

La serie "Borradores Semanales de Economía" es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los Trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

**PUEDE EXPLICARSE EL PRECIO EXTERNO DEL CAFE
CON UN MODELO ECONOMETRICO NO LINEAL ?**

**Por:
Franz Alonso Hamann S.**

1996

No. 65

Para comentarios favor dirigirse al autor:
Fax: 2865936 - Teléfono 3421111 ext. 3963
e-mail : fhamansa@banrep.gov.co.

**PUEDE EXPLICARSE EL PRECIO EXTERNO DEL CAFE CON UN
MODELO ECONOMETRICO NO LINEAL ? ***

Franz Alonso Hamann S.**

Santafé de Bogotá, noviembre de 1996

* Artículo publicable presentado como requisito para obtener el título de Magister en Economía de la Universidad de los Andes, Colombia.

** El autor desea agradecer la invaluable ayuda del director de trabajo, el profesor Manuel Ramírez. Adicionalmente, el autor agradece los comentarios de Martha Misas, Hugo Oliveros, Luis F. Melo, Alvaro Riascos y Andrés Carvajal. No obstante, cualquier error encontrado en el desarrollo del artículo es responsabilidad exclusiva del autor.

I. Introducción

El precio internacional del café, como el de la mayoría de los productos primarios se ha caracterizado por la inestabilidad y las grandes fluctuaciones. La formación del precio del café verde es un proceso complejo que depende de una multiplicidad de variables, como la calidad y disponibilidad del producto, el lugar de origen, el sitio de compra, las expectativas de precios y las características del grano.¹ Adicionalmente, el mercado internacional del café está caracterizado por la existencia de pactos y acuerdos entre los países productores y consumidores del grano que buscan fundamentalmente atacar la inestabilidad del mercado.

En general, las investigaciones tradicionales han intentado modelar el proceso de formación de los precios internacionales del grano mediante sistemas de ecuaciones lineales de comportamiento que describen las relaciones entre oferta y demanda. Adicionalmente, en otro tipo de estudios en los que se emplean modelos de análisis de series de tiempo se presenta el problema que el modelaje de las series se fundamenta en el supuesto implícito de la linealidad del sistema que genera la trayectoria de las variables. Esta hipótesis, conocida como paradigma de Frisch-Slutsky, no está basada en ningún conocimiento *a-priori* de la linealidad del sistema económico.²

Este trabajo busca, en primer lugar, encontrar evidencia de la presencia de no linealidades en la serie de tiempo del precio externo del café y segundo, determinar si es conveniente describir la dinámica de los precios mediante un modelo no lineal. Para cumplir con este objetivo, el artículo se ha dividido en cinco partes. En la primera, se exponen algunas características generales del comportamiento de los precios del grano a lo largo del presente siglo. En la segunda, se realiza el proceso de detección de no-linealidades en la serie de precios externos del café colombiano mediante el cálculo de un estadístico diseñado por Brock, Dechert y Scheinkman (1994). En la exposición del procedimiento de cálculo del estadístico, se plantea el comportamiento

¹ Para una exposición más clara de los determinantes del precio internacional del café ver Junguito y Pizano (1993) *El comercio exterior y la política internacional del café*, Cap. 4.

² Ver Pesaran y Potter (1993) en *Nonlinear dynamics, chaos and econometrics: an introduction*.

del precio externo del grano como descrito por un modelo econométrico lineal de intervención. El objetivo es comparar los alcances y limitaciones del modelo de intervención frente al modelo no lineal el cual se expone en la tercera sección, para escoger el que mejor describe el precio externo del café. Esto se realiza en la cuarta sección, en la cual se evalúan los modelos en términos del ajuste, la significancia de los parámetros y la predicción. Por último, se extraen algunas conclusiones de los resultados encontrados.

II. El Precio Externo del Café: 1913-1996

Antes de entrar en la especificación de los modelos es importante realizar una descripción del comportamiento del precio externo del café a lo largo del período de análisis (desde 1913 hasta 1996). El objetivo es visualizar que la existencia de los pactos y el advenimiento de las heladas sobre la cosecha brasileña, tienen una clara influencia sobre la trayectoria del precio del grano.

A. Las Heladas y las Sequías en Brasil

Como se expone en esta sección, las heladas en el Brasil, y en general aquellos factores que alteran notablemente la producción de ese país, tienen un efecto directo y observable en el comportamiento del precio del café colombiano en los Estados Unidos.

En lo que corresponde al período en estudio sólo se han registrado dos heladas verticales³. La primera en 1918 y la segunda en 1975. A continuación, en la tabla No. 1 se presenta una cronología de las heladas más importantes registradas durante el período de análisis.

³ Las heladas según su intensidad se clasifican en verticales u horizontales. Las primeras afectan la capacidad productiva de la planta y su recuperación puede tardar entre dos y tres años. Las segundas sólo afectan las hojas del cafeto y reducen la producción del año siguiente.

Tabla No. 1
Cronología de las Heladas en Brasil: 1913-1996

MES	AÑO	INTENSIDAD
Junio	1918	Muy grave
Junio	1931	Moderada
Julio	1933	Moderada
Junio	1942	Grave
Septiembre	1943	Moderada
Julio	1953	Grave
Agosto	1955	Grave
Julio	1957	Grave
Julio	1962	Moderada
Junio	1963	Moderada
Junio	1964	Moderada
Agosto	1965	Moderada
Agosto	1966	Grave
Julio	1969	Moderada
Julio	1972	Moderada
Julio	1975	Muy grave
Agosto	1978	Moderada
Mayo	1979	Moderada
Julio	1981	Grave
Julio	1994	Grave

FUENTE: tomado de R. Junguito y D. Pizano (1993) *El comercio exterior y la política internacional del café*, pp. 42. El autor adiciona la helada de julio de 1995.

Como se puede observar no existe un patrón definido en la ocurrencia de este tipo de fenómenos lo cual los hace prácticamente impredecibles.

La helada vertical de 1918 ocasionó un incremento bien marcado en el precio del café colombiano en la Bolsa de Nueva York que se mantuvo hasta finales de 1919. Posteriormente, la crisis de los años 30 se reflejó en los precios a través de una caída tendencial que se prolongó hasta el comienzo de la II Guerra Mundial. La recuperación del precio del grano parecía llegar pero el control de precios durante los tiempos de guerra por parte del gobierno de los Estados Unidos impidió el alza. El precio se mantuvo sin alteraciones hasta finales de 1945 y cuando se desmontaron los controles, éste mantuvo una marcada tendencia creciente hasta comienzos de los años 50. La helada de julio de 1953 afectó los precios del grano de manera sustancial hasta 1954. Posteriormente, en agosto de 1955 sobrevino otra helada grave, pero sin consecuencias tan marcadas sobre el precio del café colombiano.

Los diez años posteriores a la helada de 1955 se caracterizaron por una tendencia decreciente en los precios del grano. Finalizando la década de los 60 y coincidiendo con una helada moderada en 1969, el precio inicia un comportamiento ascendente con marcadas fluctuaciones hasta 1975. El 18 de julio de ese mismo año se dio en el Brasil la tercera helada vertical del presente siglo, la cual originó la disparada abrupta del precio del café colombiano en los Estados Unidos. A partir de 1977 los precios empezaron a decrecer con fluctuaciones bien marcadas, haciéndose evidentes las heladas de 1979 (moderada), la de 1981 (grave) y las sequías de 1985 y 1987.

A comienzos de la década de los noventa, la principal característica fue los bajos precios. En particular, debido al rompimiento del pacto a finales de los ochenta, como mencionaremos más adelante. Sin embargo, en julio de 1994 sobrevino una helada grave que incrementó substancialmente los precios internacionales por el lapso de los dos meses siguientes.

B. Los Acuerdos Internacionales

El mercado del café se ha visto afectado por la existencia de pactos y acuerdos internacionales que buscan la estabilización de los precios y la producción. Este tipo de factores también influyen sobre el comportamiento de los precios internacionales y su evolución a través del tiempo.

Según Junguito y Pizano (1993) pueden identificarse tres períodos en cuanto a pactos cafeteros se refiere. El primero, desde los inicios del presente siglo hasta los años 40, período en el cual los países productores empiezan a concientizarse de la necesidad de actuar de manera conjunta para regular la producción del grano. El segundo período comprendido entre 1940 y 1962 se caracterizó por el surgimiento de una serie de pactos americanos tendientes de igual forma al establecimiento de cuotas e inclusive en algunos casos de precios mínimos⁴. El tercer período va desde 1962 hasta nuestros días. En este período es en el que los acuerdos internacionales, en el

⁴ Como es el caso del llamado "Pacto de Caballeros" establecido en Río de Janeiro en 1954.

lapso de tiempo en que han existido, han sido verdaderamente relevantes sobre el comportamiento del precio.

La eficacia de los convenios internacionales desde principios de siglo hasta 1960 ha sido cuestionada.⁵ Es por ello que el tercer período se puede dividir en varios subperíodos, de acuerdo con la vigencia o no del pacto.⁶

1. **1962-1972:** En este lapso de tiempo se logra concretar el primer gran acuerdo entre productores y consumidores del grano. El convenio tuvo lugar en Nueva York en 1962 y se planteó una vigencia de cinco años, renegociable por igual período en 1968. En el acuerdo se establecieron cuotas de exportación de una manera ajustable de acuerdo con la evolución de los precios y del mercado.
2. **1972-1980:** En este período el acuerdo internacional no funcionó y los países pudieron exportar libremente, teniendo los países productores la precaución de actuar conjuntamente para evitar la caída de los precios. Sin embargo, los precios fluctuaron de una manera relativamente normal hasta el advenimiento de la helada en julio de 1975. Las consecuencias de la helada sobre el precio del café se hizo evidente y los productores se beneficiaron notablemente de este hecho.
3. **1980-1986:** En el mes de octubre de 1980 se vuelve a firmar un gran acuerdo entre productores y consumidores de café. En este tiempo los precios oscilaron dentro de las franjas pactadas hasta febrero de 1986, mes en el que la sequía en Brasil ocasionó una nueva disparada en los precios.
4. **1986-1987:** Lo anterior ocasionó la disolución temporal del acuerdo desde febrero de 1986 hasta septiembre de 1987.

⁵ Ver Junguito R. y Pizano D., *ibidem*.

⁶ Esta clasificación es tomada del trabajo de Vargas (1989)

5. 1987-1989: En el mes de octubre de 1987 se restablece el acuerdo cafetero y los precios oscilarían dentro de las bandas pactadas, hasta julio de 1989 mes en el que se rompería el acuerdo. Las causas del rompimiento del acuerdo y sus implicaciones sobre la economía colombiana fueron motivo de un arduo debate académico.⁷
6. 1989-1996: En la mayor parte de este período los precios se han situado en niveles bastante bajos, aunque en los meses posteriores a la ruptura del pacto esta situación no se hacía evidente. En general, los precios han estado muy por debajo del promedio de los últimos veinte años.

Finalmente, se resalta la importancia de los dos aspectos explicados sobre el comportamiento del precio externo del café colombiano. Los fenómenos meteorológicos que afectan la producción del Brasil, en primer lugar, alteran de una manera notoria la trayectoria del precio del grano. En segundo lugar, la existencia de pactos y acuerdos tendientes a controlar las fluctuaciones de los precios inciden en forma importante en la variabilidad de las cotizaciones del café colombiano en los Estados Unidos. Por lo tanto, cualquier análisis de proyección de precios debe tener en cuenta al menos una de estas dos variables relevantes.

La necesidad de incorporar estas variables dentro de un modelo de precios de café se fundamenta en la idea de que los agentes económicos, en particular los productores y consumidores, pueden tener un comportamiento diferente cuando existe un pacto o no, o cuando se presenta una helada que afecta la cosecha brasileña. Este tipo de modelos, se conocen como modelos de "regímenes cambiantes", y pertenecen a la familia de los modelos no lineales. En el siguiente capítulo mostraremos una herramienta estadística que permite detectar la presencia de no linealidades en una serie de tiempo económica. De encontrar evidencia de este tipo de señales el siguiente paso consiste en especificar y estimar un modelo que permita analizar la existencia y las características de los distintos regímenes.

⁷ Ver *Debates de Coyuntura Económica*, No. 15, diciembre de 1989.

II. Detección de No Linealidades

Para la detección de no linealidades en la serie de tiempo de precio spot del café colombiano en la Bolsa de Nueva York, se emplea un estadístico diseñado por Brock, Dechert y Scheinkman en 1984 (BDS, en adelante) para probar la incorrecta especificación de un modelo lineal y la independencia de sus residuos. Este estadístico está basado en una medida llamada la *integral de correlación*, $C_{e,m}$.⁸ El objetivo de la prueba es rechazar la hipótesis nula que los residuos de un modelo lineal $AR(p)$ son linealmente IID. La hipótesis alterna no está especificada pero el test conserva su potencia frente a una amplia gama de alternativas, tal como lo muestran Brock y Dechert (1988).

Según BDS (1994) el test tiene dos tipos de aplicaciones: en primer lugar, es un test de independencia. Segundo, puede emplearse para determinar una incorrecta especificación.⁹ En nuestro caso se emplea para establecer ambos aspectos, es decir, se busca rechazar la hipótesis nula de independencia y también se pretende rechazar que el modelo lineal empleado está correctamente especificado. En consecuencia, se valida la idea de construir algún tipo de modelo econométrico no lineal para los precios spot del café en Nueva York. Sin embargo, el test no permite conocer qué tipo específico de no linealidad.

A. El Test BDS

Brock *et al.* (1994) desarrollan una prueba basada en algunos conceptos de la teoría de los procesos caóticos.¹⁰ La idea de la prueba es distinguir un proceso caótico de uno estocástico. Un proceso caótico es producido por un generador determinístico, pero tiene la apariencia de un proceso estocástico ruido blanco, tal como una serie IID. La hipótesis nula de la prueba es :

$$H_0: \text{La serie } \{u_i\}_{i=1, \dots, n} \text{ es IID.}$$

⁸ La estimación de la integral de correlación se explica en el anexo No.2.

⁹ El test BDS ha sido comúnmente empleado para evaluar los residuos del modelo GARCH, el cual tiene amplias aplicaciones en la teoría de las finanzas.

¹⁰ Algunos conceptos básicos de la teoría del caos se explican en el anexo No. 1.

La hipótesis alterna no está especificada, pero admite una amplia gama de especificaciones no lineales tal como lo encuentran BDS. Es por ello que en la sección 3 se realiza una prueba de especificación contra un tipo de modelo no lineal específico.

Brock *et al.* (1994) muestran que bajo la hipótesis nula, la integral de correlación, $C_{e,m}$, cumple que $C_{e,m} = (C_{e,1})^m$, y construyen un estadístico λ de la forma:

$$\lambda = \sqrt{n} \left[C_{e,m} - (C_{e,1})^m \right] \xrightarrow{d} N(0, V_{e,m}) \quad 11 \quad (1)$$

para alguna escogencia arbitraria de m y e , donde \xrightarrow{d} indica convergencia en la distribución, $C_{e,m}$ es la integral de correlación, n es el número de observaciones de la serie, m es la dimensión del sistema que genera la serie de tiempo¹², e es un valor lo suficientemente pequeño tomado arbitrariamente, $N(0, V_{e,m})$ es una distribución normal con media cero y varianza finita $V_{e,m}$. Se observa de (1) que si $C_{e,m} = (C_{e,1})^m$ entonces el estadístico λ tiende a cero y la serie es IID, mientras que si $C_{e,m} \neq (C_{e,1})^m$ entonces λ tiende a alejarse de cero y se rechaza que la serie sea IID, admitiendo la posibilidad que el proceso sea o caótico, o no lineal determinístico, o no lineal estocástico.

Si el resultado de la prueba es que el estadístico calculado es mayor que el tabulado, es decir que si λ es muy grande, entonces se rechaza la hipótesis nula de IID y se concluye que existen indicios de “no linealidades”.

Según Granger y Teräsvirta (1993), los ejercicios que se han realizado otros econométristas empleando este estadístico, particularmente Liu, Granger y Heller (1992), sugieren que la escogencia de la dimensión m es menos crítica que la escogencia del e sobre la potencia de la prueba.¹³

La distribución asintótica del estadístico λ es la misma cuando la serie en consideración es ruido blanco que cuando se toman los residuos estimados de un

¹¹ Una breve derivación del estadístico se expone en el anexo No. 2.

¹² La dimensión del sistema que genera la serie de tiempo para efectos del cálculo es un valor entero que el investigador cree conocer y es asignado arbitrariamente.

¹³ En general, en la mayoría de los estudios realizados en EE.UU., la escogencia del e equivale a tomar entre 0.5 y 1.5 de la desviación estándar de la serie de tiempo en estudio.

proceso lineal.¹⁴ Como se enunció anteriormente, si se rechaza la hipótesis nula se concluye que hay presencia de no linealidad en la serie, pero su forma específica no se puede determinar. Esta forma puede ser cualquiera no lineal estocástica, entre las cuales se encuentran las especificaciones de la sección 3. En dicha sección se expone el desarrollo de una prueba frente a un tipo específico de no linealidad.

Para el caso particular de una serie de tiempo estacionaria $\{u_t\}$ el procedimiento consiste en ajustar un modelo ARMA(p, q), eliminando los “outliers”, empleando los métodos tradicionales, evaluarlo de acuerdo con los criterios estándar y aplicar el test BDS a los residuos del modelo. En el caso que la serie de tiempo se vea afectada por algún tipo de perturbaciones exógenas, se deberían eliminar sus efectos mediante el ajuste de un modelo de intervención.

Un modelo de intervención para una serie estacionaria z_t se puede generalizar de la siguiente forma :

$$z_t = \sum \frac{v_j(B)w_j(B)B^j}{\delta_j(B)} I_{jt}^T + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (2)$$

donde I_{jt}^T son k variables de intervención ($j=1, \dots, k$) que ocurren en el momento T_j , a_t es una serie ruido blanco, $\theta(B)/\phi(B)$ es la representación ARMA de z_t estacionaria e invertible, $w_j(B) = w_0 - w_1B - \dots - w_sB^s$ y representa los efectos iniciales de la intervención, $\delta_j(B) = 1 - \delta_1B - \dots - \delta_rB^r$ y representa los efectos permanentes de la intervención, $v_j(B)$ puede ser igual a 1, si es una variable de intervención aditiva, o puede ser igual a $\theta(B)/\phi(B)$ si es una variable de intervención multiplicativa para $t=T_j$. El caso más simple es cuando $j=1$, $v(B)=1$, $w(B)=w_0$, $\delta(B)=1$, $b=0$ que indica que se tiene una variable de intervención de tipo aditivo en el momento T que afecta contemporáneamente, sin efectos posteriores.

Para el caso del café es conveniente incorporar el fenómeno de las heladas y la existencia de pactos o acuerdos para regular los precios, es decir, deberían tomarse

¹⁴ Este procedimiento se basa en una de las características de los procesos no lineales, que indica que dichos procesos conservan todas sus propiedades ante una transformación lineal.

dos variables de intervención ($j=2$). Una vez depurado el modelo de este tipo de efectos, se toman sus residuos y se realiza la prueba BDS.

B. Resultados del Test BDS

Como se ha mencionado anteriormente, la variable de análisis es la serie de tiempo del precio promedio mensual de cotización spot del café arábica (suave) colombiano en la Bolsa de Valores de Nueva York. Se cuenta con una muestra mensual de 998 observaciones, desde enero de 1993 hasta marzo de 1996. Se hizo necesario tomar las variaciones porcentuales mensuales de esta variable para alcanzar la condición de estacionariedad.¹⁵

Como se mencionó en la sección anterior, al realizar un análisis de detección de no linealidades es necesario depurar a la serie de problemas como autocorrelación, heterocedasticidad, y presencia de "outliers".

En primer lugar, se encontró que el mejor modelo que ajusta la serie es de la forma:

$$(1-B)p_t = \frac{(1 - 0.072B^{15} - 0.064B^{16})}{(1 - 0.21B - 0.086B^2 - 0.066B^8)} \hat{a}_t + \frac{0.036}{(1 - 1.25B + 1.15B^2 - 0.65B^3)} H_t^T \quad (3)$$

donde p_t es el logaritmo del precio spot del café colombiano en la Bolsa de Valores de Nueva York, B es el operador de rezagos, a es el vector de residuos, H es una variable dicotómica que asume el valor 1 en el mes T en que se presenta una helada en la zona de cosecha cafetera en el Brasil y 0 cuando hay normalidad climática. Se intentó incorporar otra variable dicotómica representativa de la existencia o no de algún tipo de pacto internacional, con resultados poco robustos estadísticamente. Se realizaron ejercicios empleando la variable de helada, H , con y sin diferenciación buscando determinar la significancia estadística del impacto sobre el nivel de los precios y sobre las variaciones porcentuales de éstos, respectivamente.

¹⁵ El análisis de las funciones ACF y PACF, no se muestra en el desarrollo del artículo pero se encuentra disponible para verificación.

Todos los coeficientes del modelo resultaron significativos al 95%. Se realizó el test de Jarque-Bera para determinar la normalidad de los residuales y se analizaron las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial sin encontrar rezagos adicionales de la serie que puedan incrementar la explicación del modelo.¹⁶

En segundo lugar, se tomaron los residuos del modelo estimado y se calculó el estadístico BDS. Los resultados se resumen en la tabla No.2.

Tabla No. 2
Resultados del Cálculo del Estadístico BDS

<i>m</i>	<i>BDS calculado</i>	<i>BDS tabulado</i> ¹⁷
2	1.52	1.30
3	5.79	2.10
4	-0.12	3.80
5	1.98	4.20
6	2.24	4.20
7	2.89	4.20
8	3.16	4.20
9	3.26	4.20
10	3.52	4.20

FUENTE: Cálculos del autor y los valores tabulados de Brock *et al.* (1994)

Los valores calculados se contrastan con los valores tabulados que fueron estimados por Brock *et al.* (1994). Como se puede observar de la tabla No.2 los valores calculados del estadístico son mayores que los tabulados para $m=2$ y $m=3$. Sin embargo, los valores del estadístico son menores para $m=4$ en adelante. Lo anterior indica que se rechaza la hipótesis nula para dimensiones bajas, pero no se rechaza para dimensiones superiores.

¹⁶ Adicionalmente, se realizó un test tipo ARCH para problemas de heterocedasticidad en los residuos. El resultado no sugiere evidencia de la existencia de heterocedasticidad.

¹⁷ Los valores tabulados resultan de experimentos de Montecarlo a partir de 1000 replicaciones de los residuos de un AR(1) tomando una desviación estándar (σ) de $\frac{1}{2}$ para un nivel de significancia de la prueba del 95%. No se tienen valores tabulados de $m=5$ en adelante.

Este resultado implica una fragilidad en la determinación de la existencia de no linealidades en la serie de precio externo del café colombiano. Sin embargo, en adelante se asume que es factible estimar un modelo no lineal de precios.

III. Un Modelo No Lineal Simple del Precio del Café

La teoría económica permite desarrollar la idea que la economía se comporta de una manera diferente si algunas variables se encuentran en determinada región o en otra. En el caso del café, se podría pensar que los precios externos del grano tienen un modelo estructural diferente si existen pactos o acuerdos entre los agentes, o si por el contrario rige el libre mercado. De igual forma, en otro tipo de problemas, por ejemplo en el mercado de capitales, se podría pensar que los agentes se comportan de una manera cuando las tasas de interés están bajando y de otra diferente cuando están subiendo.

A continuación se exponen dos tipos de modelos econométricos no lineales que permiten incorporar este tipo de comportamiento en el modelaje de una serie de tiempo. Estos modelos se denominan modelos autorregresivos de transición suave (STAR), y buscan describir la dinámica de la transición entre dos tipos de regímenes diferentes. En particular, se busca verificar si el modelo describe adecuadamente un problema en el cual la dinámica de los precios es diferente en períodos de bonanza a la dinámica en períodos de destorcida, y que la transición entre estos dos regímenes se da suavemente.

A. Marco Teórico de los Modelos STAR¹⁸

Este tipo de modelos se denominan, según Granger y Teräsvirta (1993) como “modelos de regímenes cambiantes”, los cuales toman diversas formas de acuerdo con los supuestos que se asuman y en consecuencia dan origen a distintos tipos de comportamiento de las series de tiempo. Los modelos no lineales se emplean cuando

¹⁸ Los modelos STAR son un caso particular de los modelos STR, pues toman como variables explicativas las realizaciones rezagadas de la variable dependiente.

el objetivo es describir el proceso generador de los datos de realizaciones asimétricas, ya que los modelos ARMA lineales sólo son capaces de generar realizaciones con fluctuaciones cíclicas simétricas.

El modelo que se describirá adelante, asume que las realizaciones del término estocástico de error son simétricas, mientras que la no linealidad se le atribuye al modelo parametrizado. De acuerdo con lo anterior, un modelo de régimen cambiante puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$y_t = \pi_{10} + \pi_1' w_t + \left(\pi_{20} + \pi_2' w_t \right) F(y_{t-d}) + u_t \quad (4)$$

donde $u_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$, $\pi_j = (\pi_{j1}, \dots, \pi_{jp})$, $j=1,2$ son parámetros, $w_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ y F es una función de transición acotada por cero y uno, de la forma :

$$F(y_{t-d}) = \left(1 + \exp[-\gamma(y_{t-d} - c)] \right)^{-1}, \gamma > 0 \quad (5)$$

o bien :

$$F(y_{t-d}) = \left(1 - \exp[-\gamma(y_{t-d} - c)^2] \right), \gamma > 0 \quad (6)$$

Si el modelo que se emplea es (4)-(5) se habla de un modelo LSTAR. Si el modelo que se tiene es (4)-(6) se habla de un modelo ESTAR. La ecuación (4) también se puede escribir de la forma :

$$y_t = \left(\pi_{10} + \pi_{20} F \right) + \left(\pi_1 + \pi_2 F \right)' w_t + u_t \quad (7)$$

Se puede observar como la ecuación (5) permite que los "parámetros" de la ecuación (7) cambien monótonamente dependiendo del estado de la variable y_{t-d} . El parámetro c puede ser aproximado como la media de y y γ es un parámetro que indica la velocidad de la transición entre un régimen y otro, nótese que cuando $\gamma \rightarrow \infty$ en (5) la función asume dos valores $F(y_{t-d})=0$ con $y_{t-d} \leq c$, $F(y_{t-d})=1$ con $y_{t-d} > c$, y el modelo (4)-(5)

se vuelve un modelo autorregresivo de umbrales (TAR) donde no hay una etapa de transición suave, sino que por el contrario la variable y_t tiene dos regímenes diferenciados. Cuando $\gamma \rightarrow 0$, el modelo (4)-(5) es un $AR(p)$, y cuando $0 < \gamma < \infty$, (4)-(5) es un modelo logístico STAR o LSTAR.

Si el modelo que se tiene es el (4)-(6) se tiene un caso en el que los "parámetros" de (7) cambian simétricamente alrededor de c con y_{t-d} . Si $\gamma \rightarrow \infty$ en (6) el modelo se vuelve lineal, pero nótese que esto también ocurre cuando $\gamma \rightarrow 0$, por lo tanto el modelo ESTAR implica que las épocas de bonanza y las de bajos precios tienen estructuras dinámicas similares, mientras que las zonas de precios intermedios pueden tener dinámicas diferentes. Un modelo ESTAR puede representar un mercado en el que el paso de altos crecimientos en los precios hacia crecimientos menores (destorcidas) es similar al paso de bajos crecimientos en los precios hacia crecimientos de precios mayores (bonanzas).¹⁹

En algunos casos la teoría económica considera simplemente los modelos de dos regímenes (TAR), porque admite la posibilidad de tener dos situaciones marcadamente diferenciadas. Sin embargo, cuando en la economía conviven muchos agentes con diferentes expectativas y que toman decisiones en diferentes momentos del tiempo, en el agregado lo que se observa es más bien una situación en la cual los cambios entre los dos tipos de regímenes se dan suavemente.

De una manera más general, un modelo con un vector \mathbf{w}_t de m variables explicatorias de la forma $\mathbf{w}'_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, x_{1t}, \dots, x_{kt})$ donde $m=p+k$, entonces puede escribirse como:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha' \mathbf{w}_t + (\beta_0 + \beta' \mathbf{w}_t) F(z_t) + \varepsilon_t \quad (8)$$

donde $z_t = \gamma(\delta' \mathbf{w}_t - c)$ y $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)'$.

¹⁹ La elección entre un LSTAR y un ESTAR se basa en el comportamiento de los datos, al igual que la determinación del rezago de la variable de transición. Esto ocurre por el escaso desarrollo teórico en el empleo de este tipo de modelos.

Nótese que en esta formulación más general el vector de variables explicatorias w puede contener realizaciones rezagadas de y y un conjunto de variables exógenas contemporáneas x , y la variable de transición z es una combinación lineal de w .

En la estimación se toma que el vector de variables explicativas w está compuesto únicamente por p rezagos de y , y el argumento de las funciones de transición, z_t , contiene sólo una variable de transición que es una realización rezagada de la variable y en el tiempo d . Esto es, en el caso de las ecuaciones (5) y (6) tenemos que $z_t = \gamma(y_{t-d} - c)$. Adicionalmente, se puede asumir que el vector δ es conocido, lo cual reduce substancialmente el número de parámetros a estimar pues se pasa de tener $3(m+1)$ coeficientes a $2(m+1)+2$ coeficientes.

Antes de proceder con la estimación de un modelo STAR, primero se debe probar la hipótesis de linealidad frente a dicho tipo específico de no linealidad (STAR). Si se rechaza la linealidad el siguiente paso es especificar el modelo dentro de la familia de modelos STAR, posteriormente estimar los parámetros, y finalmente evaluar el modelo estimado.

B. Especificación de un Modelo STAR

De las ecuaciones (4) y (7) se puede observar como el modelo $AR(p)$ está presente dentro del modelo STAR. Una primera alternativa es probar la linealidad del modelo frente a la especificación STAR. Si no se rechaza la hipótesis nula de linealidad, la conclusión es que los precios pueden ser descritos adecuadamente por un modelo lineal $AR(p)$. Si se rechaza la nula, la especificación de un modelo STAR se convierte en el siguiente problema.

De acuerdo con Teräsvirta y Anderson (1993) la especificación de modelos STAR consta de tres etapas :

1. Especificación de un modelo $AR(p)$ lineal.
2. Probar la linealidad para diferentes valores del parámetro d , y si es rechazada determinar d .

3. Escoger entre un modelo ESTAR y un LSTAR usando una secuencia de pruebas de hipótesis compuestas.

En la primera etapa, la gran dificultad radica en que el rezago p es desconocido y por lo tanto una elección diferente del p verdadero puede afectar la potencia de la prueba o puede generar un sesgo hacia el rechazo de la hipótesis nula, aún si el modelo es lineal. Lo anterior depende de si el p seleccionado es muy alto o es muy bajo, respectivamente.

El siguiente paso es la determinación de d . De las ecuaciones (4), (5) y (6) se puede observar que probar $H_0: \gamma=0$ asumiendo que y es estacionaria bajo H_0 es complicado, ya que el modelo sólo está identificado bajo la alterna $H_1: \gamma \neq 0$. De acuerdo con Teräsvirta y Anderson (1993), este problema tiene una solución simple basada en una aproximación de una prueba de multiplicadores de Lagrange, que se describe a continuación.²⁰

La siguiente prueba se diferencia del test BDS en el sentido que se basa en información *a-priori* de la posible estructura del modelo que describe el comportamiento de la serie de tiempo. En el test BDS simplemente se buscan indicios de la presencia de no linealidades, mientras que en este se prueba una estructura lineal frente a la alternativa de un modelo STAR, bien sea LSTAR o ESTAR.

De acuerdo con Teräsvirta y Anderson (1993) la prueba se fundamenta en construir una regresión auxiliar que permita determinar el rezago óptimo de la variable de transición y la escogencia entre un modelo ESTAR o un LSTAR. La estructura de dicha prueba es la siguiente :

$$H_0: \beta_{2j} = \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0, j=1, \dots, p$$

contra $H_1: H_0$ no es válida en la regresión auxiliar de la forma :

²⁰ La derivación formal de la regresión auxiliar se puede encontrar en Granger y Teräsvirta (1993) pp.70-75.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1' w_t + \sum_{j=1}^p \beta_{2j} y_{t-j} y_{t-d} + \sum_{j=1}^p \beta_{3j} y_{t-j} y_{t-d}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{4j} y_{t-j} y_{t-d}^3 + v_t \quad (9)$$

Para determinar d , la prueba debe realizarse para un rango de valores $1 \leq d \leq D$, donde D es un valor arbitrario. Si se rechaza la linealidad para más de un valor de d , entonces d se determina de acuerdo con el siguiente criterio $d^* = \arg \min p(d)$ para $1 \leq d \leq D$, donde $p(d)$ es el p -value de la prueba seleccionada.²¹

Una vez escogido d , el siguiente paso es seleccionar entre un modelo LSTAR y un ESTAR. El procedimiento consiste en plantear una secuencia de pruebas de hipótesis compuestas basadas en la ecuación (7). De acuerdo con Teräsvirta y Anderson (1993) la prueba consiste en :

$$H_{04} : \beta_{4j} = 0, \quad j=1, \dots, p \quad (10)$$

$$H_{03} : \beta_{3j} = 0 \mid \beta_{4j} = 0, \quad j=1, \dots, p \quad (11)$$

$$H_0 : \beta_{2j} = 0 \mid \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0, \quad j=1, \dots, p \quad (12)$$

La idea de esta secuencia de pruebas es interpretar los β_{ij} como funciones de los parámetros del modelo original, bien sea (4)-(5) o (4)-(6). Si el modelo es un LSTAR entonces $\beta_{4j} \neq 0$. Por el contrario, si el modelo es un ESTAR entonces $\beta_{4j} = 0, \quad j=1, \dots, p$, pero $\beta_{3j} \neq 0$ para al menos un j si $\pi_2 \neq 0$. Si $\beta_{2j} \neq 0$ para al menos un j si $\pi_2 \neq 0$ entonces el modelo es LSTAR. Si (10) y (11) no se rechazan y se rechaza (12) se escoge el modelo LSTAR. El único caso donde la estructura de la prueba falla es cuando (11) y (12) se rechazan, en este caso se debe probar :

$$H'_{03} : \beta_{3j} = 0 \mid \beta_{2j} = \beta_{4j} = 0, \quad j=1, \dots, p \quad (13)$$

que en caso de rechazar la hipótesis nula se escoge un modelo ESTAR. Una vez especificado el modelo, el siguiente paso es la estimación del modelo la cual se realiza por mínimos cuadrados no lineales. El procedimiento se describe en el anexo No.3.

²¹ El argumento para escoger el menor p -value es que si d es el adecuado, la prueba alcanza su máximo de potencia, mientras que un d mal escogido debilita la potencia de la prueba.

C. Evaluación de Modelos STAR Estimados

Una vez estimado el modelo es conveniente entrar en la etapa de verificación. En esta etapa es importante verificar dos tipos de condiciones: primero, que los parámetros estimados del modelo sean “razonables”. Esto implica que los valores de éstos deben estar dentro de un rango aceptable y que tengan algún sentido en el momento de evaluar la predicción del modelo tanto al interior de la muestra como por fuera de ella. Segundo, los residuos deben ser no correlacionados, y deben estar normalmente distribuidos.²²

Por otra parte, en la mayoría de los trabajos que emplean modelos no lineales un criterio empleado para medir las ganancias en el empleo de modelos de este tipo es comparar el error estándar de los residuos del modelo $AR(p)$ con el error estándar del modelo STAR, si este último es menor el modelo STAR mejora la explicación de la serie y aumenta su poder de predicción.

IV. Resultados de las Estimaciones

A. Los Datos

Una de las principales características del precio externo del café es su volatilidad. Este comportamiento puede ser un indicador que los precios pueden no ser el resultado un modelo lineal sino que por el contrario, las asimetrías en las fluctuaciones y su gran volatilidad son un indicio de la presencia de no linealidades. La serie original, el precio spot promedio mensual del café colombiano en la bolsa de Nueva York, se transformó en las diferencias logarítmicas mensuales para alcanzar la condición de estacionariedad. Se optó por no eliminar los efectos de las heladas, ni de los pactos porque dichas variables pueden ser indicadoras de los diferentes tipos de regímenes.

²² Si bien no cumplir con estos requisitos de los residuos implica una especificación incorrecta, es común encontrar que muchos de los tests fallan debido a la presencia de “outliers” en los residuos estimados, e incluso algunas de estas observaciones tienen causas claras para el investigador. En el caso del café colombiano las bonanzas son un ejemplo de este tipo de situaciones.

B. Las Pruebas de Linealidad

Las pruebas de linealidad en la especificación tienen dos objetivos centrales. El primero es rechazar la linealidad en la serie de tiempo del precio externo del café. En segundo lugar, de ser rechazada la linealidad, el objetivo es escoger el rezago óptimo de la variable de transición.

En primer lugar, se estimó un modelo autorregresivo para la serie estacionaria obteniendo los siguientes resultados:

$$y_t = 0.002 + 0.228y_{t-1} + 0.083y_{t-2} + 0.062y_{t-8} + \hat{\varepsilon}_t$$

(0.003) (0.031) (0.032) (0.031) (14)

DW = 1.99 JB = 965.23 $s_L = 0.062$

donde los valores en paréntesis los errores estándar de los parámetros estimados y s_L es el error estándar del modelo (14). Los residuos del modelo son ruido blanco.

En segundo lugar, empleando el modelo anterior se estima una regresión auxiliar²³ como se muestra en la siguiente ecuación para verificar la linealidad del modelo.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-8} + \sum_{j=1}^6 \beta_{2j} y_{t-j} y_{t-d} + \sum_{j=1}^6 \beta_{3j} y_{t-j} y_{t-d}^2 + \sum_{j=1}^6 \beta_{4j} y_{t-j} y_{t-d}^3 + v_t \quad (15)$$

Esta regresión busca probar que los parámetros de la derecha de (14) son significativos en conjunto y por lo tanto se rechazaría la hipótesis de linealidad del modelo. La regresión se corre para $1 \leq d \leq 5$ y si se encuentra que se rechaza $H_0: \beta_{2j} = \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0$, para $j=1, \dots, 6$, entonces es factible estimar un modelo no lineal.

El tercer paso es determinar el retardo óptimo de la variable de transición y la especificación del modelo. Dado que d es desconocido, el procedimiento que seguimos consistió en estimar la regresión auxiliar para diferentes valores de d y de esta forma determinar el rezago óptimo. La tabla No.3 muestra los resultados de la prueba de escogencia del retardo d .

²³ Esta regresión auxiliar es una aproximación de un test de multiplicadores de Lagrange para los modelos ESTAR y LSTAR, tal como lo demuestran Granger y Teräsvirta (1993).

Tabla No. 3
Pruebas de Escogencia del Retardo d

Retardo	Prueba F	p-value
d = 1	932.61	0.00011
d = 2	905.50	0.00023
d = 3	886.72	0.00050
d = 4	877.46	0.00052
d = 5	911.04	0.00015

FUENTE: Cálculos del autor

Una vez escogido el retardo d se procede a probar en cada una de las regresiones la validez de las hipótesis en (10), (11) y (12) empleando la regresión auxiliar (15). Los resultados de las pruebas F para la escogencia del modelo se muestran en la tabla No.4.

Tabla No. 4
Pruebas de Escogencia del Modelo

Retardo	Prueba F	p-value	Modelo
d = 1	6.44	0.011	Se rechaza $H_{04}: \beta_{4j}=0 \rightarrow$ LSTAR
d = 2	3.32	0.068	Se rechaza $H_{03}: \beta_{3j}=0 \mid \beta_{4j}=0 \rightarrow$
d = 3	1.57	0.021	Se rechaza $H_{03}: \beta_{3j}=0 \mid \beta_{4j}=0$
d = 4	4.29	0.038	Se rechaza $H_{04}: \beta_{4j}=0 \rightarrow$ LSTAR
d = 5	5.68	0.017	Se rechaza $H_{04}: \beta_{4j}=0 \rightarrow$ LSTAR

Fuente: Cálculos del autor

Dado que la prueba tiene su máximo de potencia cuando el p -value es mínimo, es decir cuando el d escogido es el verdadero, el retardo óptimo de la variable de transición es 1 y adicionalmente, para dicho valor se rechaza $H_{04}: \beta_{4j}=0$ entonces el modelo escogido es un LSTAR.

C. Estimación del Modelo LSTAR

Como se mencionó en la sección 3.2 el modelo especificado se debe estimar por NLLS. Bajo ciertas condiciones tales como estacionariedad de las variables, los estimadores de los parámetros son consistentes y asintóticamente normales. En esta sección se muestran los parámetros del modelo estimado y sus respectivos errores estándar. Adicionalmente, se presenta la relación entre la varianza de los errores del modelo no lineal y la de los errores del modelo AR(p) escogido de acuerdo con los criterios tradicionales. En general, se considera que dicha relación debe ser menor que 0.9 para que exista una diferencia entre el empleo de un modelo no lineal y uno lineal. A los residuos del modelo se les aplica la prueba de normalidad de Jarque-Bera, la cual también se reporta. Las estimaciones arrojaron los siguientes resultados:

$$y_t = -0.07y_{t-1} - 2.46y_{t-8} + (0.33y_{t-1} + 2.52y_{t-8}) \left(\frac{1}{1 + \exp[-242 \times 10.53(y_{t-1} - 0.29)]} \right) \quad (16)$$

(0.12) (1.22) (0.13) (1.22) (2933) (1.29)

DW = 2.04 JB = 1226 $s = 0.060$

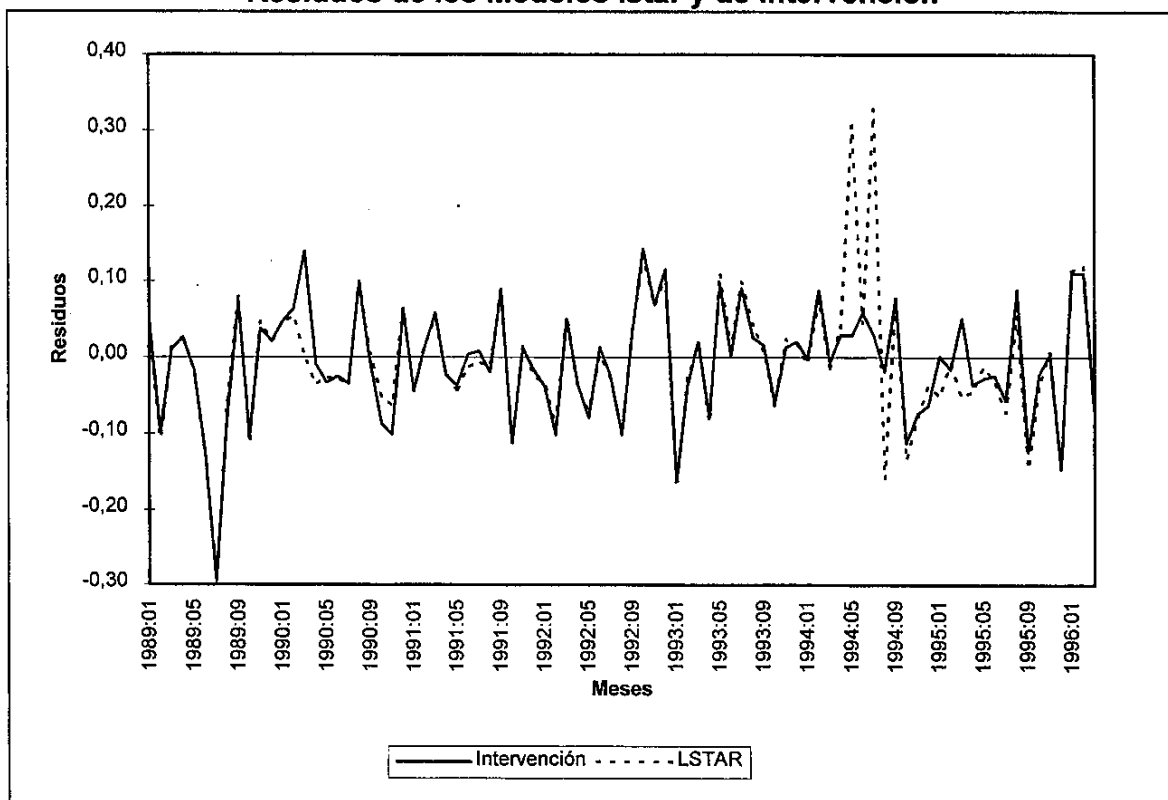
donde s es el error estándar del modelo no lineal. En consecuencia, no se puede afirmar que la varianza del error del modelo no lineal sea considerablemente menor que la de (14), ya que $s^2/s_L^2=0.93$, es decir que el modelo no lineal apenas reduce la varianza del error del modelo (14) en un 7% siendo las ganancias en términos de la explicación de la variable bastante bajas.

Si la desviación estándar del modelo no lineal se compara con la del modelo (3) que incorpora los efectos de las heladas en el Brasil sobre el precio internacional del café colombiano, las ganancias son nulas. De acuerdo con los resultados, la desviación estándar del error del modelo con intervención es de 0.0601 y la del modelo lineal es de 0.0604.

De acuerdo con este criterio, el modelo no evidencia ser superior frente a la alternativa lineal lo que se refleja en el comportamiento de los residuos de los dos modelos: el de intervención y el no lineal. En el siguiente gráfico se muestran los residuos de ambos modelos.

Como se puede observar del gráfico 1, ni el modelo LSTAR, (16), ni el modelo de intervención (3), no reproducen un hecho importantes de los últimos años: el efecto de la ruptura del pacto internacional del café en 1989. Sin embargo, como es de esperar, el modelo de intervención si logra reproducir la mini bonanza de julio de 1994 y su posterior destorcida de precios en los meses siguientes, mientras que el modelo LSTAR no. El modelo con intervención evidencia una clara superioridad.

Gráfico No. 1
Residuos de los Modelos lstar y de Intervencion



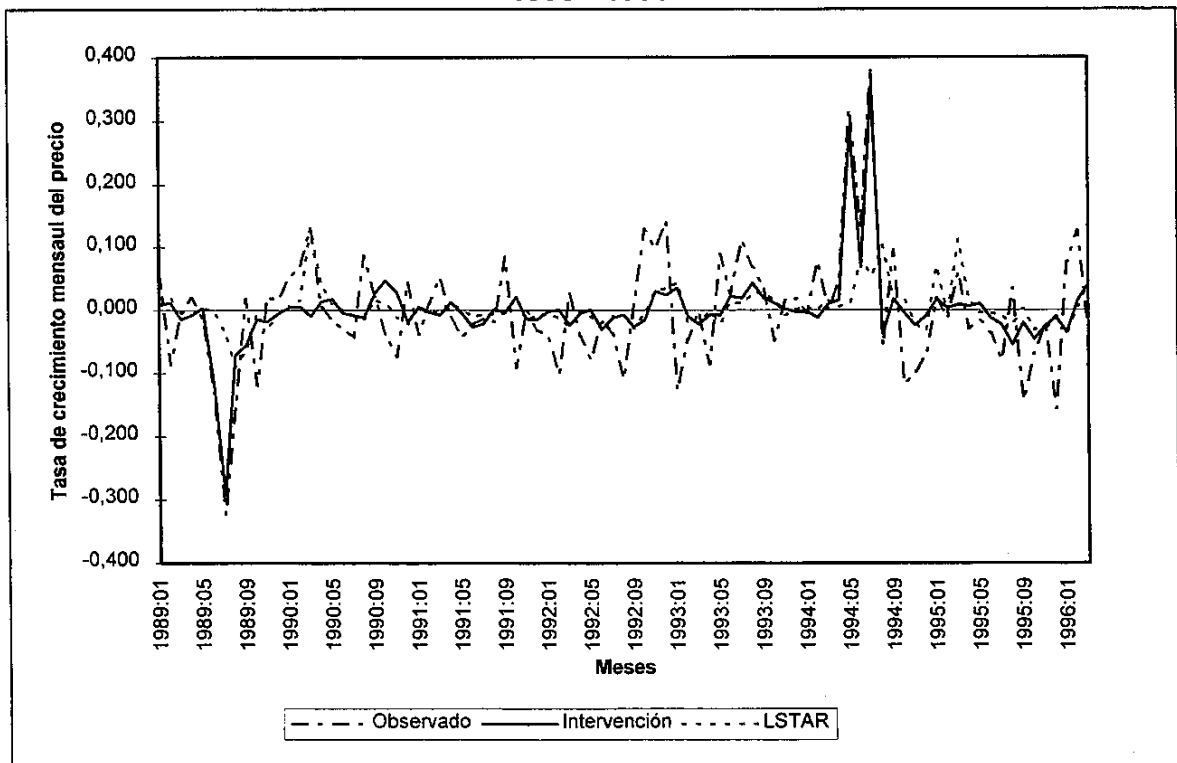
Fuente: Cálculos del autor

Por otro lado, los parámetros que permiten una interpretación diferente a los de un modelo lineal son $\gamma^*=252/\sigma(y)$ y $c^*=0.29$. Este último determina el punto medio entre los períodos de bonanza y de destorcida del precio externo ($F^*=1/2$). El valor de γ^* , al ser estadísticamente cero indica que no hay transición entre regímenes, haciendo el modelo equivalente a uno lineal.

De haber sido significativo el parámetro γ^* , el análisis de los resultados de la estimación del modelo no lineal habrían sido bastante interesantes. La utilidad de este tipo de modelos es que permite determinar la velocidad de la transición entre períodos de bonanza cafetera y de destorcida, que es de esperar sea el reflejo de un mercado bastante volátil aún bajo la presencia de pactos y de acuerdos internacionales.

El gráfico No. 2 muestra las tasas de crecimiento de los precios entre 1990 y 1996 tanto observadas como simuladas al interior de la muestra por el modelo de intervención y el modelo LSTAR. Se puede observar como el modelo no lineal reproduce levemente las fluctuaciones de las variaciones mensuales promedio del precio externo del café. Mientras que el modelo de intervención muestra un desempeño superior, en particular en la explicación de las heladas.

Gráfico No. 2
Tasa de Crecimiento Mensual Observada y Simulada del Precio Externo del Cafe
1990 - 1996



Fuente: Cálculos del autor.

Otro análisis interesante podría ser evaluar el modelo LSTAR mediante la determinación de las propiedades de largo plazo. Esta evaluación consiste en tomar los valores estimados de los parámetros y unos valores iniciales de la serie (que pueden ser valores observados) y_{tj} , $j=1, \dots, p$ y observar como se desarrolla el proceso de y_t en la medida en que $t \rightarrow \infty$. Los valores de y_t pueden converger a un valor estacionario estable o a un ciclo límite, o por el contrario diverge. En este último caso, el modelo no lineal es rechazado. Otra posibilidad puede ser el comportamiento caótico, en el cual el proceso no diverge, pero pequeños cambios en los valores iniciales generan trayectorias de solución substancialmente diferentes. Una ilustración de un proceso caótico se muestra en el anexo No. 1.

En el caso del modelo estimado, este proyecta un único punto estable después de 5 meses hacia adelante. Esto ocurre debido a que el parámetro γ estimado es cero (lo que indica que el modelo es lineal) y simultáneamente el parámetro estimado c es 0.29. Por lo tanto, en épocas en que las variaciones en los precios son inferiores al 29% el modelo reproduce un comportamiento lineal de la serie de tiempo, ya que la función de transición tiende a tomar valores cercanos a 1/2. Esto indica que sólo en períodos de crecimiento mensual en los precios por encima del 30% (los cuales sólo se dan en épocas de bonanza) el modelo podría llegar a reproducir un comportamiento no lineal en la serie de tiempo. Sin embargo, estos resultados son bastante frágiles.

Finalmente, una forma adicional de interpretar la dinámica del modelo es mediante el cálculo de las raíces del polinomio característico asociado al modelo estimado, en este caso (17). Las raíces del modelo LSTAR(p) se computan resolviendo el polinomio:

$$z^p - \sum_j (\hat{\pi}_{1j} + \hat{\pi}_{2j} F) z^{p-j} = 0 \quad (17)$$

para $F=1,0$. Si bien es posible calcular las raíces para cualquier valor de F , en particular el caso $0 < F < 1$, lo relevante del análisis radica en examinar la dinámica del modelo en los regímenes extremos: los períodos de bonanza y de destorcida de precios. Se encontró que cuando $F=0$ (régimen inferior) existe una raíz compleja ($z^S = -$

1.04-0.43i), y cuando $F=1$ (régimen superior) existe una raíz real ($z^1=-0.68$). El módulo de la raíz compleja es 1.13, que es diferente al módulo de la raíz real, 0.68. Este resultado es quizás el más relevante del modelo, pues indica que la dinámica de los precios es asimétrica en los dos tipos de regímenes. En períodos de bonanza (cuando las variaciones en precios son superiores al 30%) el proceso es convergente, mientras que en períodos de precios bajos el proceso es localmente explosivo. Los precios se mueven de períodos de precios bajos hacia precios mayores de una manera bastante agresiva, mientras que la caída de precios después de las bonanzas es lenta y sólo un shock negativo muy fuerte puede inducir caídas abruptas.

Este resultado puede explicarse adecuadamente por el impacto de las heladas en la cosecha brasileña, ya que la escasez del grano presiona aumentos abruptos en precios que tienden a mantenerse en el tiempo, mientras que la caída de los precios se da de una manera más lenta, en la medida en que el mercado se vuelve a reabastecer. Vale la pena anotar, que este tipo de comportamientos se diluyen en el tiempo, ya que los compradores del grano, mejoran sus prácticas de manejo de inventarios precisamente para evitar los largos períodos de bonanza.

V. Conclusiones

El análisis de la serie de tiempo de las variaciones mensuales del precio promedio spot del café colombiano en la bolsa de valores de Nueva York no muestra indicios fuertes de la presencia de no linealidades. La anterior afirmación, se verifica mediante la realización de un test desarrollado por Brock *et al.* (1994) que permite rechazar la hipótesis nula de independencia lineal de los residuos de un modelo ARMA(p,q) con intervención para el precio externo del café.

No obstante la debilidad de la evidencia, se procede a especificar, estimar y verificar un modelo autorregresivo de transición suave (STAR) que trata de incorporar un tipo específico de no linealidad. Dicho modelo permite evaluar si la dinámica de los precios es diferente dependiendo de si éstos están subiendo o bajando. Los resultados encontrados muestran que las estimaciones estadísticas no evidencian una clara

superioridad del modelo LSTAR frente a su alternativa lineal, y que los precios pueden ser descritos adecuadamente por un modelo lineal con intervención.

Los análisis que se derivan de un correcto empleo de los modelos no lineales pueden ser bastante interesantes. Por ejemplo, la dinámica de los precios en los períodos de bonanza diferiría substancialmente de la dinámica de los mismos en períodos de destorcidas. Ignorando por un momento los resultados estadísticos, al analizar la dinámica de los precios en situaciones de precios altos y bajos, se encuentra que en el primer caso la dinámica del proceso es convergente, en el segundo es localmente explosiva. Esto indica que los precios se mueven de períodos de precios bajos hacia precios más altos de una manera bastante agresiva, mientras que la caída de precios después de las bonanzas es lenta y sólo un shock negativo muy fuerte puede inducir caídas abruptas de precio.

Finalmente se comentan algunas implicaciones de política cafetera que se pueden derivar del análisis del precio externo del café colombiano. De acuerdo con Montenegro (1996), el sector cafetero en Colombia presenta una crisis estructural que se manifiesta en tres aspectos : primero, la aparición de nuevos productores con una alta productividad y simultáneamente un proceso de caída en el consumo, segundo, la “desnaturalización” de los mercados de instrumentos de cobertura como un resultado de la interacción de agentes especuladores²⁴ y tercero, la transformación estructural de la economía en los últimos años. Vale la pena destacar el segundo de ellos.

La volatilidad inducida por la acción de especuladores en los mercados financieros internacionales ha preocupado a los diseñadores de política cafetera colombianos. La principal consecuencia es el manejo de la exposición al riesgo internacional.²⁵ Para determinar el manejo adecuado de dicho riesgo es importante conocer las características del precio externo. Dependiendo de dichas características,

²⁴ El surgimiento y auge de los Fondos de Inversión le ha introducido una gran volatilidad a los precios y ha desligado el comportamiento de los precios del café en bolsa de las condiciones reales de producción de los países.

²⁵ Las opciones para el manejo de la exposición al riesgo son variadas : fondos de estabilización, instrumentos de cobertura, diversificación económica, transferencia de riesgo al sector privado o al exterior, o combinaciones de las anteriores entre otros.

la escogencia de determinado instrumento de cobertura del riesgo puede tener consecuencias beneficiosas o perversas sobre la economía.²⁶

En general, los resultados apuntan a que el precio externo nominal del café es un proceso no estacionario. Si el nivel general de precios externos es también un proceso no estacionario, puede esperarse, aunque no es absolutamente cierto, que el proceso de los precios reales sea estacionario. De tal forma que los shocks sean transitorios y no se justifiquen instrumentos como la política de estabilización del Fondo Nacional del Café y sea necesario recurrir a otros instrumentos más adecuados para el manejo de la exposición al riesgo, tales como los instrumentos de cobertura.

Por otro lado, si los precios del café (aislados de los efectos de las alteraciones climáticas en las cosechas de los países y de los efectos de los acuerdos entre países) siguieran un proceso no lineal, esto nos indicaría que las fluctuaciones de los precios pueden ser generadas endógenamente, es decir, por la misma estructura del mercado. Ante esta situación definir lo transitorio o permanente de los shocks no es lo relevante, ya que por propiedades de algunos procesos no lineales los "shocks" son transitorios, sino la identificación de la fuente de las fluctuaciones con el objeto de eliminarla mediante el diseño de políticas.

Sin embargo, identificar una fuente de fluctuaciones no es un proceso sencillo, es más puede ser algo imposible. Porque es probable que, aún conociendo el "verdadero" modelo mediante el cual se determina el precio del café, sea su estructura como un todo (las relaciones funcionales, los valores de los parámetros y las condiciones iniciales entre otros aspectos) la que genera esa fluctuación específica. La pregunta para el diseño de política cafetera es : cambiar el valor de los parámetros, digamos las elasticidades de demanda y de oferta ? O controlar las exportaciones de los países ? O realizar pactos internacionales que controlen la demanda y la oferta ?

²⁶ En particular, si los precios siguen un proceso estacionario y por tanto los "shocks" son transitorios se podría pensar que un fondo de estabilización puede no ser el instrumento más adecuado, dado que se conoce la media a la cual revierte el proceso. Sin embargo, un fondo puede ser adecuado en el caso de un proceso no estacionario, en el cual no hay reversión a la media y la varianza depende del tiempo, es decir que dado que los shocks son permanentes un fondo bien diseñado puede contribuir a suavizar los ajustes en los gastos.

Este tipo de preguntas aún no han sido resueltas ni siquiera por la teoría económica. Falta explorar mucho en el campo de las implicaciones para el diseño de política de la existencia de fluctuaciones generadas por mecanismos endógenos.

Por ahora, lo que los diseñadores de política cafetera ven es que el precio externo del café es un proceso muy volátil, y que en parte, como se mostró en este artículo, esa volatilidad es causada por las alteraciones en el clima de las zonas de cosecha cafetera en el Brasil. Adicionalmente, se sabe que en los últimos años esta volatilidad se ha incrementado por la intervención de los Fondos de Inversión en los mercados financieros de futuros y opciones. Así las cosas, es razonable pensar que las fluctuaciones de los precios del café tienen un alto componente exógeno al propio mercado.

En conclusión, las implicaciones de política no son evidentes. Tan no evidentes, que hay un relativo consenso entre los economistas que la mejor manera de mitigar los efectos de la volatilidad de los precios de productos con relativa importancia para las economías es diseñar mecanismos mixtos de cobertura de riesgo, tales como fondos de estabilización operando con instrumentos financieros. Por ahora, dado que sabemos muy poco, determinar si esta estrategia es adecuada o no es bastante arriesgado.

Anexo No. 1 : Algunos Elementos de la Teoría del Caos

La teoría del caos se define como el estudio de sistemas dinámicos no lineales complejos.²⁷ El interés en este tipo de sistemas radica en que, a pesar de ser determinísticos son capaces de generar trayectorias de las variables aparentemente aleatorias cuando los parámetros del sistema asumen ciertos valores.

Siguiendo a Brock (1989), si el comportamiento dinámico de un sistema está dado por la siguiente ecuación diferencial $\dot{x} = F(x, \mu)$, donde x es el estado del sistema y μ es un vector de *parámetros de movimiento lento*, una forma de estudiar el sistema es examinando sus propiedades de largo plazo. La idea es que el comportamiento de largo plazo debería converger a algún conjunto de puntos $A(\mu)$, llamado *atractor*, y dicho comportamiento de largo plazo debería cambiar (pasando a través de fases) en la medida en que μ cambia. En general, cuando μ aumenta, el comportamiento de largo plazo del sistema se vuelve más complejo.

Un ejemplo, es la ecuación en diferencias $x_{t+1} = \mu x_t(1-x_t)$ para $0 \leq \mu \leq 4$ y $0 \leq x_t \leq 4$. Esta ecuación se denomina *ecuación logística*. Cuando aumenta μ el comportamiento de largo plazo pasa progresivamente de un punto fijo, a un ciclo de dos períodos, a un ciclo de cuatro períodos, ... , a un ciclo de 2^n períodos, a caos. Esto es lo que se conoce como la ruta de dos períodos hacia el caos. A continuación se presenta un caso particular de como se genera el caos con la ecuación logística. En la figura A1 se muestra una gráfica de x_t en el eje de las abscisas contra x_{t+1} en el eje de las ordenadas con forma de "U" invertida, para diferentes valores del parámetro μ , particularmente $\mu=2.8, 3.2, 3.5$ y 3.58 , que determinan como aumenta la función logística de nivel. La línea recta inclinada muestra todos los puntos en que $x_t = x_{t+1}$.

²⁷ Prigogine define la complejidad de un sistema como la complejidad del modelo que se requiere para predecir el comportamiento del sistema.

Figura A1
Gráfico de x_t vs. x_{t+1} para diferentes valores de μ

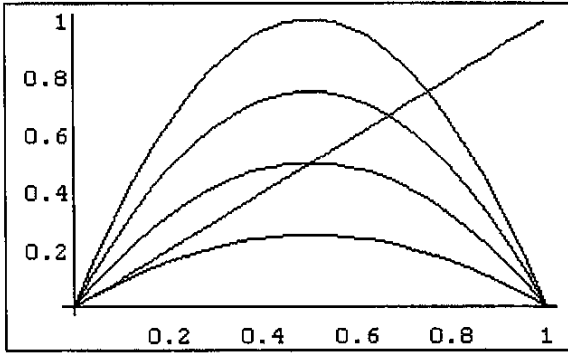
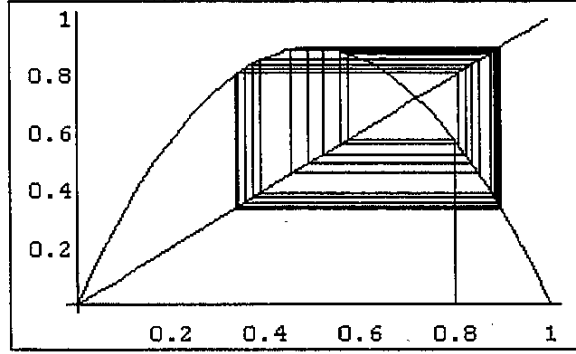


Figura A2
Dinámica de x_t para $\mu=3.58$



La figura A2 muestra como es la dinámica de la función para un valor inicial $x_0=0.8$ y un valor de $\mu=3.58$. Al realizar el mismo ejercicio con diferentes valores de x_0 y de μ se obtienen las siguientes dinámicas de x_t en el dominio del tiempo $t=0,1,\dots,15$.

Figura A3
Dinámica de x_t para un valor de $\mu=2.8$
Punto Estable

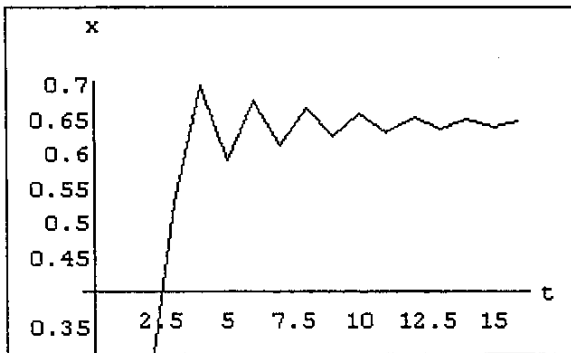


Figura A4
Dinámica de x_t para un valor de $\mu=3.2$
Ciclo de Dos Períodos

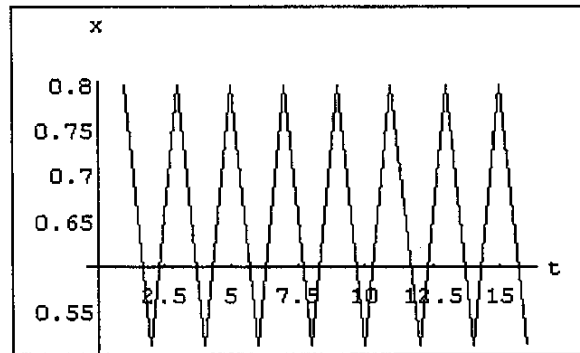


Figura A5
Dinámica de x_t para un valor de $\mu=3.5$
Ciclo de Tres Períodos

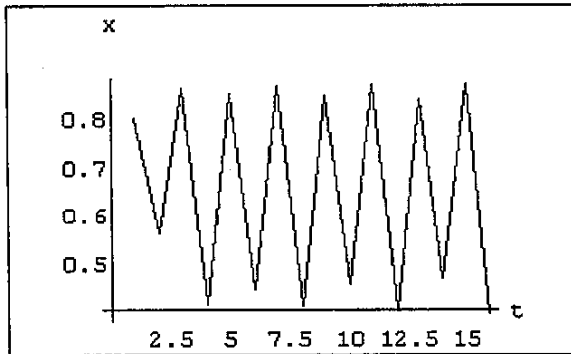
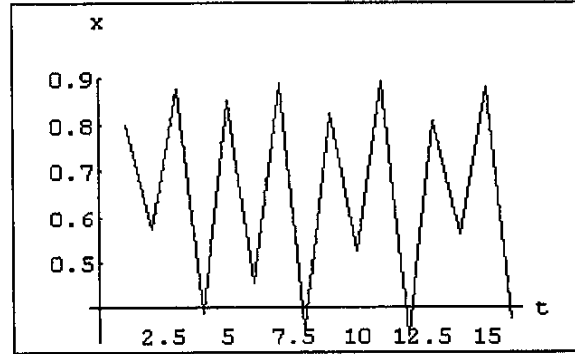


Figura A6
Dinámica de x_t para un valor de $\mu=3.58$
Caos



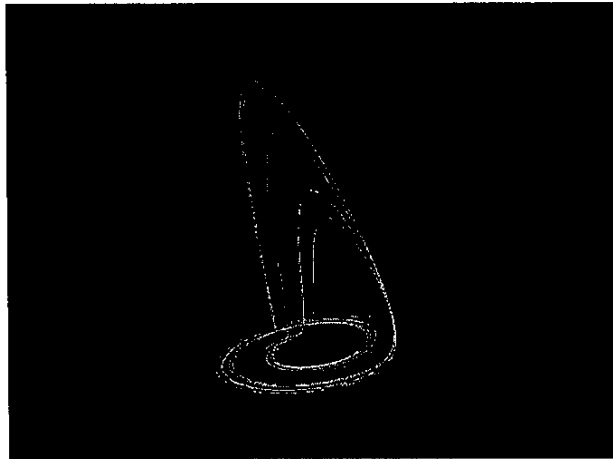
De las figuras A3 a A6 se puede observar como para diferentes valores de μ se generan trayectorias bien diferentes. La primera, para $\mu=2.8$ genera una trayectoria que converge hacia un sólo punto estable. La segunda, para $\mu=3.2$ genera una trayectoria que converge hacia un ciclo de dos períodos. La tercera, para $\mu=3.8$ genera una trayectoria que converge hacia un ciclo de tres períodos. Por último, la cuarta, para $\mu=3.58$ se genera una trayectoria caótica, porque no converge hacia ningún ciclo regular, entonces se dice que μ se encuentra en una *región caótica*. Se pueden realizar otro tipo de ejercicios que muestran las propiedades del caos, tales como la *dependencia de las condiciones iniciales*. Que significa que dos trayectorias que inician muy cerca una de otra eventualmente divergen.

Finalmente en este breve recuento, otro aspecto interesante es la relación entre atractor y caos. Si un sistema tiene un atractor extraño entonces el sistema es caótico. Para que un atractor sea extraño se deben cumplir tres condiciones (según Ruelle en 1979): 1) Todas las trayectorias permanecen en una región, 2) dependencia de las condiciones iniciales y 3) el atractor no se debe partir en dos o más partes. Un ejemplo de un atractor extraño es el generado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x + \alpha y \\ \dot{z} &= \beta - \gamma z + xz \quad \alpha, \beta, \gamma > 0\end{aligned}$$

donde el punto arriba de la variable denota su primera derivada respecto al tiempo. Este sistema sencillo no lineal, conocido como sistema de Rossler (1976), genera el siguiente atractor (una gráfica en tres dimensiones x, y, z) para los valores de $\alpha=0.2$, $\beta=0.2$ y $\gamma=5.7$:

Figura A7
Atractor de Rossler



Nótese que este atractor cumple con las condiciones 1 y 3, y cumple con la 2 si se calculara para diferentes valores iniciales generando una forma diferente.

Anexo No. 2 Cálculo del Estadístico BDS

A continuación se realiza una breve descripción formal del cálculo del estadístico BDS. En BDS (1984) se examina el estadístico de la ecuación (A1) en una formulación de una prueba no paramétrica de la hipótesis nula de IID contra una amplia gama de hipótesis alternas:

$$S_{m,n} = C_{m,n} - C_{1,n}^m \quad (A1)$$

donde la integral de correlación es una medida dada por:

$$C_{m,n} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq s < t \leq n} h_m(u_t^m, u_s^m)$$

en la cual por notación se tiene que n es el tamaño de la muestra, m es la dimensión de la serie es cogida arbitrariamente, u_t son las realizaciones de la serie de tiempo $\{u_t\}$ y :

$$u_t^m \equiv (u_t, \dots, u_{t+m-1})$$

$$h_{m,n}(u_t^m, u_s^m) \equiv \prod_{k=0}^{m-1} h(u_{t+k}, u_{s+k})$$

y $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un kernel simétrico que en BDS (1984) es de la forma $h(x,y) = \chi(e^{-|x-y|})$, donde $\chi(\cdot)$ es la función de Heavyside de la forma:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Bajo la hipótesis nula de IID, BDS (1984) muestran que $S_{m,n} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, y $\sqrt{n}S_{m,n}$ converge en su distribución a una variable aleatoria normal con media acero y varianza finita.

Elecciones adecuadas de la función kernel $h(x,y)$ aumentan la capacidad de este test para detectar dependencia en el tiempo. Para el caso $h(x,y) = \chi(e^{-|x-y|})$ la formula de la varianza V es:

$$\frac{V}{4} = 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + K^m + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2(m-1)} \quad (\text{A2})$$

donde

$$C = E\left[\chi(e - |u_s - u_t|)\right] = \int [F(x+e) - F(x-e)] dF(x)$$

$$K = E\left[\chi(e - |u_r - u_s|)\chi(e - |u_s - u_t|)\right] = \int [F(x+e) - F(x-e)]^2 dF(x)$$

la forma de la varianza en (A2) es válida para todos los kernel h . Los estimadores consistentes de las ecuaciones (A3) y (A4) son de la forma:

$$C_n(e) = n^{-2} \#\{(s,t) | 1 \leq s, t \leq n, |u_s - u_t| < e\} \quad (\text{A3})$$

$$K_n(e) = n^{-3} \#\{(r,s,t) | 1 \leq r, s, t \leq n, |u_r - u_s| < e, |u_s - u_t| < e\} \quad (\text{A4})$$

Estas estimaciones se realizaron en el software MTRCHAOS versión académica facilitado por el profesor J.B. Ramsey de la Universidad de Nueva York.

Anexo No. 3 Estimación de Modelos STAR

El procedimiento empleado para la estimación de los parámetros del modelo puede ser el de máxima verosimilitud (ML) o el de mínimos cuadrados no lineales (NLLS). En ambos casos, se requiere de algún procedimiento iterativo, por ejemplo Newton-Raphson (que se describe brevemente a continuación),²⁸ para resolver un problema de optimización que consiste en determinar el mínimo de una función de error con respecto a un conjunto de parámetros θ . Esta función es de la forma:

$$q(\theta) = u(\theta)'u(\theta) = (\mathbf{y} - f(\mathbf{x}; \theta))'(\mathbf{y} - f(\mathbf{x}; \theta)) \quad (12)$$

Por medio de una aproximación de Taylor de segundo orden sobre θ_n se tiene que:

²⁸ Para una descripción detallada de este algoritmo y de otros más, ver Chow (1989).

$$q(\theta) \approx q(\theta_n) + \mathbf{h}'_n (\theta - \theta_n) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_n)' \mathbf{H}_n (\theta - \theta_n) \quad (13)$$

donde \mathbf{h}_n es el gradiente de q evaluado en θ_n , \mathbf{H}_n es el hessiano de q evaluado en θ_n . Y la condición de primer orden se obtiene cuando se cumple que $\mathbf{h}_n + \mathbf{H}_n(\theta - \theta_n) = \mathbf{0}$. De esta condición se determina que

$$\theta = \theta_n - \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{h}_n \quad (14)$$

siendo \mathbf{H}_n no singular. Basados en (14), si se tiene un θ_n fijo y se computa \mathbf{H}_n^{-1} y \mathbf{h}_n se obtiene un θ_{n+1} que es el valor inicial de la siguiente iteración. Los métodos iterativos de optimización, como el expuesto, parten de unos valores iniciales y convergen hacia los valores óptimos de los parámetros estimados de acuerdo con algunos criterios de convergencia.

De acuerdo con Granger y Teräsvirta (1993), en la estimación de modelos LSTAR es complicado a veces determinar el valor del parámetro de pendiente del modelo, γ , dado que en muchos casos se cuenta con muestras pequeñas. En dichos casos se hace necesario realizar un ajuste en la escala del argumento de la función de transición, por ejemplo dividiendo la variable de transición por su desviación estándar, de tal forma que la función a estimar es:

$$F(y_{t-d}) = \left(1 + \exp\left[-\gamma(y_{t-d} - c) / \hat{\sigma}(y_t)\right]\right)^{-1} \quad (15)$$

en el caso de un LSTAR o bien:

$$F(y_{t-d}) = 1 - \exp\left[-\gamma(y_{t-d} - c)^2 / \hat{\sigma}^2(y_t)\right] \quad (16)$$

en el caso de un ESTAR. De acuerdo con Granger y Teräsvirta (1993) la experiencia muestra que un valor inicial razonable es tomar $\gamma=1$ para las iteraciones por NLLS cuando hay ajustes en la escala de la función de transición.

Referencias

Baumol, W.J. y Benhabib, J (1989), "Caos: significance mechanism and economic applications", *Journal of Economic Perspectives*, vol.3 No.1, pp. 77-105.

Brock, W.A. (1991), "Understanding macroeconomic series using complex systems theory", *Social Systems Research Institute*, University of Wisconsin-Madison.

Brock W.A. y W.D. Dechert (1988) "A general class of specification tests: the scalar case" mimeo.

Brock W.A., W.D. Dechert, J.A. Scheinkman y B. LeBaron (1994) "A test for independence based on the correlation dimension" mimeo.

Brock, W.A. y Malliaris A.G., *Differential Ecuations Stability and Chaos in Dinamic Economics*, Amsterdam, North-Holland, 1989.

Brock, W.A. y Potter S.M. (1993), "Nonlinear time series and macroeconometrics", *Social Systems Research Institute*, University of Wisconsin-Madison.

Brock, W.A. y Sayers Ch. L. (1988), "Is the business cycle characterized by deterministic chaos?", *Journal of Monetary Economics*, No. 22, pp. 71-90.

Bullard, J. y Butler A. (1993), "Nonlinearty and chaos in economic models: implications for policy decisions", *Economic Journal*, julio pp. 849-867.

Granger C.W.J. y Teräsvirta T., *Modelling nonlinear economic relationships*, Oxford University Press, New York, 1993.

Hamann, F.A., *El precio externo del café: posee una trayectoria caótica?*, Trabajo de Grado Pontificia Universidad Javeriana, 1995.

Holden, A., *Chaos*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1986.

Junguito, R. y Pizano D., *El comercio exterior y la política internacional del café*, Fondo Cultural Cafetero - Fedesarrollo. Santafé de Bogotá, 1993.

Li, Tien-Yien y Yorke J. A. (1975), "Period tree implies chaos", *American Mathematical Monthly*, vol. 82, pp. 985-992.

Liu, S.I. (1990) "Time series analysis for synchronization and chaos", Ph.D. thesis, University of California, San Diego.

Liu, T., C.W.J. Granger y W.P. Heller "Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic" en Pesaran, M.H. y Potter, S.M., *Nonlinear dynamics, chaos and econometrics*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993.

May, Robert M. (1976), "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature*, vol. 261, junio, pp. 459-467.

Medio, Alfredo. *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Montenegro, Santiago. *La Crisis del Café*, Oficina de asesores del Gobierno en Asuntos Cafeteros, Bogotá, 1996.

Pesaran, M.H. y Potter, S.M., *Nonlinear dynamics, chaos and econometrics*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993.

Ramirez, Manuel y Ribero Rocio (1992), "Caos: definición, detección y ejemplos", *Desarrollo y Sociedad*, No.30 septiembre, pp. 189-214.

Ramsey, J.B. y Rothman, P. (1994), "Time irreversibility and business cycle asymmetry", *mimeo*.

Teräsvirta T. y H.M. Anderson "Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models" en Pesaran, M.H. y Potter, S.M., *Nonlinear dynamics, chaos and econometrics*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993.

Vargas B. (1989), " La eficiencia del mercado de futuros del café: alguna evidencia empírica 1973-1989" *Ensayos sobre política económica*, No. 16 diciembre, pp.141-164.