 + bW_0) + \frac{a}{aX_0 + bW_0}(X - X_0) + \frac{b}{aX_0 + bW_0}(W - W_0) \\
 (A1.2) \quad &= \log(aX_0 + bW_0) - 1 + \frac{aX_0}{aX_0 + bW_0} \cdot \frac{X}{X_0} + \frac{bW_0}{aX_0 + bW_0} \cdot \frac{W}{W_0}
 \end{aligned}$$

y también, para una variable S , la aproximación de Taylor de primer orden para la función $\log(S)$, alrededor del punto S_0 es igual a:

$$(A1.3) \quad \log(S) \cong \log(S_0) - 1 + \frac{S}{S_0}$$

entonces, sustituyendo (A1.3) en (A1.2) se obtiene la doble aproximación:

$$\begin{aligned}
 \log(Z) &\cong \log(aX_0 + bW_0) - \frac{aX_0}{aX_0 + bW_0} \log(X_0) - \frac{bW_0}{aX_0 + bW_0} \log(W_0) \\
 (A1.4) \quad &+ \frac{aX_0}{aX_0 + bW_0} \log(X) + \frac{bW_0}{aX_0 + bW_0} \log(W) \\
 &= C_0 + C_1 \log(X) + (1 - C_1) \log(W)
 \end{aligned}$$

donde C_0 y C_1 son constantes. Por lo tanto, aplicando logaritmos a ambos lados de (A1.1) y aproximando la función resultante en la forma de (A1.4) se obtiene una expresión de la forma:

$$(A1.5) \quad \Delta c_{T,t+1} = d_0 + d_1 (\Delta y_{\lambda,t+1}) + (1 - d_1) (\Delta c_{1-\lambda,t+1})$$

donde $0 < d_1 < 1$; $c_{T,t+1} = \log(C_{T,t+1})$; $c_{1-\lambda,t+1} = \log(C_{1-\lambda,t+1})$ y d_0 es una constante cuyo valor depende del punto alrededor del cual se realiza la aproximación lineal.

El punto alrededor del cual se realiza la expansión de Taylor para el logaritmo de la ecuación (A1.1) puede escogerse de tal manera que d_1 sea igual a λ , caso en el cual y después de tomar el valor esperado de (A1.5), condicional a la información

disponible en t se obtiene una expresión similar a la formulada por Campbell y Mankiw (1991) para explicar el comportamiento del consumo total de la economía²⁰:

$$(A1.6) \quad E_t [\Delta c_{T,t+1}] = d^* + \lambda E_t [\Delta y_{\lambda,t+1}] + (1-\lambda) E_t [\Delta c_{1-\lambda,t+1}]$$

donde d^* es diferente de d_0 , por ser diferente el punto alrededor del cual se hace la aproximación lineal en (A1.6) y en (A1.5). A partir de (13) se obtiene²¹:

$$(A1.7) \quad E_t [\Delta c_{1-\lambda,t+1}] = \frac{1}{\alpha} \left[\bar{\mu}_i^* - E_t (r_{i,t+1}) \right]$$

sustituyendo (A1.7) en (A1.6) y resolviendo para $E_t (r_{i,t+1})$ se obtiene la ecuación (21) del texto.

²⁰ Como ya se mencionó, estos autores consideran un caso particular en donde "la tasa de retorno" es fija.

²¹ En la ecuación (13) y a diferencia de Campbell y Mankiw (1991), la tasa de retorno no es fija.

APENDICE A2

Definición de las variables utilizadas en las estimaciones

- DLCON:*** Corresponde a la diferencia de los logaritmos naturales de la variable Consumo Trimestral de los Hogares, calculada por el *DNP*, según la metodología propuesta por Cubillos y Valderrama(1993).
- DLPIB:*** Corresponde a la diferencia de los logaritmos naturales de la variable *PIB* Trimestral expresado en términos de bienes de consumo diferentes a vivienda. Esta última variable se calculó a partir de la serie de *PIB* trimestral real estimada por el *DNP*, según la metodología propuesta por Cubillos y Valderrama (1993). Para ello, se multiplicó esta última serie por el IPC total (base 1975 = 100) y se deflactó por el *IPC*-sin vivienda.
- LiRPRjj:*** Es el logaritmo de *i* más la tasa de retorno real trimestral patrimonial del activo *jj*. El valor de *i* se escoge en forma tal que el logaritmo de ese argumento esté definido. Para calcular la tasa de retorno real a partir de la nominal, se utilizó la tasa de inflación trimestral del *IPC*-sin vivienda.
- RPNjj:*** Es la tasa de retorno trimestral nominal del activo *jj*.

Variables macroeconómicas utilizadas en las regresiones

	Consumo trimestral	PIB trimestral	Rentabilidad patrimonial real de ECOPETROL 1/	Rentabilidad patrimonial media de la muestra 1/	Rentabilidad accionaria real media de la muestra 1/
1984.1	103,978	136,119	-0.02022	0.02374	-0.04380
1984.2	98,911	137,946	-0.04791	0.09033	-0.07344
1984.3	104,141	142,952	-0.01058	-0.00412	-0.02499
1984.4	108,099	148,970	-0.04822	0.04979	-0.05704
1985.1	105,645	136,499	-0.13330	0.02002	0.07449
1985.2	102,943	143,330	-0.38221	0.02847	-0.00584
1985.3	102,243	144,616	-0.24676	0.13646	0.06578
1985.4	112,085	155,035	-0.25168	0.11982	0.08660
1986.1	102,106	142,432	-1.06789	-0.01012	0.29731
1986.2	104,026	152,430	0.07581	0.04147	0.30880
1986.3	112,798	152,016	0.20865	0.08925	0.17459
1986.4	117,669	157,581	-0.50960	0.00959	0.28962
1987.1	108,621	148,978	0.11530	-0.02985	0.25215
1987.2	113,103	157,233	-0.06660	-0.00982	-0.03150
1987.3	111,577	156,772	0.19155	0.00215	0.25853
1987.4	119,778	167,740	-0.95885	0.05500	0.13128
1988.1	118,772	157,030	0.03622	0.05386	0.02671
1988.2	113,959	165,650	-0.32599	0.02656	-0.01598
1988.3	115,590	163,261	-0.05119	0.05877	0.01624
1988.4	121,697	171,039	-0.28766	0.08587	0.03876
1989.1	115,687	152,358	-0.01994	0.06918	0.07479
1989.2	123,026	170,649	-0.03183	0.07251	0.07696
1989.3	121,560	170,171	0.00162	0.08311	0.04161
1989.4	124,930	181,182	0.33068	0.09692	0.10900
1990.1	123,779	164,151	0.34255	0.07456	0.08067
1990.2	124,159	176,988	-0.56502	0.07208	-0.03456
1990.3	124,540	173,554	0.17794	0.09515	0.07064
1990.4	127,361	183,561	-0.06088	0.03126	-0.00431
1991.1	126,497	163,000	0.40644	0.08029	0.06673
1991.2	126,994	182,493	-0.28960	0.06631	0.02440
1991.3	124,586	175,824	0.13224	0.09973	0.06138
1991.4	129,617	191,889	0.05797	0.09607	0.94006
1992.1	127,941	174,572	0.44659	0.11691	0.37845
1992.2	130,456	182,374	-0.12296	0.09414	-0.02820
1992.3	129,337	183,413	-0.16921	0.11622	0.28846
1992.4	135,366	193,605	0.17577	0.11982	-0.01066
1993.1	131,462	182,028	0.41156	0.16063	0.81009
1993.2	134,624	199,141	-0.02508	0.03152	0.90766
1993.3	133,358	202,125	-0.26849	0.09112	1.02466
1993.4	155,565	206,622	0.21774	0.06769	0.91482
1994.1	150,674	203,049	0.41920	0.21887	0.16575
1994.2	146,316	200,499	-0.16403	0.11349	-0.00315
1994.3	144,324	218,008	0.04397	0.13189	-0.09538
1994.4	149,792	224,621	0.05256	0.06061	-0.11483
1995.1	150,889	222,293	0.43302	-0.03787	0.11776
1995.2	156,663	213,065	-0.00006	-0.00165	-0.19161
1995.3	160,575	226,796	-0.07563	-0.08231	0.00724
1995.4	158,434	238,005	-0.04638	0.11237	-0.12369
1996.1	173,705	232,179	0.43606	0.01195	0.00620
1996.2	175,081		0.03040	-0.04819	-0.01815

1/ Calculado como el logaritmo de 1 más la rentabilidad patrimonial real.

APENDICE A3

Pruebas de estacionariedad de las variables utilizadas en las Regresiones

(Dickey-Fuller aumentado)

Variable: $RR_{ECOPETROL}$ (patrimonial-real)

Modelo: $D(X): C TEND X(-1)$

Estadístico Dickey - Fuller: -8.7692

Valores críticos de MacKinnon:

1% -4.1584

5% -3.5045

10% -3.1816

Variable: Δy_{t+1}

Modelo: $D(X): C TEND X(-1) D(X(-1)) D(X(2))$

Estadístico Dickey-Fuller: -14.4288

Valores críticos de MacKinnon:

1% -4.1728

5% -3.5112

10% -3.1854

Variable: Δc_{t+1}

Modelo: $D(X): CX(-1) D(X(-1)) D(X(-2))$

Estadístico Dickey-Fuller: -7.3823

Valores críticos de MacKinnon:

1% -3.5778

5% -2.9256

10% -2.6005

APENDICE A4

Resultados de re-estimar las Regresiones 3, 6 y 7 utilizando como variable explicativa la rentabilidad de las acciones

(nominal o real, según el caso)

Valores estimados de los coeficientes y estadístico t				
Regresión 3b:	$\beta_0 = 0.040$			$\beta_M = 0.158$
$R^2 = 0.0225$	$t = 0.735$			$t = 1.052$
$R^2_{-Aj} = 0.00218$				
$D.W. = 2.156$				
Muestra: 1984.1 - 1996.2				
$F(12,49) = 1.107$				
Regresión 6b:	$\beta_0 = 0.069$	$\beta_c = 4.905$	$\beta_y = -3.766$	$\beta_M = -0.924$
$R^2 = -0.3386$	$t = 0.267$	$t = 1.177$	$t = -1.419$	$t = -0.435$
$R^2_{-Aj} = -0.434$				
$D.W. = 1.772$				
Muestra: 1984.1 - 1991.1				
$F(3,43) = 1.265$				
Regresión 7b:		$\beta_c = 4.059$	$\beta_y = -3.201$	$\beta_M = -0.372$
$R^2 = 0.044$		$t = 1.792$	$t = -2.387$	$t = -0.875$
$R^2_{-Aj} = -0.0004$				
$D.W. = 1.967$				
Muestra: 1984.1 - 1996.1				
$F(3,43) = 2.670$				

Pruebas de estacionariedad

(Dickey-Fuller aumentado)

Variable: $R_{MERCADO}$ (accionaria-nominal)	
Modelo: $D(X): CX(-1)$	
Estadístico Dickey-Fuller: -3.5695	
Valores críticos de MacKinnon:	
1%	-3.5713
5%	-2.9228
10%	-2.5990