

La serie "Borradores Semanales de Economía" es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los Trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

**ESTACIONALIDAD Y PRUEBAS DE RAICES  
UNITARIAS: ALGUNAS CONSIDERACIONES  
GENERALES**

**Por:  
Hugo Oliveros C.**

**1995**

**No. 40**

Para comentarios favor dirigirse al autor:  
Fax: 2865936 - Teléfono 3421035.

# **ESTACIONALIDAD Y PRUEBAS DE RAICES UNITARIAS: ALGUNAS CONSIDERACIONES GENERALES**

**Hugo Oliveros C.\***

**Santafé de Bogotá, agosto de 1995**

---

\* Se agradece muy especialmente a M. Misas tanto la lectura minuciosa como los comentarios y sugerencias a una versión preliminar de este documento. Algunos de los comentarios y sugerencias de H. Vargas también fueron considerados. Como siempre, los errores y omisiones son de exclusiva responsabilidad del autor y no comprometen al Banco de la República.

**"There are three major findings in this paper. First, unit root tests have low power against plausible trend-stationary alternatives. Second, tests of an empirically plausible trend-stationary hypothesis have moderate power against the unit root alternative. Third, there are many cases in which neither test will reject. This suggests that inferences based exclusively on tests for integration may be fragile".**

Véase, de DeJong, et al (1992). "Integration versus Trend Stationarity in Time Series. *Econometrica*, Vol. 60, pp 423-433.

**"Given this last result, one can easily recognize that the consumption and income series for Japan may not fit into a seasonal cointegration model as Engle et al (1993), but may possibly be more appropriately modeled with a periodic cointegration model"**

Véase, Franses, P. (1993). A multivariate approach to modeling univariate seasonal time series. *Journal of Econometrics*, Vol. 63 pp 113-151.

**"We consider in this paper the theoretical possibility that a unit root at the zero frequency can arise because of temporal aggregation of series which, in fact, possess a unit root possibly at some seasonal frequency. Thus, the long-run component of a time series can be misinterpreted. Similarly, a finding of cointegration at the zero frequency could arise between series which has a unit root at the zero frequency and another unit root at another frequency."**

Véase, Granger, W., and Siklos, P. (1995). "Systematic sampling, temporal aggregation, seasonal adjustment, and cointegration. Theory and Evidence. *Journal of Econometrics*, Vol. 66 pp 357-369.

## I. Introducción

Durante los últimos diez años los problemas que se han encontrado en la caracterización del componente de tendencia de las series macroeconómicas han sido grandes. Así lo confirma, por ejemplo, el polémico trabajo de Christiano y Eichenbaum (1989), y los "innumerables" artículos que sobre el tema de componentes de tendencia y raíces unitarias, se encuentran al hacer una revisión de literatura.

Como lo señalan Campbell y Perron (1991) las dificultades que ofrece la estimación de modelos con variables que presentan tendencia estocástica están asociados con varios hechos, de los cuales sobresalen los siguientes: (i) las distribuciones teóricas estándar<sup>1</sup> no pueden ser utilizadas en pruebas de hipótesis que involucran a dichas series; (ii) la potencia de los test en muestras pequeñas es limitada<sup>2</sup>; (iii) los procedimientos de evaluación de la presencia de raíz unitaria en algunos casos pueden desarrollarse a partir de un proceso secuencial, lo que implica una pérdida de potencia en los test que podría deteriorarse aún más, en la medida en que el investigador **desconoce** el verdadero DGP, (el verdadero proceso generador de los datos); (iv) la sobre(sub)parametrización del modelo para capturar componentes de tendencia determinística disminuye(aumenta) la potencia de los test cuando se tiene como hipótesis alterna a un proceso estacionario.

El propósito del presente documento es presentar ,no solo, una revisión de literatura sobre el tema de raíces unitarias, sino, introducir algunos elementos nuevos en la discusión, tratamiento y caracterización del componente estocástico de estacionalidad en series observadas a intervalos "regulares de tiempo".

El documento ha sido dividido en 4 partes. En la segunda se presentan algunas consideraciones de carácter general que introducen algunos puntos básicos de la revisión de literatura. En la tercera se discute el problema de la caracterización de la tendencia,

---

<sup>1</sup> Se hace referencia , por ejemplo, a la imposibilidad de utilizar los valores críticos tradicionales derivados para distribuciones F centrales y "t-student".

<sup>2</sup> En muestras finitas, cualquier proceso estacionario en la tendencia puede ser aproximado arbitrariamente bien por un proceso estacionario en la primera diferencia. Esto es presentado y mostrado por Campbell y Perron (1991) en la regla 7. De otro lado, los mismos autores plantean, en la regla 9, que es posible que se de el fenómeno contrario, es decir, cualquier proceso no-estacionario en la tendencia puede ser aproximado arbitrariamente bien por un proceso estacionario en la tendencia.

se introducen los test más utilizados, y se ilustran los problemas de las pruebas de raíz unitaria tradicionales al examinar series con doble raíz, pero a diferente frecuencia, o las dificultades de las pruebas con series con una raíz estacional. Dentro de esta sección también se introducen las pruebas más utilizadas para comprobar la presencia de estacionalidad: el test desarrollado por Hilleberg et al (1990) y conocido como el test de HEGY; la prueba de Hasza y Fuller (1982), HAFU, y una metodología multivariada, Franses (1993), para probar la existencia de integración periódica en series con estacionalidad y modelar series univariadas estacionales. Finalmente, en la cuarta sección, se presenta la aplicación de los test propuestos a series trimestrales colombianas además de algunas recomendaciones y conclusiones.

## **II. Consideraciones generales**

Si bien en la mayoría de los casos la construcción de modelos de series de tiempo<sup>3</sup> del tipo ARIMA, ARIMAX, o de transferencia y ruido (TFNM) exige, regularmente, tomar una decisión sobre el tipo de diferenciación a utilizar, muy poco se hace en torno a la caracterización e identificación de los componentes estocásticos de tendencia de la componente estacional y no-estacional en un contexto más riguroso.

A menudo, el análisis del modelo ARIMA se reduce a encontrar el modelo más parsimonioso a partir de una definición del orden de diferenciación específico, el cual es utilizado en la medida en que los valores estimados de la función de autocorrelación, autocorrelación parcial y autocorrelación inversa muestrales así lo sugieran. Y es aceptado si: (i) los test de diagnóstico de los residuos señalan la presencia de condiciones de ruido blanco; (ii) una especificación que no utiliza el factor de diferenciación tiene: un modelo menos parsimonioso y adicionalmente presenta problemas en las pruebas de diagnóstico del comportamiento de los residuos; (iii) una sobreparametrización del modelo ARIMA, bien sea en su parte autorregresiva, o en su

---

<sup>3</sup> Para series observadas regularmente, es decir con periodicidad, diaria, semanal, quincenal, mensual, trimestral, etc..

parte de media móvil, confirma la necesidad de utilizar el factor de diferenciación, o desvirtúa, o crea fuertes sospechas, sobre el uso del factor de diferenciación<sup>4</sup>.

A pesar de que lo anterior se convierte en una estrategia "adecuada" para la validación del modelo, el problema se hace aún más complejo cuando para el análisis de las variables y sus posibles relaciones, es necesario caracterizar la tendencia que éstas presentan. De hecho, la existencia de tendencia estocástica o determinística, en la componente estacional y/o en la propia componente de tendencia de una serie, genera un esquema específico de evaluación de la tendencia y de las relaciones que entre las variables se deriven, así como, problemas en la especificación y determinación de las hipótesis alternas de las pruebas de raíz unitaria tradicionales<sup>5</sup>. Adicionalmente, en algunos casos, obliga a replantear el problema de las relaciones entre las variables cuando se desea examinar estas en el contexto del largo plazo<sup>6</sup>. Por ejemplo, Osborn (1988), utilizando test del tipo HAFU con series trimestrales, plantea la necesidad de verificar la presencia de doble raíz [es decir, validar el uso de  $(1 - B)(1 - B^s)$ ] antes de proseguir con el análisis de largo plazo en el contexto de cointegración estacional o no-estacional.

---

<sup>4</sup> Con el propósito de evaluar esta última alternativa se generaron 100 muestras de tamaño 100 para el siguiente DGP;

$Y_t = Y_{t-4} + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t$  ruido blanco, es decir,  $(1-B^4)Y_t = \epsilon_t$  es ruido blanco estimándose el siguiente modelo IMA(1):  $(1-B)(1-B^4)Y_t = (1-\theta)\epsilon_t$ . Los resultados de la estimación del modelo de media móvil confirman parcialmente lo señalado. En tan solo 58 de las 100 muestras se pudo construir un intervalo de confianza para  $\theta$  que pasa por uno, ratificándose así el problema de sobrediferenciación de las series. Si se hubiese utilizado como criterio adicional para decidir si se tenía sobrediferenciada la serie, el comparar el valor absoluto del coeficiente de autocorrelación de primer orden con 0.5, se tendría que adicionar a los 58 ya encontrados por la estimación, otras 21 muestras con problemas de sobrediferenciación.

<sup>5</sup> Véase por ejemplo las pruebas sugeridas por Perron o los test de Dickey-Fuller en su versión no-aumentada y aumentada, entre otros.

<sup>6</sup> En este sentido existen dos posiciones con relación a las propiedades estocásticas de las series en el análisis de cointegración en el contexto de sistemas de ecuaciones. La primera que exige que las variables estén integradas del mismo orden, Engle y Granger (1987); la segunda, en la cual el interés se centra en la caracterización del vector como integrado de algún orden y no exige que todas las variables tengan el mismo grado de integración a nivel individual, Lutkepohl (1992).

Beaulieu y Miron (1992), en un trabajo que extiende la metodología de HEGY para datos mensuales, señalan en sus conclusiones, (i) el uso de variables dummy estacionales no es apropiado cuando el proceso generador de la estacionalidad es de carácter integrado; (ii) el uso del operador de  $(1 - B^s)$  es adecuado siempre y cuando los test de estacionalidad reporten que la serie está integrada a todas las frecuencias estacionales y no estacionales inherentes a la descomposición del filtro  $(1 - B^s)$ ; y (iii) en la medida en que la potencia de las pruebas no es perfecta, es necesario replantear la pregunta de la validez del uso del filtro  $(1 - B^s)$  en términos de la "conveniencia" de usar éste como herramienta para explicar el fenómeno económico que está implícito en el comportamiento de la variable de interés.

Franses (1993), sostiene que los test tipo HEGY mantienen restricciones de invarianza de los parámetros en el tiempo que deben ser probadas si se desea tener un test más robusto y, utilizando ese argumento, desarrolla una prueba para validar la presencia de integración no-periódica o periódica, considerando como parte del test la discusión sobre casos de integración estacional y no-estacional.

Al igual que en el trabajo de Osborn (1993), el argumento central del test desarrollado por Franses está relacionado con el concepto de integración periódica, el cual permite que los parámetros y el error asociado con la componente estacional varíen de acuerdo a la estación. Así, si una serie presenta integración periódica la serie tendrá un carácter no-estacionario, y en consecuencia, muchos de los resultados de los test de raíz unitaria tradicionales estarán sesgados a no rechazar la hipótesis de tendencia estocástica a pesar de que el proceso generador de la serie es de otra naturaleza.

En una línea de trabajo similar, Granger y Siklos (1995), señalan la imposibilidad de los test de Dickey-Fuller, DF, para evaluar correctamente la presencia de tendencia estocástica en series donde se presentan problemas de muestreo sistemático o, de agregación temporal. En particular, por ejemplo, señalan la falta de potencia de los test

para rechazar la hipótesis de raíz unitaria a la frecuencia cero en series que provienen de un proceso de agregación temporal<sup>7</sup>.

Granger y Siklos (1995) muestran como ejemplo de lo anterior<sup>8</sup> el caso donde la serie input del proceso de agregación tiene raíz unitaria estacional a alguna de sus posibles frecuencias estacionales, conduciendo a que el test de DF sobre la serie agregada sugiera la presencia de raíz unitaria a la frecuencia cero.

Hasta este punto se han presentado algunos comentarios sobre los problemas que generan dentro de los test de raíz unitaria tradicionales la presencia de componentes estacionales en la serie. Sin embargo, como se desprende de la copiosa revisión de literatura desarrollada por Campbell y Perron (1991), y de la que se encuentra hasta la fecha, la discusión sobre la caracterización de la tendencia continua estando a la orden del día.

### III. Sobre la caracterización de la tendencia

Con el propósito de introducir algunos elementos relacionados con el concepto de tendencia se hace necesario presentar el siguiente modelo para una serie estacionaria. En general si  $Y_t$  sigue un proceso estacionario invertible,  $Y_t$  puede ser aproximado a través del siguiente modelo ARMA(p,q) :

$$\begin{aligned}\phi(B) Y_t &= \alpha + \Theta(B) \epsilon_t \\ Y_t &= \alpha [\phi(B)]^{-1} + [\phi(B)]^{-1} \Theta(B) \epsilon_t \\ Y_t &= \mu + \psi(B) \epsilon_t\end{aligned}\tag{1}$$

---

<sup>7</sup> Existe agregación cuando se utiliza, por ejemplo, el promedio trimestral de una serie que se observa mensualmente. La serie observada mensualmente puede considerarse como la serie input del proceso de agregación temporal.

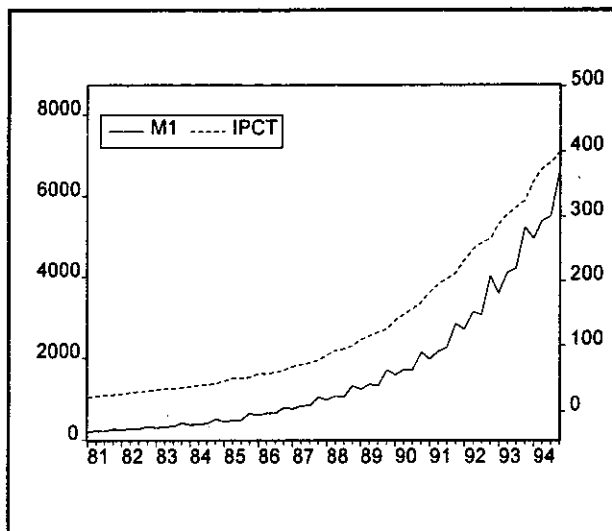
<sup>8</sup> Y llama la atención sobre los efectos de componentes estacionales sobre los test de DF.



donde  $\epsilon_t$  es una serie ruido blanco,  $\mu$  es la media de  $Y_t$ , y los polinomios  $\Theta(B)$  y  $\phi(B)$  representan al filtro de media móvil y autorregresivo del modelo ARMA, respectivamente. Si bien, es claro que tanto la esperanza no-condicional de  $Y_t$  en (1), como su pronóstico condicional sobre un horizonte infinito, es  $\mu$ , [ $Y_t$  se estaciona alrededor de  $\mu$ ] esta representación no sería la más plausible si  $Y_t$  fuese, por ejemplo, un indicador de precios, o algún agregado monetario, los cuales regularmente presentan tendencia.

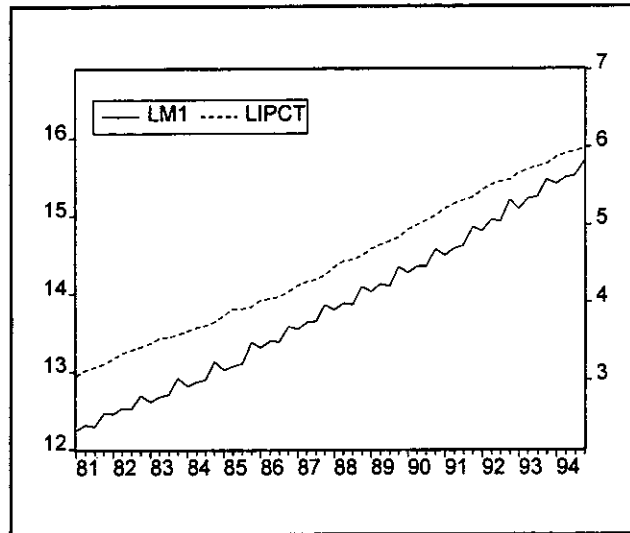
Como se observa en el gráfico 1, los datos trimestrales (datos a fin de) del índice de precios al consumidor total nacional, IPCT, y de los medios de pago, M1, presentan tendencia, y en consecuencia, sería mucho más conveniente utilizar un modelo que recoja dicho comportamiento.

**GRAFICO 1**



En el caso de las series anteriores se hace necesario la transformación logarítmica, gráfico 2, ya que ambas series siguen un comportamiento exponencial en su tendencia.

**GRAFICO 2**



El modelo más simple que se puede usar para aproximar la dinámica de las series presentadas en el gráfico 2 es de la forma:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \psi(B) e_t \\ \mu_t &= \alpha + \delta t \end{aligned} \quad (2)$$

y describe un proceso de tendencia determinística estacionario. Esto en la medida en que al descontarle a  $Y_t$  el valor de  $(\alpha + \delta t)$  o el de  $(\delta t) \forall t$ , el proceso se convierte en un proceso estacionario alrededor de cero, o de  $\alpha$ , respectivamente. En este caso el filtro  $\psi(B) = [\theta(B)/\phi(B)]$  se supone invertible y estable<sup>9</sup>. La ecuación (2) se conoce como modelo de tendencia estacionario, TSM, y puede ser presentada de una manera más general así:

---

<sup>9</sup> Invertible y estable, en este caso, significa que la inversa de  $\theta(B)$  existe y que  $\psi(1)$  es finito.

$$\begin{aligned}
Y_t &= TD_t + v_t \\
TD_t &= \beta DVA_t \\
v_t &= \psi(B) \epsilon_t
\end{aligned}
\tag{3}$$

donde:  $TD_t$  es la componente determinística de tendencia de  $Y_t$ , [ $DVA_t$  y  $\beta$  son las variables determinísticas de tendencia y los parámetros asociados a éstas respectivamente];  $v_t$  es la componente estocástica, que es estacionaria y de media cero, dadas las condiciones impuestas sobre  $\psi(B)$  y el hecho de que  $\epsilon_t$  es una serie ruido blanco.

En el caso de (2) el parámetro  $\beta$  es un vector fila conformado por  $(\alpha \delta)$ , en tanto que las variables determinísticas,  $DVA$ , están definidas por el vector columna  $(1, t)$ . Para LM1 se espera, por ejemplo, que el filtro  $\psi(B)=[\Theta(B)/\phi(B)]$  recoja los movimientos periódicos (los picos y valles de la gráfica 2) que se observan a través del año. Es decir, uno que permita reproducir todos los movimientos estacionales de LM1<sup>10</sup>.

A través de  $\psi(B)$  es factible recoger adecuadamente los movimientos estacionales de la variable, sin embargo, otros mecanismos de carácter determinístico podrían ser usados para aproximar el comportamiento de la variable, por ejemplo un modelo de la forma:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mu_t + \epsilon_t \\
\mu_t &= \delta_0 + \delta_1 S_{2t} + \delta_2 S_{3t} + \delta_3 S_{4t} + \delta \cdot t
\end{aligned}
\tag{4}$$

podría ser utilizado para reproducir el comportamiento de LM1.

---

<sup>10</sup> El logaritmo de IPCT, LIPCT en el gráfico 2, también presenta movimientos estacionales, [modelos ARIMA para LIPCT sugieren la necesidad de utilizar diferenciaciones no-estacionales y estacionales además de parámetros estacionales] sin embargo, en este caso, el gráfico no ofrece suficiente información respecto de la presencia del componente estacional.

Al igual que (2) el modelo descrito en (4) puede ser representado utilizando la forma general propuesta en (3). En este caso se tiene que si  $\psi(B)$  en (3) es igual a uno,  $v_t$  es una serie ruido blanco;  $TD_t$  igual a  $\mu_t$  siendo los  $\delta_i$  constantes desconocidas, estimables, y los  $S_i$  variables "dummy" estacionales que toman el valor de 1 en el  $i$ -ésimo trimestre y cero en otro caso.

Hasta este punto se ha considerado tan solo la posibilidad de que el proceso explique el comportamiento de la variable, en lo que se relaciona con la tendencia, sea de carácter determinístico. Es decir, solo se han hecho algunos supuestos sobre la forma de  $TD_t$  en (3) y se ha mantenido las condiciones de estacionaridad sobre  $v_t$ . Si se introducen condiciones de no-estacionaridad sobre  $v_t$  es posible entonces introducir el concepto de tendencia estocástica. La condición de no-estacionaridad de  $v_t$  se logra reconociendo que existe una descomposición del filtro  $\psi(B)$  en (3), específicamente de su componente autorregresivo  $\phi(B)$  de la forma:

$$\begin{aligned}
 v_t &= \psi(B) \epsilon_t \\
 v_t &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \epsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \phi(B) &= (1 - B) \phi^*(B) \\
 (b) \quad \phi(B) &= (1 - B^s) \phi^*(B) \\
 (c) \quad \phi(B) &= (1 - B) (1 - B^s) \phi^*(B)
 \end{aligned}$$

donde  $\phi^*(B)$  es un filtro estacionario (raíces fuera del círculo de radio unidad). De lo anterior se desprende que si alguna de las descomposiciones presentadas en (5) se mantiene, y se premultiplica a (3) por  $(1 - B)$ ,  $(1 - B^s)$ , o  $(1 - B)(1 - B^s)$ , dependiendo de cual descomposición de (5) se cumpla para  $\phi(B)$ , se encontrará un modelo estacionario para la serie diferenciada resultante.

Por ejemplo, si se asume que en (5) (a) el componente de tendencia determinística  $TD_t$  es igual a  $(\alpha + \delta t)$ , se tiene que la primera diferencia de  $Y_t$  es estacionaria alrededor

de  $\delta$ . Es decir,  $(1-B) Y_t$  tiene un modelo estacionario, el cual puede ser representado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (1 - B) Y_t &= (1 - B) TD_t + (1 - B) v_t \\
 (1 - B) Y_t &= (TD_t - TD_{t-1}) + (1 - B) \psi(B) \epsilon_t \\
 (1 - B) Y_t &= \delta + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \epsilon_t \\
 Y_t &= \delta + Y_{t-1} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \epsilon_t \\
 Y_t &= \delta + Y_{t-1} + \psi(B) \epsilon_t
 \end{aligned} \tag{6}$$

En otras palabras,  $Y_t$  tiene una raíz unitaria, y por lo tanto, los choques aleatorios que se produzcan sobre la variable hoy, afectarán indefinidamente el comportamiento futuro<sup>11</sup> de la variable, es decir,  $Y_t$  tiene tendencia estocástica. El modelo descrito en (6) es conocido como modelo estacionario en la primera diferencia, DSM.

#### A. Test de integración no-estacional (raíz unitaria a la frecuencia cero<sup>12</sup>)

Cuando se hace referencia a las pruebas de raíz unitaria, se habla regularmente de test donde la descomposición del factor autorregresivo  $\phi(B)$  se hace de la forma planteada en (5) (a). En dichos casos se dice que la serie es integrada de orden 1 y se nota como:  $Y_t \sim I(1)$ <sup>13</sup>.

---

<sup>11</sup> Esto es conocido como en la literatura como el fenómeno de persistencia de los choques aleatorios, y se produce, en la medida en que  $Y_t$  depende sistemáticamente de  $Y_{t-1}$ .

<sup>12</sup> El test se plantea como una prueba a la frecuencia cero puesto que es posible aproximar la función generatriz de autocovarianzas del proceso con raíz unitaria a partir del espectro de la serie diferenciada, calculado éste a la frecuencia cero, véase Hamilton, (1994). En consecuencia una notación más consistente en el caso (a) de (5) es  $Y_t \sim I_0(1)$ , y en general sería mucho más conveniente utilizar  $Y_t \sim I_\omega(1)$ , para referirse a series integradas a distintas frecuencias  $\omega$ , véase Hylleberg et al (1990).

<sup>13</sup> Si para llevar a condiciones de estacionaridad a la serie se requiere utilizar  $d$  veces (a), es decir aplicar  $(1-B)^d$  a  $Y_t$ , se dice que,  $Y_t$ , es integrado de orden  $d$ , y se nota como  $Y_t \sim I(d)$ .

Los test de raíz unitaria que se presentan en la Tabla 1 se basan la construcción de algunas estadísticas [derivadas a partir de la estimación de un modelo de regresión lineal] y en la comparación de éstas con unos valores críticos encontrados a partir de experimentos de Monte Carlo desarrollados por los autores del test. Es importante señalar que la pruebas de raíz unitaria adolecen de los siguientes problemas entre otros:

(i) Desde el punto de vista empírico es casi imposible distinguir entre la primera diferencia de (2) y lo presentado en (6)<sup>14</sup>. Es decir, empíricamente es difícil diferenciar a un TSM de un DSM, puesto que sus primeras diferencias mantienen una relación de equivalencia, no solo, de carácter funcional, sino, en las propiedades estadísticas.

(ii) En la medida en que los test dependen fundamentalmente de los supuestos que se hagan sobre el DGP de las series, resulta conveniente desde el punto de vista empírico, fijar ex-ante una posición sobre la forma de  $TD_t$  para no sesgar la prueba.

(iii) El uso de gráficos si bien puede ayudar a tomar decisiones sobre el tipo de test a utilizar<sup>15</sup>, puede también sesgar al investigador.

(iv) Una combinación inadecuada de rezagos, [aumento o reducción indiscriminada en la parte aumentada del test] y/o un manejo inapropiado de los componentes de  $TD_t$  pueden llevar a conclusiones equivocadas.

(v) La presencia de componentes estacionales en la series genera serios inconvenientes en la toma de decisiones sobre el orden de integración de la serie en pruebas del tipo DF.

---

<sup>14</sup> Dado que de entrada no se conoce el verdadero DGP sería imposible distinguirlo a partir de un análisis de la función de autocorrelación, véase nota 2 de este documento. De otro lado y como se deriva de los test de DF, y lo señala Kwiatkowski et al (1992) y Posada y Misas (1995), se requiere de una fuerte evidencia para rechazar la hipótesis de raíz unitaria. En este sentido, en Oliveros (1990), se derivan medidas de persistencia, se estima  $\psi(1)$ , a partir de test de DF ampliados con algunos resultados consistentes, en particular se considera el problema de la invertibilidad del filtro de media móvil  $\psi(B)$  en el caso de sobrediferenciar (2).

<sup>15</sup> Sobre todo en aquellos donde se advierte claramente: (a) la existencia de tendencia, por ejemplo en el caso del gráfico (2); (b) un cambio estructural en la media o en la pendiente de la serie. En este caso, los componentes de TD tienen una estructura particular, véase Perron (1989)(1990) y Zivot y Andrews (1990).

**TABLA 1**  
**TEST DE RAIZ UNITARIA**  
Supuestos  $v_t$  i.i.d.  $N(0, \sigma^2)$

DGP	REGRESION	HIPOTESIS	TEST 1/
(A1) $Y_t = Y_{t-1} + v_t$	$Y_t = \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=1; H_1: \rho < 1$	$\tau = \frac{(\hat{\rho}-1)}{\hat{\sigma}_\rho}$
(A2) $(1-B)Y_t = v_t$	$(1-B)Y_t = \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=0; H_1: \rho < 0$	$\tau = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\rho}$
(B1) $Y_t = Y_{t-1} + v_t$	$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=1; H_1: \rho < 1$	$\tau_\mu = \frac{(\hat{\rho} - 1)}{\hat{\sigma}_\rho}$
(B2) $(1-B)Y_t = v_t$	$(1-B)Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=0; H_1: \rho < 0$	$\tau_\mu = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\rho}$
(C1) $Y_t = \alpha + Y_{t-1} + v_t$	$Y_t = \alpha + \delta t + \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=1; H_1: \rho < 1$	$\tau_\tau = \frac{(\hat{\rho} - 1)}{\hat{\sigma}_\rho}$
(C2) $(1-B)Y_t = \alpha + v_t$	$(1-B)Y_t = \alpha + \delta t + \rho Y_{t-1} + v_t$	$H_0: \rho=0; H_1: \rho < 0$	$\tau_\tau = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\rho}$

1/ Los valores críticos con los cuales se deben comparar las estadísticas se encuentran en Dickey y Fuller (1981). En el caso de los parámetros adicionales introducidos en (2) y (3) es posible utilizar test F tradicionales para probar hipótesis conjuntas del tipo  $H_0: (\alpha, \rho) = (0, 1)$  comparando el valor obtenido para la F con los valores críticos sugeridos por Dickey y Fuller. Los test sugeridos no cambian si los  $v_t$  están correlacionados serialmente y por lo tanto si un modelo de la forma:  $v_t = \psi(B) \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t$  ruido blanco y  $\psi(B)$  similar al definido en (3), reproduce adecuadamente la dinámica de  $v_t$ , la regresión que se debe utilizar es una que aproxima al filtro  $\psi(B)$  a través de un filtro autorregresivo de orden  $p$ , y que tiene por ejemplo, en el caso de (B2), la siguiente forma:  $(1-B)Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \gamma_1(1-B)Y_{t-1} + \gamma_2(1-B)Y_{t-2} + \dots + \gamma_p(1-B)Y_{t-p} + \epsilon_t$ .

Dado que las pruebas basadas en regresiones que utilizan los valores de las pruebas t-student definidas en el Tabla 1 presentan los inconvenientes ya mencionados, algunas pruebas alternativas han aparecido en la literatura. Si bien, la mayoría de éstas utilizan regresiones como las presentadas en la Tabla 1, las pruebas sobre la presencia de raíz unitaria a la frecuencia cero se basan en medidas derivadas del comportamiento de los residuos de la regresión, en lugar de la significancia de los parámetros de ésta.

Kwiatkowski et al (1992) desarrollan un test de raíz unitaria, que en adelante se denominará KPSS, en el cual la hipótesis nula es estacionariedad y la alterna raíz unitaria. La prueba parte de la base de que es posible descomponer la serie de tiempo en dos componentes: uno determinístico y otro estocástico, siendo este último aproximado a través de una caminata aleatoria. El test consiste en probar si la varianza del error del modelo que se utiliza para capturar el componente de tendencia estocástica (la varianza del error de la caminata aleatoria) es distinta de cero<sup>16</sup>.

Phillips y Perron (1988), en una línea de trabajo que se preocupa por la estructura de la autocorrelación de los residuos de las regresiones planteadas en la Tabla 1, desarrollan un test que corrige la estadística de  $T(\rho-1)$  utilizada por DF para probar la existencia de raíz unitaria. El test propuesto es equivalente al test aumentado de DF, ADF, en la medida en que reconocen que las autocovarianzas de los residuos pueden ser distintas de cero.

De nuevo, al igual que en los test ADF, el número de autocovarianzas a utilizar en el test [equivalente al número de rezagos a usar en la prueba ADF y al  $l_{max}$  utilizado en KPSS] aparecen como una de las preguntas que desde el punto de vista empírico no tienen una respuesta única<sup>17</sup>.

---

<sup>16</sup> Una presentación detallada sobre el test y su uso con datos anuales colombianos puede encontrarse en Posada y Misas (1995). Agradezco a M. Misas el facilitar, para ser usado en este trabajo, el programa desarrollado por ella para este test.

<sup>17</sup> En general existen algunas reglas para el caso de ADF, sin embargo, como se señaló anteriormente, y se verá más adelante, si el supuesto sobre el DGP es inadecuado éstas no funcionan. De otro lado, el tamaño de la muestra aparece como otra restricción para determinar la longitud del rezago.



Dado que una de las metas de este trabajo es ilustrar las dificultades que se tiene cuando se desarrollan test de raíz unitaria<sup>18</sup> del tipo DF ADF y KPSS sobre series cuyo DGP tienen características similares a las descritas en (5) para los casos (b) y (c) y que adicionalmente se desea presentar algunas de las pruebas sobre presencia de estacionalidad en series se decidió utilizar 4 tipos de DGP para evaluar la bondad de las diferentes pruebas. Con ese propósito se simularon y generaron 100 muestras de tamaño 100 para cada uno de los DGP que a continuación se presentan en la Tabla 2.

**Tabla 2**

Tipo de DGP <sup>19</sup>		Forma del DGP $e_t$ iid $N(0, \sigma^2)$
A	Estacionario AR	$(1-\phi B)Y_t = e_t ; Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$
B	1 Raíz N.E.	$(1-B)Y_t = e_t ; Y_t = Y_{t-1} + e_t$
C	1 Raíz E.	$(1-B^4)Y_t = e_t ; Y_t = Y_{t-4} + e_t$
D	2 Raíces E. y N.E	$(1-B)(1-B^4)Y_t = e_t ; Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-4} - Y_{t-5} + e_t$

### 1. Resultados de los Test tipo DF y KPSS en series con componente estacional

En esta sección se sintetizan los resultados alcanzados al utilizar las pruebas de ADF y KPSS en series donde si bien existe una tendencia de carácter estocástico, ésta no tiene las características inherentes a series  $I_0(1)$ .

Es importante señalar que el propósito de este ejercicio es mostrar las debilidades de los test y las posibles equivocadas interpretaciones de la prueba cuando alguno de

---

<sup>18</sup> Otras pruebas han sido desarrolladas con el propósito de evaluar la existencia de tendencia estocástica en la series. Una revisión de la literatura reciente sobre este punto puede encontrarse en Hamilton, J. (1994) o en Banerjee, et all (1993).

<sup>19</sup> N.E significa no-estacional y E. significa estacional.

los supuestos sobre los cuales se construye es violado, en este caso, el DGP de la series es distinto al implícito en la prueba<sup>20</sup>.

Los resultados del análisis de 100 muestras de tamaño 100 para los test aumentados de Dickey y Fuller de orden  $p$ ,  $ADF(p)$ , se presentan en la Cuadro 1. Los porcentajes que aparecen en la Cuadro 1 corresponden al porcentaje de muestras donde la comparación con el valor crítico permite no rechazar la hipótesis nula. En el caso del test ADF en las muestras donde se reporta la presencia de raíz unitaria se garantiza que como mínimo el p-value asociado con la prueba sobre ruido blanco de los residuos, Ljung-Box, supere el 0.1.

**Cuadro 1**  
**Resultados de los test ADF para series con componentes estacionales**  
**(% de muestras donde NO SE RECHAZO  $H_0$ : raíz unitaria frecuencia cero)**

Tipo de DGP en Tabla 2	ADF(p)	Regresión B2 en Tabla1	Regresión C2 en Tabla1
	$p$	$\tau_{\mu}$	$\tau_t$
C	3	80	73
C	8	94	91
D	5	89	90
D	8	95	92

Es conveniente mencionar que tanto para las pruebas ADF como para KPSS se usan dos tipos de  $TD_t$  [sin y con tendencia determinística] para no sesgar al lector en las conclusiones sobre los patrones que se derivan del comportamiento de los test. Sin embargo, como se señaló en la introducción y en la discusión sobre los problemas del

---

<sup>20</sup> En el trabajo con datos reales regularmente el investigador desconoce casi totalmente el DGP y usa su "educated guess" para tomar una decisión sobre el DGP de la serie, en consecuencia, los patrones que se deriven del comportamiento de los test en este contexto tan solo servirán para llamar la atención sobre problemas que tienen los investigadores cuando utilizan estos test y el verdadero DGP tiene una forma similar o igual a la descrita en (5) para los casos (b) y (c).

test KPSS y las pruebas tipo DF en los literales (ii) a (iv) el uso de una estructura unica garantizará que la potencia de la prueba sea la adecuada<sup>21</sup>.

Los resultados para los mismos DGP del test KPSS , descrito detalladamente en Posada y Misas (1995), se presentan en el cuadro 2. En este caso se utilizan dos valores básicos para la construcción de la ventana de Bartlett y los estimadores de la varianza de la caminata aleatoria (se usa lmax=4,8) que describiría la presencia de tendencia estocástica. Se utilizan estos valores ya que la respuesta de las series simuladas a valores rezagados de ellas se encuentran a partir del cuarto rezago y Kwiatkowski et all (1992), sugieren el uso de lmax=L8, el cual alcanza el valor de 8, en lugar de  $n^{1/2} = 10$ .

**Cuadro 2**  
**Resultados de los test KPSS para series con componentes estacionales**  
**(% de muestras donde SE RECHAZO  $H_0$ : proceso estacionario)**

Tipo de DGP en Tabla 2	lmax	Regresión $Y_t = \alpha + \epsilon_t$	Regresión $Y_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t$
		$\eta_\mu$	$\eta_\epsilon$
C	4	13	4
C	8	20	4
D	4	100	89
D	8	98	97

Con relación a los resultados de ambas pruebas es conveniente señalar:

(i) La presencia de solo una componente estacionalidad de carácter integrado en las series, DGP C, conduce a conclusiones encontradas y falsas en las dos pruebas.

---

<sup>21</sup> La que capture (i) la tendencia determinística  $Td_t$  apropiadamente, es decir, una que, como mínimo, incluya en la regresión (Tabla 1 y Cuadro 1) las variables de tendencia que están en verdadero DGP; y (ii) la dinámica de la serie apropiadamente [a través de la parte aumentada del test]. En otras palabras, el uso de tan solo una regresión auxiliar [una sola estadística  $\tau$ ] es sugerido.

Mientras que la ADF señala la presencia de raíz unitaria a la frecuencia cero, KPSS sugiere que las series son estacionarias alrededor de un valor inicial<sup>22</sup>.

(ii) El aumento o disminución del número de rezagos considerados en ADF tiene efectos importantes sobre los resultados del test, es decir, se pueden presentar cambios en la decisión sobre la caracterización del proceso. Por ejemplo, no todas las muestras que sugieren la presencia de tendencia estocástica con una menor parte aumentada, [80% y 89%, en el caso del DGP C y D bajo la regresión B2] están contenidas en el grupo de muestras con mayor parte aumentada [94% y 95%, en el caso del DGP C y D bajo la regresión B2].

(iii) Si un test ADF sobre la primera diferencia de una serie generada por un DGP tipo D de la tabla 2 [serie con dos raíces a diferente frecuencia] se lleva a cabo, existe una alta probabilidad de que se concluya que la serie es  $I(2)$ . Para las series presentadas en los gráficos 1 y 2 los resultados de los test sobre  $(1 - B) \ln(Y)$  con  $Y = \text{IPC}$  o  $M1$ , sugieren en ambos casos la presencia de una doble raíz a la frecuencia cero, es decir  $\ln(Y) \sim I(2)$ . Este resultado no es sorprendente, puesto que un filtro de la forma  $(1 - B)(1 - B^s) \ln(Y)$  genera series estacionarias<sup>23</sup> para el vector  $Y$ . Y como se desprende de los resultados de la prueba ADF presentados en la Cuadro 1, para el DGP tipo C, existe una alta probabilidad de confundir  $(1 - B^s)$  con  $(1 - B)$ .

(iv) En el caso de series generadas por un DGP que contiene una raíz a la frecuencia cero por factorización de las componentes integradas, los test tipo DF muestran, para este pequeño ejercicio de simulación, un patrón de reconocimiento claro de la existencia de  $(1 - B)$ , y no permiten discriminar la existencia de otro factor. El test de KPSS señala

---

<sup>22</sup> Alrededor de cero, en la medida en que los valores iniciales utilizados para simular los DGP involucrados en las pruebas son cero.

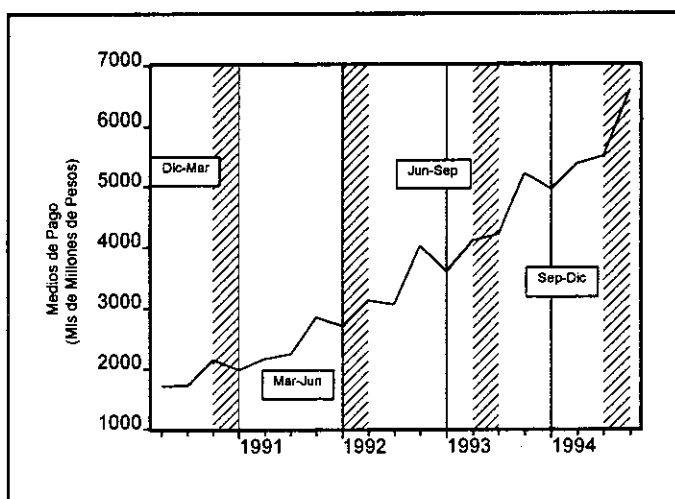
<sup>23</sup> En el caso de la primera diferencia de  $LM1$ ,  $DLM1$ , se requiere el uso de  $\tau_{\epsilon}$  con 4 rezagos, situándose el valor de éste en  $-3.11$  el cual comparado con su valor crítico al 5%,  $-3.50$ , permite concluir que  $(1-B)\log(M1_t) = DLM1_t$  tiene una raíz adicional. La estadística de Ljung-Box de los residuos para 24 rezagos  $Q(24)$  alcanza el valor de 21.26 y tiene implícito un P-value de 0.623.  $LIPC$  requiere del uso de  $\tau_{\mu}$  y de nuevo el test permite concluir en este caso que  $(1-B)\log(IPC_t) = DLIPC_t$  requiere de otra diferenciación para llegar a condiciones de estacionaridad.

fuertemente la presencia de  $(1 - B)$  tan solo en aquellos casos donde la factorización es posible<sup>24</sup>.

## B. Test de integración estacional

En esta sección se presentan algunos de los test que sobre integración estacional se encuentran en la revisión de la literatura. La escogencia de los test está asociada fundamentalmente con dos puntos: (i) la necesidad de utilizar y proveer pruebas alternativas en la evaluación de las propiedades estocásticas de las series, de tal forma que, se garantice que los modelos econométricos que se deriven sean consistentes con éstas. En este sentido las tres pruebas que se presentan a continuación permiten evaluar ampliamente la presencia de componentes aleatorios en el componente estacional y mejoran el desempeño de algunos de los test clásicos que, en materia de estacionalidad, se encuentran en la literatura, véase Osborn (1990) y Franses (1993); (ii) los test propuestos resultan sencillos y útiles ya que un gran porcentaje de las series trimestrales colombianas de precios, salarios y algunas de agregados monetarios, presentan señales de existencia de componentes estacionales en su comportamiento, véase, por ejemplo, en el gráfico 3, algunos de los comportamientos trimestrales recurrentes de M1.

Gráfico 3



<sup>24</sup> Por descomposición de  $(1 - B^s) = (1 - B)(1 + B)(1 + B^2)$  con  $s=4$ ; por factorización  $(1 - B)(1 - B^s)$ .

Con el propósito de introducir una notación más general que permitirá distinguir claramente las hipótesis nulas de los test que a continuación se presentan es necesario introducir la siguiente descripción de una serie. Se dice que  $Y_t$  es integrada de orden  $(d,D)$  si existe una representación ARMA estacionaria e invertible de  $(1 - B)^d(1 - B^s)^D Y_t$ , y se notará como  $Y_t \sim I(d,D)$ <sup>25</sup>

### 1. Test de HEGY

El test propuesto por Hylleberg et al (1990) y utilizado por Engle et al (1993), EGHL, para introducir detalladamente la discusión sobre cointegración estacional, fue diseñado con el propósito de determinar la existencia de una raíz unitaria estacional en una serie.

El test<sup>26</sup>, cuya hipótesis nula es  $H_0: Y_t \sim I(0,1)$ , permite no solo probar la existencia del filtro  $(1 - B^s)$ , sino descubrir cual descomposición es la dominante, es decir, permite determinar que clase de proceso estacional es el responsable de la estacionalidad de la serie. Hylleberg et al (1990) a través de pruebas individuales, tipo "t-student", o conjuntas, tipo "F", sobre los parámetros de una regresión ofrecen la posibilidad de determinar cuales de las raíces [no-estacional y estacionales, implícitas en la descomposición de  $(1 - B^s)$ ] gobiernan el comportamiento de series trimestrales<sup>27</sup>. Es decir, para el filtro  $(1 - B^s) = (1 - B^4)$  encuentran cuales son las raíces dominantes en su descomposición y cual(es) genera(n) la estacionalidad en la serie. En la Tabla 3 se presentan tanto las transformaciones como los 5 tipos de regresiones usados en el test para determinar la presencia de estacionalidad en las series.

---

<sup>25</sup> Por ejemplo, si una serie es  $Y_t \sim I(1,0)$  significa que  $(1 - B) Y_t$  es estacionario; si es  $Y_t \sim I(0,1)$  significa que  $(1 - B^s) Y_t$  es estacionario; y si es  $Y_t \sim I(1,1)$  significa que  $(1 - B)(1 - B^s) Y_t$  es estacionario.

<sup>26</sup> El test ha sido utilizado con datos colombianos en el caso de una función de demanda de dinero por Misas y Suescun (1993). En dicho documento además de presentar y usar los test propuestos por Hylleberg et al (1990), se discute y aplica el concepto de cointegración estacional para algunos agregados monetarios colombianos.

<sup>27</sup> Para series con periodicidad mensual Beaulieu y Miron (1992) desarrollan una extensión del test de HEGY.

Es importante tener en cuenta que en la medida en que las transformaciones utilizadas en el test son ortogonales, las distribuciones de los test propuestos no se ven

**Tabla 3**  
**Test de HEGY**

<b>Transformaciones utilizadas sobre la serie trimestral original <math>Y_t</math></b>	
$Z1_t = (1+B+B^2+B^3)Y_t$ ; $Z2_t = -(1-B+B^2-B^3)Y_t$ ; $Z3_t = -(1-B^2)Y_t$ ; $Z4_t = (1-B^4)Y_t$	
<b>Representación General del Proceso, Hipótesis nula:</b> $H_0: Y_t \sim I(0,1) = (1 - B^4)Y_t = (1 - B)(1 + B)(1 + iB)(1 - iB)Y_t$ <sup>28</sup>	
$\phi(B) Z4_t = \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \epsilon_t$ ; con $\phi(B)=(1-\phi_1 B - \dots - \phi_p B)$ estacionario, $\pi$ 's iguales a cero y $\epsilon_t$ ruido blanco	
$\pi_1 = 0$ (frecuencia cero); $\pi_2 = 0$ (frecuencia bianual); $\pi_3 = 0$ (frecuencia anual)	
<b>Regresión Auxiliar Tipo 1 (RAT1)</b>	
$Z4_t = \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \phi_1 Z4_{t-1} + \dots + \phi_p Z4_{t-p} + \epsilon_t$	
<b>Regresión Auxiliar Tipo 2 (RAT2)</b>	
$Z4_t = c + \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \phi_1 Z4_{t-1} + \dots + \phi_p Z4_{t-p} + \epsilon_t$	
<b>Regresión Auxiliar Tipo 3 (RAT3)</b>	
$Z4_t = c + \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \phi_1 Z4_{t-1} + \dots + \phi_p Z4_{t-p} + \delta_1 S_{2t} + \delta_2 S_{3t} + \delta_3 S_{4t} + \epsilon_t$	
<b>Regresión Auxiliar Tipo 4 (RAT4)</b>	
$Z4_t = c + \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \phi_1 Z4_{t-1} + \dots + \phi_p Z4_{t-p} + \delta T + \epsilon_t$	
<b>Regresión Auxiliar Tipo 5 (RAT5)</b>	
$Z4_t = c + \pi_1 Z1_{t-1} + \pi_2 Z2_{t-1} + \pi_3 Z3_{t-2} + \pi_4 Z3_{t-1} + \phi_1 Z4_{t-1} + \dots + \phi_p Z4_{t-p} + \delta_1 S_{2t} + \delta_2 S_{3t} + \delta_3 S_{4t} + \delta T + \epsilon_t$	
<b>Hipótesis Alternas</b>	
$H_1: Y_t \sim I(1,0)$	$H_1: Y_t \sim I(0,0)$
Test : $\pi_1 = 0$ ; [ $\pi_2 \neq 0$ ] y [ $\pi_3$ y $\pi_4 \neq 0$ ]	Test : $\pi_1 \neq 0$ ; [ $\pi_2 \neq 0$ ] y [ $\pi_3$ y $\pi_4 \neq 0$ ]

<sup>28</sup> En este caso, la letra i representa el numero imaginario  $-1^{1/2}$  y B es el operador de rezago.

afectadas por la presencia de parámetros  $\pi$ 's iguales a cero, y por lo tanto se requiere una simple comparación de los t-test y F-test con valores críticos para tomar decisiones sobre el tipo de componente estacional que tiene la serie. Estas se toman dependiendo de cual o cuales de los  $\pi$ 's sean iguales a cero, y por lo tanto, se podrá introducir el concepto de integración a frecuencias 1/2, 1/4, es decir, series  $I_{1/2}(1)$  y/o  $I_{1/4}(1)$ .

**Cuadro 3**  
**Resultados de los test HEGY\***  
 (% de muestras)  
 Hipótesis nula  $H_0: Y_t \sim I(0,1)$

Tipo DGP Tabla 2	p	Ordenes de Integración encontrados con:					
		I(0,0)	I(1,0)	I(0,1)	$I_{1/2}(1)$	$I_{1/4}(1)$	REG #
A	0	<b>63 - 9</b>	32 - 86	0 - 0	1 - 2	0 - 0	2 - 4
A	1	<b>54 - 10</b>	38 - 85	0 - 0	6 - 3	0 - 0	2 - 4
A	4	<b>36 - 5</b>	47 - 86	1 - 0	17 - 9	1 - 0	2 - 4
B	0	6 - 5	<b>92 - 93</b>	0 - 0	0 - 0	0 - 0	4 - 5
B	1	4 - 3	<b>93 - 93</b>	0 - 0	0 - 0	0 - 0	4 - 5
B	4	4 - 3	<b>95 - 79</b>	0 - 0	1 - 17	0 - 0	4 - 5
C	0	0 - 0	0 - 0	<b>66 - 68</b>	77 - 81	71 - 76	4 - 5
C	1	0 - 0	0 - 2	<b>69 - 66</b>	84 - 84	76 - 78	4 - 5
C	4	0 - 0	0 - 0	<b>81 - 82</b>	94 - 96	86 - 91	4 - 5
D	1	0 - 0	0 - 3	70 - 43	86 - 70	76 - 48	4 - 5
D	4	0 - 0	0 - 2	82 - 58	93 - 79	88 - 63	4 - 5
D	5	0 - 0	0 - 2	79 - 57	94 - 77	88 - 61	4 - 5

\* El separador (-) se utiliza para distinguir entre los resultados de la prueba usando las regresiones descritas en la última columna del cuadro. Los DGP A, B, C y D tienen las siguientes órdenes de integración respectivamente: I(0,0), I(1,0), I(0,1) e I(1,1). El DGP A fue simulado con  $\phi=0.5$ .



Los resultados de las pruebas para los 4 DGP descritos en la Tabla 2 se presentan a continuación en el Cuadro 3. De nuevo es importante recordar que tan solo se consideran las series como pertenecientes a un determinado DGP, si además de cumplir con test específicos, cumplen con la propiedad de ruido blanco en los residuos, al menos un p-value por encima de 0.1 en el test de Ljung-Box.

De los resultados del test de HEGY presentados en el Cuadro 3 es importante señalar lo siguiente:

(i) Se confirma la potencia del test de HEGY para discriminar entre los distintos DGP asociados con las hipótesis, sin embargo se observa, al igual que el caso de DF, que de una adecuada aproximación al componente de tendencia de la serie depende el éxito [en este caso, caracterizar correctamente los DGP de la Tabla 2] de la prueba.

En este caso debe reconocerse que la media del proceso puede ser: una constante, una constante más  $\delta T$ , o la constante más  $\delta_i S_{it}$ , esta puede ser aproximada de muchas formas. En consecuencia, la discusión sobre que tipo de prueba se debe utilizar para contrastar adecuadamente el problema de integración estacional estará sujeta a los valores iniciales del DGP y al tipo de componente de tendencia que se observa en la serie.

(ii) Con series  $I(1,1)$  el test permite reconocer tan solo la existencia de la integración estacional, y en la mayoría de los casos [en más del 78% de las muestras en la RAT5 para rezagos mayores a uno] se observa la reiterada presencia del  $(1 - B^4)$  como parte de la descomposición<sup>29</sup> de un **supuesto filtro estacionario** para series  $Y_t$ ,  $(1 - B^4)$  en lugar de  $(1 - B)(1 - B^4)$ . De lo anterior se deriva la necesidad de utilizar otra prueba para verificar si existe o no evidencia para soportar el uso de una sola diferenciación.

(iv) Los resultados con series estacionarias, DGP A, son solo alentadores al utilizar RAT3; sin embargo, es importante mencionar que una sobreparametrización del componente de

---

<sup>29</sup> La presencia de raíces a las frecuencias  $1/2$  y  $1/4$  en las series con componente estacional es relativamente grande, no inferior al 75% en series cuyo verdadero DGP es  $I(1,1)$  y superior al 50% en aquellas con DGP  $I(1,1)$ . Los porcentajes de muestras donde la descomposición completa se encuentra esta en alrededor del 70% en series  $I(0,1)$  en tanto que para series  $I(1,1)$  están por encima del 70% con la RAT 4.

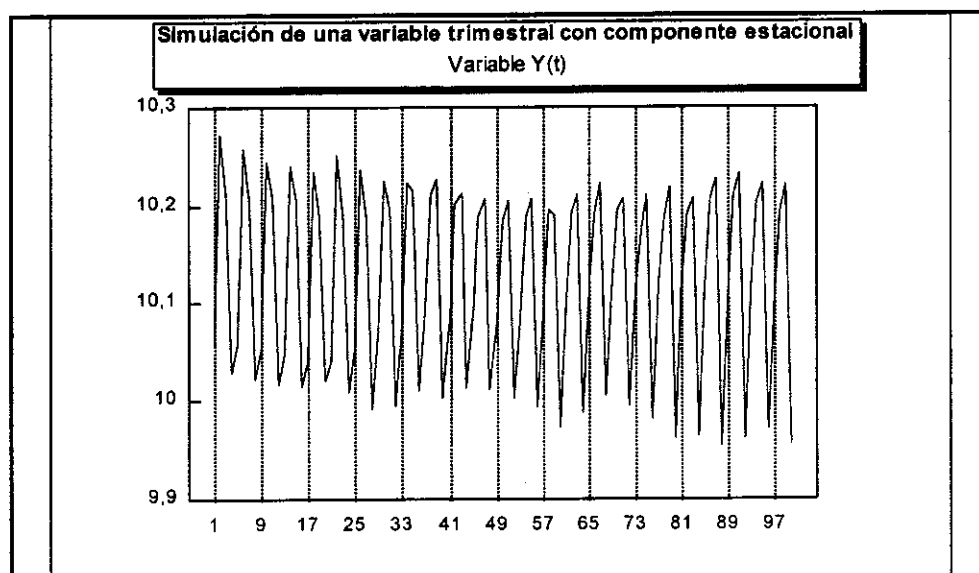
tendencia determinístico, léase utilizar RAT4 o RAT5, solo reporta resultados un tanto simalres en regresiones auxiliares sin parte aumentada.

(vi) El comportamiento en series  $I(0,1)$  es aceptable. En al menos el 70% de los casos se encuentra la descomposición completa, y se observa una marcada presencia de raíces a frecuencias  $1/2$  y  $1/4$  usando las regresiones RAT4 y RAT5 descritas en la Tabla 3 .

## 2. Test de Franses

Siguiendo en la misma línea de análisis de la presencia de componentes estacionales de carácter integrado recientemente se ha presentado un nuevo test desarrollado en el contexto multivariado por Franses (1993). Si bien la prueba que a continuación se introduce permite discriminar entre las alternativas de descomposición del filtro autorregresivo  $\phi(B)$  descritas (5) para el caso (b), ofrece también la posibilidad de distinguir dentro de series estacionales, o no-estacionales, si el carácter de integración que éstas poseen es periódico o no. Es decir, ofrece la posibilidad de diferenciar entre aquellas series cuyo componente estacional, por ejemplo, puede ser capturado a través de un modelo donde los parámetros asociados con las "estaciones" varíen, de aquel donde los párametros del modelo no varíen.

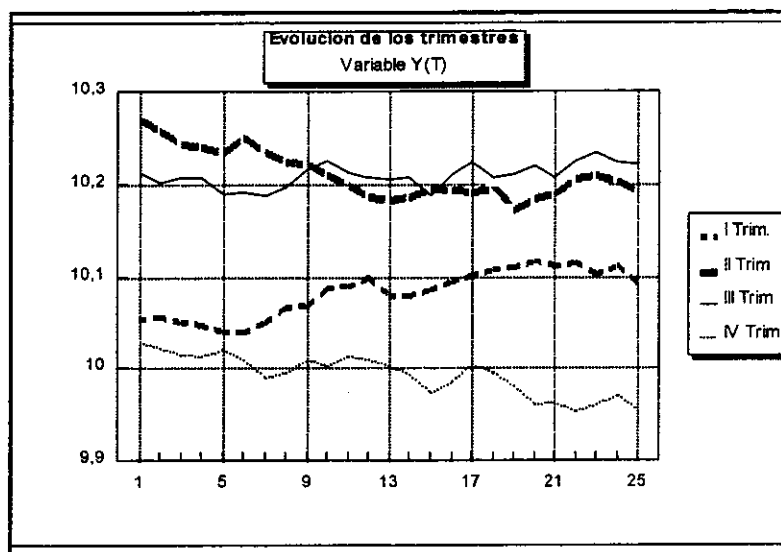
**Gráfico 4**



El test propuesto por Franses para una serie observada trimestralmente,  $Y_t$ , con componente estacional, presentada en el gráfico 4, parte de la base de que es posible:

- (i) establecer una representación VAR de las series anuales implícitas en la serie trimestral<sup>30</sup>, las cuales se presentan en adelante como los componentes del vector  $Y_T$ ;
- (ii) investigar si los componentes de  $Y_T$  comparten tendencias comunes<sup>31</sup>, ver gráfico 5;
- (iii) evaluar si el proceso se puede caracterizar como de carácter periódico, y si lo es
- (iv) investigar qué tipo de representación autorregresiva le es inherente, es decir, decidir que tipo de modelo PAR(p) se puede ajustar a la serie observada<sup>32</sup>.

**Gráfico 5**



<sup>30</sup> De una serie trimestral es posible construir 4 series anuales. La primera será la serie anual que recoge el primer trimestre, la segunda involucra, para todos los años en la muestra, el segundo trimestre, y así sucesivamente hasta construir la cuarta serie anual.

<sup>31</sup> En el gráfico (5) se presenta las tendencias que siguen las 4 series anuales provenientes de la serie trimestral  $Y_t$  presentada en el gráfico 4.

<sup>32</sup> El modelo autorregresivo periódico más simple, PAR(1) es de la forma:

$$Y_t = \alpha_s Y_{t-1} + \epsilon_{st}$$

donde los parámetros  $\alpha_s$  representan el efecto del componente estacional, y  $\epsilon_{st}$  el error que se comete, el cual varía en sus propiedades estadísticas dependiendo del valor de  $s$  y  $t$ , con  $s=1, \dots, 4$  y  $t=1, \dots, n$ .

El test multivariado propuesto parte de la base de que para una serie trimestral  $Y_t$  con  $n$  observaciones,  $t=1, \dots, n$ , existe una representación multivariada con base en series anuales de la forma  $Y_T = (Y_{1T} \ Y_{2T} \ Y_{3T} \ Y_{4T})'$  con  $T=1, \dots, n/4$  que permite evaluar la presencia de integración periódica [PAR(P)] y no-periódica [pruebas tipo HEGY] a partir de pruebas de cointegración multivariadas [test de cointegración tipo Johansen] y de test de hipótesis [pruebas del tipo  $H_{rj}$  de Johansen y Juselius (1992)] sobre restricciones de los parámetros del VAR(p) que recoge la restricción de largo plazo<sup>33</sup> si esta existe.

La prueba parte de la base de que existe una representación VAR(p) del vector  $Y_T$  que puede tener implícitas restricciones de largo plazo entre sus componentes, así, el VAR(p) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A_0 Y_T &= c + A_1 Y_{T-1} + A_2 Y_{T-2} + \dots + A_p Y_{T-p} + v_T \\
 Y_T &= \mu + \Phi_1 Y_{T-1} + \Phi_2 Y_{T-2} + \dots + \Phi_p Y_{T-p} + \epsilon_T
 \end{aligned} \tag{7}$$

con  $\Phi_i = \frac{A_i}{A_0^{-1}}$ ;  $\mu = \frac{c}{A_0^{-1}}$  y  $\epsilon_T = \frac{v_T}{A_0^{-1}}$

Si es factible comprobar que existen tendencias comunes entre los trimestres, es decir, entre los componentes de  $Y_T$ , y que éstas siguen un esquema específico, es posible derivar reglas sobre el tipo de diferenciación a utilizar sobre la serie trimestral  $Y_t$  a partir de los resultados de los test de cointegración. En tanto exista evidencia para soportar la hipótesis de cointegración es posible entonces encontrar una representación VEC de la forma:

$$\nabla Y_T = \mu + D_1 \nabla Y_{T-1} + \dots + D_{p-1} \nabla Y_{T-(p-1)} + \Pi Y_{T-p} + \epsilon_T \tag{8}$$

---

<sup>33</sup> Una descripción detallada del test de cointegración y su uso series trimestrales y mensuales colombianas puede encontrarse en Misas y Oliveros (1994) y Misas, Oliveros y Uribe (1994).

donde<sup>34</sup> la matriz  $\Pi$  en (8) recoge las restricciones de largo plazo entre los componentes del vector  $Y_T$ , es decir, las restricciones de largo plazo entre los trimestres, las cuales son utilizadas por Franses para evaluar la hipótesis de presencia de un PAR(p) a partir de pruebas restringidas sobre la estructura de la matriz  $\Pi$ <sup>35</sup>.

Antes de presentar la forma como se prueba presencia de PAR(p) en una serie  $Y_t$  es conveniente mostrar, para el modelo autorregresivo periódico más simple como se pueden entrelazar sus representaciones univariadas y multivariadas, y cuales son sus elementos comunes.

En el modelo univariado PAR(1) para la serie trimestral  $Y_t$ , descrito en (9), muestra que existen 4 posibles distintos parámetros  $\alpha$ 's y procesos de error  $\epsilon_{st}$

$$Y_t = \alpha'_{st} Y_{t-1} + \epsilon_{st} \quad (9)$$

Como se señaló anteriormente, es posible derivar una representación multivariada para el PAR(1) usando una representación VAR(1) y su VEC, [presentadas en (10)]

$$\begin{aligned} Y_T &= \Phi_1 Y_{T-1} + \epsilon_T \\ \nabla Y_T &= \Pi Y_{T-1} + \epsilon_T \end{aligned} \quad (10)$$

---

<sup>34</sup> El operador  $\nabla = (1-B)$  y los  $D_i$  son funciones de los  $\Phi$ 's presentados en (7). Véase en Lutkepohl y Reimers (1992) y Misas y Oliveros (1994) detalles de la estimación de los parámetros del VAR a través del VEC, así como la construcción de los test de cointegración utilizando la metodología propuesta por Johansen.

<sup>35</sup> La cual representa las relaciones de largo plazo entre las componentes del vector  $Y_T$ , y es utilizada para comprobar si existe cierto tipo [forma de la matrix  $\Pi$ ] de relaciones de largo plazo. Los mecanismos y formas de construcción detallada de los test de cointegración: estadísticas de la traza y mayor valor propio pueden ser consultados en Johansen y Juselius (1990) y Misas y Oliveros (1994).

imponiendo algunas restricciones sobre la matriz  $\Pi^{36}$  de (10). A continuación se presenta una de las posibles representaciones restringidas de  $\Pi$  que puede ser utilizada para aproximar el PAR(1)

$$\begin{aligned}
 Y_T &= \Phi_1 Y_{T-1} + w_T \varepsilon_t & Y_T &= (Y_{1T} \ Y_{2T} \ Y_{3T} \ Y_{4T})' \\
 \nabla Y_T &= \Pi Y_{T-1} + w_T \varepsilon_t & \text{con} & \\
 \Pi &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha_1 \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 1) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11}$$

De (11) se desprende que todos los componentes del vector  $Y_T$ , dependen solamente de  $Y_{4(T-1)}$  y utilizando el hecho de que  $\Pi = -(I - \Phi)$ , siendo  $I$  una matriz idéntica de dimensión 4, se tiene que el VAR(1) implícito en (11) puede ser visto como:

$$\begin{aligned}
 Y_{1T} &= \alpha_1 Y_{4(T-1)} + w_{1T} \varepsilon_t \\
 Y_{2T} &= \alpha_1 \alpha_2 Y_{4(T-1)} + w_{2T} \varepsilon_t \\
 Y_{3T} &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 Y_{4(T-1)} + w_{3T} \varepsilon_t \\
 Y_{4T} &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 Y_{4(T-1)} + w_{4T} \varepsilon_t
 \end{aligned} \tag{12}$$

---

<sup>36</sup> Como lo señalan Johansen y Juselius (1990) la matriz  $\Pi$ , [de dimensión (4x4) equivalente a la  $\Phi$  descrita en la primera parte de (10)] es igual al producto de dos arreglos matriciales,  $\Pi = \gamma \beta$ , uno asociado con la velocidad con que retorna el sistema a su nivel de equilibrio de largo plazo [ $\gamma$ : (4xr)], el otro [ $\beta$ : (rx4)] relacionado con el propio mecanismo de largo plazo, el cual es descrito a través de  $r$  combinaciones lineales estacionarias de las componentes del vector  $Y_T$  presentado en (10). Si esto sucede, se espera que el comportamiento anual de algunos de los trimestres sea similar a través del tiempo, es decir, que los trimestres covaríen sistemáticamente de manera similar. El gráfico 5 es una muestra típica de una serie cuyo DGP es del tipo C de la tabla 2,  $Y_t \sim I(0,1)$ , y como se observa ninguno de los trimestres covaría de manera similar con los otros, en consecuencia, el valor esperado para  $r$  en este caso será cero. El test propuesto por Franses sugiere para este tipo de DGP que la matriz  $\Pi$  no existe, es decir  $r=0$ .

Así mismo es posible tener una representación multivariada del PAR(1) definido en (10),  $Y_t = \alpha_s^* Y_{t-1} + e_{st}$ , a partir de la siguiente representación:

$$A Y_T = \epsilon_T; \quad Y_T = (Y_{1T} \ Y_{2T} \ Y_{3T} \ Y_{4T})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 B \\ -\alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde se tiene que todos los componentes del vector  $Y_T$  dependen de  $Y_{4(T-1)}$  de una manera recursiva,  $Y_{1T}$  lo hace directamente,  $Y_{1T} = \alpha_1 Y_{4(T-1)} + e_{1T}$ , en tanto que los restantes componentes lo hacen a través de una relación contemporánea recursiva que se deriva de (13) en la cual:  $Y_{2T}$  depende de  $Y_{1T}$ ,  $Y_{3T}$  depende de  $Y_{2T}$ , y  $Y_{4T}$  depende de  $Y_{3T}$ . La equivalencia entre (12) y (13) se alcanza al observar que los errores del sistema en (12) son funciones de los  $e$ 's de (13).

El proceso de evaluación y determinación del filtro o del modelo a utilizar se describe a continuación en la Tabla 4 para los casos  $r=0,1$  y 3 parcialmente. Los filtros asociados con las pruebas son los que se deben utilizar para llevar a condiciones de estacionaridad a las series en el caso de no presentarse evidencia para soportar la hipótesis de existencia del modelo PAR(p).

**Tabla 4**  
**Test de Franeses - MSURT**

<b>Modelo a Estimar</b>			
$\nabla Y_T = \mu + D_1 \nabla Y_{T-1} + \dots + D_{p-1} \nabla Y_{T-(p-1)} + \Pi Y_{T-p} + \epsilon_T$			
<p><b>Hipótesis:</b> Vectores de Cointegración <math>r=0,1,2,3,4</math>; defina el valor de <math>p</math> usando criterios de información.  <b>Test estadístico:</b> estadísticas de la traza o máximo valor propio de Johansen.  <b>Valores Críticos:</b> Franeses (1993) para muestras <math>T=25</math> o <math>50</math> equivalente a <math>t=100</math> o <math>t=200</math>            Si <math>r&gt;0</math> use las matrices y el test <math>H_{ri}</math> si rechaza existe un <math>PAR(p)</math>;            en otro caso use los filtros para llevar a condiciones de estacionaridad la serie.</p>			
<b>Test de Hipótesis <math>H_{rj}</math> para <math>j=1,2</math></b>		$\sum_{j=1}^r \log \left[ \frac{1-\lambda_j}{1-\lambda_j^*} \right]$	
<b>r</b>	<b>Matriz de Restricciones Test sobre <math>\Pi</math></b>	<b>Vectores de Cointegración</b>	<b>Filtros</b>
0	ninguna	no existen	$(1 - B^4)$
1	$H_{11} = (-1, 1, -1, 1)'$ $H_{12} = (1, 1, 1, 1)$	$Y_{4T} - Y_{3T} + Y_{2T} - Y_{1T}$ $Y_{4T} + Y_{3T} + Y_{2T} + Y_{1T}$	$(1 - B)(1 + B^2)$ $(1 + B)(1 + B^2)$
3	$H_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$Y_{2T} - Y_{1T}$ $Y_{3T} - Y_{2T}$ $Y_{4T} - Y_{3T}$	$(1 - B)$

\* Los valores  $\lambda_j$  y  $\lambda_j^*$  corresponden a los valores propios del test propuesto por Johansen sin y con restricciones respectivamente. Veáanse mayores detalles sobre el test en Johansen y Juselius (1992) secciones II y III, Hansen y Johansen (1993), o en Misas y Oliveros (1994) entre otros.

Los resultados del test de Franeses para 3 de los 4 DGP presentados en la tabla 2 se presentan en la cuadro 4. Los test de hipótesis sobre la presencia de  $PAR(p)$  se llevaron a cabo considerando tn solo la existencia de un modelo  $VAR(1)$  [ $p=1$ ] para la construcción de los test de Johansen, [pruebas  $H_{ri}$  descritas en la tabla 4]; los filtros que



aparecen presentados en la tabla son los sugeridos para llevar a condiciones de estacionaridad a las series.

**Cuadro 4**  
**Resultados del test de FRANSES**  
**(% de muestras encontradas)**

D G P	Número de Vectores de Cointegración										
	4	3			2			1			0
	NF*	(1-B)	(1+B)	PAR(1)	(1-B <sup>2</sup> )	(1+B <sup>2</sup> )	PAR(1)	(1-B)(1-B <sup>2</sup> )	(1-B)(1-B <sup>2</sup> )	PAR(1)	(1-B <sup>4</sup> )
B	6	<b>44</b>	0	5	19	0	17	0	0	9	0
C	0	0	0	0	0	0	1	0	0	7	<b>92</b>
D	0	0	0	4	0	1	19	4	1	68	3

\* Significa que no se usa filtro para llevar a condiciones de estacionaridad, es decir, la serie es estacionaria.

Con relación a los resultados del test es importante resaltar lo siguiente:

- (i) El test tiene muy poca potencia para discriminar procesos I(1,0) como los descritos por el DGP B. Tan solo en el 44% de los casos se encuentra que el proceso se puede caracterizar como un DSM y se termina aceptando que el 31% de las muestras del DGP B siguen un PAR(1).
- (ii) En el caso de series estacionales puras, DGP C, la prueba ofrece una potencia aceptable, al concluir que el 92% de las muestras provenientes de procesos I(0,1) son clasificadas por el test como de esta naturaleza.
- (iii) Los resultados para series del DGP D [series que requieren doble diferenciación] son muy pobres en la medida en que señalan tan solo la presencia de integración periódica en este DGP cuando en realidad ésta no existe. Esto último podría considerarse como una señal [síntoma] que se deriva al utilizar la prueba en este tipo de DGP.

### 3. Test de HAFU y "t-test" OSBORN

La última prueba que se presenta en este documento es la desarrollada por Hasza y Fuller (1982), HF, y que permite detectar la presencia de raíces unitarias a frecuencias no-estacionales y estacionales en conjunto.

La prueba propuesta por HF tiene como hipótesis nula  $H_0: Y_t \sim I(1,1)$ . Osborn (1993) retoma el test para construir valores críticos<sup>37</sup> para los "t-test" implícitos en el análisis de las siguientes hipótesis alternas:

$$H_{11}: Y_t \sim I(0,0), \quad H_{12}: Y_t \sim I(1,0) \quad \text{y} \quad H_{13}: Y_t \sim I(0,1)$$

El test propuesto HF y discutido en Osborn(1993) para el caso de series trimestrales, es presentado en detalle en la Tabla 4. La prueba está en una línea similar a la propuesta por DF en su ADF en la medida de que una vez eliminado el componente de tendencia determinístico de la serie, el cual se nota como  $Z_t$  en la Tabla 4, se supone la existencia de una representación ARMA de  $(1-B)(1-B^4)Y_t = X_t$ , la cual podría ser aproximada "adecuadamente" por un proceso autorregresivo de orden  $p$ ,  $AR(p)$ , si la serie  $Y_t$  proviene de un proceso  $I(1,1)$ <sup>38</sup>.

El test que proponen HF y Osborn parte de la base de que si la inclusión de variables predictoras de  $X_t$ , distintas a su propia historia, asociadas con  $Z_t$ ,  $(1-B)Z_t = Z_{5,t}$  o con  $(1-B^5)Z_t = Z_{4,t}$ , resulta significativa en la explicación de  $X_t$ , este hecho podría considerarse como la evidencia requerida para rechazar la hipótesis nula,  $H_0: Y_t \sim I(1,1)$ , en favor de algunas de las hipótesis alternas presentadas anteriormente<sup>39</sup>.

---

<sup>37</sup> Dependiendo de diferentes supuestos sobre la estructura del componente de tendencia determinística de la serie.

<sup>38</sup> Bajo la hipótesis nula, descrita en la representación general del proceso en la Tabla 5, se asume que los  $\beta$ 's son iguales a cero, en consecuencia se supone que  $X_t$  sigue un proceso autorregresivo de orden  $p$ , sigue un  $AR(p)$ .

<sup>39</sup> Las similitudes que existen entre los test tipo DF y HF van desde: (i) el mecanismo que se utiliza para eliminar el componente de tendencia; (ii) el tratamiento de la parte aumentada; y (iii) la forma como se contruye el test a partir de la separación de las componentes del filtro bajo la hipótesis nula  $(1-B)(1-B^4)$  usando los  $Z_{4,t}$  y  $Z_{5,t}$  los cuales son funciones  $(1-B^4)$  y  $(1-B)$  respectivamente, lo cual es equivalente al uso que tiene en el modelo de regresión la variable  $Y_{(t-1)}$  en DF, Tabla 1.

**Tabla 5**  
**Test de HAFU**

<b>Transformaciones utilizadas sobre la serie trimestral original <math>Y_t</math></b>		
$X_t = (1-B)(1-B^4)Y_t$		
<b>Regresión 1</b>		
$X_t = \alpha_1 S_{1t} + \alpha_2 S_{2t} + \alpha_3 S_{3t} + \alpha_4 S_{4t} + Z_t$ $Z_t$ es el error de la regresión y los $S_{it}$ variables dummy estacionales		
<b>Regresión 2</b>		
$X_t = \phi_1 X_{(t-1)} + \phi_2 X_{(t-2)} + \dots + \phi_p X_{(t-p)} + \epsilon_t \equiv \Phi(B)X_t = \epsilon_t$ ; $\epsilon_t$ ruido blanco		
<b>Transformaciones basadas en <math>Z_t</math></b>		
$Z_{5,t} = \Phi^*(B)(1-B)Z_t$ y $Z_{4,t} = \Phi^*(B)(1-B^4)Z_t$ con $\Phi^*(B)$ es el polinomio en B con los valores de $\phi$ estimados de la regresión 2		
<b>Representación General del Proceso</b>		
<b>Hipótesis nula:</b>		
$H_0: Y_t \sim I(1,1) \equiv (1-B)(1-B^4)Y_t \equiv X_t \sim I(0,0)$ $X_t = \beta_1 Z_{4,(t-1)} + \beta_2 Z_{5,(t-4)} + \phi_1 X_{(t-1)} + \phi_2 X_{(t-2)} + \dots + \phi_p X_{(t-p)} + \epsilon_t$ con $\beta_1 = \beta_2 = 0$		
<b>Hipótesis Alternas</b>		
$H_{11}: Y_t \sim I(0,0)$	$H_{12}: Y_t \sim I(1,0)$	$H_{13}: Y_t \sim I(0,1)$
$\beta_1$ y $\beta_2 \neq 0$	$\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$	$\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 = 0$

De los resultados de la aplicación del test sobre los 4 DGP descritos en la Tabla 2 y presentados en el cuadro 4 es conveniente señalar:

(i) En todos los casos existe una alta sensibilidad de los resultados del test a la escogencia de los rezagos que se involucran en la parte aumentada. Se observa que para procesos  $I(0,0)$  e  $I(1,0)$  tan solo en la medida en que se incluye el cuarto rezago de  $X_t$  se produce el cambio esperado de caracterización de proceso como proveniente de procesos  $I(0,0)$  e  $I(1,0)$ , respectivamente. Un fenómeno contrario se presenta en el caso de procesos  $I(0,1)$  e  $I(1,1)$ .

(ii) La discusión sobre el número de rezagos a utilizar [o la escogencia de rezagos si algunos de los coeficientes no-son significativos] así como las implicaciones que tendría sobre el test la existencia de una parte de media móvil en el proceso, continuará estando a la orden del día .

**Cuadro 4**  
**Resultados de los test HAFU\***  
**(% de muestras encontradas)**

DGP Tabla 2	p	Ordenes de Integración encontrados			
		I(1,1)	I(1,0)	I(0,1)	I(0,0)
A	1	0	0	77	0
A	3	0	0	84	0
A	4	0	0	0	86
B	1	0	0	11	0
B	3	0	0	45	0
B	4	0	95	0	4
C	1	0	0	85	2
C	3	0	0	93	0
C	4	0	0	53	43
D	1	80	1	3	0
D	3	87	0	2	0
D	4	72	8	1	1

\* Los DGP A,B, C y D tienen las siguientes órdenes de integración respectivamente: I(0,0), I(1,0), I(0,1) e I(1,1). Las muestras que se reportan como pertenecientes a alguno de los ordenes de integración señalados tienen un p-value mayor de 0.1 en la prueba de ruido blanco para los residuos.

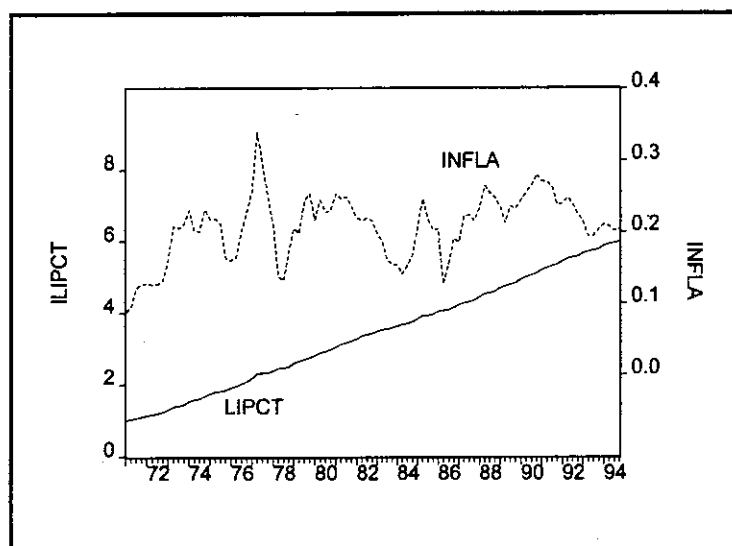
#### IV. Aplicaciones, conclusiones, recomendaciones e inquietudes

Dentro de esta sección se presenta la aplicación de las pruebas presentadas en las secciones anteriores para algunas series colombianas además de algunas conclusiones, recomendaciones e inquietudes.

##### A. Aplicaciones

Con el propósito de ilustrar el uso de las pruebas se presentan los resultados de los test para algunas series colombianas. Especial énfasis se hará en los resultados del test sobre la serie del logaritmo del índice de precios al consumidor total nacional (LIPCT) y la serie de "inflación anual", INFLA, derivada de la diferenciación estacional de LIPCT, es decir,  $INFLA = (1-B^4)LIPCT$ , puesto que la caracterización de estas variables ha suscitado algún debate entre los investigadores económicos<sup>40</sup>.

GRAFICO 6



<sup>40</sup> Parte de la discusión sobre la caracterización de la inflación como un fenómeno persistente se ha generado [y está asociada con el uso de los test tipo DF sobre series de crecimiento en precios que se observan a diferente frecuencia] en la medida en que no se reconoce que existe una diferencia significativa entre las propiedades estocásticas de una serie de inflación anual observada mensualmente, con las propiedades de una observada trimestral y más aun con las que tiene una que se observa una vez al año. Incluso, los resultados de los test podrían ser distintos a una misma frecuencia de observación si se usan, por ejemplo, series que adolecen de problemas de agregación temporal, [véase, Granger y Siklos (1995)] y series a fin de período.

Los resultados de los test, que se presentan en el cuadro 5, para las series trimestrales de LIPCT e INFLA para el periodo comprendido entre los años 1971 y 1994, se basan en lo siguiente:

(i) Se reconoce la posible presencia de tendencia y de una componente estacional en LIPCT, [véase gráfico 6 en lo que respecta a la tendencia] en tanto que para INFLA no se utiliza un componente de tendencia. Así, en cada una de las pruebas se hará uso de estos argumentos.

(ii) El uso de polinomios completos no se requiere completamente en algunas de las pruebas, [HEGY permite selección de los rezagos], sin embargo, se decidió utilizar el mínimo polinomio completo requerido para tener condiciones de ruido blanco y/o cubrir parámetros estacionales de media móvil o autorregresivos implícitos en los modelos ARIMA de estas dos series. Adicionalmente, se mantuvo como argumento que el último rezago fuese significativo.

(iii) En la medida en que los resultados de los test están sujetos a las restricciones descritas en las secciones anteriores y a las señaladas en (i) y (ii), se presentan los resultados para la muestra completa, 1971 - 1994, y para el periodo 1980 - 1994 con el propósito de ilustrar algunos de los inconvenientes de las pruebas.

(iv) Algunos de los valores críticos que se presentan tan solo pueden usarse en muestras de tamaño 100, en consecuencia tan solo se rechazará la hipótesis, en el caso del periodo 1980-1994, si el resultado del test es lo suficiente grande para hacerlo.

(v) Los asteriscos significan que se se rechaza tan solo la hipótesis si el nivel de significancia deseado fuese no superior a los siguientes : \* se rechaza al 10%; \*\* se rechaza al 5%; \*\*\* se rechaza al 1%. En la mayoría de los casos las decisiones se tomaron al 5%.

(vi) La presentación de las hipótesis nulas y/o de las alternas asociadas a la decisión de rechazar la hipótesis nula estan referenciadas siempre en el contexto de la doble raíz I(d,D), esto con el propósito de mantener consistencia con lo expuesto hasta esta parte, sin embargo, debe recordarse que ADF y KPSS no se preocupan por la presencia de componentes estacionales en las series.

**Cuadro 5**  
**Evaluación de LIPC e INFLA**

Test	Periodo:1971/1994 96-Obs		Periodo:1980/1994 60 - Obs.	
	LIPCT	INFLA	LIPCT	INFLA
<b>ADF(p) -Tabla 1 ;H<sub>0</sub>: I(1,0)=I(1)</b>	ADF(8)	ADF(8)	ADF(8)	ADF(4)
"t-test" ( $\tau_{\mu}, \tau_{\epsilon}$ )	( , -1.83)	(-2.92* , )	( , -2.37)	(-1.71, )
"t-test" (1-B)Y <sub>(t-p)</sub> sin signo	2.72	2.82	3.13	3.66
P-value(k) Ljung Box residuos	0.61(18)	0.76(18)	0.68(12)	0.69(12)
Decisión	I(1,0)	I(1,0)	I(1,0)	I(1,0)
<b>KPSS(L) ; H<sub>0</sub>: I(0,0)=I(0)</b>	KPSS(4)	KPSS(4)	KPSS(3)	KPSS(3)
( $\eta_{\mu}, \eta_{\epsilon}$ )	( , 0.22****)	(0.47** , )	( , 0.34****)	(0.27, )
Decisión	I(1,0)	I(1,0)	I(1,0)	I(0,0)
<b>HEGY(p) -Tabla 3 ; H<sub>0</sub>: I(0,1)</b>	HEGY(2)	HEGY(5)	HEGY(0)	HEGY(1)
"t-test" ( $\pi_1, \pi_2$ )	(-1.6 , -3.8**)	(-2.9* , -6.4****)	(-1.5 , -5.2****)	(-1.9 , -6.3****)
F ( $\pi_3$ y $\pi_4$ )	23.29***	31.72***	33.62***	30.47***
P-value(k) Ljung Box residuos	0.72(24)	0.64(24)	0.88(12)	0.93(12)
Decisión	I(1,0) = I <sub>o</sub> (1)	I(1,0) = I <sub>o</sub> (1)	I(1,0) = I <sub>o</sub> (1)	I(1,0) = I <sub>o</sub> (1)
<b>FRANSES(p)-Tabla 4;H<sub>0</sub>: PAR(p)</b>	FRANSES(1)	FRANSES(1)	FRANSES(1)	FRANSES(1)
Número Vect. CoInt. - r	3	3	3	3
Valor Test Traza Johansen (r,r+1)	(31.1*** , 5.7)	(45.9*** , 9.8**)	(21.0** , 5.8)	(24.7** , 4.7)
P-value Test (H <sub>r1</sub> , H <sub>r2</sub> )	(0.00, 0.00)	(0.45 , 0.00)	(0.00, 0.00)	(0.00 , 0.00)
Decisión	PAR(1)	I(1,0) al 1%	PAR(1)	PAR(1)
<b>HAFU(p) -Tabla 5; H<sub>0</sub>: I(1,1)</b>	HAFU(8)	HAFU(4)	HAFU(4)	HAFU(4)
F ( $\beta_1$ y $\beta_2$ )	0.05	61.40***	0.32	29.69***
"t-test" ( $\beta_1, \beta_2$ )	(-0.3 , 0.2)	(0.8 , -9.2****)	(-0.6 , 0.8)	(1.0 , -6.8****)
P-value(k) Ljung Box residuos	0.78(18)	0.80(18)	0.52(12)	0.96(12)
Decisión	I(1,1)	I(1,0)	I(1,1)	I(1,0)

Con los resultados de las pruebas presentados en el cuadro 5 es posible concluir lo siguiente:

(i) Del examen individual de la serie trimestral del logaritmo de IPCT, LIPCT, se deriva que es necesario utilizar una doble diferenciación para llevar a condiciones de estacionaridad a LIPCT, al menos, así lo confirma HAFU.

Al igual que en el caso de las series simuladas  $I(1,1)$  los resultados de los test de ADF, KPSS y HEGY sugieren la necesidad de diferenciar tan solo una vez la serie, lo cual resulta compatible con lo señalado por estas pruebas en el caso del DGP D de la Tabla 2. Es importante también mencionar que los resultados de HEGY no sugieren la presencia de raíz unitaria a las frecuencias  $1/2$  y  $1/4$ .

En lo que se refiere a los resultados del test de FRANSES para LIPCT, se encuentra de nuevo similitud con lo encontrado para el DGP D. La prueba indica que existe un proceso integrado y periódico.

(ii) En el caso de INFLA, exceptuando los resultados de los test de FRANSES y el de KPSS para la submuestra 1980-1994, todas las pruebas sugieren la presencia de una raíz unitaria a la frecuencia cero. De nuevo los resultados de las pruebas están en la misma dirección de lo encontrado en la evaluación de los test con series  $I(1,0)$ , DGP B de la Tabla 2.

(iii) Es importante señalar que los resultados para las dos series LIPCT e INFLA son compatibles. Esto lo confirma el hecho de que la serie de LIPCT puede ser llevada a condiciones de estacionaridad usando la doble diferenciación, es decir, un filtro de la forma  $(1-B)(1-B^4)$ , en tanto que  $(1-B^4)LIPCT=INFLA$  se caracteriza como una serie  $I(1,0)$  en la mayoría de los casos. Existe también evidencia a favor de lo anterior al construir modelos parimónicos ARIMA para LIPCT utilizando la doble diferenciación.

En el cuadro 6 se presentan los resultados de la aplicación de las pruebas para los logaritmos de la series de Medios de Pago, LM1, y PIB a precios constantes, LPIBK, para el periodo comprendido entre 1981-1994. Los resultados del cuadro 6 y la forma de interpretarlos están sujetos a los comentarios hechos para el cuadro 5.



**Cuadro 6**  
**Evaluación de LM1 y LPIBK**

Test	Periodo: 1981/1994	
	56 Obs.	
	LM1	LPIBK
<b>ADF(p) -Tabla 1 ; H<sub>0</sub>: I(1,0)=I(1)</b>	ADF(4)	ADF(4)
"t-test" ( $\tau_{\mu}, \tau_{\epsilon}$ )	( , -1.87)	( , -2.97)
"t-test" (1-B)Y <sub>(t-p)</sub> sin signo	3.28	2.93
P-value(k) Ljung Box residuos	0.38(12)	0.57(12)
Decisión	I(1,0)	I(1,0)
<b>KPSS(L) ; H<sub>0</sub>: I(0,0)=I(0)</b>	KPSS(3)	KPSS(3)
( $\eta_{\mu}, \eta_{\epsilon}$ )	( , 0.32***)	( , 0.14*)
Decisión	I(1,0)	I(1,0)
<b>HEGY(p) -Tabla 3 ; H<sub>0</sub>: I(0,1)</b>	HEGY(0)	HEGY(0)
"t-test" ( $\pi_1, \pi_2$ )	(-1.2, -2.3)	(-3.0, -2.0)
F ( $\pi_3$ y $\pi_4$ )	14.96***	8.89**
P-value(k) Ljung Box residuos	0.42(12)	0.54(12)
Decisión	I <sub>0</sub> (1) y I <sub>1/2</sub> (1)	I <sub>0</sub> (1) y I <sub>1/2</sub> (1)
<b>FRANSES(p)-Tabla 4; H<sub>0</sub>: PAR(p)</b>	FRANSES(1)	FRANSES(1)
Número Vect. CoInt. - r	0	0
Valor Test Traza Johansen (r,r+1)	(-, -)	(-, -)
P-value Test (H <sub>r1</sub> , H <sub>r2</sub> )	(-, -)	(-, -)
Decisión	I(0,1)	I(0,1)
<b>HAFU(p) -Tabla 5; H<sub>0</sub>: I(1,1)</b>	HAFU(4)	HAFU(4)
F ( $\beta_1$ y $\beta_2$ )	0.10	1.64
"t-test" ( $\beta_1, \beta_2$ )	(-43, -31)	(.18, -1.7)
P-value(k) Ljung Box residuos	0.84(12)	0.35(12)
Decisión	I(1,1)	I(1,1)

Con relación a los resultados de las pruebas sobre LM1 y LPIBK es importante mencionar:

(i) Los resultados de las pruebas ADF y KPSS están en la misma dirección de los encontrados para el DGP C y D, señalando como alternativa para llevar a las series a condiciones de estacionariedad a las series el uso de una diferenciación no-estacional.

(ii) Los test de FRANCES y HEGY indican la necesidad de utilizar la diferenciación estacional tradicional  $(1-B^4)$  o, los filtros  $(1+B+B^2+B^3)$  o  $-(1-B+B^2-B^3)$  para llevar a condiciones de estacionariedad a las series.

(iii) El test de HAFU señala la necesidad de utilizar diferenciaciones no-estacionales y estacionales. Lo cual esta, al menos parcialmente, confirmado por la construcción de un modelo ARIMA parsimonioso utilizando dichas diferenciaciones para la serie de LM1.

(iv) Sin lugar a dudas, es difícil llegar a un acuerdo sobre que tipo de diferenciación es adecuado a partir de los resultados encontrados en los test. De hecho, la presencia de raíces unitarias estacionales no se descarta en la medida en que las pruebas especializadas así lo indican. Sin embargo, es conveniente reconocer que:

(a) las raíces dominantes del proceso no son todas aquellas inherentes a la descomposición total del filtro  $(1-B^4)$ , pero si hacen parte importante del componente estacional;

(b) es precisamente por esta última razón que los resultados de los test de FRANCES y HAFU indican la presencia de un componente estacional en las series y señalan la necesidad de utilizar  $(1-B^4)$  como el filtro, o como parte del filtro, que conduce a las series a condiciones de estacionariedad.

(c) la presencia de tendencia en estas series es innegable, especialmente en M1, en consecuencia, el reconocimiento de la existencia de raíz unitaria a la frecuencia cero, como lo insinúa HAFU, no resulta inesperado.

(d) En consecuencia, una caracterización inicial de las series como series  $I(1,1)$  podría resultar útil para posteriores análisis desde el punto de vista univariado.

(v) Por último, es importante señalar que los resultados de HAFU y HEGY en este caso, son de carácter complementario y no contradictorio. De hecho, la presencia de integración

fraccionaria en las series, [LM1 y LPIBK son  $I_{1/2}(1)$  e  $I_0(1)$ ] conduce a que HAFU no rechace la presencia de un componente estacional y no-estacional integrado.

## **B. Conclusiones, Recomendaciones e Inquietudes**

En este documento se han presentado e ilustrado varios de los problemas de algunos de los test tradicionales de raíz unitaria existentes<sup>41</sup>. Con este propósito, los test propuestos han sido divididos en:

- Aquellos que se preocupan por la componente de tendencia, sin reconocer la presencia de estacionalidad: test DF, ADF y KPSS.
- Los que reconocen el componente de tendencia y/o el estacional como parte fundamental del mecanismo que explica el comportamiento de una serie: HAFU, HEGY, FRANCES.
- El que permite discriminar entre integración periódica y no-periódica. El uso de la noción de integración periódica, el cual se deriva de pruebas de hipótesis presentadas en el test FRANCES, permite relajar (i) los supuestos de invarianza de los parámetros asociados con las "estaciones" y (ii) la caracterización de la varianza del proceso como homocedastica. Es decir, reconoce entoces la posible presencia de heterocedasticidad en el modelo.

Con relación a los resultados de las pruebas con series cuyo DGP incluye un componente estacional integrado y/o de tendencia integrado, DGP C y D de la Tabla 2, es importante recordar:

(i) Las pruebas ADF y KPSS conducen a resultados encontrados y equivocados en los casos donde se simuló la presencia de un componente estacional integrado, DGP C. Las pruebas ADF sugieren la presencia de raíz unitaria a la frecuencia cero, mientras que, las KPSS, indican que la series son estacionarias alrededor de un nivel inicial, Cuadros 1 y 2. En el caso del DGP D se reconoce tan solo la presencia del componente no-estacional.

---

<sup>41</sup> Los comentarios y recomendaciones que se presentan a continuación, en algunos casos, estan sujetos a la insoportable levedad de las 100 muestras de tamaño 100.

- (ii) Existe una alta probabilidad de que se encuentren series con doble raíz a la frecuencia cero si estas provienen de DGP D, es decir, si las series son  $I(1,1)$ .
- (iii) De igual forma que en series  $I(1,0)$ , series con raíz unitaria a la frecuencia cero, se reconoce la necesidad de caracterizar adecuadamente el componente de tendencia de la serie en el caso de que estas provengan del DGP C y/o D. Esto en la medida en que los cambios en la media de éstas series pueden ser considerados como los cambios típicos que siguen los procesos de tendencia estocástica mas simples, es decir, las series tienden a ser caracterizadas como provenientes de un DSM.
- (iv) Si bien los resultados bajo FRANCES son adecuados para series con componente estacional puro, DGP C, existe una alta tasa de rechazo de la hipótesis de presencia de procesos integrados no-periódicos en el caso del DGP D<sup>42</sup>.
- (v) A pesar de que el número de simulaciones es limitado para derivar alguna "regla", se observa claramente, la presencia de multiples filtros para llevar a condiciones de estacionaridad a la series asociadas con componentes estacionales de caracter integrado no-periódico, DGP C y D. En este sentido es importante mencionar por ejemplo:
- (a) Para el DGP C la presencia de raíces unitarias asociadas con la descomposición del filtro estacional  $(1-B^4)$  sugiere en el caso del test de HEGY que como máximo el 82% de las muestras requieren del uso del filtro  $(1-B^4)$  para ser llevadas a condiciones de estacionaridad, en tanto que, HAFU tiene una mejor desempeño, 93%. En consecuencia es posible que se requiera de una tercera prueba, probablemente FRANCES, para dirimir el conflicto de la caracterización de series que siguen un DGP con componente estacional integrado no-periódico.
- (b) Con relación al DGP D, series integradas no-periodicas a diferente frecuencia, resulta definitivamente útil el considerar la prueba de HAFU como una alternativa razonable. Esto en la medida en que los resultados con series  $I(1,1)$  asi lo demuestran, y que se consideren las sugerencias hechas en (v) (a) al utilizar la prueba. Otra alternativa sería

---

<sup>42</sup> No se presentaron los resultados para el DGP A de la Tabla 2 en FRANCES, en la medida en que las simulaciones de Franses (1993) se informa de la relativa baja potencia de la prueba con series estacionarias, 69% para DGP A con  $\phi=.5$ .

utilizar una extensión de HEGY que usa la doble diferenciación, a este respecto existe una excelente discusión en Suriñach et all (1995).

(vi) Es conveniente llamar la atención sobre las implicaciones que tienen estos resultados sobre los test de cointegración tradicionales<sup>43</sup>:

(a) Vale la pena mencionar que el problema ha sido abordado en la literatura reconociendo que de series integradas estacionalmente, series  $I(0,1)$ , [susceptibles de descomposición de su filtro estacional] es posible derivar alguna relación de largo plazo entre las variables a la frecuencia cero<sup>44</sup> si la descomposición y el test de Hylleberg et all (1990) , así lo permiten.

(b) Los mecanismos que se utilizan para derivar la relación de largo plazo, los cuales están sujetos a numerosas críticas van desde: desestacionalizar la series; eliminar la estacionalidad utilizando un filtro estacional  $\Phi_s(B)$ , equivalente al  $S(B)$  sugerido por Hylleberg et all (1990) pagina 234 ; o utilizar los filtros señalados por los resultados del test de integración estacional [pruebas tipo HEGY ,o el test de FRANCES] para evaluar la cointegración estacional y/o cointegración a la frecuencia cero.

(c) Los resultados de los test de cointegración a la frecuencia cero, e incluso a alguna distinta de cero, son inconsistentes si se comprueba la presencia de integración estacional y/o no-estacional periódica en alguna de las variables involucradas en el vector de cointegración.

(d) La literatura revisada para este documento no presenta como solucionar el problema de cointegración si todas o algunas de las series asociadas con el posible vector de cointegración fuesen  $I(1,1)$ , o  $SI(2,1)$  en el contexto de Suriñach et all (1995)<sup>45</sup>. Sinembargo, de acuerdo con lo expuesto anteriormente los resultados de la

---

<sup>43</sup> Una interesante discusión sobre las implicaciones que tiene la presencia de estacionalidad sobre los test de cointegración puede encontrarse en Engle et all (1993) , Osborn (1993) , así como en Suriñach et all (1995) y Misas, M. y Suescún, R. (1993) en el caso de funciones de demanda de dinero en Colombia.

<sup>44</sup> Véase, por ejemplo, el caso de la función Consumo del Japon en Engle et all (1993) y los comentarios que a ésta propuesta tiene Osborn (1993).

<sup>45</sup> Estos autores plantean, en la parte aplicada al análisis económico regional, algunas alternativas lógicas para solucionar el problema de cointegración en este contexto.

estimación estática [estimación por regresión del vector de cointegración] de la relación de largo plazo podrían ser inconsistentes, a menos que exista cointegración plena. En dicho caso, se debe tener un único vector de cointegración para todas las distintas frecuencias de integración compartidas por todos los elementos del vector de cointegración, Suriñach et al (1995).

(e) Finalmente, algunos interrogantes podrían plantearse:

- Dadas las implicaciones que tiene sobre la caracterización del tipo y orden de integración de las variables el uso de agregación y muestreo sistemático en series con componente estacional, [véase, Granger y Siklos (1995)] , cuales deben ser los valores que se deben utilizar para series "stock", o "flujo", si se deseara trabajar con ellas, con una periodicidad anual?

- En la medida en que los test multivariados de integración y cointegración, dependen fundamentalmente del tamaño de muestra para obtener una aproximación adecuada del VAR, o del respectivo VEC, y se reconoce que algunas series comparten una misma frecuencia de integración, pero podrían estar integradas a más de una frecuencia, cual debe ser, por ejemplo, el tratamiento de la longitud del VAR si alguna(s) de las variable(s) están integradas estacionalmente y se sabe que las alternativas de eliminación del componente estacional generan múltiples inconvenientes en la caracterización de la relación de largo plazo?.

## Referencias

- Banerjee, A., Dolado, J., Galbraith, J. and Hendry, D.** (1993). *Co-integration, Error-Correction and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*. Oxford University Press.
- Beaulieu, J. and Miron, J.** (1992). Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S. Data. NBER Technical Working Papers, No. 126.
- Campbell, J., and Perron, P.** (1991). Pitfalls and Opportunities: What Macroeconomists Should Know About Unit Roots. NBER Technical Working Papers, No. 100.
- Christiano, L., and Eichenbaum, M.** (1989). Unit Roots in real GNP: Do we know, and do we care?. NBER Working Paper No. 3130.
- Dickey, D., and Fuller, W.** (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Econometrica*, 49, pp. 1057-1072.
- Engle, R. and Granger, C.** (1987). "Cointegration and Error-Correction: Representation, Estimation, and Testing". *Econometrica*, 55, pp. 251-276; o en *Long-Run Economic Relationships - Readings in Cointegration*, (1991) editores. Oxford University Press.
- Engle, R., Granger, C., Hylleberg, S. and Lee, H.** (1993). "Seasonal cointegration. The Japanese consumption function". *Journal of Econometrics*, 55, pp. 275-298.
- Franses, P.** (1994). "A multivariate approach to modeling univariate seasonal time series". *Journal of Econometrics*, 63, pp. 133-151.
- Franses, P. and Romijn, G.** (1993). "Periodic integration in quarterly UK macroeconomic variables". *International Journal of Forecasting*, 9, pp. 467-476.
- Granger, C. and Siklos, P.** (1995). "Systematic sampling, temporal aggregation, seasonal adjustment, and cointegration. Theory and evidence". *Journal of Econometrics*, 66, pp. 357-369.
- Hall, A.** (1994). "Testing for a Unit Root in Time Series With Pretest Data-Based Model Selection". *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp. 461-470.
- Hamilton, J.** (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hansen, H. and Johansen, S.** (1993). "Recursive Estimation in Cointegrated VAR Models". Mimeo, Institute of Economics and Mathematical Statistics of University of Copenhagen.
- Hasza, D. and Fuller, W.** (1982). "Testing for Nonstationary Parameter Specification in Seasonal Time Series Models". *The Annals of Statistics*, 10, pp. 1209-1216.
- Hylleberg, S., Engle, R., Granger, C. and Yoo, B.** (1990). "Seasonal Integration and Cointegration". *Journal of Econometrics*, 44, pp. 215-238.

- Johansen, S. and Juselius, K.** (1992). "Maximun Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - with Applications to the Demand for Money". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52, pp. 169-210.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P. and Shin, Y.** (1992). "Testing the nulle hypothesis of stationarity against the alternative of unit root". Journal of Econometrics, 54, pp. 159-178.
- Lutkepohl, H.** (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer Verlag.
- Lutkepohl, H. and Reimers, H.** (1992). "Impulse response analysis of cointegrated systems". Journal of Economic Dynamics and Control, 16, pp. 53-78.
- Misas, M. y Oliveros, H.** (1994) "La relación de salarios y precios en Colombia: un análisis econométrico". Borradores Semanales de Economía, 7.
- Misas, M., Oliveros, H. y Uribe, J.** (1994). "Especificación y Estabilidad de la Demanda por Dinero en Colombia". Borradores Semanales de Economía, 11.
- Oliveros, H.** (1990). "Métodos de regresión lineal en la econometría". Memorias del primer simposio nacional de estadística sobre métodos de regresión, UN-ICFES.
- Osborn, D.** (1993). "Discussion - Seasonal cointegration ". Journal of Econometrics, 55, pp. 299-303.
- Osborn, D. Chui, A., Smith, P. and Birchenhall, C.** (1988). "Seasonality and the Order of Integration for Comsumption" Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 50, pp. 361-377.
- Perron, P.** (1989). "The great crahs, the oil price shock and the unit root hypothesis". Econometrica, 57, pp. 1361-1401.
- Phillips, P. and Perron, P.** (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". Biometrika, 75, pp. 335-346.
- Suriñach, J., Artis, M., Lopez, E., Sansó, A.** (1995). *Análisis económico regional. Nociones básicas de la Teoria de Cointegración*. Univerisitat de Barcelona.
- Zivot, E. and Andrews, D.** (1990). Further evidence on the great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. Journal of Business & Statistics, 10.