



ENSAYOS

sobre política económica

Sobre los efectos de la política monetaria en Colombia

Luis F. Melo
Álvaro Riascos

Revista ESPE, No. 45 Junio 2004
Páginas 172-221



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando nadie obtenga lucro por este concepto y además cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además colocar en su propio website una versión electrónica del documento, siempre y cuando ésta incluya la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción del documento para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa del Editor de ESPE.

On the Effects of Monetary Policy in Colombia

Luis F. Melo*
Álvaro Riascos**

For helpful comments and suggestions we thank Luis Eduardo Arango, José Fernando Escobar, Franz Hamann, Héctor Núñez, Martha Misas, Mario Ramos, seminar participants at Banco de la República, CEDE (Universidad de los Andes) and two anonymous referees.

* Central Bank of Colombia. E-mail: lmelovel@banrep.gov.co

** Central Bank of Colombia. E-mail: ariasovi@banrep.gov.co

Document received March 8th 2004; final version accepted May 19th 2004.

Abstract

This paper studies some channels, amplification mechanisms and the quantitative effects of monetary policy in Colombia. In addition, we suggest a complete methodology, theoretically consistent with the theory of General Equilibrium and parsimonious enough to allow for policy analysis and the forecasting of relevant economic variables.

JEL Classification: E52, C32, C52.

Keywords: *Monetary Policy, Liquidity Effect, Labor Search.*

Sobre los efectos de la política monetaria en Colombia

Luis F. Melo *
Álvaro Riascos **



En este documento estudiamos algunos canales, mecanismos de amplificación y los efectos cuantitativos de la política monetaria en Colombia. Adicionalmente, sugerimos una metodología completa, teóricamente consistente con la teoría del equilibrio general y práctica para el análisis de política y pronósticos de variables económicas de interés.

Clasificación JEL: E52, C32, C52.

Palabras clave: política monetaria, efecto liquidez, búsqueda de trabajo.

El contenido de este ensayo no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

Agradecemos los comentarios de Luis Eduardo Arango, José Fernando Escobar, Franz Hamann, Héctor Núñez, Martha Misas, Mario Ramos, los participantes al Seminario de Economía del Banco de la República, el CEDE de la Universidad de los Andes y dos evaluadores anónimos.

* Banco de la República. Correo electrónico: lmelovel@banrep.gov.co

** Banco de la República. Correo electrónico: ariasovi@banrep.gov.co

Documento recibido el 8 de marzo de 2004; versión aceptada el 19 de mayo de 2004.

I. INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo está motivado fundamentalmente por dos razones. De una parte, la importancia de entender los mecanismos y efectos cuantitativos de la política monetaria en Colombia, y de otra, sugerir una metodología teóricamente consistente con la teoría del equilibrio general dinámico y lo suficientemente práctica para poder hacer análisis de política y pronósticos de variables económicas relevantes.

En este artículo nos concentramos en la parte de análisis de política y en la validación empírica de un modelo de equilibrio general. Los aspectos más relevantes del modelo se relacionan con los canales de transmisión, el canal de crédito, y un mecanismo de transmisión y amplificación que resulta de la presencia de externalidades en el mercado laboral. Adicionalmente, el modelo está sujeto a choques en la política monetaria (i. e. a la regla de tasa de interés) y a la productividad total de los factores. El modelo lo calibramos para reproducir algunas propiedades de la economía colombiana y posteriormente, proponemos una metodología para la validación empírica del mismo. Esto es, comparamos ciertas estadísticas (i. e. los multiplicadores dinámicos) de los datos artificiales (i. e. simulados) con las correspondientes estadísticas de los datos reales (i. e. históricos), a la luz de un mismo modelo estadístico para analizar ambos conjuntos de datos: los artificiales y los reales. En nuestro caso, utilizamos un VECX parcialmente motivado por un modelo económico consistente con la teoría del equilibrio general dinámico.

A nivel cuantitativo, encontramos evidencia de los efectos expansivos de la política monetaria cuando la describimos mediante una regla de reacción para la tasa de interés de la economía. En el corto plazo, una reducción en la tasa de interés nominal de la economía inducida por la autoridad monetaria que participa creíble y activamente en el mercado monetario, estimula la economía por uno o dos trimestres. Los efectos son estadísticamente significativos en términos del producto y el empleo. En el caso de la inflación, un aumento en la tasa de interés reduce la inflación por varios trimestres. Los choques en la productividad total de los factores tienen, en su mayoría, el comportamiento esperado.

En términos de la metodología propuesta para la validación del modelo, los datos generados (series de tiempo) por el modelo teórico y los datos correspondientes en el mundo real son indistinguibles en el siguiente sentido. Como el verdadero proceso generador de los datos reales no lo conocemos, utilizamos un modelo estadístico adecuado para estudiarlo. Escogimos este modelo como una versión general del

verdadero proceso generador que es solución del modelo teórico (i.e. un VECX). Este modelo estadístico lo estimamos con los datos reales y calculamos, con sus respectivos intervalos de confianza, las respuestas de las variables endógenas a los choques de política monetaria y de productividad. Aplicamos el mismo procedimiento a los datos artificiales y verificamos si la respuesta ante estos mismos choques, pasa por los intervalos de confianza calculados con los datos reales. En este sentido es posible evaluar si existen semejanzas entre las respuestas dinámicas ante choques exógenos que encontramos en los datos reales y en los artificiales. Aunque nos concentramos en estadísticas muy particulares, éstas son muy relevantes desde el punto de vista de la política económica.

La mayoría de los trabajos en la literatura colombiana relacionada con este tema, han sido principalmente de carácter econométrico. Restrepo (1996) utiliza diferentes técnicas estadísticas (principalmente vectores autorregresivos) para estudiar el efecto liquidez en Colombia. El autor encuentra evidencia del efecto liquidez, el cual es robusto a varias especificaciones. Sin embargo, ante un incremento transitorio en las tasas de interés, encuentra que el producto y la inflación aumentan ligeramente en el corto plazo. Nosotros obtenemos lo contrario. En la misma línea se hallan trabajos como el de Maya (2001) y Fernández (2003). En este último se impone una estructura económica en los modelos estadísticos utilizados, principalmente, órdenes de carácter exógeno en las variables o restricciones de largo plazo.

Probablemente los trabajos en Colombia más relacionados con nuestro tema son Echeverry (1993) y el modelo de mecanismos de transmisión (MMT) del Banco de la República (2003). Echeverry estima una forma reducida de un modelo económico, sin embargo, nunca compara su modelo estadístico con el verdadero proceso generador de datos. El autor encuentra evidencia del papel del canal de crédito en la transmisión de la política monetaria, en particular, del efecto liquidez. Además, identifica M1 como el instrumento de política (para el período de 1975 a 1991) y la tasa de interés como la meta intermedia de la política monetaria y fuente de información de los agentes económicos. En el caso del MMT, se propone una forma reducida de un modelo económico estructural con algunas restricciones motivadas por la teoría económica (como, por ejemplo, la política monetaria en el largo plazo debe ser neutral). Adicionalmente, el MMT tiene la ventaja de ser lo suficientemente simple y estadísticamente adecuado para hacer análisis de política y pronósticos. Sin embargo, el modelo se estima ecuación por ecuación, y nunca se compara el modelo estadístico con el verdadero proceso generador de los datos del

modelo teórico del cual se deriva. Por lo tanto, al no validar el modelo estadístico, por lo menos con los datos simulados, se pierde la historia económica de éste. Creemos que el método de validación que sugerimos, promete ser útil para rescatar la historia económica detrás del modelo económico utilizado. En este artículo proponemos estimar de manera simultánea la forma reducida y utilizar el modelo económico para validar el modelo estadístico. Nuestra metodología es igualmente sencilla y adecuada estadísticamente para realizar análisis de política y pronósticos.

Para la regla de política que asumimos en nuestro trabajo, y que utiliza la autoridad monetaria, se puede consultar a Bernal (2002). En él se estima formalmente una función de reacción para la autoridad monetaria similar a la nuestra (véase también Burlano (2003)).

Este trabajo consta de seis partes y cuatro anexos. En la segunda explicamos brevemente el modelo teórico, su motivación y sus principales características. En la tercera describimos el método utilizado para resolverlo. Más concretamente, explicamos la forma simbólica de la solución del modelo. En la cuarta empleamos el verdadero proceso generador de los datos para estudiar algunas de sus propiedades ante choques exógenos. En la quinta proponemos un modelo estadístico y un método de validación entre los modelos estadístico y económico. En la sexta y última, resumimos nuestra principal contribución en la literatura colombiana y proponemos una agenda de investigación.

II. UN MODELO CON DINERO Y FRICCIONES EN EL MERCADO LABORAL Y FINANCIERO¹

El núcleo de nuestro modelo es el modelo estándar de ciclos económicos reales (RBC, por sus siglas en inglés) con dinero, en el cual los agentes y firmas enfrentan restricciones de liquidez para la compra de bienes de consumo en el caso de los primeros, y para financiar la inversión y pagar la nómina de los empleados en el caso de los últimos. La principal modificación que le hacemos a este modelo básico

¹ Para una descripción más detallada del modelo, el lector puede consultar Riascos (2002a), (<http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra221.pdf>) y Riascos (2002b), (<http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra222.pdf>).

es la introducción de dos fricciones: una en la intermediación de los fondos prestables a través del sistema financiero y otra en el mercado laboral, del mismo tipo que en la literatura de búsqueda (por ejemplo, Pissarides (1990)).

La primera fricción procura racionalizar el efecto de la liquidez y la no neutralidad de la política monetaria en el corto plazo². Es bien conocido que en los modelos de equilibrio general dinámico es necesario introducir alguna fricción con el fin de que la política monetaria tenga efectos reales no despreciables sobre la economía. La literatura ha resaltado el papel de las rigideces en los precios, asimetrías de información, participación limitada en el mercado de los agentes, etc. La nuestra es similar a Cooley *et al.* (1999). La intuición básica es muy simple. Las firmas demandan dinero para pagar los salarios y financiar la inversión. Todos los préstamos se intermedian a través del sistema financiero en donde los agentes depositan su dinero a cambio de una cierta rentabilidad nominal. La fricción introducida es un costo en términos de los recursos que los agentes enfrentan al modificar su portafolio de depósitos en el sistema financiero³. Usando operaciones de mercado abierto, el banco central puede inyectar dinero de manera inesperada en el mercado. Puesto que los agentes son penalizados por cambiar su portafolio de depósitos en los intermediarios financieros, el exceso de liquidez tenderá a bajar la tasa de interés nominal de la economía. Una caída en la tasa de interés baja el costo de los préstamos para las firmas, por lo cual se estimula la inversión, la demanda de trabajo y por lo tanto, el producto de la economía.

La segunda fricción es motivada por la idea de que la actividad en el mercado laboral es una actividad económica no coordinada que consume tiempo (es decir, para las firmas tanto el trabajo como el capital requieren tiempo para llegar a ser productivos, y encontrar un trabajo requiere un tiempo de búsqueda para los agentes) y recursos (las firmas gastan recursos anunciando vacantes para que se suplan). Por lo tanto, dejamos de un lado el mecanismo tradicional de precios para la asignación de recursos y adoptamos una perspectiva más acorde con la literatura de búsqueda en el mercado laboral. Esta fricción racionaliza varios hechos estilizados

² Este tipo de fricción es motivado por la literatura de participación limitada y está relacionada con la fricción utilizada por Christiano *et al.* (1999).

³ Por ejemplo, la redención de certificados de depósitos antes de su fecha de maduración es típicamente penalizada con el pago de una tasa de interés más baja que la convenida en el momento en que se compró.

⁴ Blanchard *et al.* (1989).

del mercado laboral en los Estados Unidos (i.e. la curva de Beveridge⁴). En nuestro contexto es también útil para reproducir la correlación positiva a lo largo del ciclo entre las principales variables del mercado laboral (número de trabajadores, horas por trabajador y horas totales de trabajo) y la inflación (la curva de Phillips en el corto plazo). Además, este tipo de fricción amplifica considerablemente los choques monetarios en nuestro modelo (Riascos (2002a)).

Nuestra economía es cerrada y con cinco mercados, el laboral, el de bienes, el de capital, un mercado monetario, y uno de fondos prestables. Suponemos que existe un agente representativo, una firma representativa, una autoridad monetaria y fiscal consolidada que llamaremos el banco central, y un intermediario financiero. La economía está sujeta a dos choques: uno a la productividad total de los factores y el otro a la política monetaria. Concretamente, la política monetaria se hace utilizando una regla para fijar la tasa de interés nominal de la economía. Esta depende de la tasa de interés rezagada, de las expectativas de inflación y de “brecha” del producto. Vale la pena destacar que desde este punto de vista estructural sobre el funcionamiento de la economía, la definición de la “brecha” del producto es sugerida por el mismo modelo: es aquel nivel de producto que observaríamos en ausencia de fricciones en los mercados y choques externos a la economía. Finalmente, el nuestro es un modelo de expectativas racionales.

A. EL MERCADO LABORAL

En la literatura sobre ciclos económicos es bien conocido que la forma tradicional de modelar el mercado laboral, como un mercado de competencia perfecta, es bastante pobre para explicar algunos de los hechos estilizados de este mercado. Concretamente, el modelo estándar de ciclos económicos reales con trabajo indivisible (Hansen (1985)) no es capaz de reproducir la volatilidad relativa de las horas totales y el salario por trabajador, ni la correlación entre las horas por trabajador y la productividad laboral. Adicionalmente, en el modelo estándar el mercado laboral no es una fuente importante de propagación de choques como, por ejemplo, a la productividad total de los factores (Andolfatto (1996)) ni para los choques monetarios. Otro hecho estilizado difícil de racionalizar en el modelo estándar es la curva de Beveridge (Blanchard *et al.* (1989)). Finalmente, desde un punto de vista teórico no es muy difícil convencerse de que el mercado laboral es una actividad económica en sí misma, en la cual, los trabajadores al igual que las firmas, gastan tiempo y recursos buscando trabajo, existen asimetrías de información y probablemente la asignación

de los recursos está lejos de darse exclusivamente a través de un sistema de precios que los agentes que participan toman como dado. En este artículo proponemos una forma diferente de modelar el mercado laboral y que en la literatura especializada se conoce como modelos de búsqueda y encuentro. El punto central de éstos es que reconocen que en el mercado laboral puede haber muchas imperfecciones y por lo tanto, se recurre a un mecanismo diferente del walrasiano para asignar los recursos. Las aplicaciones de tal tipo de modelos al caso colombiano son nulas y por lo tanto, este artículo puede ser visto como un primer esfuerzo por evaluar la capacidad explicativa que tienen esos modelos para explicar las características más importantes del mercado laboral colombiano o, más específicamente, la relación entre la política monetaria y el mercado laboral.

El mercado laboral consta de dos sectores: uno dedicado exclusivamente a la búsqueda de trabajo y otro dedicado exclusivamente a la producción de bienes. Esto significa que sólo los trabajadores desempleados buscan un trabajo y no producen, nada y que aquellos que se encuentran empleados no están buscando trabajo. Al comienzo de cada período, las vacantes ofrecidas por las firmas y los trabajadores que buscan empleo se encuentran con una probabilidad implícitamente definida por la siguiente función de encuentro entre firmas (i. e. vacantes) y empleados⁵:

$$X_t = F^m(V_t, eU_t) = A_t^m V_t^{\theta^m} (eU_t)^{1-\theta^m}$$

donde X_t indica el número de encuentros entre trabajadores y vacantes (es decir, el número de trabajadores que se mueve de desempleados a empleados), V_t es el número de vacantes, U_t es la tasa de desempleo y e es la intensidad de búsqueda agregada de los trabajadores desempleados de la economía (por simplicidad tomamos e como exógeno). Esta especificación Cobb-Douglas es consistente con los estudios empíricos de Blanchard *et al.* (1989). Además, es consistente con una economía que se encuentra en crecimiento balanceado⁶. Tomamos el proceso de separación entre firmas y empleados como exógeno. Por simplicidad, asumimos que la tasa de separación s , que es exógena, es además constante⁷. Es decir, que

⁵ Nuestra especificación se basa en Andolfatto (1996) y Pissarides (1990).

⁶ Pissarides (1990).

⁷ Es posible hacer endógena s sin embargo, esto dificulta considerablemente la estructura del modelo. Nuestro objetivo ha sido explorar qué tan lejos podemos llegar, con el modelo más sencillo de búsqueda y encuentro en el mercado laboral, explica algunos aspectos relevantes del mercado laboral colombiano y su relación con la política monetaria.

si al comienzo del período t , n_t^j es la tasa de empleo en la firma j (como proporción del número de trabajadores totales de la economía), entonces sn_t^j será la fracción que perdió su trabajo durante el período j .

La tasa a la cual las firmas llenan sus vacantes es: $q(\theta_t) = \frac{X_t}{V_t} = F^m(1, \theta_t^{-1})$ donde $\theta_t = \frac{V_t}{eU_t}$, es llamada la saturación del mercado laboral. Nótese que $q'(\theta_t) < 0$ (cuanto más saturado es el mercado de trabajo, más difícil es llenar las vacantes para las firmas). La elasticidad con respecto a θ es $1 - \theta^m \in (0, 1)$.

La tasa a la cual los agentes (i. e. trabajadores) se mueven del desempleo al empleo por unidad de la intensidad de búsqueda es: $\theta_t q_t(\theta_t) = \frac{X_t}{eU_t}$. Por lo tanto, desde el punto de vista de las firmas, el empleo evoluciona de acuerdo con:

$$n_{t+1}^j = (1 - s)n_t^j + q(\theta_t)V_t^j$$

para cada firma j y donde n_t^j es la tasa de ocupación durante el período t .

La dependencia de la función de transición con respecto a la saturación del mercado de trabajo refleja las externalidades implícitas en el proceso de búsqueda en el mercado laboral.

Al comienzo de cada período se realizan todos los choques. Las firmas y los agentes entran en un proceso de negociación en el cual se especifican los términos del contrato de trabajo. Es decir, la cantidad de trabajo requerido h por trabajador, y el salario real w . Una vez que se especifique el contrato, las firmas y los hogares acuden al resto de los mercados (bienes, capital, monetario y fondos prestables).

B. INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

Los hogares no prestan directamente a las firmas. Al comienzo de cada período t , se revela completamente el estado de la economía y los hogares deciden cuánto dinero D_{t+1} , depositarán hasta el final del período en el intermediario financiero (nótese que esta variable determina un *stock* durante el período t y no entre períodos como el *stock* de capital o el dinero). Al mismo tiempo, la institución financiera

decide cuántos bonos B_{t+1} demanda hasta el final del período (igualmente, esta variable determina un *stock* durante el período t y no entre períodos). Los bonos se compran al banco central. Las firmas toman prestado efectivo para financiar el pago de salarios y la inversión. Formalmente, la oferta de fondos prestables en el período t es: $D_{t+1} - B_{t+1}$ y la demanda de las firmas es $w_t p_t h_t + p_t I_t$, donde w_t es el salario real, p_t es el nivel general de precios y h_t es la cantidad de trabajo ofrecido por el agente representativo. En último término, los agentes son también los propietarios de las instituciones financieras. Puesto que asumimos que hay competencia perfecta y libre entrada y salida, en equilibrio, los beneficios de los intermediarios financieros son cero⁸.

C. LAS FIRMAS

Asumimos que cada firma j requiere muchos trabajadores y ofrece cada período vacantes. Inmediatamente después que el proceso de negociación ha finalizado, las firmas toman sus decisiones de inversión I_t^j y anuncian las vacantes V_t^j . El conjunto de información para cada firma es: los choques exógenos, su capital individual k_t^j , y n_t^j (tasa de ocupación de la firma), y los correspondientes valores agregados para capital y tasa de ocupación.

Las firmas piden prestado a los intermediarios financieros para financiar la inversión y pagar los salarios al comienzo del período como es requerido por el contrato laboral. Al final del período, las firmas pagan dividendos. Cada hogar recibe la cantidad correspondiente por los dividendos totales per cápita. Debido a las restricciones de liquidez de los agentes, los dividendos pagados (al final del período) sólo pueden usarse para el consumo hasta el próximo período. Sea c_t^u el consumo del agente cuando está empleado, c_t^e el consumo cuando no está empleado, h_t el número de horas que trabaja cuando está empleado, y e el esfuerzo en tiempo que realiza cuando está desempleado, N_t la tasa de ocupación de la economía (i. e.

$N_t = \sum_{j=1}^J n_t^j$ donde J es el número de firmas) y U la función de utilidad instantánea del agente representativo. Por lo tanto, desde el punto de vista de los agentes, una

⁸ Asumimos que los costos de intermediación los recoge el sistema financiero pero los entrega en su totalidad al banco central, que se los devuelve a los agentes en forma de transferencias. De esta manera nos abstraemos del efecto riqueza que se podría tener sobre los agentes y nos concentramos en las distorsiones intertemporales de los costos.

unidad de dividendos en el período t se valora como $\beta \frac{U_1(c_{t+1}^n, h_{t+1})}{U_1(c_t^n, h_t)} \frac{p_t}{p_{t+1}}$ unidades de bienes de consumo en el tiempo t^9 . Puesto que las firmas son propiedad de los hogares, entonces es razonable asumir que el problema que resuelve cada período es:

$$\max E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \frac{U_1(c_{t+1}^n, h_{t+1})}{U_1(c_0^n, h_0)} \frac{p_t}{p_{t+1}} \pi_t$$

$$n_{t+1} = (1 - s)n_t + q_t(\theta_t)V_t$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + I_t$$

donde $\pi_t = A_t^{tec} k_t^\theta (h_t n_t)^{1-\theta} - (1 + i_t)(w_t n_t h_t + I_t) - V_t \kappa_t$ y κ_t es el costo unitario de ofrecer una vacante¹⁰.

D. EL AGENTE REPRESENTATIVO

Inmediatamente después de que el proceso de negociación ha finalizado, el agente representativo decide sobre su consumo c^n (consumo cuando está empleado), c^u (consumo cuando está desempleado) y las decisiones financieras (tenencias de efectivo M_t y depósitos D_t en los intermediarios financieros). Para evitar la heterogeneidad debido al estado de empleo de los agentes, asumimos también que hay un mercado de seguros de desempleo perfectamente competitivo¹¹. De esta forma los agentes

⁹ Más precisamente, $\frac{N_{t+1}U_1(c_{t+1}^n, h_{t+1}) + (1 - N_{t+1})U_1(c_{t+1}^u, e)}{N_t U_1(c_t^n, h_t) + (1 - N_t)U_1(c_t^u, e)} \frac{p_t}{p_{t+1}}$, pero como demostraremos más adelante, la existencia de un mercado perfecto de seguros de desempleo para los desempleados garantiza que en equilibrio $U_1(c_t^n, h_t) = U_1(c_t^u, e)$.

¹⁰ Para abstraernos del efecto riqueza inducido por el costo de anunciar vacantes (el costo en recursos de encontrar un trabajador), asumimos que éste no es un costo social. Esto es, que el banco central (Gobierno) lo recoge sin ningún costo y lo retorna a los agentes como transferencias. En cualquier caso, uno siempre puede interpretar este costo como parte de la inversión de las firmas.

¹¹ Es importante resaltar que, si bien el supuesto de un mercado perfecto de seguros de desempleo es una hipótesis muy fuerte, no hacerla incrementaría considerablemente la complejidad de la solución del problema de optimización de los agentes.

Sin embargo, se podría argumentar que a pesar de que un mercado perfecto de seguros es irrealista, la existencia de algún tipo implícito de seguro de desempleo no lo es tanto. Es claro que algunas personas desempleadas reciben algún tipo de soporte por parte de sus familiares, que les ayudan a mitigar las consecuencias económicas de estar desempleado.

en cada período también eligen B_{t+1} , la cantidad de seguros que ellos compran para el próximo período. Por otra parte, asumimos igualmente que este seguro de desempleo debe ser comprado con efectivo, de modo que juegue un papel solo en la medida en que haya incertidumbre en el estado de empleo de los trabajadores. Si este no fuera el caso, el contrato (bono) adicional sería adicionalmente demandado por los agentes, porque permitiría recibir recursos y cambiarlos por efectivo en el mismo período.

Cuando ha finalizado el proceso estipulado, los agentes todavía no conocen su estado de empleo, por lo tanto, evalúan sus decisiones basados en el valor esperado de ser empleados o desempleados. Una vez se firma el contrato, ellos creen no tener influencia en la probabilidad de ser empleados o desempleados. El siguiente es el problema del agente representativo:

$$\max E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (N_t U(c_t^n, h_t) + (1 - N_t) U(c_t^u, e)) \right]$$

$$M_{t+1} + p_t c_t^n + \bar{p}_t \bar{B}_{t+1} + p_t \tau_t = (M_t - D_{t+1}) + (1 + i_t) D_{t+1} + p_t w_t h_t - p_t \phi(D_t, D_{t+1}) + p_t d_t^f + p_t d_t^{int}$$

$$M_{t+1} + p_t c_t^u + \bar{p}_t \bar{B}_{t+1} + p_t \tau_t = (M_t - D_{t+1}) + (1 + i_t) D_{t+1} + \bar{B}_t - p_t \phi(D_t, D_{t+1}) + p_t d_t^f + p_t d_t^{int}$$

$$p_t (c_t^n + \phi(D_t, D_{t+1})) + \bar{p}_t \bar{B}_t \leq M_t - D_{t+1} + p_t w_t h_t$$

$$p_t (c_t^u + \phi(D_t, D_{t+1})) + \bar{p}_t \bar{B}_t \leq M_t - D_{t+1} + \bar{B}_t$$

Donde hemos utilizado que D_{t+1} es un *stock* de depósitos durante el período t y no entre períodos, ϕ es una función convexa de costos de ajuste del portafolio de depósitos y \bar{p}_t es el precio de un contrato de seguro que promete pagar \bar{B}_t en el evento de ser desempleados. Los beneficios esperados de la compañía de seguros son: $\bar{p}_t \bar{B}_t - (1 - N_t) \bar{B}_t$. La competencia perfecta en el mercado de seguros implica que en equilibrio, $\bar{p}_t = 1 - N_t$.

E. AUTORIDAD MONETARIA Y FISCAL CONSOLIDADA (EL BANCO CENTRAL)

Cada período t el banco central imprime dinero $M_{t+1} - M_t$, donde M_t es el *stock* de dinero, recoge impuestos, paga intereses sobre los bonos B_{t+1} a los intermediarios

financieros y recoge sin costo el de intermediación $\phi(D_t, D_{t+1})$ (es decir, el costo de cambiar el portafolio de los agentes). Este supuesto no es crucial para los resultados, pero enfatiza las distorsiones intertemporales de la fricción financiera más que el efecto riqueza de tal costo. Por lo tanto, la restricción presupuestal de la autoridad monetaria y fiscal consolidada es:

$$M_{t+1} - M_t + B_{t+1} + p_t \tau_t + p_t \phi(D_t, D_{t+1}) + V_t k_t = (1 + i_t) B_{t+1}$$

Donde hemos utilizado que B_{t+1} es un *stock* de bonos durante el período t y no entre períodos. Suponemos que la autoridad monetaria trata de controlar la tasa de interés de la economía. Formalmente, esta sigue una regla de política de la siguiente forma:

$$i_t^* = i^* + \alpha(E_t[\pi_{t+1}] - \pi) + \beta(\text{Log}(E_t[Y_{t+1}]) - \text{Log}(Y)),$$

donde i_t^* es la tasa de interés nominal objetivo del banco central, $\pi_t = \text{Log}\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$, π es la meta de inflación del banco central, $E_t[Y_{t+1}]$ es la expectativa del producto y Y es el nivel del producto en estado estacionario (i. e. el producto potencial lo definimos como aquel que observaríamos en ausencia de fricciones en los mercados y choques a la economía). El banco central reconoce que su tasa de interés objetivo (meta intermedia) puede ser ligeramente diferente a la tasa observada. Sin embargo, asumimos que la tasa observada se relaciona con la tasa objetivo del banco de la siguiente forma:

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho) i_t^* + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^r),$$

donde i_t es la tasa de interés nominal de la economía. Se sigue que:

$$i_t = i^* + \rho(i_{t-1} - i^*) + (1 - \rho)(\alpha(E_t[\pi_{t+1}] - \pi) + \beta(\text{Log}(E_t[Y_{t+1}]) - \text{Log}(Y))) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^r)$$

Cuando $\rho = 0$ tenemos la regla de Taylor, cuando $\rho \neq 0$ tenemos el tipo de regla de política considerada por Rotemberg *et al.* (1998).

F. EL PROCESO DE NEGOCIACIÓN: SALARIOS Y OFERTA DE TRABAJO

Los detalles sobre el proceso de negociación pueden encontrarse en Riascos (2002). Aquí solo retomamos las dos ecuaciones básicas que cierran nuestro

modelo. La parametrización escogida para la función de utilidad instantánea de los agentes, es:

$$U(c, h) = \text{Log}(c) + \frac{B_e(1 - h)^{1-\gamma}}{1 - \gamma}$$

cuando está empleado y donde B_e es una constante, $\frac{1}{\gamma}$ es la elasticidad intertemporal de sustitución del ocio, y:

$$U(c, e) = \text{Log}(c) + \frac{B_u(1 - e)^{1-\gamma}}{1 - \gamma}$$

cuando está desempleado y donde B_u es otra constante, entonces las ecuaciones que caracterizan los resultados del proceso de negociación entre firmas y empleados, son:

$$w_t h_t = \frac{\xi \left(\frac{\beta U_1(c_{t+1}^n, h_{t+1})}{U_1(c_t^n, h_t^n)} \frac{p_t}{p_{t+1}} \frac{\partial F^{tec}(k_t, n_t h_t)}{\partial n_t} + e\theta\kappa \right) + (1 - \xi) \frac{(\Gamma(e) - \Gamma(h_t))}{U_1(c_t^n, h_t^n)}}{\xi(1 + i_t) \frac{\beta U_1(c_{t+1}^n, h_{t+1})}{U_1(c_t^n, h_t^n)} \frac{p_t}{p_{t+1}} + (1 - \xi)}$$

y

$$\Gamma(h_t) = - \frac{U_1(c_t^n, h_t)}{1 + i_t} \frac{\partial^2 F^{tec}(k_t, h_t n_t)}{\partial h_t \partial n_t}$$

Estas dos ecuaciones determinan h y w .

Finalmente, podemos calcular el flujo de los dividendos que cada agente recibe en el período t . Puesto que hemos normalizado la población a la unidad y los agentes son propietarios de las firmas, los dividendos individuales son iguales a los beneficios ($d_t^f = \pi_t^f$). Por otra parte, la competencia perfecta en el sector financiero implica que los beneficios de los intermediarios financieros son cero ($d_t^{int} = 0$).

G. FORMAS FUNCIONALES Y CALIBRACIÓN

Utilizamos las siguientes formas funcionales. La función de encuentro asumimos que es Cobb-Douglas:

$$F^m(V_t, eU_t) = A^m V_t^{\theta^m} (eU_t)^{1-\theta^m} \Rightarrow q_t = A^m \left(\frac{eU_t}{V_t}\right)^{1-\theta^m}$$

La función de producción de cada firma es:

$$F^{tec}(k_t, h_t n_t) = A_t^{tec} k_t^\theta (h_t n_t)^{1-\theta}.$$

La función de utilidad instantánea es separable y contingente al estado de empleo del trabajador como en Andolfatto (1996). Cuando está empleado $U(c, h) = \text{Log}(c)$

+ $\frac{B_e(1-h)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, donde B_e es una constante que calibramos para que en el estado

estacionario, $h = \frac{1}{3}$. La elasticidad intertemporal de sustitución del trabajo $\frac{1}{\gamma}$ la

tomamos como $\frac{1}{2}$. Cuando el trabajador está desempleado, $U(c, e) = \text{Log}(c)$

+ $\frac{B_u(1-e)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, donde e es la intensidad con que el trabajador busca un empleo y

B_u es una constante que calibramos para ser consistentes con un valor predetermi-

nado del esfuerzo buscando empleo. Escogimos $e = \frac{h}{2}$. Intuitivamente B_u debería

de ser menor que B_e pues, estando empleado el trabajador valora más el ocio (en efecto, esto es lo que obtenemos en nuestra calibración)¹². Dada la falta de datos

para calibrar algunos parámetros del mercado laboral, hemos tomado varios de Andolfatto (1996). De particular interés es el parámetro ξ , la participación del trabajador en las rentas que resultan del encuentro exitoso de una firma con un trabajador. Valores mayores de ξ representan mayor poder de negociación de

¹² La forma funcional de las preferencias instantáneas de los agentes se escogieron con base en dos criterios. La separabilidad no parece esencial, pero no hacerlo hace el problema mucho más difícil de calibrar. Una vez hecho el supuesto de separabilidad, la forma logarítmica (aversión al riesgo unitario) es la única consistente con crecimiento balanceado (King et al.(1988). *Technical Appendix*).

los trabajadores. En una aplicación para el caso de los Estados Unidos, utilizamos 0,2 como un valor intermedio razonable (Riascos (2002a)). No vemos ninguna razón para pensar que este valor deba ser sustancialmente mayor o menor para un país como Colombia. La tasa de ocupación promedio en los últimos 20 años ha sido aproximadamente 0,42, luego calibramos n en este valor¹³. La tasa de separación s la fijamos en 0,15 como en Andolfatto. Los resultados no son muy sensibles a este parámetro. Por ejemplo, con excepción de la tasa de ocupación, la respuesta de las demás variables ante choques monetarios es prácticamente indistinguible. Sin embargo, haremos un análisis de sensibilidad de los resultados con relación a este parámetro. Por falta de datos para realizar la estimación del parámetro θ_m lo fijamos en 0,6 como en Blanchard *et al.* (1989).

Otro parámetro importante es la duración media del desempleo: $\frac{1}{q(\theta)\theta}$. Fijamos esta en 3, de tal manera que la duración media del desempleo sea 9 meses (Núñez *et al.* (1997)). Escogimos el costo agregado de anunciar vacantes $\frac{\kappa V}{Y}$, como 10% del producto. Si bien este parece alto, también lo podemos interpretar como parte de la inversión de las firmas¹⁴.

Escogimos β de tal manera que nuestro modelo fuera consistente con una tasa de interés real de largo plazo del 1,7% trimestral. La participación del ingreso por renta del capital en el ingreso total θ , la estimamos a partir de una función de producción Cobb-Douglas. El resultado fue $\theta = 0,38$. Utilizamos $\delta = 0,025$ como un valor razonable para la tasa de depreciación del capital trimestral.

Nuestro modelo tiene dos choques exógenos: uno tecnológico y otro de política monetaria. El choque tecnológico se estima a partir de un modelo AR(1) sobre el logaritmo de la productividad total de los factores, donde obtuvimos $\rho^A = 0,61$ y $\sigma^A = 0,026$.

¹³ Implícitamente, hemos asumido que la tasa global de participación es constante en el tiempo. De esta manera, identificamos los movimientos de la tasa de ocupación con los movimientos de la tasa de empleo (i. e. uno menos la tasa de desempleo)

¹⁴ Si κ se calibra de esta manera, entonces el valor de q deja de ser importante, pues lo que importa es el costo unitario de colocar una vacante que es inversamente proporcional a la probabilidad de llenar una vacante. Por lo tanto, fijamos $q = 0.9$ como en Andolfatto (1996).

Nuestra calibración es completamente estándar excepto por la función de costos de ajuste ϕ . Asumimos que esta es una función cuadrática de la forma:

$$\phi(D_t, D_{t+1}) = \phi \left(\frac{D_{t+1} - D_t}{D_t} \right)^2,$$

donde ϕ es una constante positiva que debemos calibrar. Elegimos ϕ de tal manera que los efectos expansivos de la política monetaria fueran semejantes a los documentados en la literatura cuando la regla de política monetaria utilizada por el banco central es de la forma:

$$M_{t+1} - B_{t+1} = (M_t - B_t)\mu_t$$

donde los parámetros utilizados los calibramos ajustando un proceso AR(1) a la tasa de crecimiento del dinero¹⁵:

$$\log(\mu_{t+1}) = \rho^\mu \log(\mu_t) + \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^\mu)$$

Los valores de los parámetros relevantes están resumidos en el Cuadro 1.

Cuadro 1 Valores de parámetros			
β	0,98	γ	2,00
θ	0,38	ϕ	10,00
s	0,15	δ	0,025
ρ^d	0,61	σ^d	0,026
h	1/3	e	1/6
q	0,9	θ^m	0,6
ξ	0,2	$\kappa V / Y$	0,1

Fuente: cálculos de los autores.

¹⁵ Christiano *et al.* (1997) consideran el caso en el cual la Fed utiliza la tasa de interés como su instrumento de política. Una contracción monetaria en su modelo, incrementa la tasa de los fondos federales por 70 puntos básicos. Después de dos trimestres hay una disminución sostenida en la producción real del orden de 0,1% a 0,4%. Después de dos años, el efecto contraccionista se desvanece.

III. EL EQUILIBRIO COMPETITIVO

Desde la perspectiva de los métodos de optimización dinámica, nuestro modelo consta de dos variables de estado exógenas, estocásticas y no correlacionadas (los choques de política monetaria y los choques a la productividad total de los factores), cinco variables de estado (el *stock* de capital, la tasa de ocupación, la tasa de interés rezagada, los depósitos y los bonos). En esta economía artificial, las asignaciones y precios de equilibrio están caracterizados por el siguiente sistema dinámico:

Ecuación de Euler:

$$\beta \frac{\partial U(c_t^e, h_t)}{\partial c} + E_t \left[\frac{p_{t+1}}{p_t} \lambda_t \right] = 0$$

$$\beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left(\frac{\partial F^{tec}(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial k} + (1 - \delta)(1 + i_{t+1}) \right) \right] = 1 + i_t$$

donde λ_t es el precio sombra del capital. Asignación intertemporal de los depósitos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(c_t^e, h_t)}{\partial c} \left(\frac{1}{p_t} + \frac{\partial \phi(D_t, D_{t+1})}{\partial D_{t+1}} \right) + \frac{\lambda_t}{p_t} (1 + i_t) \\ & = -\beta E_t \left[\frac{\partial U(c_{t+1}^e, h_{t+1})}{\partial c} \frac{\partial \phi(D_{t+1}, D_{t+2})}{\partial D_t} \right] \end{aligned}$$

Equilibrio en el mercado monetario:

$$y_t = \frac{M_{t+1} - B_{t+1}}{p_t} - \phi(D_t, D_{t+1})$$

Equilibrio en el mercado de fondos prestables:

$$(1 + i_t)(w_t n_t h_t + I_t) = \frac{D_{t+1} - B_{t+1}}{p_t}$$

Salario real resultado del proceso de negociación entre firmas y empleados:

$$wh = E_t \left[\frac{\xi \left(\frac{\beta U_1(c^h, h')}{U_1(c^n, h)} \frac{p}{p'} \frac{\partial F^{tec}(k, n, h)}{\partial n} + e\theta\kappa \right) + (1 - \xi) \frac{(\Gamma(e) - \Gamma(h))}{U_1(c^n, h)}}{\xi(1 + i) \frac{\beta U_1(c^h, h')}{U_1(c^n, h^n)} \frac{p}{p'} + (1 - \xi)} \right]$$

Equilibrio en el mercado laboral (margen intensivo):

$$\Gamma'(h) = - \frac{U_1(c^n, h)}{1 + i} \frac{\partial^2 F^{tec}(k, hn)}{\partial h \partial n}$$

Demanda de trabajo (margen extensivo):

$$\frac{\lambda_t \kappa}{q(\theta_t)} - \beta \lambda_t \left(\frac{\partial F^{tec}(k_t, h_t n_t)}{\partial n} - (1 + i) w_t l_t \right) - \beta(1 - s) \lambda_t \frac{\kappa}{q(\theta)} = 0$$

Evolución de la tasa de ocupación:

$$n_{t+1} = (1 - s) n_t + q_t(\theta_t) V_t$$

Equilibrio en el mercado de bienes:

$$c_t + i_t = A_t^{tec} k_t^\theta (h_t n_t)^{1-\theta}$$

Acumulación de capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + I_t$$

Regla de política:

$$i_t = i^* + \rho (i_{t-1} - i^*) + (1 - \rho) (\alpha(E_{t+1}[\pi_t] - \pi) + \beta(\text{Log}(E_{t+1}[Y_t]) - \text{Log}(Y))) + \xi_t,$$

donde ξ_t , en logaritmos, es un proceso autorregresivo de orden 1. Consideramos ξ_t

como la parte no sistemática de la política monetaria. El resto de la ecuación corresponde a la parte sistemática de la política monetaria.

IV. LA SOLUCIÓN BAJO EL VERDADERO PROCESO GENERADOR DE DATOS

Debido a que el sistema dinámico que deseamos resolver es no lineal, utilizaremos un método aproximado. Concretamente, emplearemos el método de log-linearización alrededor del estado estacionario determinístico (King *et al.*(1988)). Excepto por la pérdida de información en el proceso de linearización, la solución que encontramos refleja la dinámica intrínseca del verdadero proceso generador de los datos de nuestra economía artificial. Utilizando el lenguaje de la teoría de optimización dinámica para este problema, las variables de estado endógenas son $\tilde{z}_t = (k_t, n_t, D_t, B_t, i_{t-1})'$ y las variables de estado exógenas son $z_t = (A_t^{tec}, \xi_t)'$. El vector x_t se define como el conjunto de variables (endógenas) que en equilibrio quedan determinadas por las variables de estado. Esto es, variables de control como consumo e inversión, o flujos como el producto que están determinados por la inversión y el consumo. De esta manera, la solución en términos de las variables de estado la podemos expresar como:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \hat{z}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \in_{t+1}^{tec} \\ \in_{t+1}^{\xi} \end{bmatrix},$$

donde $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$, es una matriz de coeficientes conocida que depende de todos los parámetros fundamentales del modelo, S_{22} es una matriz diagonal con los coeficientes de autocorrelación de cada uno de los procesos exógenos, \in_{t+1}^{tec} y \in_{t+1}^{ξ} son, respectivamente, los errores de cada uno de los procesos exógenos y el símbolo $\hat{}$ sobre cada variable denota la desviación logarítmica de la variable con respecto al estado estacionario. Adicionalmente, el método arroja la solución del resto de variables endógenas, \hat{y}_t mediante un sistema lineal de la forma:

$$(2) \quad [\hat{x}_t] = [H_{11} \quad H_{12}] \begin{bmatrix} \hat{z}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix},$$

donde $H = [H_{11} \quad H_{12}]$ es una matriz de coeficientes conocida y que también depende de todos los parámetros fundamentales del modelo más no de los procesos estocásticos exógenos. Una vez encontramos las matrices S y H , es fácil generar la dinámica de equilibrio bajo el verdadero proceso generador de datos.

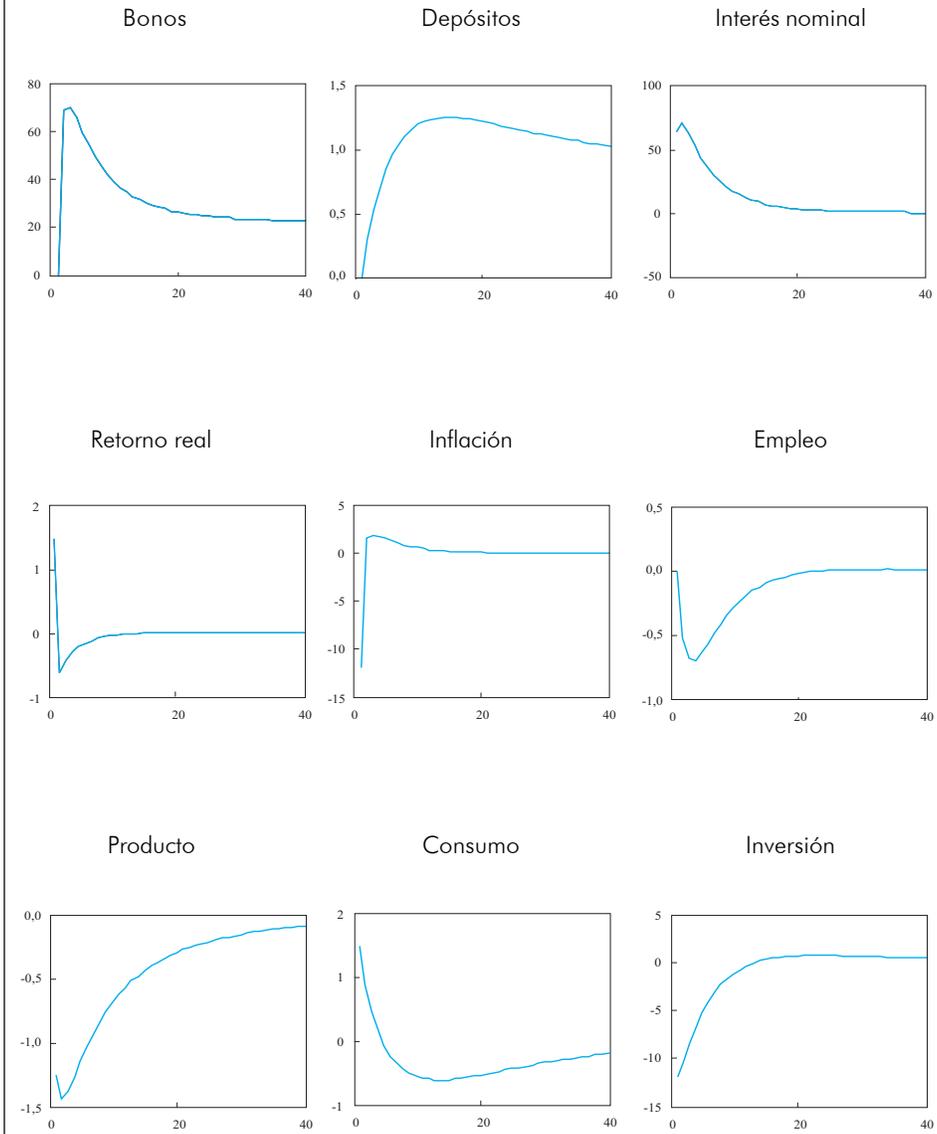
El Gráfico 1 ilustra la respuesta de algunas variables endógenas a un choque positivo a la tasa de interés nominal. En el gráfico todas las variables representan desviaciones porcentuales de su estado estacionario, excepto por la inflación que está en niveles¹⁶. Supongamos que la autoridad monetaria induce un aumento en la tasa de interés nominal como el que aparece en el Gráfico 1. Esto es equivalente a hacer un choque persistente en ξ_t y actuar creíble y activamente en el mercado monetario mediante la regla de reacción para la tasa de interés. Operativamente, lo que la autoridad monetaria debe hacer es utilizar operaciones de mercado abierto para reducir los fondos prestables en la economía. Así, el banco vende una gran cantidad de bonos, la tasa de interés sube y los agentes comienzan gradualmente a depositar más recursos en el sistema financiero. Sin embargo, el costo de cambiar el portafolio de depósitos, permite que la tasa de interés real aumente inicialmente haciendo que el producto y el empleo caigan al comienzo. Igualmente, baja la inversión al volverse más costoso para las firmas obtener recursos del sistema financiero. De otra parte, la inflación cae inicialmente. La dinámica de las variables en el Gráfico 1 ilustra la forma como intuitivamente opera el modelo.

V. VALIDACIÓN Y DINÁMICA DEL MODELO BAJO CHOQUES EXÓGENOS

Las técnicas tradicionales empleadas para la validación de modelos de equilibrio general calibrados incluyen, entre otras, la comparación de los primeros momentos entre las series simuladas bajo el verdadero proceso generador de los datos artificiales y los momentos muestrales de las series observadas en el mundo

¹⁶ La inflación en t , π_t se define como $\pi_t = \log \left(\frac{p_{t+1}}{p_t} \right)$.

Gráfico 1



Fuente: cálculos de los autores.

real. También se utiliza el análisis de la descomposición espectral de ambos tipos de series y la comparación de la función de impulso respuesta de los datos observados y simulados. En este documento se adopta como alternativa para validar este tipo de modelos la siguiente metodología. Primero generamos una serie de datos simulados de nuestro modelo teórico utilizando el verdadero proceso generador de estos y de la misma longitud que las series equivalentes en el mundo real. Así, construimos dos conjuntos de datos: las series simuladas por nuestro modelo teórico y las correspondientes en el mundo real. En adelante, llamaremos a las primeras los datos artificiales y a las segundas los datos reales (es cierto que los artificiales dependen de las series de choques exógenos utilizadas para generarlos, sin embargo, hicimos el mismo ejercicio para diferentes realizaciones de los choques exógenos, y por lo tanto, de diferentes conjuntos de datos artificiales, y los resultados fueron similares).

Una vez tenemos a disposición los dos conjuntos de datos, utilizamos el modelo teórico como guía para escoger un modelo estadístico que nos permita estudiar el verdadero proceso generador de los datos reales. La idea fundamental de la metodología propuesta es utilizar ese modelo estadístico, sugerido por el teórico, para estudiar los datos reales y artificiales. Diremos que al teórico lo respaldan los datos reales si, utilizando este modelo estadístico, somos incapaces de distinguir entre los dos conjuntos de datos por lo menos en términos de algunas estadísticas que resultan de particular interés desde el punto de vista económico. Esto es, la respuesta dinámica de las variables endógenas ante choques a las variables exógenas. En este caso, ante choques a la productividad total de los factores y choques a la política monetaria¹⁷.

Utilizando las ecuaciones de la sección anterior vamos a escribir la dinámica de las variables endógenas \hat{x}_t como un vector autorregresivo con variables exógenas (VARX). Utilizando la ecuación (2) escribimos \hat{x}_t como:

$$\hat{x}_t = H_{11}\hat{z}_t + H_{12}\hat{z}_t,$$

¹⁷ Este ejercicio de validación lo repetimos con 10 bases de datos completas generadas artificialmente (para cada una de las variables de interés). Los resultados fueron similares. Por esta razón creemos que los resultados del artículo son independientes de la realización particular de los datos artificiales que utilizamos para el ejercicio.

despejando \hat{z}_{t+1} de la ecuación (1) y sustituyendo en esta última obtenemos:

$$\hat{x}_t = H_{11}(S_{11}\hat{z}_{t-1} + S_{12}\hat{z}_{t-1}) + H_{12}\hat{z}_t$$

y utilizando (1) nuevamente:

$$\hat{x}_t = H_{11}(S_{11}H_{11}^{-1}(\hat{x}_{t-1} - H_{12}\hat{z}_{t-1}) + S_{12}\hat{z}_{t-1}) + H_{12}\hat{z}_t,$$

o equivalentemente:

$$(3) \quad \hat{x}_t = H_{11}S_{11}H_{11}^{-1}\hat{x}_{t-1} + H_{12}\hat{z}_t + (H_{11}S_{11}H_{11}^{-1}S_{12} - H_{12})\hat{z}_{t-1}$$

que es un VARX(1,1). La ecuación (3) expresa la dinámica de las variables endógenas en la forma de un modelo dinámico y estructural. La estrategia econométrica más formal sería estimar (3) con todas las restricciones que el modelo teórico le impone a los coeficientes. Sin embargo, esta estrategia es poco esperanzadora, dada la experiencia que existe en la literatura empírica de la capacidad de ajuste en todas las dimensiones (todos los momentos) de los modelos de equilibrio general dinámico. Estos modelos al ser representaciones muy abstractas y simplistas de la realidad difícilmente pueden pasar una prueba que busque un ajuste adecuado al verdadero proceso generador de los datos (Canova *et al.* (1994)). Ante estas dificultades los investigadores han buscado formas de validación no tan estrictas sino más focalizadas. Es decir, con el modelo teórico no buscamos reproducir todos los momentos observados en la realidad sino aquellas estadísticas que son de especial importancia desde el punto de vista de los objetivos de la investigación. En este caso, nuestra propuesta es procurar una validación del modelo en términos de su capacidad de reproducir la dinámica de la economía ante los choques exógenos y en particular, de política monetaria. Por esta razón, y dada la dificultad para estimar (3) y las características estocásticas de los datos reales, vamos a considerar la estimación de un modelo en forma reducida del tipo:

$$(4) \quad \Delta X_t = \mu + \pi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j \Delta X_{t-j} + \sum_{j=0}^m D_j Z_{t-j} + \varepsilon_t,$$

$$t = 1, \dots, T$$

Utilizamos letras capitales para denotar las mismas variables en el modelo estadístico.

A. ESTIMACIÓN CON DATOS REALES

En el análisis empírico se utilizaron datos trimestrales entre 1984 y 2000. Las series que se utilizaron fueron: la tasa de ocupación para las siete áreas metropolitanas (N), la tasa de interés de los certificados de depósito a término a 90 días (CDT) medida en porcentajes anualizados, el logaritmo del índice de precios al consumidor (LP) y el logaritmo del producto interno bruto per cápita en términos reales (LY) con base en la población en edad de trabajar (PET).

En este análisis se consideraron endógenas las variables LY , N , CDT y LP , mientras que se trató como exógenos los choques en la productividad total de los factores A_t^{tec} (i. e. Solow), y la regla de tasa de interés ξ_t ¹⁸. El choque de productividad se estimó como el residuo de una función de producción Cobb-Douglas estimada con base en las series Y , N y la formación bruta de capital fijo per cápita (K). El choque de interés se calculó como el residuo de la siguiente ecuación:

$$i_t = \alpha_0 + \alpha_1 i_{t-1} + (1 - \alpha_1) \alpha_2 \pi_t + \xi_t$$

donde i_t corresponde a la tasa de interés y π_t a la inflación trimestral. Los parámetros que utilizamos fueron $\alpha_1 = 0,5$ y $\alpha_2 = 1,7$.

Al aplicar las pruebas de raíz unitaria de Dickey y Fuller y KPSS, se encontró que todas las series endógenas son integradas de orden uno mientras que las exógenas son estacionarias. La prueba de Johansen (1988) modificada por Boswijk y Doornik (1999) muestra que estas series se hallan cointegradas. Los resultados de estas pruebas y las estadísticas que permiten evaluar las propiedades de los residuales del modelo se encuentran en el Anexo 1. Estos resultados indican que un modelo adecuado para describir la dinámica de estas series es un $VECX(k, m)$:

$$\Delta X_t = \mu + \pi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j \Delta X_{t-j} + \sum_{j=0}^m D_j Z_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

donde $X_t = (LY_t, N_t, CDT_t, LP_t)^T$, $Z = (A_t^{tec}, \xi_t)^T$ y $\varepsilon_t \sim N(0, \Omega)$. El procedimiento de Boswijk y Doornik permite encontrar valores críticos y p -values correctos para

¹⁸ Dadas las características de las series, en donde las variables endógenas son todas integradas de orden uno y las exógenas son integradas de orden cero, no es necesario realizar pruebas de exogeneidad para estas últimas.

las pruebas de cointegración cuando se incluyen variables exógenas en el modelo VEC, debido a que los tabulados por Johansen son sólo aproximados e inapropiados en este contexto. Los detalles técnicos de esta metodología se discuten en el Anexo 2.

El número de rezagos de las variables endógenas del modelo VECX, $k = 3$, se escogió como el mínimo rezago con el cual se obtienen residuos ruido blanco gaussianos. El número de rezagos de las variables exógenas, $m = 1$, se tomó igual al sugerido por la solución al modelo teórico.

B. RESULTADOS

En los Gráficos (2) y (3) se muestran las respuestas dinámicas de las variables endógenas del modelo a un choque de una unidad en el nivel de las variables exógenas, estas respuestas se presentan en términos de las primeras diferencias de las series endógenas¹⁹.

El gráfico (2) presenta evidencia de los efectos reales de la política monetaria en términos de producto y empleo, sus efectos sobre la inflación y el comportamiento de la tasa de interés nominal. Ante un incremento transitorio (un trimestre) de 15 puntos básicos²⁰ en la tasa de interés nominal trimestral pero anualizada, y que se desvanece después de ocho o nueve trimestres:

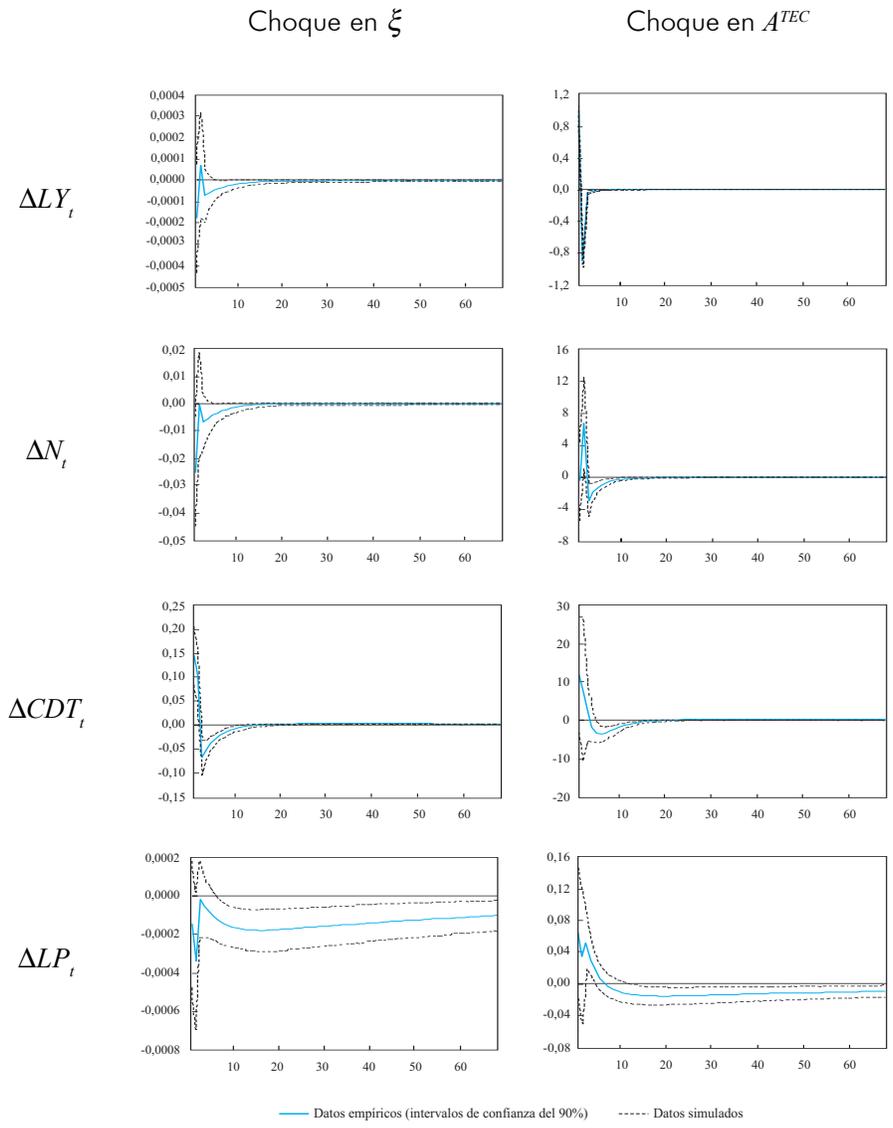
1. La tasa de crecimiento del producto cae, después de cuatro o cinco trimestres, por un solo trimestre.
2. Después de tres o cuatro trimestres, baja la tasa de ocupación en un trimestre (puesto que dicha tasa en Colombia es estadísticamente integrada de orden 1,

¹⁹ En el Anexo 3 se muestra la metodología utilizada para estimar este tipo de respuestas dinámicas junto con sus intervalos de confianza (asintóticos), basados en Lütkepohl (1993) y en una generalización realizada por nosotros. Esta metodología es conocida como análisis de multiplicadores (AM), la cual es muy similar al análisis de las funciones de impulso-respuesta (FIR), la diferencia entre las dos técnicas radica en el tipo de variables sobre las cuales se aplican los choques. En AM los choques se realizan sobre las variables exógenas, mientras que en la FIR los choques se asocian a variables endógenas. Sin embargo, con el fin de facilitar la lectura de los resultados obtenidos en este documento, ambos tipos de análisis, AM y FIR, se nombrarán indiscriminadamente.

²⁰ Utilizamos la serie de tasa de interés trimestral en porcentajes y anualizada.

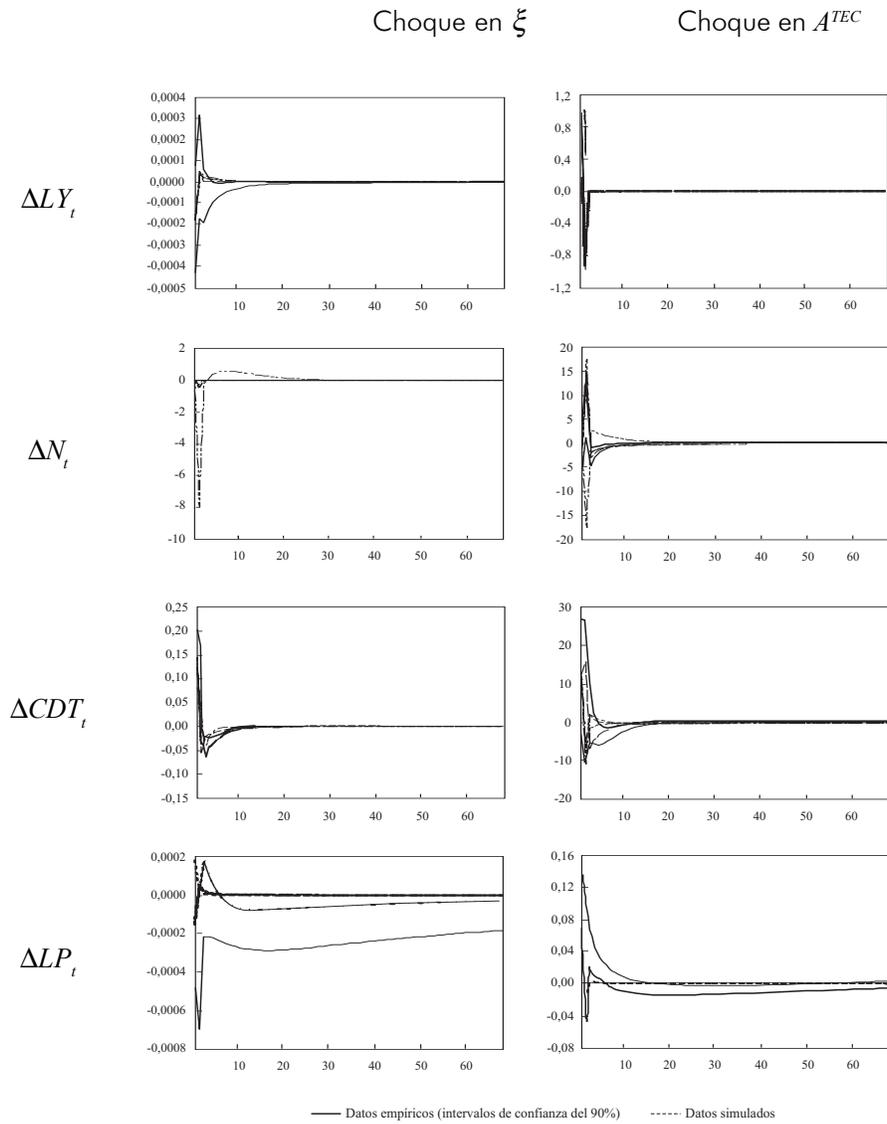
Gráfico 2

Multiplicadores dinámicos para datos observados



Fuente: cálculos de los autores.

Gráfico 3
 Multiplicadores dinámicos para datos simulados y observados



Fuente: cálculos de los autores.

la caída en la tasa de ocupación es significativa y permanente aunque cuantitativamente pequeña).

3. La inflación comienza a descender de forma gradual después de cuatro o cinco trimestres. Después de 10 trimestres llega a su menor valor, dos puntos básicos por debajo de su nivel de estado estacionario. La inflación está medida en términos trimestrales, luego, después de 10 trimestres (dos años y medio) la inflación anualizada puede caer ocho puntos básicos desde su nivel de estado estacionario.

Obsérvese el comportamiento de la tasa de interés nominal. Si bien la autoridad monetaria no controla perfectamente la tasa nominal, lo que ésta hace es intervenir activamente en el mercado (mediante su regla de política) de tal forma que pueda inducir un comportamiento similar al de la tasa de interés en el Gráfico 2.

En el caso de los choques de productividad los resultados son los esperados excepto por el comportamiento de la tasa de interés. Un incremento transitorio de una unidad en la productividad total de los factores tiene los siguientes efectos:

1. Incrementa sustancialmente el producto por varios períodos. El efecto tiende a desvanecerse después de tres o cuatro trimestres.
2. La tasa de ocupación tiene un comportamiento similar, sólo que su respuesta es más lenta. Toma por lo menos un trimestre para que la tasa de ocupación aumente y su efecto tiende a desvanecerse después de 10 trimestres.
3. La inflación aumenta después de tres trimestres, pero después decrece sostenidamente por un período largo.
4. La tasa de interés nominal tiende a bajar después de cinco o seis trimestres. Aquí el resultado no es completamente contra-intuitivo. En los primeros tres o cuatro trimestres no sabemos si la tasa de interés sube o baja estadísticamente. Luego el resultado no es contradictorio con el hecho de que la tasa de interés sube inicialmente y después retorna a su estado estacionario.

En el Gráfico 3 estudiamos los mismos choques unitarios y transitorios pero utilizando el modelo estadístico estimado con los datos artificiales. En el gráfico, las líneas continuas registran los intervalos de confianza obtenidos con el modelo estadístico

estimado con los datos reales. Las líneas punteadas muestran la respuesta dinámica de las mismas variables endógenas a los mismos choques exógenos pero utilizando el modelo estadístico con datos artificiales. La respuesta inicial que representan las líneas punteadas ha sido reescalada para comparar con la de las líneas continuas.

En términos cualitativos, encontramos una dinámica semejante para todas las variables excepto para la tasa de ocupación. El modelo teórico a la luz del modelo estadístico propuesto, no parece capturar adecuadamente la dinámica de la tasa de ocupación bajo ninguno de los dos choques. En términos cuantitativos, la respuesta de la inflación es mucho menor en los datos artificiales que en los datos reales. También repetimos el ejercicio con $s = 0,075$ y los resultados fueron similares.

VI. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos hecho un esfuerzo por estudiar algunos canales, mecanismos de amplificación y los efectos cuantitativos de la política monetaria en Colombia utilizando un modelo de equilibrio general dinámico como nuestra guía en el trabajo empírico. Mediante el uso de un modelo estándar de ciclos económicos reales con dinero y fricciones en el mercado laboral y financiero hemos racionalizado parcialmente (en la misma línea que la literatura sobre participación limitada en el mercado financiero) canales de transmisión como el del costo del capital, y mecanismos de propagación y amplificación, como un sector laboral con rigideces. Utilizando este modelo teórico como guía para nuestro modelo estadístico, hemos documentado algunos efectos de la política monetaria y su relación con la tasa de interés nominal de la economía. En términos generales, encontramos efectos reales y cuantitativamente pequeños de la política monetaria. Además, existe alguna evidencia de que los efectos operan a través de variaciones en el costo del capital en el corto plazo inducido por cambios en la tasa de interés nominal.

Adicionalmente, hemos propuesto una metodología útil para la validación de modelos de equilibrio general dinámico. Básicamente, proponemos comparar la respuesta dinámica de variables económicas de interés ante choques exógenos (de política monetaria y productividad) utilizando un mismo modelo estadístico sugerido por el modelo teórico pero estimado con dos bases de datos: los reales o históricos y los artificiales o simulados por el modelo teórico. De esta manera nos forzamos por encontrar un modelo teórico útil para analizar la realidad económica y que genere datos artificiales indistinguibles en el sentido propuesto anteriormente.

La metodología de validación propuesta es muy similar a la de la teoría de los RBC. La diferencia fundamental consiste en las estadísticas escogidas para la comparación entre las estimaciones de los datos reales y los datos artificiales. En la literatura tradicional sobre los RBC básicamente se comparan los primeros y segundos momentos de las componentes cíclicas de los datos reales y artificiales. Nosotros proponemos comparar los multiplicadores dinámicos ante choques exógenos, de política económica entre otros, tal como los captura un modelo estadístico apropiado para el estudio de este tipo de estadísticas cuando lo estimamos utilizando datos reales y artificiales.

Finalmente, la metodología propuesta tiene como subproducto la validación teórica de un modelo estadístico lo suficientemente práctico como para poder hacer análisis de política y pronósticos de variables relevantes. Teniendo en cuenta la preocupación actual en los bancos centrales por construir modelos teóricos consistentes y útiles para al mismo tiempo evaluar políticas y hacer pronósticos, nos parece que la metodología presentada en este artículo constituye una alternativa seria y acorde con la teoría del equilibrio general y lo suficientemente práctica para hacer análisis de política y pronósticos en los bancos centrales.

Algunas ideas para futuras investigaciones son evidentes: evaluar los pronósticos del modelo en términos del producto e inflación y compararlos con el actual modelo MMT del Banco de la República, microfundamentar la fricción en el mercado financiero presentada en este artículo, hacer estudios micro sobre las rigideces en el mercado laboral y su compatibilidad con la teoría de búsqueda propuesta para este mercado, realizar estimaciones con datos micro para calibrar mejor algunos de los parámetros claves del modelo del mercado laboral como los de la función de encuentro, mejorar el modelo estadístico con el ánimo de hacer mejores predicciones y motivar un modelo teórico consistente, y finalmente, enriquecer el modelo teórico en direcciones que claramente son relevantes para un país como Colombia, por ejemplo, abrir la economía e introducir un sector de transables y no transables.

REFERENCIAS

- Andrews, D. W. K. (1991). "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation", en *Econometrica*, Vol. 59, No. 3 pp. 817-858.
- Andolfatto, D. (1996). "Business Cycles and Labor-Market Search", en *American Economic Review*, Vol.86, No. 1, pp. 122-132.
- Amisano G.; Giannini, C. (1997). *Topics in Structural VAR Econometrics*. 2da ed., Springer-Verlag.
- Banco de la República. (2003). "El modelo de mecanismos de transmisión", Mimeo, Subgerencia de Estudios Económicos, Departamento de Modelos Macroeconómicos, septiembre.
- Bernal, R. (2002). "Monetary Policy Rules in Colombia", en *Documentos CEDE*, CEDE-Universidad de los Andes, No. 18, noviembre.
- Blanchard, O.; Diamond, P. (1989). "The Aggregate Matching Function», *Bureau of Economic Research*, Documento de trabajo No. 3175.
- Boswijk H. P.; Doornik, J. A. (1999). "Distribution Approximations for Cointegration Tests with Stationary Exogenous Regressors", Tinbergen Institute, Documento de discusión, No. 99-013/4.
- Burlano, A. (2003). "The Colombian Monetary Policy Experience: Attempts at Disinflation, 1991-2002", tesis, Departamento de Economía, Universidad de California Davis.
- Canova, F.; Finn, M.; Pagan, A. (1994). *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, Oxford University Press.
- Cooley, T.; Quadrini, V. (1999). "A Neoclassical Model of the Phillips Curve Relation", en *Journal of Monetary Economics*, No. 44, pp. 165-193.
- Christiano, L.; Eichenbaum, M.; Evans, C.; (1997). "Sticky Price and Limited Participation Models of Money: A Comparison", en *European Economic Review*, No. 41, pp.1201 - 1249.

- _____; Gust, C. (1999). "Taylor Rules in a Limited Participation Model", en *National Bureau of Economic Research*, Documento de trabajo No. 7017.
- Doornik J. A. (1998). "Approximations to the Asymptotic Distribution of Cointegration Tests", en *Journal of Economic Surveys*, No. 12, pp. 573-593.
- Echeverry, J.C. (1993). "Indicadores de política y canales de transmisión monetaria, Colombia 1975-1991", en *Ensayos Sobre Política Económica*, Banco de la República, No. 24, pp. 7-41.
- Fernández, A. (2003). "Reformas estructurales, impacto macroeconómico y política monetaria en Colombia", tesis de maestría en economía, Universidad de los Andes, Bogotá.
- Hansen, B. (1995). "Rethinking the Univariate Approach to Unit Root Testing: Using Covariates to Increase Power", en *Econometric Theory*, No. 11, pp. 1148-1171.
- Hansen, G. (1985). "Indivisible Labor and the Business Cycle", en *Journal of Monetary Economics*, Vol. 16, No. 3, pp. 309-327.
- Johansen, S. (1988). "Statistical Analysis of Cointegration Vectors", en *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 12, pp. 231-254.
- King, R.; Plosser, C.; Rebelo, S. (1988). "Production, Growth and Business Cycles I: The Basic Neoclassical Model", en *Journal of Monetary Economics*, No. 21, pp.195-232.
- Kremers, J.; Ericsson, N. R.; Dolado, J. J. (1992). "The Power of Cointegration Tests", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, No. 54, pp. 325-348.
- Lutkepohl, H. (1993). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. 2da. ed. Springer-Verlag.
- Maya, J. (2001). "El mecanismo de transmisión del crédito en Colombia", tesis de grado en economía, Universidad EAFIT, Medellín.

- Núñez, J.; Bernal, R. (1997). “El desempleo en Colombia: tasa natural, desempleo cíclico y estructural y la duración del desempleo 1976-1978”, en *Ensayos sobre Política Económica*, Banco de la República, No. 31, pp. 7-74.
- Pissarides, Ch. (1990). *Equilibrium Unemployment Theory*, Basil Blackwell.
- Rahbek, A.; Mosconi, R. (1999). “The Role of Stationary Regressors in the Cointegration Test”, en *Econometrics Journal*, No. 2, pp. 82-97.
- Restrepo, J. (1999). “The Liquidity Effect in Colombia”, en Archivos de Economía, *Banco de la República*. No. 127, noviembre.
- Riascos, A. (2002). “Monetary Policy Rules in a Search Model of the Labor Market”, *Borradores Semanales de Economía*, Banco de la República, No. 221, octubre.
- Riascos, A. (2002). “Dynamic Response to Monetary Policy Shocks in a Search Model of the Labor Market”, en Borradores semanales de Economía, *Revista de Economía del Rosario*, Vol. 5, No. 2, pp. 119-240.
- Rotemberg, J.; Woodford, M. (1998). “Interest-Rate Rules in an Estimated Sticky Price Model”, *National Bureau of Economic Research*, Documento de trabajo No. 6618.
- Seo, B. (1998). “Statistical Inference on Cointegration Rank in Error Correction Models with Stationary Covariates”, en *Journal of Econometrics*, No. 85, pp.339-385.

ANEXO 1

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE COINTEGRACIÓN

Cuadro A1 1
Prueba de Cointegración de Boswijk y Doornik

H_0 : Rango (π)	Traza	<i>P-Value</i> Q	<i>P-Value</i> Q^*
0	278,60	0,0000	0,0000
1	51,24	0,0001	0,0001
2	22,41	0,0059	0,0064
3	3,98	0,1442	0,1442

(*) Con corrección para muestras pequeñas.
Fuente: cálculos de los autores.

Cuadro A1 2
Estadísticos de evaluación sobre los residuales

Pruebas de autocorrelación			
Prueba	Estadístico	Grados de libertad	<i>P-Value</i>
Ljung & Box (16)	265,70	244	0,16
Godfrey - LM (1)	15,96	16	0,46
Godfrey - LM (4)	16,02	16	0,45
Prueba de normalidad			
Prueba	Estadístico	Grados de libertad	<i>P-Value</i>
Doornik & Hansen	17,01	8	0,03

Fuente: cálculos de los autores.

ANEXO 2

PRUEBA DE COINTEGRACIÓN PARA MODELOS VECX

Un modelo $VECX(k,m)$ se define como:

$$(A2.1) \quad \Delta X_t = \pi^* X_{t-1}^* + \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j \Delta X_{t-j} + \phi q_t + \sum_{j=0}^m D_j Z_{t-j} + \varepsilon_t; \quad t = 1, \dots, T$$

donde $\{X_t\}$ es un vector de series de tiempo $I(1)$ de dimensión n , $\{Z_t\}$ es un vector de variables exógenas estacionarias de dimensión q , $\{\varepsilon_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \Omega)$, $X_{t-1}^* = \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ d_t \end{bmatrix}$, d_t y q_t son regresores determinísticos.

Seo (1998) y Rahbek y Mosconi (1998) muestran que la distribución límite de la estadística de la traza usada para la hipótesis $H_0(r): \text{rango}(\pi^*) \leq r$ está caracterizada por:

$$(A2.2) \quad Q = \text{traza} \left\{ \int_0^1 dWF' \left(\int_0^1 FF' du \right)^{-1} \int_0^1 FdW' \right\}$$

donde $E[W(1)B(1)'] = P = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_{n-r})$, $W(u)$ y $B(u)$ siguen procesos brownianos vectoriales de dimensión $(n-r)$, $\rho_1 \in [0, 1]$ son coeficientes de correlaciones y dependiendo de la caracterización determinística de (A2.1), $F(u) =$

$$B(u) \text{ o } F(u) = \begin{bmatrix} B(u) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ o } F(u) = \begin{bmatrix} B(u) - \int_0^1 Bdu \\ u - 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si se considera un modelo VEC, es decir, el modelo (A2.1) sin variables exógenas, $P = I_{n-r}$ y por lo tanto la expresión (A2.2) se simplifica a:

$$(A2.3) \quad T = \text{traza} \left\{ \int_0^1 dBF' \left(\int_0^1 FF' du \right)^{-1} \int_0^1 FdB' \right\}$$

La distribución de la estadística Q fue tabulada por Seo (1998)¹. Sin embargo, este resultado es poco práctico porque aunque se tienen 20 páginas de cuadros solo se considera $n \leq 5$ y $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in P \times \dots \times P$, donde $P = \{0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1\}$.

¹ Para casos particulares, esta distribución fue calculada por Kremers *et al.* (1992) y Hansen (1995).

Doornik(1998) y Boswijk y Doornik (1999) desarrollaron una metodología más general donde se aproximan las distribuciones de las estadísticas T y Q mediante una distribución Gamma con el mismo valor esperado y varianza de la estadística. Por lo tanto, los valores críticos de significancia o p -values asociados a las estadísticas T y Q se generan a partir de los p -values de una estadística que sigue dicha distribución Gamma.

Mediante simulaciones Monte Carlo, Doornik (1998) encuentra las siguientes aproximaciones para los valores esperados y varianzas de la estadística T :

$$E(T) \approx \begin{cases} 2p^2 - p + 0,07 + 0,07I_{\{p=1\}} & \text{para } H_z \\ 2p^2 + 2,01p + 0,06I_{\{p=1\}} + 0,05I_{\{p=2\}} & \text{para } H_c \\ 2p^2 + 4,05p + 0,5 - 0,23I_{\{p=1\}} - 0,07I_{\{p=2\}} & \text{para } H_l \end{cases}$$

$$V(T) \approx \begin{cases} 3p^2 - 0,33p - 0,55 & \text{para } H_z \\ 3p^2 + 3,60p + 0,75 - 0,40I_{\{p=1\}} - 0,30I_{\{p=2\}} & \text{para } H_c \\ 3p^2 + 5,70p + 3,20 - 1,30I_{\{p=1\}} - 0,50I_{\{p=2\}} & \text{para } H_l \end{cases}$$

$$\text{cov}(T_i, T_j) \approx \begin{cases} -1,270 & \text{para } H_z \\ -1,066 & \text{para } H_c \\ -1,350 & \text{para } H_l \end{cases} \quad i \neq j$$

donde:

$$I_{\{p=a\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = a \\ 0 & \text{si } p \neq a \end{cases}$$

p corresponde al número de variables endógenas (n) menos el número de vectores de cointegración (r), H_z , H_c y H_l indican los componentes determinísticos incluidos en el modelo (A2.1)².

Adicionalmente, Boswijk y Doornik (1999) demuestran que el valor esperado y varianza de la estadística Q están dados por:

$$(A2.4) \quad E(Q) = \frac{E(T)}{p} \sum_{i=1}^p \rho_i^2 + \left(1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \rho_i^2\right) pq$$

² H_z : no se incluyen componentes, H_c : $d_t = 1$, q_t no es incluido y H_l : $d_t = t$, $q_t = 1$.

$$(A2.5) \quad V(Q) = \sum_{i=1}^p \rho_i^4 V(T_i) + 2 \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{i-1} \rho_i^2 \rho_j^2 \text{cov}(T_i, T_j) + \frac{4E(T)}{p} \sum_{i=1}^p \rho_i^2 (1 - \rho_j^2) + 2q \sum_{i=1}^p (1 - \rho_j^2)^2$$

con $q = \dim(F)$ y los ρ_i corresponden a las correlaciones canónicas cuya estimación se explica en el Anexo 4.

Debido a que la prueba de Boswijk y Doornik se basa en la comparación de (A2.4) y (A2.5) con los valores esperados y varianzas de una variable aleatoria con distribución Gamma, es conveniente recordar los dos primeros momentos de esta distribución. Una variable aleatoria X con distribución Gamma tiene la siguiente función de densidad con parámetros a y b :

$$\Gamma(x, a, b) = \int_0^x \frac{a^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} e^{-at} dt, \quad x > 0, \quad b > 0, \quad a > 0$$

donde $\Gamma(b)$ representa la función Gamma y se define como $\Gamma(b) = \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt$. Bajo esta distribución $E(x) = a/b$ y $V(x) = b/a^2$, por lo tanto, igualando los valores esperados y varianzas de la estadística T y de la distribución Gamma se obtienen los parámetros para esta última distribución:

$$b = \frac{E(T)^2}{V(T)}, \quad a = \frac{E(T)}{V(T)}$$

En conclusión, la prueba de cointegración para modelos *VECM* está basada en la estadística de la traza propuesta por Johansen. Sin embargo, comparada con la metodología de Johansen, Boswijk y Doornik (1999) sugieren que una mejor aproximación a la distribución de esta estadística se obtiene mediante el uso de una distribución Gamma con el valor esperado y la varianza especificados en (A2.4) y (A2.5).

ANEXO 3

INTERVALOS DE CONFIANZA DE LOS MULTIPLICADORES DINÁMICOS DE UN MODELO VECX

El análisis de multiplicadores o multiplicadores dinámicos permite calcular las respuestas dinámicas de las variables endógenas de un modelo, VECX en el caso de este documento, con respecto a un choque en las variables exógenas. La significancia de estos efectos se puede evaluar mediante la construcción de intervalos de confianza sobre las estimaciones de estas respuestas. Puesto que el cálculo de estos intervalos depende de la matriz de covarianzas correspondiente, en esta sección se desarrolla la metodología para calcular dicha matriz en términos asintóticos.

Por motivos didácticos se realiza un análisis en un contexto de modelos más sencillos iniciando con un sistema VAR, sin variables exógenas³ y sin relaciones de cointegración, posteriormente se generaliza a modelos más complejos hasta llegar al VECX. Los resultados presentados en esta sección están basados en Lütkepohl (1993), los resultados del punto 4 de este anexo corresponden a una generalización de los puntos anteriores realizada por nosotros.

A. Intervalos de confianza de la función de impulso-respuesta de un modelo VAR(*k*)

La función de impulso-respuesta (FIR) describe el efecto en el tiempo de un choque sobre la serie en análisis (X_t). Por lo tanto, esta puede calcularse como la diferencia entre el valor esperado condicional de la serie con choque y sin él:

$$(A3.1) \quad FIR(\delta, T)_h = E(X_{T^*+h} | \varepsilon_{T^*} = \delta, \varepsilon_{T^*+1} = 0, \dots, \varepsilon_{T^*+h} = 0, X_{T^*-1}, X_{T^*-2}, \dots) \\ - E(X_{T^*+h} | \varepsilon_{T^*} = 0, \varepsilon_{T^*+1} = 0, \dots, \varepsilon_{T^*+h} = 0, X_{T^*-1}, X_{T^*-2}, \dots)$$

para $h = 1, 2, \dots$

³ Cuando no existen variables exógenas la metodología de multiplicadores dinámicos no se puede realizar. Sin embargo, el análisis de funciones de impulso-respuesta se puede considerar como un equivalente metodológico.

En la ecuación (A3.1) la función de impulso - respuesta indica el efecto que tiene un choque de magnitud δ sobre la serie $\{X_t\}$ en $t = T^*$, h períodos después de haberse realizado.

Dado el siguiente modelo VAR(k):

$$(A3.2) \quad X_t = \mu + A_1 X_{t-1} + \dots + A_k X_{t-k} + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, T$$

donde X_t es un vector de series de tiempo estacionarias de dimensión n , y $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \Sigma_\varepsilon)$ el teorema de descomposición de Wold, garantiza la existencia de la siguiente representación del modelo (A3.2):

$$(A3.3) \quad X_t = \mu^* + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i}$$

Usualmente se supone que el choque δ es dado sobre una sola variable, es decir $\delta = \kappa(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$. Este supuesto puede ser razonable si los choques asociados a las diferentes variables no están correlacionados; sin embargo, ello no sucede en la mayoría de casos en la práctica. Para evitar este problema el modelo (A3.2), y en consecuencia el (A3.3), se expresan en términos de errores no correlacionados, $\{w_t\}$, de la siguiente forma⁴:

$$(A3.4) \quad X_t = \mu^* + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i w_{t-i}$$

donde $\theta_i = \phi_i P$, $w_t = P^{-1} \varepsilon_t$ y P corresponde a una matriz triangular tal que $\Sigma_\varepsilon = PP'$.

Utilizando la definición (A3.1) para el modelo (A3.4) se tiene que:

$$(A3.5) \quad FIR(\delta, T^*)_h = \theta_h \delta$$

por lo tanto, el análisis de impulso-respuesta depende de los parámetros θ_i del modelo (A3.4).

Con el fin de facilitar los cálculos de los coeficientes θ_i el modelo (A3.2) puede expresarse de la siguiente forma:

⁴ En general, este problema puede solucionarse utilizando modelos SVAR (VAR estructurales), una descripción de estos modelos puede encontrarse en Amisano y Giannini (1997).

$$(A3.6) \quad \tilde{X}_t = \tilde{\mu} + A\tilde{X}_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t$$

donde:

$$\tilde{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k+1} \end{bmatrix}; \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1} & A_k \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, $\theta_i = (JA^i J')P$, $J = [I_n, 0, \dots, 0]_{n \times nk}$.

Si se desea construir intervalos de confianza sobre los estimadores de la función de impulso-respuesta⁵, es necesario conocer su distribución. A este respecto, Lütkepohl (1993) muestra que los estimadores de θ_i tienen la siguiente distribución asintótica:

$$(A3.7) \quad \sqrt{T} \text{vec}(\hat{\theta}_i - \theta_i) \xrightarrow{d} N(0, C_i \Sigma_{\alpha} C_i' + \mathcal{C}_i \Sigma_{\delta} \mathcal{C}_i'); i = 0, 1, 2, \dots$$

donde:

$$C_0 = 0$$

$$C_i = (P' \otimes I_n)G_i; i = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{C}_i = (I_n \otimes \phi_i)H; i = 0, 1, 2, \dots$$

$$G_i = \sum_{m=0}^{i-1} (J(A')^{i-1-m}) \otimes \phi_m$$

$$H = L_n' \{L_n(I_{n^2} + K_m) (P \otimes I_n)L_k\}^{-1}$$

L_n es la matriz de eliminación que satisface la relación $\text{vech}(F) = L_n \text{vec}(F)$, para cualquier matriz $F_{n \times n}$ ⁶.

⁵ Teniendo en cuenta la expresión (A3.5), el estimador de la función de impulso-respuesta está dado por $FIR(\delta, T)_h = \theta'_h \delta$.

K_{mn} es la matriz de conmutación que satisface la relación $vec(G') = K_{mn} vec(G)$, para cualquier matriz $G_{m \times n}$.

$\Sigma_{\hat{\alpha}}$ y $\Sigma_{\hat{\sigma}}$ corresponden a las matrices de varianzas y covarianzas de los estimadores de los parámetros $\alpha = vec(A_1, A_2, \dots, A_k)$ y $\sigma = vech(\Sigma_{\epsilon})$ del modelo (A3.2).

Teniendo en cuenta que los coeficientes de la función de impulso-respuesta, $\theta_i = JA^i J' P$, corresponden a una función no-lineal de los parámetros del modelo (A3.2), la distribución asintótica $\hat{\theta}_i$ especificada en (A3.7) se basa en el resultado:

$$(A3.7a) \quad \sqrt{T}(g(\hat{\beta}) - g(\beta)) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\partial g}{\partial \beta'} \Sigma_{\beta} \frac{\partial g'}{\partial \beta}\right)$$

con $\beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \sigma \end{bmatrix}$, $g(\beta) = JA^i J' P$, A y P son funciones de α y σ , respectivamente, las cuales ya se han especificado. Adicionalmente, se supone la siguiente distribución asintótica de $\hat{\beta}$:

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\sigma} - \sigma \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N\left(0, \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{\alpha}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\hat{\sigma}} \end{bmatrix}\right)$$

La equivalencia entre las matrices de covarianzas de las expresiones (A3.7) y (A3.7a) se encuentra al utilizar propiedades del operador vec , las reglas (6), (8) y (10) de la proposición A.2 de Lütkepohl (1993) y la relación $vec(JA) = \alpha$.

⁶ El operador $vech$ transforma una matriz de dimensión $m \times m$ en un vector $m(m+1)/2 \times 1$ apilando los elementos de las columnas de la matriz que están en y por debajo de la diagonal principal. Por ejemplo:

$$vech \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

B. Intervalos de confianza de la función de impulso-respuesta de un modelo VEC

Dado el siguiente modelo VEC(k) definido sobre el vector de series de tiempo X_t de dimensión n , $CI(1,1)$:

$$(A3.8) \quad \Delta X_t = D_1 \Delta X_{t-1} + \dots + D_{k-1} \Delta X_{t-k+1} - \pi X_{t-k} + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, T$$

este se puede representar como un modelo VAR(k) con los siguientes parámetros:

$$(A3.9) \quad X_t = A_1 X_{t-1} + \dots + A_k X_{t-k} + \varepsilon_t$$

donde:

$$A_1 = D_1 + I_n$$

$$A_i = D_i - D_{i-1}; \quad i = 2, 3, \dots, k-1$$

$$A_k = -(\pi + D_{k-1})$$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} n(0, \Sigma_\varepsilon)$$

En forma matricial, la relación entre los parámetros de las ecuaciones (A3.8) y (A3.9) es la siguiente:

$$(A3.10) \quad [D_1, \dots, D_{k-1}, -\pi] W = [-I + A_1, A_2, \dots, A_k]$$

donde:

$$W = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & I_n & -I_n \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & I_n \end{bmatrix}_{nk \times nk}$$

Teniendo en cuenta este resultado, la metodología para obtener la función de impulso-respuesta con intervalos de confianza se basa en las mismas expresiones

(A3.5) y (A3.7), utilizadas para el modelo VAR. Las matrices de covarianza $\Sigma_{\hat{\alpha}}$ y $\Sigma_{\hat{\sigma}}$ utilizadas en (A3.7), dependen de la distribución de los estimadores de los parámetros de (A3.9).

Suponiendo que la distribución asintótica de los estimadores de los parámetros asociados a (A3.8) es:

$$\sqrt{T} \text{vec}([\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{k-1}, -\hat{\pi}] - [D_1, \dots, D_{k-1}, -\pi]) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{co})$$

y adicionalmente, calculando las matrices de covarianza del operador *vec* de los estimadores de la relación (A3.10) se tiene:

$$V[\text{vec}(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k)] = V[\text{vec}\{(\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{k-1}, -\hat{\pi})W\}]$$

lo cual es equivalente a:

$$V[\text{vec}(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k)] = V[(W' \otimes I) \text{vec}(\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{k-1}, -\hat{\pi})]$$

por lo tanto:

$$V[\text{vec}(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k)] = (W' \otimes I)V[\text{vec}(\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{k-1}, -\hat{\pi})](W \otimes I)$$

por consiguiente, un estimador para $\Sigma_{\hat{\alpha}}$ análogo al utilizado en (A3.7) en el caso de un modelo *vec* es:

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\alpha}} = (W' \otimes I) \hat{\Sigma}_{co} (W \otimes I)$$

Adicionalmente, Lütkepohl (1993) muestra para este modelo que:

$$\sqrt{T} \text{vech}(\hat{\Sigma}_{\varepsilon} - \Sigma_{\varepsilon}) \xrightarrow{d} N(0, 2D_n^+(\Sigma_{\varepsilon} \otimes \Sigma_{\varepsilon})(D_n^+)')$$

donde $D_n^+ = (D_n' D_n)^{-1} D_n'$ y D_n es la matriz de duplicación que satisface la relación $D_n \text{vech}(F) = \text{vec}(F)$ para cualquier matriz F de dimensiones $n \times n$.

Por lo tanto, un estimador de $\Sigma_{\hat{\sigma}}$ es el siguiente:

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\sigma}} = 2D_n^+(\hat{\Sigma}_{\varepsilon} \otimes \hat{\Sigma}_{\varepsilon})(D_n^+)'$$

C. INTERVALOS DE CONFIANZA DE LA FUNCIÓN
DE IMPULSO-RESPUESTA DE UN MODELO VARX

Un modelo VARX(k, m) se define como:

$$(A3.11) \quad A_k(L)X_t = B_m(L)Z_t + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, T$$

donde $\{X_t\}$ es un vector de series de tiempo estacionarias de dimensión n , $\{Z_t\}$ es un vector de variables exógenas estacionarias de dimensión q , $A_k(L) = I - A_1L - \dots - A_kL^k$, $B_m(L) = B_0 + B_1L + \dots + B_mL^m$ y $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} n(0, \Sigma_\varepsilon)$.

El modelo (A3.11) se puede representar de la siguiente forma:

$$(A3.12) \quad X_t = E(L)Z_t + A_k(L)^{-1}\varepsilon_t$$

donde $E(L) = A_k(L)^{-1} B_m(L)$

Siguiendo argumentos similares a los utilizados en (A3.5), la función de impulso-respuesta asociada al modelo (A3.11), o equivalentemente a (A3.12), depende de los términos del polinomio $A_k(L)^{-1}$, mientras que los efectos sobre las variables endógenas cuando se aplican choques a las variables exógenas (análisis de multiplicadores) dependen de los términos del polinomio $E(L)$.

Si se define a β como el vector de parámetros del modelo VARX (A3.11). Es decir, $\beta = \text{vec}(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m, B_0)$ y se asume que su estimador tiene una distribución asintótica dada por $\sqrt{T} \text{vec}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\beta)$, entonces Lütkepohl (1993) muestra que:

$$(A3.13) \quad \sqrt{T} \text{vec}(\hat{E}_i - E_i) \xrightarrow{d} N(0, G_i \Sigma_\beta G_i'); \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

donde $G_0 = (0, I_{nq})$ y $G_i = \frac{\partial \text{vec}(E_i)}{\partial \beta'} = \left[\sum_{j=0}^{i-1} (B' (A')^{i-1-j}) \otimes (JA^j J'), I_q \otimes JA^i J' \right]$

para $i = 1, 2, \dots$

Las matrices A y B resultan de la generalización de la expresión (A3.6) para los modelos VARX, en la cual se representa el modelo (A3.11) de la siguiente forma:

$$(A3.14) \quad \tilde{X}_t = A \tilde{X}_{t-1} + BZ_t + \tilde{\varepsilon}_t$$

con:

$$\tilde{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ \vdots \\ X_{t-k+1} \\ Z_t \\ \vdots \\ Z_{t-m+1} \end{bmatrix}; \tilde{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ I_q \\ 0 \end{bmatrix}; A^{11} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_k \\ I_n & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_{m-1} & B_m \\ 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}; A^{22} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_q & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & I_q & 0 \end{bmatrix}$$

En esta notación los multiplicadores dinámicos E_i se pueden expresar como:

$$(A3.15) \quad E_i = JA^iB$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$ y $J = [I_n \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{n \times (nk+qm)}$

Al igual que en la sección A, los multiplicadores dinámicos, E_i , no son una función lineal de los parámetros del modelo (A3.11) y por lo tanto, la distribución asintótica de sus estimadores se basa en la expresión (A3.7a) con $g(\beta) = JA^iB$ y

$$\beta = \begin{bmatrix} \text{vec}(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m) \\ \text{vec}(B_0) \end{bmatrix}$$

D. INTERVALOS DE CONFIANZA DE LOS MULTIPLICADORES DINÁMICOS DE UN MODELO VECX

El modelo VECX(k, m), que incluye relaciones de cointegración, se define como:

$$(A3.16) \quad \Delta X_t = \sum_{j=1}^{k-1} D_j \Delta X_{t-j} + \sum_{j=0}^m B_j Z_{t-j} - \pi X_{t-k} + \varepsilon_t; \quad t = 1, \dots, T$$

donde $\{X_t\}$ es un vector de series de tiempo I(1) de dimensión n , $\{Z_t\}$ es un vector de variables exógenas estacionarias de dimensión q y $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} n(0, \Sigma_\varepsilon)$.

Al igual que en el caso sin variables exógenas, el modelo (A3.16) se puede representar como un modelo VARX(k, m):

$$(A3.17) \quad X_t = A_1 X_{t-1} + \dots + A_k X_{t-k} + B_0 Z_t + \dots + B_m Z_{t-m} + \varepsilon_t$$

Generalizando (A3.10), la relación entre los parámetros de las ecuaciones (A3.16) y (A3.17) se puede expresar de la siguiente forma:

$$(A3.18) \quad [D_1, \dots, D_{k-1}, -\pi, B_1, \dots, B_m, B_0] W^* = [-I + A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m, B_0]$$

donde:

$$W^* = \begin{bmatrix} W^{*(11)} & 0 \\ 0 & I_{(m+1)q} \end{bmatrix} \quad W^{*(11)} = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & I_n & -I_n \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}_{nk \times nk}$$

por lo tanto, en forma análoga a lo realizado en la sección B de este anexo:

$$(A3.19) \quad \hat{\Sigma}_\alpha = (W^{*'} \otimes I_n) \hat{\Sigma}_{\text{cox}} (W^* \otimes I_n)$$

suponiendo que:

$$\sqrt{T} \text{vec}([\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{k-1}, -\hat{\pi}, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_m, \hat{B}_0] - [D_1, \dots, D_{k-1}, -\pi, B_1, \dots, B_m, B_0]) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\text{cox}})$$

en este caso se tiene que α está asociado al operador vec de las matrices del lado derecho de la expresión (A3.18).

En la práctica, las estimaciones de las matrices D_i , B_i , π y Σ_{cox} se pueden obtener utilizando programas econométricos convencionales. Como paso siguiente, las matrices A_i se pueden encontrar utilizando la relación (A3.18). Finalmente, los multiplicadores dinámicos E_i , definidos en (A3.12), pueden calcularse mediante la

expresión (A3.15), los intervalos de confianza asociados a estos multiplicadores se construyen con base en la matriz de covarianzas especificada en (A3.13), teniendo en cuenta que $\hat{\Sigma}_\beta$ corresponde a $\hat{\Sigma}_\alpha$ especificada en (A3.19).

ANEXO 4

ESTIMACIÓN DE LAS CORRELACIONES CANÓNICAS ρ_i

Siguiendo la metodología sugerida por Seo (1998), las estimaciones de las correlaciones canónicas utilizadas en (A2.4) y (A2.5) están dadas por:

$$\hat{\rho}_i = \sqrt{\Lambda((\hat{\Omega}_{11}^{-1/2})' \hat{\Omega}_{12} \hat{\Omega}_{22}^{-1} \hat{\Omega}_{21} \hat{\Omega}_{11}^{-1/2})} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

donde:

$\Lambda(H)$ indica los valores propios de una matriz H ,

$$\hat{\Omega}(S_l) = \sum_{j=-l+1}^{l-1} k\left(\frac{j}{S_l}\right) \hat{\Gamma}(j),$$

$$\hat{\Gamma}(j) = \begin{cases} \frac{1}{l} \sum_{t=j+1}^l \hat{B}_t \hat{B}'_{t-j} & \text{si } j \geq 0 \\ \frac{1}{l} \sum_{t=j+1}^l \hat{B}_{t+j} \hat{B}'_t & \text{si } j < 0 \end{cases},$$

$$\hat{B}_t = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}'_{\perp} \hat{\varepsilon}_t \\ \hat{\alpha}'_{\perp} \hat{v}_t \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_t = \sum_{i=0}^m \hat{D}_i Z_{t-i} + \hat{\varepsilon}_t$$

$\hat{D}_i, Z_i, \varepsilon_i$ y $\pi = \alpha\beta'$ se especifican en el modelo (A2.1),

$\hat{\Omega}_{ij}, j = 1, 2$ corresponden a las particiones de $\hat{\Omega}$ conforme a $\hat{\alpha}'_{\perp} \hat{\varepsilon}_t$ y $\hat{\alpha}'_{\perp} \hat{v}_t$.

$k\left(\frac{j}{S_l}\right)$ es el *kernel* asociado a la varianza de largo plazo de \hat{B}_p , basado en el método de Andrews (1991).

Utilizando un *kernel* espectral cuadrático, QS-AR(1), Andrews (1991) obtiene:

$$k(x) = \frac{25}{12\pi^2 x^2} \left(\frac{\text{sen}(6\pi x/5)}{6\pi x/5} - \cos(6\pi x/5) \right)$$

con

$$x = \left(\frac{j}{S_l} \right)$$

usando un estimador de ancho de banda automático se tiene para este *kernel*:

$$\hat{S}_l = 1,3221(\hat{\alpha}(2)l)^{1/5}$$

y considerando un modelo AR(1) para $\{v_{a,t}\}_{a=1,2,\dots,p}$:

$$\hat{\alpha}(2) = \left(\sum_{a=1}^p \frac{4\hat{\rho}_a^2 \hat{\sigma}_a^4}{(1 - \hat{\rho}_a)^8} \right) \left(\sum_{a=1}^p \frac{\hat{\sigma}_a^4}{(1 - \hat{\rho}_a)^4} \right)^{-1}$$

los parámetros ρ_a y σ_a se estiman por mínimos cuadrados ordinarios para el siguiente modelo:

$$v_{a,t} = \rho_a v_{a,t-1} + u_{a,t}; \quad a = 1, 2, \dots, p; \quad V(u_{a,t}) = \sigma_a^2$$