

La serie "Borradores Semanales de Economía" es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los Trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

**COINTEGRACION, EXOGENEIDAD Y CRITICA DE LUCAS :
FUNCIONES DE DEMANDA DE DINERO EN COLOMBIA : UN
EJERCICIO MAS**

Por:

**Martha Misas A.
Hugo Oliveros C.**

1997

No. 75

Para comentarios favor dirigirse a los autores:
Fax: 2865936 Teléfono : 3347193

**COINTEGRACION, EXOGENEIDAD Y CRITICA DE LUCAS :
FUNCIONES DE DEMANDA DE DINERO EN COLOMBIA : UN
EJERCICIO MAS**

**Martha Misas A.*
Hugo Oliveros C.**

Santafé de Bogotá, Julio de 1997

* En este caso y como casi siempre, los errores y omisiones son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República. Agradecemos los comentarios y sugerencias de carácter econométrico a L.F. Melo V., J.D. Uribe E. y H. Vargas H.

**"....Any particular empirical study is part of the research progression,
not the final word on the relevant subject...." D. F. Hendry (1995)**

"ALL our life we'll wait for THE answer

And the question is: WHY?"

ENIGMA 1996 Virgin Schallplatten GmbH.

I Introducción

En este documento se introducen e integran los conceptos de cointegración, exogeneidad, causalidad y crítica de Lucas referidos a un sistema de ecuaciones. El objetivo es conducir al lector a través primero, de una revisión de literatura sobre los desarrollos econométricos recientes acerca del análisis de las relaciones de largo plazo entre variables, propuestos por Johansen (1988), Ericson y Irons (1994) y Hendry (1995), entre otros, y segundo, de una aplicación práctica basada en las estimaciones de funciones de demanda de M1 y M3 más bonos en Colombia.

La base de referencia para iniciar esta discusión es el reconocer que las relaciones económicas entre variables no necesariamente se presentan en un sentido específico, es decir, que puede existir entre ellas un esquema de retroalimentación o un complejo mecanismo de transmisión de efectos. Hechos que conducen al planteamiento de un sistema de ecuaciones, el cual se caracteriza mediante un conjunto de parámetros Θ y sus relaciones. Dado que la teoría económica frecuentemente no especifica sobre el sistema ni su forma funcional ni su estructura dinámica, se ha convertido en una práctica común la utilización del esquema de Vectores Autorregresivos VAR, en el cual todas las variables se consideran endógenas, como una primera aproximación a dicho sistema y a sus interrelaciones.

El esquema VAR tradicional, el cual permite estimar los parámetros del conjunto Θ , exige que las variables bajo análisis sean estacionarias¹, $I(0)$. El requerimiento anterior lleva al siguiente interrogante: ¿Que sucede si la teoría económica sugiere que la

¹ Una serie de tiempo X_t es estacionaria débil si se cumple que: (i) $E(X_t)$, su media, es independiente de t , (ii) $E[X_t - E(X_t)]^2$, su varianza, es acotada por un número finito y no cambia sistemáticamente en el tiempo, y (iii) su autocovarianza, $E[(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))]$ es igual a $E[(X_{t+h} - E(X_{t+h}))(X_{t+h+k} - E(X_{t+h+k}))]$ para todo k y h . Esto significa que la serie tiende a retomar a su media y que fluctúa alrededor de ésta en un intervalo de amplitud constante. Cuthbertson et all (1992).

relación debe ser estudiada entre variables no estacionarias?². La solución dada por Johansen (1988) , Stock y Watson (1993) y Phillips y Hansen (1990), etc, consiste en la búsqueda de una o más combinaciones lineales de dichas variables que sea(n) estacionaria(s)³ y que a su vez minimicen la varianza de la representación VAR estacionaria, conocida como "Vector Error Correction (VEC)", de las variables bajo estudio.

Si existe al menos una combinación lineal estacionaria entre las variables ya mencionadas, la estimación del conjunto de parámetros Θ se lleva a cabo a través de un mecanismo, el cual partiendo de la estimación de los parámetros en el VEC, permite derivar éstos para el VAR.

Una vez superado el problema de la estimación de "este sistema", no determinado claramente por la teoría económica, a través de la herramienta VAR, el investigador está en condiciones de cumplir con sus objetivos iniciales. Estos objetivos pueden ser diversos, por ejemplo, el estudio de las relaciones de corto y largo plazo entre las variables, la generación de pronósticos libres y/o condicionados, el análisis de impulso respuesta y la descomposición de varianza, la evaluación de la estabilidad de los parámetros a través del tiempo, la comprobación de la existencia de relaciones de causalidad, la determinación del grado de exogeneidad de las variables, la validación e imposición de restricciones de carácter económico y el reconocimiento, bajo mecanismos de simulación, de la reacción del sistema ante cambios de comportamiento de variables sujetas a decisiones de política económica.

Debido a que no todos los elementos θ_i^4 del conjunto de parámetros Θ resultan relevantes en el análisis o son de interés para el investigador, de acuerdo a los objetivos

² Una serie es no estacionaria en su media si tiene una media variante en el tiempo y por lo tanto, referencias sobre ella, deben llevarse a cabo, tan solo, sobre períodos particulares de tiempo. Cuthbertson Op. Cit. Por ejemplo: M1, IPC, PIBK, CDT son series con esta característica, sin embargo, la teoría económica plantea una relación entre ellas (función de demanda de dinero).

³ Corrección de error equivalente al residual rezagado en el modelo de corrección de errores uniecuacional.

⁴ Los cuales representan las relaciones existentes entre las variables, (signo y magnitud del efecto).

mencionados anteriormente, se hace necesario introducir en este contexto algunos conceptos que permitan discernir acerca de la validez de utilizar el conjunto completo de parámetros Θ o de un subconjunto de éste, Θ^* . Así, mediante el concepto de cointegración es posible determinar la forma como se relacionan las variables en el largo y corto plazo dentro del sistema. El concepto de exogeneidad, en sus diferentes grados: débil, fuerte y super, ayudará a tomar decisiones, por ejemplo, sobre: (i) la clase de pronóstico que puede ser llevado a cabo a través del sistema, (ii) las bondades de las simulaciones en la determinación de implicaciones de política, asociadas a la conocida crítica de Lucas y (iii) la coherencia entre la imposición de restricciones de carácter económico y las intrínsecamente definidas por el sistema.

Además de esta introducción, se presenta en la segunda parte una revisión de la literatura acerca de cointegración, exogeneidad, causalidad y crítica de Lucas en un contexto univariado y bajo sistemas de ecuaciones. Finalmente, en la tercera, se presenta una aplicación para el caso de la función de demanda de dinero en Colombia. Es de anotar, que aquellos que no estén interesados en la revisión de literatura pueden pasar directamente a la última sección.

II. Marco analítico

A. Cointegración

La teoría económica sugiere la existencia de relaciones de equilibrio entre variables no estacionarias, en consecuencia, los posibles desequilibrios que se presentan en la relación deben ser de carácter transitorio (estacionario). Sin embargo, en muchas ocasiones debido a la propiedad de integrabilidad dominante⁵ de las series que se utilizan para identificar las relaciones y/o a la existencia de problemas de especificación en el modelo que se usa para cuantificarla, los desequilibrios pueden ser de carácter permanente (no estacionario).

⁵ Dadas dos series no estacionarias X_t y Y_t , la serie resultante $Z_t = aX_t + bY_t$ conserva la propiedad de no estacionariedad, excepto en el caso en que X_t y Y_t mantengan una relación de largo plazo estable, es decir, que X_t y Y_t estén cointegradas con (a,b) el vector de cointegración. Véase, Engle y Granger (1987).

Regularmente, las relaciones entre variables se cuantifican mediante modelos lineales de regresión. Al seleccionar el modelo uniecuacional como instrumento de análisis en donde una de las variables es tratada como endógena y las restantes como explicativas se impone de antemano: (i) la restricción de exogeneidad sobre las últimas, es decir, se olvida la posible existencia de relaciones simultáneas entre las variables, y (ii) la existencia de un único vector de cointegración sobre el conjunto completo de variables. Surgen varios interrogantes sobre las consecuencias del uso de modelo uniecuacional como herramienta: ¿ Que sucede si existe al menos una relación de simultaneidad? y/o ¿Que pasa si hay más de un vector de cointegración?. Es de señalar, que la gravedad de estos problemas está directamente asociada con los objetivos econométricos del trabajo.

A continuación se presenta un ejemplo con dos variables⁶ integradas que exhiben una tendencia de largo plazo común y estable, es decir, que se encuentran cointegradas. En este caso, se pueden observar, claramente, los problemas inducidos por la endogenización *a priori*. Así:

Sean X_t y Y_t ($t=1,2,\dots,T$) variables integradas de orden 1, $I(1)$, sobre las cuales, la teoría económica, sugiere la existencia de una relación estable de largo plazo. El investigador podría optar por la evaluación de la relación a través de la siguiente forma funcional:

$$Y_t = \beta_1 X_t + \varepsilon_{1t} \quad \forall t=1,2,\dots,T \quad (1)$$

donde el término de perturbación o desequilibrio, ε_{1t} , es estacionario por ser el resultado de la combinación lineal de las variables X_t y Y_t ⁷, las cuales están cointegradas. Una representación equivalente de (1) puede ser formulada al considerar que el nivel de la variable Y en (t) depende estocásticamente de su nivel

⁶ Este ejemplo puede considerarse como el ejercicio más sencillo desde el punto de vista del No. de variables y del No. de vectores de cointegración.

⁷ Formalmente, el término de perturbación $\varepsilon_t = \beta_2 Y_t - \beta_1 X_t$. Tradicionalmente, en la literatura de cointegración se asocia con dicho término a Z_t (con relación a lo presentado en nota 5: $\beta_1 = -a$, $\beta_2 = 1 = b$).

en el período anterior, hecho explicado por el orden de integración de la serie, y de una porción, α_1 , del distanciamiento frente a su nivel de equilibrio en (t-1). De esta forma se tiene el siguiente modelo

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} - \alpha_1 (Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1}) + u_{1t} \\ \nabla Y_t &= -\alpha_1 (Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1}) + u_{1t} \end{aligned} \quad \forall t=2,3,\dots,T \quad (2)$$

en el cual la variable ∇Y_t confirma su carácter estacionario por ser una combinación lineal del desequilibrio, $(Y_t - \beta_1 X_t)$, y de un término de perturbación ruido blanco⁸, u_{1t} , respectivamente estacionarios. La última expresión en (2) es conocida como modelo de corrección de errores⁹ y desde un punto de vista estadístico, su adecuada determinación para un conjunto de variables, confirma la existencia de cointegración entre ellas¹⁰. Sin embargo, esta no es la única relación que se puede derivar para la dupla (X_t, Y_t) . Una relación similar a (2) puede ser planteada para X_t , así:

$$\nabla X_t = -\alpha_2 (Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1}) + u_{2t} \quad \forall t=2,3,\dots,T \quad (3)$$

Si el objetivo propuesto es la evaluación de la relación entre los componentes de la dupla (X_t, Y_t) , tanto, (1) como la siguiente forma funcional:

$$X_t = \phi_1 Y_t + \varepsilon_{2t} \quad \forall t=1,2,\dots,T \quad (4)$$

lo permiten¹¹. Sin embargo, si el propósito de la estimación es encontrar un

⁸En la situación en que el término de perturbación u_{1t} en el modelo de corrección de errores, definido en (2), no cumpla con las propiedades de ruido blanco, es necesario adicionar como variables explicativas del modelo valores rezagados de ∇X_t y ∇Y_t .

⁹ Si en (2) α_1 es igual a uno se corrige el 100% del desequilibrio en un solo período de tiempo.

¹⁰ Véase, en este contexto, el papel que juega la estacionariedad de los residuos en el esquema de estimación conjunta de la restricción de largo plazo y del modelo de corrección de errores, en el llamado procedimiento de una etapa o estimación directa de la relación de cointegración.

¹¹Es de señalar, que si el tamaño de muestra es lo suficientemente grande (teóricamente: $t \rightarrow \infty$) se tiene que $\phi_1 = 1/\beta_1$. Sin embargo, al considerar en el análisis una muestra pequeña, el investigador debe decidir sobre el carácter endógeno de las variables.

mecanismo que permita determinar el nivel esperado de la dupla o de cada una de las componentes en el período $(t+1)$ es necesario considerar (2) y (3) de manera conjunta, a menos que α_2 fuese igual a 0, lo cual significaría que la variable X_t es exógena al considerar (X_t, Y_t) como un sistema.

En general, al considerar sistemas de más de dos variables, el análisis de cointegración se torna más complejo ya que puede existir más de una combinación lineal estacionaria (o vectores de cointegración) de las variables. En consecuencia, el llevar a cabo las pruebas "tradicionales" de cointegración bajo "estimación uniecuacional", las cuales permiten como máximo encontrar un vector de cointegración, conduce a una pérdida de información valiosa sobre el sistema y por lo tanto, el método de estimación es estadísticamente ineficiente. Por ejemplo, Cuthbertson et al. (1992) señalan como, en un sistema de tres variables, la existencia de cointegración probada bajo el mecanismo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) no garantiza la unicidad del vector de cointegración dado que pueden existir dos vectores cointegrantes y el encontrado bajo MCO ser, tan sólo, la combinación lineal de ellos. Adicionalmente, si existen dos vectores de cointegración, en el análisis univariado se omite, en la matriz de diseño, uno de los desequilibrios, por consiguiente se produce un sesgo por mala especificación, véase, entre otros, Mehra (1996).

Johansen (1988) establece un mecanismo de reconocimiento conjunto de todas las posibles relaciones cointegrantes existentes dentro del vector de variables¹² integradas de orden d , $I(d)$ $d \geq 1$ ¹³, eliminando, de esta forma, la restricción de a lo sumo un vector

¹²Es de anotar, que existen otras metodologías que permiten encontrar las relaciones de cointegración existentes bajo el sistema, tales como: la desarrollada por Stock y Watson (1993) conocida como reconocimiento de tendencias comunes, la de Saikkonen (1991) en la cual se estiman y prueban las relaciones de cointegración dentro de sistemas de ecuaciones a través de aproximaciones autorregresivas, la de Park (1992) basada en regresiones de cointegración canónica, entre otras. Para más detalle, véase "Unit Roots in Macroeconomics: A Survey", Masao Ogaki, University of Rochester, 1993.

¹³Un proceso Y_t p dimensional, integrado de orden d , $I(d)$, es decir, $\nabla^d Y_t$ es estacionario y $\nabla^{d-1} Y_t$ no lo es, se dice cointegrado si existe al menos una combinación lineal CY_t integrada de un orden menor que d . Es de señalar, que en este contexto no se exige que todas las variables que conforman el vector estén

cointegrante y en consecuencia, el problema de la endogenización *a priori*. Adicionalmente, construye un modelo en la versión estacionaria de las variables, el cual involucra las restricciones de largo plazo existentes y garantiza una minimización de la varianza del error.

Con el objeto de (i) determinar el número de vectores de cointegración entre las P variables y (ii) estimar el sistema conformado por ellas, considerando las restricciones de largo plazo, si éstas existen, Johansen (1988) parte de una representación autorregresiva de orden k^{14} , VAR(k), tal como:

$$Y_t = \mu + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_k Y_{t-k} + \xi_t \quad \forall t = k+1, \dots, T \quad (5)$$

donde: Y_t un vector $P \times 1$ conformado por la t-ésima observación de las P variables del sistema, A_i ($i=1, \dots, k$) matrices de orden $P \times P$ de coeficientes a estimar y ξ_t un vector aleatorio conformado por P perturbaciones estocásticas independientes con: (i) $E[\xi_t] = 0$ y (ii) matriz de varianza-covarianza Σ_ξ , la cual, al igual que en el caso univariado ya mencionado, tradicionalmente se reformula, bajo la notación de Lutkepohl (1993), como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla Y_t &= \mu + F_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + F_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} - \Pi Y_{t-1} - \xi_t \quad \forall t = k+1, \dots, T \\ F_i &= - \sum_{j=i+1}^k A_j \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (6)$$

en algunas ocasiones (6) es descrito como:

integradas de orden d por lo cual esta presentación difiere de la dada por Engle y Granger (1987) en la cual se requiere el mismo orden de integración en todas las componentes del vector Y_t .

¹⁴Como lo señala Lutkepohl (1993), en la proposición 11.6 sobre la consistencia de la estimación de la longitud de rezago del VAR sobre series no estacionarias, los criterios de HQ y SC son consistentes en el sentido de su habilidad para seleccionar de manera correcta la longitud (k) en muestras grandes, en tanto que, AIC no presenta dicha propiedad, igualmente, este criterio sobreestima el valor de (k) al considerar muestras de tamaño mayor a 16 observaciones.

$$\begin{aligned} \nabla Y_t &= \mu + D_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + D_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} - \Pi Y_{t-k} + \xi_t \quad \forall t = k+1, \dots, T \\ D_i &= - (I_p - \sum_{j=1}^i A_j) \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (7)$$

en el caso de que la la matriz Π exista y ΠY_{t-1} o ΠY_{t-k} sean estacionarios¹⁵, tanto la representación (6) como la (7) se constituyen como modelos de vectores de corrección de errores de orden $(k-1)$, VEC($k-1$). Los modelos (6) y (7) permiten separar la estacionariedad del cambio de Y_t en la proveniente: (i) de sus cambios rezagados y (ii) de las combinaciones lineales estacionarias de las series integradas. Es en este contexto que Johansen (1988) resuelve dos interrogantes sobre Π : (i) el de su existencia, la cual garantiza su descomposición en dos matrices α y β ($\Pi = \alpha\beta'$), a través de una prueba de hipótesis y (ii) el de su estimación, la cual se lleva a cabo, a partir de los vectores y los valores propios pertenecientes a la solución de una ecuación característica en \mathbb{R}^p .

A continuación, se presentan algunas de las consideraciones matemáticas y estadísticas del método ya mencionado. La representación (7) suponiendo la existencia de Π , puede reescribirse como sigue¹⁶:

$$\nabla Y_t - \alpha\beta' Y_{t-k} = \mu + D_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + D_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} + \xi_t \quad \forall t = k+1, \dots, T \quad (8)$$

si ξ_t se distribuye normal multivariante $(0, \Sigma_\xi)$ se tiene la siguiente función de verosimilitud en términos de ξ_t :

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Sigma_\xi, D_1, \dots, D_{k-1}) = |\Sigma_\xi|^{-\frac{T}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \xi_t' \Sigma_\xi^{-1} \xi_t \right] \quad (9)$$

si la matriz $\Pi = \alpha\beta'$ fuese conocida, los estimadores máximo verosímiles de los D_i derivados

¹⁵Este es el componente análogo al desequilibrio del modelo de corrección de errores uniecuacional.

¹⁶La reformulación podría hacerse a través de la representación (6) sin alteración alguna de los resultados.

de (9) coincidirían con los obtenidos por mínimos cuadrados ordinarios. Dado que Π es desconocida, pero se supone su existencia, Johansen construye una prueba que permite verificar ésta y encontrar sus valores a partir de la concentración de la función de verosimilitud (9) en los parámetros de interés (α, β) , utilizando para ello un mecanismo que posibilita eliminar las dependencias lineales que podrían tener :

$$\nabla Y_t \text{ y } Y_{t-k} \text{ de } \{\nabla Y_{t-1}, \dots, \nabla Y_{t-k+1}\}$$

al plantear la siguiente ecuación para ξ_t :

$$\begin{aligned} \xi_t &= \alpha \beta' R_{kt} - R_{0t} \\ R_{0t} &= \nabla Y_t - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j \nabla Y_{tj} \\ R_{kt} &= Y_{t,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j \nabla Y_{tj} \end{aligned} \quad (10)$$

donde R_{0t} y R_{kt} son vectores $(Px1)$ que pueden ser interpretados como residuales, de la t -ésima observación, de las regresiones auxiliares ∇Y_t en función de $\{\nabla Y_{t-1}, \dots, \nabla Y_{t-k+1}\}$ y Y_{t-k} en función de $\{\nabla Y_{t-1}, \dots, \nabla Y_{t-k+1}\}$, respectivamente. Es de señalar, que si la ecuación (8) contiene componentes determinísticas de tendencia, como las consideradas en la ecuación (20) presentada más adelante, las regresiones presentadas en (10) deben considerar dichas componentes. En consecuencia, si se reemplaza en la ecuación (9) a ξ_t por (10) y se deriva con respecto a β se obtiene los siguientes estimadores para α y Σ_ξ :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\beta) &= - S_{0k} \beta (\beta' S_{kk} \beta)^{-1} \\ \hat{\Sigma}_\xi(\beta) &= S_{00} + \hat{\alpha}(\beta) \beta' S_{k0} \\ S_{ij} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} R'_{jt} \quad ij = 0, k \end{aligned} \quad (11)$$

los cuales al ser incluidos en (9) dan como resultado una función g que depende tan solo

del determinante del estimador de la matriz de varianza covarianza, $\hat{\Sigma}_{\xi}(\beta)$, es decir, la función se maximiza para algún valor de β que pertenezca a la solución de la ecuación característica $|\hat{\Sigma}_{\xi}(\beta)|$ y que por lo tanto minimiza a :

$$|\hat{\Sigma}_{\xi}|^{\frac{T}{2}} = |S_{00} - S_{0k} \beta (\beta' S_{kk} \beta)^{-1} \beta' S_{k0}|^{\frac{T}{2}} \quad (12)$$

Como lo sugiere Banerjee et al. (1994), el procedimiento consiste en encontrar algún valor de β que minimice la siguiente expresión.

$$|\beta' S_{kk} \beta - \beta' S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k} \beta| / |\beta' S_{kk} \beta| \quad (13)$$

con este propósito se define una matriz Λ cuya diagonal está conformada por los valores propios de $S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k}$ con respecto a S_{kk} , ordenados secuencialmente $(\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_p)$ y que satisfacen la ecuación característica:

$$|\lambda_j S_{kk} - S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k}| = 0 \quad (14)$$

debido a que todo valor propio tiene asociado un vector propio, es posible encontrar la matriz de vectores propios normalizados Ψ , correspondiente a Λ , de tal forma que se cumple (i) $(S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k} \Psi) = S_{kk} \Psi \Lambda$ y (ii) $\Psi' S_{kk} \Psi = I$. Así, el estimador de máxima verosimilitud para β está dado por las primeras r filas de Ψ , seleccionadas a partir de una prueba de hipótesis secuencial propuesta por Johansen, comentada posteriormente. Es decir, los primeros r vectores propios de $S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k}$ con respecto a S_{kk} , los cuales desde un punto de vista de algebra lineal corresponden al núcleo del espacio de β . En general, debido a la dificultad de determinar las raíces de la ecuación característica presentada en (14) o valores propios, tal ecuación se premultiplica por la inversa de la matriz Q , donde Q^{-1} es la matriz asociada a la descomposición de Choleski de S_{kk}^{-1} , dando como

resultado:

$$|\lambda_i I - Q^{-1}(S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k})Q^{-1}| = 0 \quad (15)$$

de tal forma que el término $Q^{-1}(S_{k0} S_{00}^{-1} S_{0k})Q^{-1}$ corresponde a los cuadrados de las correlaciones canónicas de R_{kt} con respecto a R_{0t} ¹⁷. En la construcción de la prueba, Johansen usa los valores propios λ_i ($i=1, \dots, P$), que se derivan de (15), para maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud descrita en (9), o minimizar (12), a través de:

$$-\frac{T}{2} \ln(\hat{\Sigma}_\varepsilon) = -\frac{T}{2} \ln |S_{00}| \prod_{k=1}^r (1 - \hat{\lambda}_k) = -\frac{T}{2} \ln |S_{00}| - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^r \ln (1 - \hat{\lambda}_k) \quad , \quad 1 \leq r \leq P \quad (16)$$

así, la decisión acerca de la existencia de r vectores de cointegración, es decir, la selección de las r primeras columnas de Ψ , con $\Psi = \hat{\beta}$, se lleva a cabo a partir de una prueba de razón de verosimilitud, R ¹⁸, o test de la traza¹⁹, cuya forma general es:

$$Traza = -2R = -T \sum_{k=r+1}^P \ln (1 - \hat{\lambda}_k) \quad (17)$$

donde bajo la hipótesis nula se plantea la existencia de como máximo r vectores de cointegración y bajo la alterna más de r , esta prueba es secuencial y finaliza al no encontrar evidencia para rechazar H_0 . Dado que la prueba no sigue una distribución conocida, Johansen encuentra su distribución asintótica y construye sus valores críticos aplicando algunos resultados de la teoría de movimiento Browniano. Existe otra prueba equivalente a (17) denominada del máximo valor propio y definida como:

¹⁷ Es por esta razón que Hamilton (1994) inicia la presentación de la estimación máximo verosímil de Johansen con una motivación sobre el análisis de correlación canónica.

¹⁸ $R = \ln(\text{Máxima Verosimilitud Restringida} / \text{Máxima Verosimilitud No Restringida})$

¹⁹ Frente a problemas de apuntamiento y asimetría en los residuos del modelo, este test es más robusto que el test del máximo valor propio, Cheung y Lai (1993).

$$V = -T \ln (1 - \hat{\lambda}_{r+1}) \quad (18)$$

donde bajo la hipótesis nula se plantea la existencia de r vectores de cointegración y bajo la alterna de $r+1$.

Una vez se ha determinado $\hat{\beta}$ es posible encontrar una estimación para α mediante (11) y de esta forma, calcular Π como el producto de sus componentes, es decir:

$$\hat{\Pi} = \hat{\alpha} \hat{\beta}' \quad (19)$$

donde α ($P \times r$) se conoce como la matriz de ajuste y β ($P \times r$) como la matriz de vectores de cointegración. Los r vectores de cointegración, seleccionados a través de (17) y/o (18), conforman el núcleo del espacio de cointegración de las variables en consideración, así, cualquier vector de cointegración diferente de los r elementos del núcleo es una combinación lineal de ellos.

El número de vectores de cointegración, r ($r=0,1,\dots,P$), determina el rango de la matriz Π , sobre el cual se presentan tres casos de interés.

(i) $r=0$, es decir, no existen vectores de cointegración y por ende en las representaciones (6) o (7), la matriz Π se transforma en una matriz de ceros. Lo anterior significa que la estimación de las relaciones económicas entre las variables puede llevarse a cabo a través del esquema VAR de las series estacionarias. Sin embargo, como lo señala Lutkepohl (1993) cuando se está interesado exclusivamente en las propiedades asintóticas de los parámetros de la representación VAR descrita en (5), la estimación puede realizarse con las variables no estacionarias, pero si el propósito, por ejemplo, es llevar a cabo pruebas de causalidad, usando pruebas tipo Wald, los resultados pierden validez debido a que la matriz de varianza-covarianza es singular.

(ii) $r=P$, la matriz Π es de rango completo, lo cual significa que las variables consideradas a lo sumo son estacionarias en la tendencia, y por lo tanto, la

estimación VAR en niveles es adecuada. En este caso, las pruebas (17) y (18) podrían considerarse, intuitivamente, como pruebas multivariadas sobre existencia de raíz unitaria. Es de señalar, que dado que se está considerando el sistema completo de información, los resultados de estas pruebas, vistas como de raíz unitaria, no son necesariamente iguales a los obtenidos en el esquema uniecuacional de Dickey-Fuller (1981).

(iii) $0 < r < P$ es decir, la matriz Π es de rango r y por lo tanto existen r combinaciones lineales estacionarias o vectores de cointegración. En este caso la estimación VAR debe ser realizada a través del esquema VEC descrito anteriormente. Es de anotar, que la estimación VAR de las series estacionarias, es decir, en diferencia, cuando en sus niveles éstas están cointegradas, tiene un sesgo de especificación debido a la no consideración de un regresor: Y_{t-1} en (6) o Y_{tk} en (7), en tanto que, la estimación de (5), VAR con series no estacionarias, no presenta problemas de especificación pero si de eficiencia dado que las restricciones asociadas al largo plazo son omitidas en esta especificación.

Como ya se mencionó la distribución de las estadísticas de la traza y del máximo valor propio no presentan una distribución conocida bajo la hipótesis nula. Los valores críticos de las pruebas han sido construidos por Johansen y Juselius (1990) y Osterwald y Lenum (1992), a partir de ejercicios de Monte Carlo. En el caso de muestras pequeñas Cheung y Lai (1993) proponen ajustar las pruebas o, en su defecto, sus valores críticos, considerando el factor: $(T-PK)/T$ o su inverso, respectivamente.

Tratamiento de las componentes determinísticas:

El uso de las tablas está condicionado al tipo y a la forma como se introducen las componentes determinísticas en el modelo, así, utilizando un esquema detallado, que considera componentes determinísticas, presentado por Hansen y Juselius (1995) en

"CATS in RATS"²⁰ se tiene $\forall t=k+1, \dots, T$:

$$\nabla Y_t = \mu + \delta t + F_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + F_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} + \alpha \beta' Y_{t-1} + \omega D_t + \xi_t \quad (20)$$

de tal forma que, la presencia de μ , δ , y ω en (20) significan que: (i) Y_t exhibe una tendencia lineal si tan sólo se considera μ , (ii) la presencia de μ y δ implica que Y_t exhibe una tendencia cuadrática y (iii) la inclusión de ω significa que las series presentan estacionalidad, la cual puede ser modelada a través de variables "dummies" estacionales centradas, éstas variables no afectan los valores críticos ya discutidos. En el caso en que $\delta=0$, se tiene que el modelo sobre ∇Y_t es estacionario alrededor de μ . El interrogante que se abre en este contexto es si la existencia de tendencia en las series está vinculada con la presencia de ésta en el esquema de largo o de corto plazo, es decir, si las relaciones de cointegración consideran de manera explícita el componente de tendencia determinística o si por el contrario, éste es estimado por fuera de las relaciones de largo plazo. La representación (21), dada a continuación, muestra en detalle las diferentes posibilidades que se tienen en la caracterización de la tendencia en un modelo VEC²¹.

$$\nabla Y_t = \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \delta_2 t + F_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + F_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} + \alpha \beta' Y_{t-1} + \omega D_t + \xi_t$$

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1r} & \beta_{2r} & \dots & \beta_{pr} \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \dots & \mu'_p \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \dots & \delta'_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

²⁰ CATS: módulo de análisis de cointegración bajo la metodología propuesta por Johansen (1994) del paquete econométrico RATS versión 4.0.

²¹ Los vectores y matrices de (21) tienen las siguientes dimensiones: $Y'_{t-1} = (Y_{t-1}, 1, t)'$: $(P+2) \times 1$; α : $P \times r$; α_2 : $P \times (P-r)$; μ_2 : $(P-r) \times 1$; δ_2 : $(P-r) \times 1$; $\mu'_1 = (\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_p)$: $P \times 1$ y $\delta'_1 = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_p)$: $P \times 1$; ω : $(P \times 3)$.

La consideración de $\mu^*=(\mu^*_1, \mu^*_2, \dots, \mu^*_p)$ y $\delta^*=(\delta^*_1, \delta^*_2, \dots, \delta^*_p)$ en la matriz β^* significa que las relaciones de equilibrio de largo plazo se alcanzan considerando como parte de la combinación lineal un intercepto y una componente de tendencia. La relación entre (20) y (21) se establece²² en la medida en que $\mu=\alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$ y $\delta=\alpha \delta^* + \alpha_1 \delta_2$.

En el cuadro 1 se presentan las diferentes especificaciones del modelo general obtenidas al imponer restricciones sobre la existencia de algunas de las componentes determinísticas que gobiernan la media del proceso, Johansen (1994). Es importante señalar que de la caracterización de las componentes determinísticas del proceso dependen los resultados de las pruebas de hipótesis sobre el número de vectores de cointegración y la estimación de los parámetros.

En el caso A, el modelo VAR(k) considera la presencia de tendencia determinística cuadrática. En la representación VEC(k-1) correspondiente se considera tendencia lineal, es decir, presencia de intercepto (μ_1) y de tendencia lineal (δ). Es importante señalar, que la existencia conjunta de μ^* (intercepto de la relación de largo plazo) y de μ_2 (intercepto de la relación de corto plazo) permite la estimación de μ bajo (20). De igual forma, el tener al mismo tiempo δ^* (componente de tendencia determinística lineal en la relación largo plazo) y δ_2 (componente de tendencia determinística lineal en la relación de corto plazo) posibilita la estimación de δ bajo (20).

Para el caso B, se impone una restricción sobre una de las componentes del parámetro correspondiente a la tendencia determinística lineal de corto plazo, eliminando de esta forma la tendencia determinística cuadrática en el modelo VAR. Para efectos de la estimación, la especificación (20) ya no es adecuada y por lo tanto (21) debe ser utilizada incluyendo únicamente la tendencia determinística lineal en la cointegración, es decir, haciendo $\delta_2=0$.

²²En CATS in RATS se tienen diferentes especificaciones de (21), véase Manual de CATS páginas 5 y 6 y en lo referente a tablas de valores críticos 79-82.

CUADRO 1
CARACTERIZACION DE LAS COMPONENTES DETERMINISTICAS

<p align="center">VEC bajo r vectores de cointegración</p> $\nabla Y_t = \alpha_1 \mu_2 + \alpha_1 \delta_2 t + F_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + F_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} + \alpha \beta' Y_{t-1} + \omega D_t + \varepsilon_t$ $\beta' = [\beta, \mu', \delta']$ $Y_{t-1}' = [Y_{t-1}, 1, t]'$ <p align="center">equivalente a : $\nabla Y_t = \mu + \delta t + F_1 \nabla Y_{t-1} + \dots + F_{k-1} \nabla Y_{t-k+1} + \alpha \beta' Y_{t-1} + \omega D_t + \varepsilon_t$</p>					
Caso	Hipótesis Nula	β^{*r}	Y^*	Regresión Auxiliar	Valores Críticos
A	$H(r)_s: \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu_1 + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta + \alpha_1 \delta_2$	$[\beta]_{(r \times P)}$	$[Y_{t-1}]'_{(P \times 1)}$	$\nabla Y_t = f(1, t, \nabla Y_{t-j})$ $Y_{t-1} = f(1, t, \nabla Y_{t-j})$	CATS 95: Tabla B5 Johansen 94: Tabla IV
B	$H^*(r)_s: \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta$	$[\beta, \delta^*]_{(r \times P+1)}$	$[Y_{t-1}, t]_{(P+1 \times 1)}$	$\nabla Y_t = f(1, \nabla Y_{t-j})$ $Y_{t-1} = f(1, \nabla Y_{t-j})$	CATS 95: Tabla B4 Johansen 94: Tabla V
C	$H_1(r): \mu$ $\mu = \alpha \mu + \alpha_1 \mu_2$	$[\beta]_{(r \times P)}$	$[Y_{t-1}]'_{(P \times 1)}$	$\nabla Y_t = f(1, \nabla Y_{t-j})$ $Y_{t-1} = f(1, \nabla Y_{t-j})$	CATS 95: Tabla B3 Banerjee et al. 94 Tabla 8.5 Johansen and Juselius 90 Table A.1
D	$H_1^*(r): \mu$ $\mu = \alpha \mu$	$[\beta, \mu^*]_{(r \times P+1)}$	$[Y_{t-1}, 1]_{(P+1 \times 1)}$	$\nabla Y_t = f(\nabla Y_{t-j})$ $Y_{t-1} = f(\nabla Y_{t-j})$	CATS 95: Tabla B2 Banerjee et al. 94 Tabla 8.7 Johansen and Juselius 90 Table A.3
E	$H_2(r): \mu$ $\mu = 0$	$[\beta]_{(r \times P)}$	$[Y_{t-1}]'_{(P \times 1)}$	$\nabla Y_t = f(\nabla Y_{t-j})$ $Y_{t-1} = f(\nabla Y_{t-j})$	CATS 95: Tabla B1 Banerjee et al. 94 Tabla 8.1

En C, tan solo se considera al intercepto como componente determinística del modelo VEC. Este hecho implica el reconocimiento de una tendencia determinística lineal en el VAR. Dado que las dos componentes de μ (μ_1 y μ_2) existen, la estimación del VEC puede llevarse a cabo a través de (20) con $\delta=0$. Al restringir μ_2 a cero se genera el caso D, en el cual se considera la presencia de un componente determinístico (el intercepto) en la relación de largo plazo. De la misma manera que en el caso B, la estimación debe llevarse a cabo a través de (21). El caso E es el modelo VEC restringido, $\mu=0$ y $\delta=0$, ausencia total de componentes determinísticas, debe estimarse bajo (20) incluyendo las restricciones.

La pregunta pertinente que se deriva del cuadro 1, es como evaluar si la caracterización de las componentes determinísticas es adecuada. La respuesta a esta inquietud se consigna en el cuadro 2, donde se presentan las pruebas que permiten tomar una decisión sobre la validez de dicha caracterización, es decir, que ratifican si la restricción o restricciones consideradas en la hipótesis nula, cuadro 1, son pertinentes.

Es de señalar, que la estadística presentada en el cuadro 2, bajo la hipótesis nula, sigue asintóticamente una distribución χ^2 con los grados de libertad señalados en el mismo cuadro. Una vez elegida la hipótesis nula inicial, la prueba debe llevarse a cabo recursivamente hasta no rechazar H_0 , permitiendo de esta forma encontrar la mejor caracterización de las componentes determinísticas del modelo.

Es importante resaltar que, en el caso de rechazar la hipótesis nula en el cuadro 2, el número de vectores de cointegración (r') en la nueva especificación del modelo, es decir, sujeto a la restricción de las componentes determinísticas planteadas en H_a , debe ser otra vez verificado. Si (r') es diferente de (r) se hace necesaria la comprobación, bajo este nuevo número de vectores de cointegración, de que la caracterización de la componente determinística encontrada bajo H_a continúa siendo correcta.

A partir de este punto, donde la especificación del modelo en lo referente a la identificación de las componentes determinísticas relevantes, la longitud del rezago y el

CUADRO 2
VALIDACION SOBRE LA CARACTERIZACION DE LAS COMPONENTES DETERMINISTICAS

Bajo H_0 validación sobre la:	Hipótesis Nula H_0 :	Hipótesis Alternativa H_a :	Estadística Distribución teórica	Valores propios Referente Cuadro 1
No existencia de tendencia determinística cuadrática en los niveles	$H^*(r) : \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta^*$	$H(r) : \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta^* + \alpha_1 \delta_2$	$-2 \ln Q [H^*(t) H(t)] - T \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{1 - \lambda_i^t}{1 - \lambda_i} \right)$ $\chi^2(P-r)$	λ_i^* : Caso B λ_i : Caso A
No existencia de tendencia determinística lineal en la cointegración	$H_1(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$	$H^*(r) : \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta^*$	$-2 \ln Q [H_1(t) H^*(t)] - T \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{1 - \lambda_i^t}{1 - \lambda_i} \right)$ $\chi^2(r)$	λ_i^1 : Caso C λ_i^* : Caso B
No existencia de tendencia determinística lineal en los niveles	$H_1^*(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu^*$	$H_1(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu^* + \alpha_1 \mu_2$	$-2 \ln Q [H_1^*(t) H_1(t)] - T \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{1 - \lambda_i^t}{1 - \lambda_i^*} \right)$ $\chi^2(P-r)$	λ_i^{1*} : Caso D λ_i^1 : Caso C
No existencia de componentes determinísticas en el modelo	$H_2(r) : \mu$ $\mu = 0$	$H_1^*(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu^*$	$-2 \ln Q [H_2(t) H_1^*(t)] - T \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{1 - \lambda_i^t}{1 - \lambda_i^{1*}} \right)$ $\chi^2(r)$	λ_i^2 : Caso E λ_i^{1*} : Caso D

número de vectores de cointegración está establecida de manera adecuada, se puede pasar, si se considera necesario, a la etapa de confrontación de la veracidad de ciertas combinaciones lineales y/o restricciones sobre los parámetros de α y β . En el cuadro 3, se presentan los pasos que se deben seguir cuando se desean validar hipótesis lineales sobre los coeficientes de largo plazo. En el paso (1) se determina adecuadamente la especificación del modelo y en la siguiente etapa la validación de las restricciones impuestas. Los dos ejemplos, discutidos por Cuthbertson et al. (1992), dados a continuación se presentan con el propósito de mostrar la aplicación del método de Johansen (1990) en la verificación de restricciones lineales sobre los parámetros de cointegración, β .

(i) El primer ejercicio consiste en verificar la relación de largo plazo planteada por la teoría de paridad del poder de compra (PPP). El análisis se centra sobre el vector Z_t conformado por la tasa de cambio (e_t), los precios externos y los internos, P_t^* y P_t , respectivamente. Si $Z_t = (e_t, P_t^*, P_t)'$ es $I(1)$, la relación de largo plazo planteada por la PPP podría sugerir que:

$$e_t - P_t^* + P_t = \xi_t \sim I(0) \quad (22)$$

Así, al encontrar bajo Johansen que existe un vector de cointegración significativo ($r=1$) se tiene²³ :

$$\beta_{11} e_t - \beta_{12} P_t^* + \beta_{13} P_t = \xi_t \sim I(0) \quad (23)$$

Las restricciones en (24) reducen el número de parámetros independientes de cointegración de tres a uno y la matriz $\beta = H\phi$, presentada en H_3 cuadro 3, puede reescribirse como:

²³ En general: $\beta_{i1} e_t - \beta_{i2} P_t^* + \beta_{i3} P_t = \xi_{it}$, $i=1, \dots, r$.

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \phi \quad (24)$$

donde ϕ : (1x1) matriz de parámetros no conocidos y H: (3x1) matriz de restricciones, de tal forma que $\beta_{11}=\phi=\beta_{13}$ y $\beta_{12}=-\phi$. Dado que H es conocida, para obtener una estimación de ϕ , denotada por $\hat{\phi}$, β puede ser reemplazado por $H \hat{\phi}$ en el procedimiento ya discutido. Así, la estimación restringida de β es dada por $\hat{\beta}^* = H \hat{\phi}$, sin embargo, es de señalar, que la estimación restringida de β , $\hat{\beta}^*$, se deriva de la solución de la ecuación característica presentada en el cuadro 3 para H_3 donde solo se utiliza la información de la matriz H y en consecuencia, los λ_i^R ($i=1, \dots, r$) y sus r vectores propios, β^* , no requieren del conocimiento de $\hat{\phi}$. La verificación de PPP se establece a través del test propuesto en el cuadro 3, el cual involucra los λ_i^{NR} $i=1, \dots, r$ y los obtenidos bajo la restricción, λ_i^R $i=1, \dots, r$.

(ii) El segundo ejercicio consiste en presentar las restricciones que permiten verificar las condiciones de homogeneidad de grado uno de los precios y el ingreso en una función de demanda de dinero. El vector bajo análisis considera M1 ampliado (M_t), un indicador de precios (CPI_t), la tasa de interés de los bonos de largo plazo (RL_t)²⁴ y el ingreso real (INC_t). A través de la metodología de Johansen se encuentra un vector de cointegración, $r=1$:

$$\beta_{11} M_t + \beta_{12} CPI_t + \beta_{13} RL_t + \beta_{14} INC_t - \epsilon_t = I(0) \quad (25)$$

al normalizar por (M_t), la combinación lineal presentada en (25) puede ser reescrita como sigue:

²⁴Las variables, a excepción de la tasa de interés, son transformadas bajo logaritmo natural.

**CUADRO 3
VALIDACION DE RESTRICCIONES**

1. Caracterización de la componente determinística:				
A $H(r) : \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu_1 + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta_1 + \alpha_1 \delta_2$	B $H^*(r) : \mu + \delta t$ $\mu = \alpha \mu_1 + \alpha_1 \mu_2$ $\delta = \alpha \delta_1$	C $H_1(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu_1 + \alpha_1 \mu_2$	D $H_1^*(r) : \mu$ $\mu = \alpha \mu_1$	E $H_2(r) : \mu$ $\mu = 0$
2. Validación sobre restricciones impuestas en los coeficientes de α o β:				
Prueba tipo: $-2 \ln Q [H_R (t) H_{NR} (t)] = T \sum_{k=1}^r \ln \left(\frac{1 - \lambda_i^R}{1 - \lambda_i^{NR}} \right)$				
Distribución bajo $H_3 \chi^2(r (P-s))$ Distribución bajo $H_4 \chi^2(r (P-m))$				
Restricción sobre β : $H_3 : \Pi = \alpha \phi' H'$ donde ϕ : (sxr) y H : (pxs) Ecuación característica: $ \lambda^R H' S_{kk} H - H' S_{kk} S_{00}^{-1} S_{0k} H = 0$				
Restricción sobre α : $H_4 : \Pi = A \psi \beta'$ donde A : (Pxm) y ψ : (mxr) ²⁵ Ecuación característica: $ \lambda^R S_{kk,b} - S_{kk,b} S_{bb,b}^{-1} S_{kk,b} = 0$ $B = A_{\perp}$ $S_{jj,b} = T^{-1} \sum_{k=1}^T R_k' R_k' \quad i, j = a, k$ $R_{k,i} = A' R_{k,i} - S_{ab} S_{bb}^{-1} B' R_{k,i} \quad , \quad R_{k,i} = R_{k,i} - S_{kb} S_{bb}^{-1} B' R_{k,i}$ $S_{bb} = B' S_{00} B \quad , \quad S_{ab} = A' S_{00} B \quad , \quad S_{kb} = S_{k0} B'$				
3. Validación sobre restricciones conjuntas de α y β:				
Distribución bajo $H_5 \chi^2(r (P-s)+(P-m))$				
Restricción conjunta α y β : $H_5 : \Pi = A \psi \phi' H'$				

²⁵ Es de señalar, que s y m son los rangos de las matrices H y A, respectivamente.

$$M_t + \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} CPI_t + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}} RL_t + \frac{\beta_{14}}{\beta_{11}} INC_t = \varepsilon_t \sim I(0) \quad (26)$$

por lo tanto, la validación del cumplimiento de las condiciones de homogeneidad de precios e ingreso en (26) se lleva a cabo a través del chequeo de las siguientes restricciones:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

lo cual implica:

$$\beta_{11} = \varphi_1, \quad \beta_{12} = -\varphi_1, \quad \beta_{13} = \varphi_2, \quad \beta_{14} = -\varphi_1 \quad (28)$$

C. Exogeneidad y Causalidad

En general, el análisis de las relaciones existentes entre un conjunto de variables en un modelo tiene implícito un propósito específico, por ejemplo: llevar a cabo inferencia estadística, generar pronósticos o efectuar análisis de política. En este contexto el mecanismo de modelización econométrica propuesto por el LSE (London School of Economics) provee un marco de referencia adecuado para introducir la discusión de exogeneidad y causalidad. Se parte del concepto de proceso generador de datos conjunto (Joint Data Generating Process) "JDGP", es decir, de la distribución conjunta de las variables aleatorias, y se procede a factorizar adecuadamente el "JDGP" con el fin de garantizar que la representación seleccionada del problema bajo estudio permita un justo

acercamiento al fenómeno, es decir, que sea una representación parsimoniosa que facilite: (i) la estimación de los parámetros de interés, (ii) el alcance de los objetivos propuestos y (iii) la interpretación de los resultados. Lo anterior, como lo presenta Cuthbertson et al. (1992), puede ser formalizado de la siguiente manera :

Dado un vector x de p variables, notado en el momento (t) como x_t , se define a la matriz $X_{t-1} = (x_{t-1}, \dots, x_1)'$ como el conjunto de información completa en el momento $(t-1)$, de tal forma que, la probabilidad conjunta de la muestra x_t , "JDGP", puede ser descrita así:

$$\prod_{t=1}^t JD(x_t / X_{t-1}; \Theta) \quad (29)$$

donde JD es la función de densidad conjunta y Θ es el conjunto de parámetros desconocidos. El proceso de modelización, ya referido, consiste en simplificar (29) mediante: (i) restricción, (ii) marginalización y (iii) especificación de una forma funcional y así, alcanzar una representación del "JDGP" simple y con sentido económico, es decir:

$$\prod_{t=1}^t JD(x_t / X_{t-1}; \Theta) = C(Y_t / Y_{t-1}, Z_t; \theta_1) M(Z_t / Y_{t-1}, Z_{t-1}; \theta_2) N(U_t / X_t; \theta_3) \quad (30)$$

En la factorización llevada a cabo sobre (29) presentada en (30), las componentes C , M y N se refieren a: las variables endógenas Y_t de interés, las cuales son función de sus rezagos y del conjunto de variables exógenas, las variables exógenas Z_t , que a su vez dependen de sus propios rezagos como también de rezagos en las endógenas y las variables que no son de interés, las cuales son función de toda la información, respectivamente. El término C representa la densidad condicional, en tanto que M representa la marginal. Dado que, a través de la teoría económica, el conjunto de variables de no interés puede ser reducido a un conjunto vacío, la factorización (30) puede ser reescrita como el producto de $C \cdot M$. Así, en la notación general se tiene:

$$F_x(x_t; \Theta) = F_{y|z}(y_t | z_t; \theta_1) F_z(z_t; \theta_2) \quad (31)$$

La validez de la anterior factorización se alcanza en la medida en que, como mínimo, el conjunto de variables Z_t sea exógeno débil, es decir, que el conjunto de variables que pertenecen a C sea independiente de forma contemporánea de aquellas que pertenecen a M . Existen otros grados de exogeneidad, fuerte y super, que partiendo de la débil requieren, en el primer caso, que Z_t use tan solo su propia historia, Z_{t-1} , para alcanzar una adecuada representación de las componentes de Z en (31)²⁶, y en el segundo, la invarianza de θ_1 con respecto a θ_2 .

En general la exogeneidad débil permite llevar a cabo estimación y pruebas de hipótesis de los parámetros de interés del modelo, en tanto que la fuerte es condición necesaria para generar pronósticos condicionados y la super para efectuar simulaciones y análisis de política. A continuación se presentan de manera detallada las definiciones de los diferentes grados de exogeneidad, Ericsson y Irons (1995).

Exogeneidad débil : en general una variable²⁷ Z_t se considera exógena débil para los parámetros de interés ψ , $\psi=g(\Theta)$, en una muestra determinada si y solo si existe una reparametrización de Θ , Θ^* , tal que $\Theta^*=(\theta_1', \theta_2)'$ de tal manera que:

(i) $\psi=g(\theta_1)$, es decir, los parámetros de interés tan solo son función de los parámetros asociados a la distribución condicional.

(ii) la factorización presentada en (31) se cumpla. Es decir, que los parámetros θ_1 y θ_2 varíen libremente. Por consiguiente, $\Theta^* \in \Theta_1 \times \Theta_2$.

Exogeneidad fuerte: una variable Z_t (o un conjunto de variables) es exógena fuerte si, además de cumplir con los requerimientos de la exogeneidad débil, no es causada bajo Granger por las endógenas rezagadas, Y_{t-j} . Es decir, la varianza residual del modelo sobre

²⁶ Es decir, Y_{t-1} no es un indicador adelantado de Z_t , por lo tanto Y_{t-1} no causa a Z_t en el sentido de Granger.

²⁷ En este contexto, Z_t puede ser una variable o un conjunto de variables.

Z_t no disminuye de manera significativa al adicionar, a su propia historia, la historia de las endógenas²⁸.

Super Exogeneidad: la variable Z_t alcanza este grado de exogeneidad si además de ser exógena débil respecto a los parámetros de interés, los parámetros de la distribución condicional son invariantes respecto a cambios sufridos por los parámetros asociados a la distribución marginal²⁹. Así, la factorización (31) aísla en la distribución marginal a aquellos parámetros asociados a las variables que están sujetas a "shocks" externos al sistema, los cuales afectan a θ_2 pero no se propagan a θ_1 . En este sentido, el concepto de super exogeneidad está íntimamente relacionado a la crítica de Lucas. Así, si Z_t , en un modelo dinámico, es super exógena y se ve afectada por un cambio de régimen, el modelo condicional no estará por tanto sujeto a dicha crítica.

La super exogeneidad, como ya se mencionó, permite efectuar análisis de política por no estar el modelo condicional sujeto a la crítica de Lucas. Como lo ejemplifica Ericsson (1994), si se supone que los modelos condicional y marginal representan las decisiones de los agentes y las de los "policymakers", respectivamente, bajo super exogeneidad el vector de parámetros de los agentes, θ_1 , es invariante a cambios en las reglas de política que entran al sistema via θ_2 .

Con el propósito de introducir los conceptos anteriores a través de dos ejemplos específicos, a continuación se presentan las caracterizaciones de los respectivos modelos condicionales y marginales, así como, las componentes de los espacios de parámetros y

²⁸En el caso de que Z_t sea un vector, la minimización de varianza se tiene a través de la diferencia de las matrices de var-cov, la cual debe ser definida positiva para afirmar que se tiene causalidad en el sentido de Granger.

²⁹En general, los parámetros θ_1 son invariantes respecto a los parámetros θ_2 , si cambios en θ_2 no implican cambios en θ_1 . El concepto de invarianza es diferente al concepto de variación libre (segunda condición del concepto de exogeneidad débil). La diferencia entre dichos conceptos puede verse a través de un ejemplo sencillo: sean θ_{1t} y θ_{2t} escalares relacionados mediante la siguiente forma lineal: $\theta_{1t} = \phi \theta_{2t}$ (ϕ no conocido), en periodos en que θ_{2t} es constante no hay información en θ_2 que pueda ayudar a la estimación de θ_1 . Sin embargo, θ_1 no es invariante con respecto a θ_2 en dicha expresión, sin embargo, los dos conjuntos de parámetros son de variación libre. Si la relación se diera a través de $\theta_1 = \phi_t \theta_{2t} \forall t$ la condición de invarianza se satisfecería.

las correspondientes reparametrizaciones de un modelo uniecuacional y de una representación VAR.

(1) Representación uniecuacional³⁰

Dadas las variables y_t y z_t generadas mediante:

$$x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} \sim NI \left(\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (32)$$

equivalente a:

$$x_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \text{con } \varepsilon_t \sim NI(0, \Omega) \quad (33)$$

sin pérdida de generalidad, la representación (32) puede ser factorizada a través de los modelos condicional y marginal, de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} y_t | z_t &\sim NI(\alpha + \beta z_t, \sigma^2) \\ z_t &\sim NI(\mu_2, w_{22}) \end{aligned} \quad (34)$$

donde:

$$\beta = w_{12} / w_{22}; \quad \alpha = \mu_1 - \beta \mu_2 \quad \text{y} \quad \sigma^2 = w_{11} - (w_{12})^2 / w_{22}.$$

De (33) se derivan los siguientes modelos:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta z_t + v_{1t} & \text{con } v_{1t} &\sim NI(0, \sigma^2) \\ z_t &= \mu_2 + \varepsilon_{2t} & \text{con } \varepsilon_{2t} &\sim NI(0, w_{22}) \end{aligned} \quad (35)$$

³⁰ Véase, Ericson 1994.

y dado que $x_t' = (y_t, z_t)$ y $\xi_t' = (\xi_{1t}, \xi_{2t}) = (x_t - E[x_t])'$ se deduce que:

- (i) $v_{1t} = \xi_{1t} - (w_{12} / w_{22}) \xi_{2t}$, es decir, la parte de y_t no correlacionada con z_t
- (ii) $E[z_t, v_{1t}] = 0$ y $E[\xi_{2t}, v_{1t}] = 0$

La relación entre (32) y (34) o entre (33) y (35) puede ser formulada, sin pérdida de generalidad, a través de la factorización de la función de densidad conjunta de x_t , como sigue:

$$F_x(x_t; \Theta) = F_{y|z}(y_t | z_t; \theta_1) F_z(z_t; \theta_2) \quad (36)$$

donde los espacios de parámetros correspondientes a (36), así como, las funciones g consideradas en el análisis de exogeneidad son presentadas en (37). Como se observa a partir de (37), Z_t es exógena débil respecto a los parámetros de interés³¹ $\{\alpha, \beta, \sigma^2\}$, en la medida en que, bajo la factorización, se mantiene el espacio de parámetros $\Theta_1 \times \Theta_2$ determinado inicialmente. En este caso, el considerar al modelo condicional como único factor en (36) es válido y tan solo es la formalización estadística de que la variable Z_t es dada y que por consiguiente es lícito ignorar el modelo marginal³². Si, se impone la siguiente restricción sobre la varianza condicional (elemento de Θ_1): $\sigma^2 < k$, con $k \in \mathfrak{R}^+$, se produce un cambio en el espacio de parámetros Θ_2 puesto que $w_{22} \in \mathfrak{R}^*$ donde $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}^+$, es decir, en este caso Z_t no es exógena débil respecto a los parámetros de interés, ya que no lo es respecto a σ^2 .

³¹ En este ejercicio, $\psi = \theta_1$.

³² En este ejemplo podríamos obtener una factorización similar para Z_t donde y_t sería exógena débil para los parámetros implícitos del nuevo modelo condicional. En general, el número de factorizaciones posibles que pueden ser estimadas mediante modelos de regresión lineal, al considerar k variables, son k , sin embargo, la selección de una en específico debe ser sugerida por la teoría económica, y el análisis econométrico debe validar la exogeneidad débil de las $k-1$ restantes.

$$\begin{aligned}
\Theta &= [\mu_1, \mu_2, w_{11}, w_{12}, w_{22}] \\
\theta_1 &= [\alpha, \beta, \sigma^2] \in \Theta_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
\theta_2 &= [\mu_2, w_{22}] \in \Theta_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
\Theta^* &= [\alpha, \beta, \sigma^2, \mu_2, w_{22}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
\alpha &= \mu_1 - \beta\mu_2 = g(\mu_1, \mu_2, w_{11}, w_{12}, w_{22}) \\
\beta &= \frac{w_{12}}{w_{22}} = g(w_{12}, w_{22}) \\
\sigma^2 &= w_{11} - \frac{w_{12}^2}{w_{22}} = g(w_{11}, w_{12}, w_{22}) \\
\mu_2 &= \mu_2 = g(\mu_2) \\
w_{22} &= w_{22} = g(w_{22})
\end{aligned} \tag{37}$$

Pruebas de exogeneidad en modelos de regresión (representación ecuacional):

Con el propósito de ilustrar un mecanismo a partir del cual se verifica el grado de exogeneidad de las variables explicativas asociadas a parámetros de interés se utiliza un ejemplo similar al presentado en (32). En este caso, dadas las variables y_t y x_t generadas mediante la siguiente distribución condicionada a $F_t=(Y_{t-1}, X_{t-1}, Z_t)$:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} \Big| F_t \sim N \left(\mu_t = \begin{bmatrix} \mu_t^y \\ \mu_t^x \end{bmatrix}, \Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_t^{xx} & \sigma_t^{xy} \\ \sigma_t^{yx} & \sigma_t^{yy} \end{bmatrix} \right) \tag{38}$$

donde μ_t^x y μ_t^y son las expectativas condicionales de x_t y y_t dado F_t , es decir:

$$\mu_t^x = E[x_t | F_t] \text{ y } \mu_t^y = E[y_t | F_t] \text{ y } \sigma_t^{xx} = E[(x_t - \mu_t^x)^2 | F_t],$$

el modelo condicional de interés que relaciona a las dos variables en cuestión es como sigue:

$$y_t \mid x_t, F_t \sim N [\delta_t (x_t - \mu_t^x) + \mu_t^y, w_t] \tag{39}$$

donde δ_t es el coeficiente de regresión de y_t sobre x_t condicionado a F_t , es decir, $\alpha_t^{xy} / \alpha_t^{xx}$ y la varianza condicional $w_t = \alpha_t^{yy} - \alpha_t^{xx} (\delta_t)^2$. En la ecuación que se presenta a continuación, se relacionan los valores medios de y_t , x_t y un conjunto de variables $z_t \in F_t$

$$\mu_t^y = \beta_t (\lambda_{2t}) \mu_t^x + z_t' \zeta \quad (40)$$

es claro que los parámetros de interés son β y ζ . Es de señalar que en (40) se deja abierta la posibilidad de que el parámetro β cambie ante cambios en los parámetros del modelo marginal de x_t , hecho que se formaliza a través de λ_{2t} ³³. El punto central de discusión se da cuando el modelo formulado en (40) es estimado empíricamente a través de la siguiente ecuación de regresión:

$$y_t = \beta x_t + z_t' \zeta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim NI(0, w) \quad (41)$$

puesto que al sustituir (39) en (40) se tiene la siguiente distribución condicional de y_t :

$$y_t | x_t, F_t \sim N [\beta_t (\lambda_{2t}) x_t + z_t' \zeta - (\delta_t - \beta_t (\lambda_{2t})) (x_t - \mu_t^x), w_t] \quad (42)$$

formulación distinta de (39) y que representa a (41) si: (i) x_t es exógena débil respecto a los parámetros de interés (β, ζ) lo cual requiere que $\delta_t = \beta_t (\lambda_{2t})$, (ii) $\delta_t = \delta \forall t$ lo cual implica una varianza condicional homoscedástica, es decir, $w_t = w \forall t$ y (iii) β es invariante ante cambios en λ_{2t} , es decir, $\beta_t (\lambda_{2t}) = \beta \forall t$, así $\delta = \beta$. En consecuencia (42) se convierte en:

$$y_t | x_t, F_t \sim N [\beta x_t + z_t' \zeta, w] \quad (43)$$

y de esta forma, $\epsilon_t^y = (y_t - \beta x_t - z_t' \zeta) \sim NI[0, w]$ y $\epsilon_t^x = (x_t - \mu_t^x) \sim NI[0, \alpha_t^{xx}]$ no deben estar correlacionados, puesto que $E[\epsilon_t^y \epsilon_t^x] = 0$ puede sugerir el incumplimiento de (i) e (ii).

³³ La forma de la relación lleva en sí misma la posibilidad de ser variante en el tiempo.

Una estructura más general se tiene cuando $\beta(\lambda_{2t})$ depende de μ_t^x y de σ_t^{xx} lo cual permite expresar a μ_t^y de la siguiente manera:

$$\mu_t^y = \beta_0 \mu_t^x - z_t' \zeta + \beta_1 (\mu_t^x)^2 + \beta_2 \sigma_t^{xx} + \beta_3 \mu_t^x \sigma_t^{xx} \quad (44)$$

si se cumple la condición de invarianza $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ y si $\beta_0 = \beta$ (44) se reduce a (40) considerando en esta última a $\beta_1(\lambda_{2t})$ constante e igual a β . La función de distribución correspondiente a (44) toma la siguiente forma:

$$y_t | x_t, F_t \sim N [x_t \beta_0 + z_t' \zeta + (\delta_t - \beta_0) (x_t - \mu_t^x) + \beta_1 (\mu_t^x)^2 + \beta_2 \sigma_t^{xx} + \beta_3 \mu_t^x \sigma_t^{xx}, w] \quad (45)$$

Las pruebas de exogeneidad están basadas en la verificación de la relevancia de μ_t^x y σ_t^{xx} en el modelo de regresión implícito en (45) o en el modelo general presentado a continuación:

$$\begin{aligned} y_t &= x_t \beta_0 + z_t' \zeta + (\delta_0 - \beta_0) \hat{\eta}_t + \delta_1 \sigma_t^{xx} \hat{\eta}_t + \beta_1 x_t^2 + \beta_2 \sigma_t^{xx} + \beta_3 x_t \sigma_t^{xx} + \epsilon_t \\ x_t &= \bar{x}_t + \hat{\eta}_t \epsilon_t \\ \delta_t &= \delta_0 + \delta_1 \sigma_t^{xx} \end{aligned} \quad (46)$$

el éxito de dicha prueba depende de una buena especificación sobre el modelo marginal, modelo sobre x_t , en la medida en que sus residuales y sus residuales al cuadrado, $\hat{\eta}_t$ y $\hat{\eta}_t^2$, respectivamente, o alguna función de ellos, hacen parte del conjunto de variables explicativas del modelo condicionado descrito en (46), en donde $f(\hat{\eta}_t^2)$ aproxima a σ_t^{xx} . La exogeneidad débil de x_t frente β_0 requiere que $\hat{\eta}_t$ sea no significativa en (46), la condición de que β_0 , parámetro de interés, sea constante se alcanza si δ_1 es no significativo, en tanto que, la condición de invarianza se tiene si $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. El cumplimiento de las tres condiciones anteriores implica que la variable x_t es super exógena respecto a β_0 .

Con el fin de garantizar la validez de la prueba sobre el grado de exogeneidad, el

análisis econométrico de (46) exige llevar a cabo pruebas sobre: (I) forma funcional ("RESET" y "encompassing"), (ii) estructura del error ("Ljung-Box", "ARCH", "White", "Breusch-Pagan"), (iii) Validación de instrumentos, en el caso de utilizar variables instrumentales en la estimación del modelo marginal y (iv) estabilidad estructural de los parámetros ("CUSUM", "CUSUM Square", "One step forecast").

Otra forma de probar super exogeneidad es mediante el mecanismo sugerido por Engle y Hendry (1993), conocido como prueba de invarianza de los parámetros de interés. Esta prueba requiere de la construcción de modelos³⁴ que expliquen, a través de su propia historia, de otras variables o de intervenciones fuera del sistema, el comportamiento de las variables exógenas débiles que conforman la matriz de diseño del modelo condicional. La prueba de super exogeneidad se basa en: (i) la verificación de la significancia de los residuos de dichos modelos marginales al ser considerados en el modelo condicional o (ii) la verificación de la relevancia de las intervenciones, que afectan a las exógenas débiles durante el período de análisis, al ser incluidas en el modelo condicional.

(2) Representación VAR(2):

Retomando la función de demanda (25), la cual, bajo un vector de cointegración, tiene las siguientes representaciones: VAR(2)³⁵ y VEC(1) :

$$W_t = \mu + A_1 W_{t-1} + A_2 W_{t-2} + \varepsilon_t \quad \forall t = 3, \dots, T \quad (47)$$

donde:

³⁴ Dichos modelos deben: satisfacer los supuestos básicos de regresión, presentar estabilidad en sus parámetros, garantizar que sus distribuciones marginales sean constantes y no presentar problemas de especificación con la forma funcional seleccionada.

³⁵ Utilizando en la representación VAR una longitud de rezago igual a 2 que puede ser obtenida mediante criterios de información. Es de señalar que A_1 y A_2 son calculados a partir de (6) y la identidad $\Pi = I - A_1 - A_2$ de manera recursiva.

$$W_t = \begin{bmatrix} M1_t \\ CPI_t \\ RL_t \\ INC_t \end{bmatrix} \quad (48)$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_{11}\beta_{11}^* f_{11} & -\alpha_{11}\beta_{12}^* f_{12} & -\alpha_{11}\beta_{13}^* f_{13} & -\alpha_{11}\beta_{14}^* f_{14} \\ -\alpha_{21}\beta_{11}^* f_{21} & 1 - \alpha_{21}\beta_{12}^* f_{22} & -\alpha_{21}\beta_{13}^* f_{23} & -\alpha_{21}\beta_{14}^* f_{24} \\ -\alpha_{31}\beta_{11}^* f_{31} & -\alpha_{31}\beta_{12}^* f_{32} & 1 - \alpha_{31}\beta_{13}^* f_{33} & -\alpha_{31}\beta_{14}^* f_{34} \\ -\alpha_{41}\beta_{11}^* f_{41} & -\alpha_{41}\beta_{12}^* f_{42} & -\alpha_{41}\beta_{13}^* f_{43} & 1 - \alpha_{41}\beta_{14}^* f_{44} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & -f_{14} \\ -f_{21} & -f_{22} & -f_{23} & -f_{24} \\ -f_{31} & -f_{32} & -f_{33} & -f_{34} \\ -f_{41} & -f_{42} & -f_{43} & -f_{44} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Representación VEC(1):

$$\nabla W_t = \mu + F_1 \nabla W_{t-1} + \alpha \beta' W_{t-1} + \xi_t \quad (50)$$

donde:

$$\nabla W_t = \begin{bmatrix} \nabla M1_t \\ \nabla CPI_t \\ \nabla RL_t \\ \nabla INC_t \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \end{bmatrix}, \quad \beta = [\beta_{11} \ \beta_{12} \ \beta_{13} \ \beta_{14}] \quad (51)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Como lo expresa Johansen (1992), una ventaja de la formulación de vectores autorregresivos es la posibilidad de plantear sistemas parciales a partir de modelos condicionales, de forma que W_t , de dimensión P , puede ser separado en Y_t y Z_t de dimensiones P_y y P_z , respectivamente. Por consiguiente, el modelo planteado en (50) puede ser descompuesto en el modelo condicional de Y_t y en el marginal de Z_t como sigue:

$$\nabla Z_t = \mu_z + \alpha_z \beta' W_{t-1} + F_{z1} W_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (53)$$

$$\nabla Y_t = \mu_y + \zeta \mu_z + (\alpha_y + \zeta \alpha_z) \beta' W_{t-1} + \zeta \nabla Z_t + (F_{y1} + \zeta F_{z1}) \nabla W_{t-1} + \varepsilon_{yt} + \zeta \varepsilon_{zt} \quad (54)$$

donde en general: (i) α_y ($P_y \times r$) y α_z ($P_z \times r$) son submatrices de α , en (50), correspondientes a Y y a Z , respectivamente, (ii) μ_y ($P_y \times 1$) y μ_z ($P_z \times 1$) son subvectores de μ , en (51), (iii) F_{y1} ($P_y \times P$) y F_{z1} ($P_z \times P$) son submatrices de F_1 , en (50), correspondientes a Y y a Z , respectivamente y (iv) $\zeta = \Sigma_{yz} (\Sigma_{zz})^{-1}$ de orden ($P_y \times P_z$).

Si se considera, por ejemplo a Z_t conformado tan solo por el ingreso real (INC_t) y a Y_t por las restantes variables ($M1_t$, CPI_t , RL_t) se tiene que las representaciones (53) y (54) conforman la factorización presentada en (30), después de eliminar el conjunto de información N de acuerdo al modelo teórico de demanda. En el caso de que los parámetros de interés, ψ , en este ejemplo, sean iguales a β , es decir, $\psi = g(\Theta) = \beta$, los modelos condicional y marginal, descritos en (53) y (54), dependen de β . En consecuencia, Z_t adquiere la condición de exogeneidad débil si y solo si α_z es cero en (53) y (54), implicando

ésto que en el modelo marginal no se dependa de los parámetros de interés³⁶. El reconocimiento de (INC_t) como una variable exógena débil en el sistema implica que en la representación VAR(2), descrita en (47) y equivalente a (50), α_{41} ($=\alpha_z$) es igual a cero, así, la ecuación correspondiente al ingreso real, en (50), no considera la restricción de largo plazo como determinante de su dinámica³⁷. La condición de exogeneidad fuerte es alcanzada por el ingreso real, si siendo éste exógeno débil, los coeficientes f_{41} , f_{42} y f_{43} en las representaciones (49) y (52) son iguales a cero, es decir, la variable (INC_t) no es causada en el sentido de Granger por las variables $(M1_t, CPI_t, RL_t)$.

El ingreso real es super exógeno si: (i) cumple con las condiciones de la exogeneidad débil y (ii) si los parámetros del modelo condicional³⁸ no se ven afectados por intervenciones sobre los parámetros del modelo marginal, es decir, si θ_1 no es función de θ_2 . Si, en nuestro ejemplo, suponemos que un "shock" petrolero afecta al ingreso real, pero que éste no se trasmite, a través de θ_2 , a las variables del modelo condicional, entonces el ingreso real se considerará una variable super exógena.

Pruebas de exogeneidad en modelos VAR

Como se mencionó anteriormente, las representaciones condicional y marginal presentadas en (53) y (54), respectivamente, implican exogeneidad débil de la(s) variable(s) Z respecto a los parámetros β si y solo si es posible probar que α_z es igual a cero. La verificación de $H_0: \alpha_z = 0$ puede llevarse a cabo a través de H_4 (cuadro 3), en la medida en que ella puede ser entendida como la imposición de una restricción lineal sobre uno (o algunos) de los coeficientes de la matriz de ajuste α , descrita en el cuadro 1. Así, la prueba de hipótesis se formula como sigue:

³⁶ Cumplimiento de las condiciones de exogeneidad débil:

(i) $\Psi = \beta$ donde $\beta \in \theta_1$ y (ii) Dado que los parámetros β no hacen parte del modelo marginal, cambios en ellos no afectan a los restantes parámetros de dicho modelo, es decir, se satisface la condición de variación libre de los parámetros del condicional y del marginal.

³⁷ A diferencia de las restantes variables, para las cuales el desequilibrio monetario hace parte de sus determinantes.

³⁸ En el ejemplo: $(\alpha_y - \zeta\alpha_z)\beta'$, $(F_{y1} - \zeta F_{z1})$, $(\mu_y - \zeta\mu_z)$, ζ

$$-2\ln Q [H_R (r) | H_{NR} (r)] = T \sum_{k=1}^r \ln \left(\frac{1-\lambda_i^R}{1-\lambda_i^{NR}} \right) \quad (55)$$

la cual se distribuye χ^2 con grados de libertad iguales al producto de los r vectores de conitegración por el número de variables sobre las cuales se desea probar exogenidad, es decir, $r \times P_z$, y donde λ^R hace referencia a los valores propios bajo la restricción y λ^{NR} a los valores propios del sistema no restringidos.

III Ejercicio empírico

El hecho de que la modelización econométrica se base en una muestra específica impone que sus resultados no deban ser generalizados a períodos y/o frecuencias de observación distintos a los implícitos en la muestra, a menos de que las condiciones que enmarcaron la estimación ecométrica se mantengan. Es así como, por ejemplo, Ericson (1994) señala la no independencia entre los resultados de las pruebas de exogeneidad y las muestras particulares sobre las cuales han sido éstas llevadas a cabo, es decir, resultados obtenidos en una muestra particular podrían no mantenerse al cambiar el intervalo muestral. Lutkepohl (1993) hace referencia a los diferentes resultados que pueden encontrarse al llevar a cabo pruebas de causalidad sobre un mismo fenómeno pero con muestras de diferente frecuencia, es decir, las relaciones de causalidad encontradas a partir de una muestra trimestral pueden diferir de aquellas obtenidas de una muestra anual.

De otro lado, los problemas inherentes a los métodos de estimación de los parámetros de interés son solucionados a través de mecanismos que están en continua evolución y como lo plantea Gujarati (1995) es imposible construir una prueba "omnipotente" que permita solucionar, simultáneamente, todos los problemas y en consecuencia, una prueba que hoy es popular, mañana podrá no serlo en la medida en que otra aparece y a la anterior se le encuentran limitaciones. Sin embargo, la continua búsqueda de respuestas sobre "el como", "el porque", "el cuando", etc, es la forma como algunas áreas del conocimiento progresan y la econometría no es la excepción.

Como lo expresa Granger (1992) en el Axioma A, cualquier modelo es tan solo una aproximación del mecanismo generador del fenómeno bajo estudio y desde luego habrá una preferencia por seleccionar la mejor aproximación disponible, en consecuencia, existirán varios modelos que pueden clasificarse como adecuados dependiendo de los objetivos que se persigan. Sin embargo, como lo señala Granger, en el axioma B, el objetivo básico de la modelización econométrica y que se deriva implícitamente de objetivos específicos tales como: (i) verificación de hipótesis de carácter económico, (ii) conformación de pronósticos y (iii) derivación de reglas de política, es el afectar las concepciones que sobre un problema de carácter económico tienen los investigadores y los agentes económicos y por ende, cambiar su comportamiento.

En este contexto, el ejercicio que a continuación se presenta recoge en parte las inquietudes que muchos de los investigadores económicos comparten sobre la función de demanda de dinero y sus posibles implicaciones sobre la modelización macroeconómica y el entendimiento del funcionamiento de la economía, ésto en la medida en que para algunas escuelas de pensamiento económico, el dinero juega un papel importante en la determinación del nivel de los precios.

A. Antecedentes

El seguimiento y la evaluación continua de la función de demanda de dinero bajo las técnicas econométricas descritas en la sección anterior, ha sido parte de recientes y numerosos trabajos de investigación a nivel mundial, como puede constatarse en las recopilaciones de Irons (1994), Hargreaves (1994) y Hendry (1995). En el caso colombiano existen varios trabajos sobre el tema, entre otros, Clavijo y Gómez (1988), Carrasquilla y Rentería (1990). En particular, recientemente, los autores participaron en dos trabajos cuyo objetivo se concentró, también, en la estimación de funciones de demanda de agregados monetarios. El marco econométrico de los dos estudios se fundamenta en el concepto de cointegración, sin embargo, existen diferencias en los objetivos como también, en los tamaños de muestra y en el tratamiento de la información, lo cual, como es de esperarse, puede generar algunos resultados diferentes.

Misas y Suescún (1993) centran el análisis, para el período 1980-1992 (trimestral), en el reconocimiento de raíces unitarias estacionales y a la frecuencia cero, como también, en la verificación de la existencia de relaciones cointegrantes a dichas frecuencias. Es de señalar, que en el caso de la frecuencia cero las series fueron desestacionalizadas mediante el filtro X-11. En lo referente a M1 (desestacionalizado), se encontró existencia de cointegración a la frecuencia cero y como resultado adicional estabilidad en los parámetros de la relación de largo plazo, evaluada mediante pruebas de residuales recursivos. En Misas, Oliveros y Uribe (1994) los objetivos básicos son la evaluación, para el período 1981-1993 (trimestral), (i) de la estabilidad de los parámetros de las funciones de demanda de dinero, a partir de sus esquemas de corto y largo plazo, y (ii) del poder predictivo de tales modelos. Concluyéndose que existe una relación de largo plazo entre M1 (no desestacionalizado) y sus determinantes, pero que tal relación no presenta estabilidad a través del tiempo, medida ésta a través de la capacidad predictiva de los modelos.

"....Any particular empirical study is part of the research progression, not the final word on the relevant subject...." D. F. Hendry (1995)

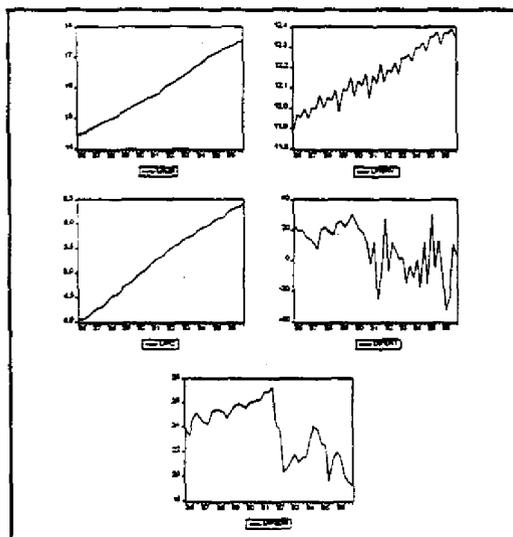
B. Estimación y resultados

Dadas las consideraciones anteriores, en este ejercicio se presenta un nuevo esquema de modelización de las funciones de demanda de dinero tradicional, considerando para ello dos definiciones de dinero: M1 y M3 más bonos, M3B. Es de señalar que, el ejercicio que considera a M1 se lleva a cabo con datos trimestrales tan solo para el período comprendido entre 1981 y 1995, en la medida en que los resultados obtenidos bajo dicha muestra permiten ilustrar adecuadamente la discusión concerniente a la crítica de Lucas, es decir, el objetivo de la presentación de estos resultados es estrictamente pedagógica.

1. Estimación considerando M3 más bonos.

En el caso de M3B, la estimación de la función de demanda se lleva a cabo con información trimestral para el período 1986.1 - 1997.1 considerando el sistema conformado por: dinero (M3B), precios (IPC), ingreso (PIBK) y tasa de interés: dos diferenciales que representan los rendimientos de activos físicos, DIFM3B, y activos en moneda extranjera³⁹, DIFER1, frente al rendimiento de M3B, y haciendo uso de los conceptos de cointegración, causalidad y exogeneidad descritos en la sección anterior. En el Gráfico 1 se presenta, para el período de estudio, la evolución de las variables: M3B, PIBK e IPC, transformadas bajo logaritmo, así como los movimientos de los diferenciales de tasas de interés, DIFM3B y DIFER1. Como se observa, las series presentan una tendencia lineal creciente a través del tiempo, excepto los diferenciales, y algunas de ellas exhiben también patrones estacionales.

GRAFICO 1



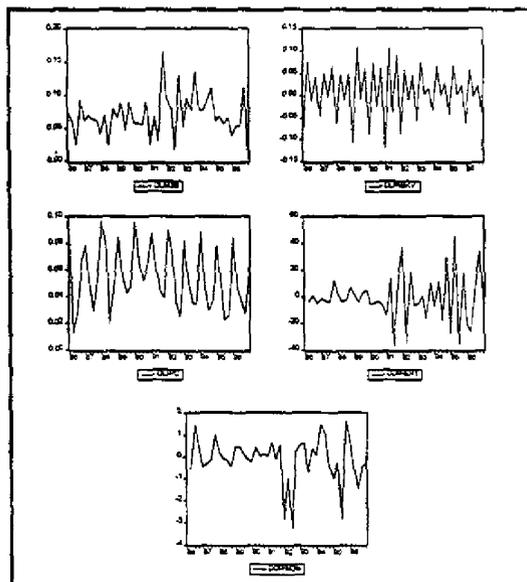
³⁹ $DIFER_i = Deval_t - TM3B_t$ ($i=1,2$)

En el caso de DIFER1: $E_t [Deval(t+3)] = Deval_t$

DIFER2: $E_t [Deval(t+3)] = \text{Pronóstico ARIMA (horizonte } t+3)$

El Gráfico 2 muestra las primeras diferencias de las series permitiendo apreciar de una manera más clara los patrones estacionales. Se podría decir a *grosso modo* que las series se estacionan alrededor de su respectiva media⁴⁰, con algunos problemas de heteroscedasticidad, principalmente en los diferenciales de tasas de interés.

GRAFICO 2



El Cuadro 4 reporta los resultados obtenidos de la estimación VEC no restringida sobre los modelos B y C, descritos en el Cuadro 1, sobre el sistema {M3B, IPC, PIBK, DIFER1, DIFM3B}. Es de señalar que, dicha estimación no se lleva a cabo sobre los modelos A, D y E. La no existencia de una tendencia cuadrática en los niveles de las variables deja por fuera al modelo A, en tanto que, el reconocimiento de un patrón lineal en la tendencia (Gráfico 1) deja por fuera a los modelos D y E.

Este cuadro tiene como propósito ilustrar el comportamiento del sistema bajo

⁴⁰ En este punto no se hace referencia a la posible existencia de raíces unitarias asociadas a componentes estacionales.

diferentes rezagos, si bien es cierto que existen criterios de información para la determinación de la longitud del VAR, no siempre el orden establecido mediante tales criterios permite alcanzar un comportamiento "óptimo"⁴¹ en los residuales. En dicho cuadro se consignan los valores obtenidos en las pruebas multivariadas y univariadas sobre normalidad y autocorrelación, así como, la evaluación sobre exclusión, estacionariedad y rezagos. El comportamiento normal multivariado de los residuos se verifica a través de la estadística NM de Doornik y Hansen (1994) en tanto que, la verificación univariada se lleva a cabo a través de la prueba de Jarque-Bera basada en asimetría y apuntamiento.

La existencia de autocorrelación se determina mediante pruebas multivariadas del tipo Ljung-Box (LB) y multiplicadores de Lagrange, LM(1) y LM(4), las cuales se aplican sobre los residuales del sistema. Es de señalar, que de las pruebas anteriores se reporta tanto el nivel de la estadística como su correspondiente *p-value*. Adicionalmente, se presentan las decisiones soportadas por la muestra en lo referente a pruebas multivariadas sobre exclusión de cada una de las variables del vector de cointegración, como también sobre estacionariedad y exogeneidad.

exogeneidad bajo el sistema, para diferentes rezagos y para el número de vectores de cointegración encontrados bajo dichos

El análisis estadístico presentado en el cuadro 4 soporta de manera estricta la representación planteada por el modelo C bajo 2 rezagos. A pesar de que el modelo B puede ser considerado inadecuado, en la medida en que de manera sistemática se rechaza la presencia de la componente de tendencia en el vector de cointegración, el carácter pedagógico de este artículo lleva a presentar en el cuadro 5 una prueba para la selección de la mejor representación entre los modelos B y C, referenciada en el cuadro 2.

⁴¹ Entendiéndose como comportamiento óptimo aquel en el cual se alcanza normalidad multivariada y univariada y ruido blanco multivariado. .

CUADRO 4⁴²

Modelo	Lags	r	Pruebas Multivariadas				Pruebas Univariadas	Pruebas Multivariadas					Exclusión T
			Normalidad		Autocorrelación		Normalidad VC : 5.99	Exclusión, Estacionariedad, Exogenidad					T-C
			NM	LB	LM(1)	LM(4)	LM3B, LPIBK, LIPC, DIFER1, DIFM3B	LM3B	LPIBK	LIPC	DIFER1	DIFM3B	T-C
B	1	1	13.84 0.18	304.1 0.08	35.31 0.08	32.92 0.13	0.6929, 1.7767, 1.8554, 0.2967, 7.8377	EVC I(1) EXO	EVC I(1) END	NEVC I(1) EXO	EVC I(1) END	NEVC I(1) EXO	NEVC
	2	1	8.72 0.56	232.5 0.27	19.80 0.76	30.05 0.22	0.4426, 0.1293, 0.8823, 0.2320, 5.0994	EVC I(1) END	EVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	NEVC I(1) EXO	NEVC
	3	2	13.39 0.20	259.0 0.00	14.96 0.94	29.54 0.24	0.4699, 3.8072, 0.0590, 0.3558, 3.3941	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) END	NEVC I(1) EXO	NEVC
	4	0											
C	1	3	16.47 0.09	271.1 0.30	21.36 0.67	31.62 0.17	0.9480, 0.8260, 2.3650, 0.2601, 5.4808	EVC I(1) EXO	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) EXO	
	2	1	8.74 0.56	235.5 0.23	20.28 0.73	31.50 0.17	0.2933, 0.1318, 0.6536, 0.1935, 5.172	EVC I(1) END	EVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	NEVC I(1) EXO	
	3	2	10.76 0.38	257.1 0.00	15.52 0.93	30.24 0.22	0.0201, 3.1950, 0.0680, 0.4875, 2.7169	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) END	EVC I(1) END	NEVC I(1) EXO	
	4	1	18.10 0.05	247.8 0.00	18.21 0.83	27.99 0.31	0.3284, 2.5346, 5.0228, 0.8434, 1.4955	EVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	EVC I(1) END	NEVC I(1) EXO	EVC I(1) EXO	

⁴² EVC: Está en el vector de cointegración, NEVC: No está en el vector de cointegración. I(1): Integrada de orden 1 a la frecuencia cero. EXO: Exógena débil, END: Endógena. Es de señalar que, los criterios de información sugieren entre 1 y 2 rezagos como longitud óptima.

Adicionalmente, el cuadro 5 reporta también: (i) los vectores propios normalizados, (ii) los valores propios correspondientes y (iii) los resultados de la prueba del máximo valor propio, (18), corregidos por el tamaño de la muestra como también, los valores críticos correspondientes (Modelo B: tabla V Johansen (1994) y Modelo C: tabla A1 Johansen y Juselius (1990)). Como se observa en este cuadro, los resultados de la prueba de selección reiteran al modelo C como la representación más adecuada para el conjunto de información analizado. La estadística del máximo valor propio señala la existencia de un vector de cointegración tanto en el modelo B como en el C.

CUADRO 5

Modelo B (Rezagos=2)				Modelo C (Rezagos=2)			
Vector propio: (LM3B, LPIBK, LIPC, DIFER1, DIFM3B, T) (1.000, -5.85, -0.823, 0.005, 0.004, 0.038)				Vector propio: (LM3B, LPIBK, LIPC, DIFER1, DIFM3B) (1.000, -4.82, -0.347, 0.04, 0.02)			
Valores propios	Máximo Valor propio			Valores propios	Máximo Valor propio		
	Prueba*	$H_0: r=$	Valor Crítico $\alpha=10.0\%$		Prueba*	$H_0: r=$	Valor Crítico $\alpha=10.0\%$
0.5373	25.43	0**	23.72	0.5217	24.34	0**	20.90
0.3693	15.21	1	19.88	0.3620	14.83	1	17.15
0.2485	9.42	2	16.13	0.2484	9.42	2	13.39
0.2427	9.17	3	12.39	0.1945	7.14	3	10.60
0.1245	4.39	4	10.56	0.1161	4.08	4	2.71
Prueba para Selección:							
Prueba $H_1(r)$ vs $H^*(r) = 1.4258$ Valor Crítico = 3.841 ($\alpha=5.0\%$)							

* Valores ajustados de acuerdo a Cheung-Lai

** Se rechaza

El cuadro 6 reporta los valores de las pruebas de exogeneidad, exclusión y

estacionariedad y sus correspondientes valores críticos obtenidos para el modelo C bajo 2 rezagos y un único vector de cointegración. Adicionalmente, se presentan los resultados de dos pruebas multivariadas sobre exogeneidad conjunta de las variables: {LPIBK, LIPC, DIFER1 y DIFM3B} y {DIFER1 y DIFM3B}, bajo la primera existe evidencia para rechazar la hipótesis de exogeneidad débil, en tanto que, la segunda confirma la exogeneidad débil de los dos diferenciales. Es de señalar que, el resultado obtenido en la primera prueba conjunta impide la construcción de la representación uniecuacional del sistema discutida en la sección C del marco analítico.

CUADRO 6

Variables	Exogeneidad VC: 3.84 ($\alpha=5.0\%$)	Exclusión VC: 3.84 ($\alpha=5.0\%$)	Estacionariedad VC: 7.81 ($\alpha=5.0\%$)
LM3B	4.25	11.69	17.78
LPIBK	3.04	11.25	18.51
LIPC	2.60	5.19	18.63
DIFER1	1.90	6.82	12.53
DIFM3B	0.03	0.09	15.23
P-value asociado a la prueba conjunta sobre exogeneidad de: (LPIBK, LIPC, DIFER1, DIFM3B) en el sistema : 0.04 P-value asociado a la prueba conjunta sobre exogeneidad de: (DIFER1, DIFM3B) en el sistema : 0.36			

La representación matricial de la estimación del sistema, considerando el modelo C bajo 2 rezagos y un vector de cointegración como su mejor representación, e imponiendo las restricciones de exogeneidad débil sobre las variables DIFER1 y DIFM3B, es la siguiente:

$$\alpha = \begin{bmatrix} -0.168 \\ 0.123 \\ -0.090 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}, \quad \beta' = [1.000 \quad -4.673 \quad -0.385 \quad 0.003 \quad 0.003] \quad (56)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} -0.1680 & 0.7870 & 0.0650 & -0.0010 & -0.0005 \\ 0.1230 & -0.5760 & -0.0470 & 0.0004 & 0.0003 \\ -0.090 & 0.4208 & 0.0350 & -0.0003 & -0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad \text{Valores } t: \begin{bmatrix} -2.5 & -2.5 & -2.5 & -2.5 & -2.5 \\ 2.7 & 2.7 & 2.7 & 2.7 & 2.7 \\ -3.0 & -3.0 & -3.0 & -3.0 & -3.0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Donde α y β corresponden a las matrices descritas en (20) y (21) y Π a su producto. La matriz F_1 proviene de estimar el sistema según lo presentado en (6) considerando que ω , en este caso, está conformada por el intercepto y las variables *dummies* estacionales (centradas).

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.3050 & -0.4804 & -0.2601 & 0.0003 & 0.0027 \\ 0.0837 & -0.3784 & 0.0671 & -0.0002 & 0.0052 \\ -0.0072 & -0.1992 & 0.0134 & 0.0002 & 0.0040 \\ 148.46 & 134.92 & -109.17 & -0.5952 & 1.5755 \\ 12.699 & 0.8801 & -22.12 & -0.0091 & 0.1322 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} -7.14 & -0.018 & 0.012 & -0.050 \\ 5.28 & 0.007 & -0.030 & -0.058 \\ -3.80 & -0.022 & -0.021 & -0.017 \\ -6.682 & -29.86 & -4.26 & -22.00 \\ 2.035 & -1.394 & -1.228 & -0.848 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Las matrices A_1 y A_2 corresponden a la formulación (5) y se derivan utilizando las matrices F de (58) y la matriz Π de (57), como se explica en (6) o (7).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.1366 & 0.3061 & -0.1954 & -0.0002 & 0.0023 \\ 0.2069 & 0.0457 & 0.0197 & 0.0002 & 0.0056 \\ -0.0973 & 0.2216 & 1.048 & -0.0001 & 0.0038 \\ 148.46 & 134.92 & -109.2 & 0.4048 & -1.575 \\ -12.69 & 0.8801 & -22.124 & -0.0092 & 1.1321 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.305 & 0.4004 & 0.2601 & -0.0003 & -0.0027 \\ -0.0837 & 0.3784 & -0.0671 & 0.0002 & -0.0052 \\ 0.0072 & 0.1992 & -0.0134 & -0.0002 & -0.0040 \\ -148.46 & -134.92 & 109.2 & 0.5951 & 1.575 \\ 12.69 & -0.8801 & 22.124 & 0.0092 & -0.1321 \end{bmatrix}$$

(59)

Las matrices A y H , descritas en el cuadro 3 en lo referente a H_3 , H_4 y H_5 , utilizadas para imponer la condición de exogeneidad débil sobre las variables DIFER1 y DIFM3B y para verificar la condición de homogeneidad de grado uno en precios e ingreso, respectivamente, son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(60)

Una vez el sistema es estimado, mediante la representación seleccionada, considerando las restricciones de exogeneidad, se evalúan las hipótesis planteadas por la teoría económica sobre homogeneidad precios y/o ingreso, siguiendo lo planteado en la ecuación (27) y en la prueba de hipótesis H_3 , descrita en el cuadro 3. Como puede

observarse en el cuadro 7, existe evidencia para rechazar la hipótesis de elasticidad unitaria en el ingreso y en los precios, como también, en el caso conjunto, es decir, elasticidades unitarias en precios e ingreso. De esta forma, puede concluirse que la velocidad del dinero, M3B, en este ejercicio, no es estacionaria.

CUADRO 7
HOMOGENEIDAD BAJO RESTRICCIONES DE EXOGENEIDAD
(SISTEMA)

Precios		Ingreso		Conjunta	
Prueba	P-value	Prueba	P-value	Prueba	P-value
11.92	0.01*	12.14	0.01*	12.93	0.02*

Con el propósito de examinar si el carácter exógeno de DIFER1 y DIFM3B puede considerarse como fuerte debe adicionarse, a las pruebas de exogeneidad ya presentadas, la verificación de que la historia de la variable endógena LM3B no causa según Granger a las exógenas débiles. Es decir, determinar si la consideración de LM3B como parte relevante en la explicación de las exógenas débiles no "mejora" el pronóstico de éstas. Técnicamente, lo anterior significa que la inclusión de LM3B en el espacio de información de las exógenas débiles no reduce sus errores medios cuadráticos de predicción. El cuadro 8 presenta los resultados de las pruebas de causalidad de Granger (tipo Wald) en el contexto VAR⁴³, sugeridas por Lutkephol (1993). Como puede observarse, existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de no causalidad y por consiguiente, las variables son tan solo exógenas débiles. Este hecho impide la imposición de metas *ad-hoc* en los niveles de precios, ingreso y diferenciales de tasa de interés para generar pronósticos condicionados sobre la variable endógena del sistema, en este caso M3B.

⁴³Modelo VAR planteado en (5) y presentado matricialmente en (59), proveniente de la estimación VEC sugerida en (6) y presentada matricialmente en (56), (57) y (58).

CUADRO 8
PRUEBAS DE CAUSALIDAD DE GRANGER

Ecuación	Prueba $\chi^2(2)$ VC: 5.99 $\alpha=0.05$
DIFER1	251.35
DIFM3B	183.55

De los resultados anteriores se concluye que el único tipo de pronóstico que puede llevarse a cabo es el no condicionado, es decir, aquel que se deriva del sistema como un todo sin imponer restricciones particulares. El pronóstico libre de M3B, bajo el sistema sin restricciones, sitúa su variación anual a diciembre de 1997 en 20.58%. Sin embargo, este resultado podría cambiar en la medida en que el dato correspondiente al producto para el primer trimestre de 1997, utilizado en la estimación, se derivó de una senda con crecimiento anual de 4.0%, la cual podría no ser correcta.

2. Estimación considerando M1

En este caso, el conjunto de variables que conforman el sistema son: dinero, M1, precios, IPC, ingreso, PIBK y tasa de interés, TCDT a 90 días. Como ya se mencionó, la muestra en este ejercicio está conformada por datos trimestrales para el período comprendido entre 1981 y 1995. Es de señalar que, al considerar el año 1996 y el primer trimestre de 1997 la evidencia empírica sugiere un posible cambio (estructural)⁴⁴ en la conducta del sistema que no permite avanzar en el ejercicio.

⁴⁴ Es de recordar que, durante 1996 se efectuaron controles de tipo administrativo en los depósitos en cuenta corriente oficiales. Hecho que cambia la composición de M1 y afecta la relación de éste con las restantes variables que conforman el sistema del cual se deriva la función de demanda.

Un trabajo similar al llevado a cabo en la estimación del sistema que considera M3B y reportado en el cuadro 4 fue realizado para el sistema asociado a M1. Los resultados señalan al modelo C con 4 rezagos como óptimo, es decir, se confirma la existencia de tendencia lineal en los datos y se excluye ésta del vector de cointegración. Bajo este esquema se encuentra un vector de cointegración, el cual se presenta en el cuadro 9.

CUADRO 9

Modelo C			
(Rezagos=4)			
Vector propio:			
(LM1, LPIBK, LIPC, TCDT)			
(1.000, -1.974, -0.738, 0.013)			
Valores propios	Máximo Valor propio		
	Prueba*	H ₀ : r=	Valor Crítico $\alpha=10.0\%$
0.3718	18.60	0**	17.15
0.2495	11.48	1	13.39
0.1631	7.12	2	10.60
0.0373	1.52	3	2.71

*Ajustando por sesgo de tamaño de muestra.

En el cuadro 10 se presentan las pruebas de exogeneidad, exclusión y estacionariedad sobre las variables del sistema, los resultados señalan que exceptuando M1, las restantes variables del sistema son exógenas débiles; todas las variables son integradas de orden 1 y se encuentran en el vector de cointegración. Adicionalmente, la

prueba conjunta sobre exogeneidad muestra que no existe evidencia para rechazar que conjuntamente las variables de ingreso, precios y tasa de interés son exógenas débiles.

CUADRO 10

Variables	Exogeneidad VC: 3.84 ($\alpha=5.0\%$)	Exclusión VC: 3.84 ($\alpha=5.0\%$)	Estacionariedad VC: 7.81 ($\alpha=5.0\%$)
LM1	5.86	8.48	16.68
LPIBK	1.36	7.03	17.31
LIPC	0.00	8.63	16.84
TCDT	2.53	9.78	9.89
P-value asociado a la prueba conjunta sobre exogeneidad de: (LPIBK, LIPC, TCDT) en el sistema : 0.19 Nuevo Vector de Cointegración: (LM1, LPIBK, LIPC, TCDT) (1.000, -1.664, -0.798, 0.013)			

Retomando el problema de exogeneidad, es de anotar, que como lo señala Johansen (1995) la imposición de restricciones de exogeneidad, previamente validadas, posibilita la construcción de sistemas parciales provenientes de la factorización (31) discutida en la sección II.C, en este caso, la existencia de un vector de cointegración y la naturaleza exógena de los precios, el ingreso y la tasa de interés lleva a que tal sistema parcial se constituya en tan sólo una ecuación, interpretable ésta "afortunadamente" como de demanda de dinero.

A partir del modelo condicional de la factorización (31) y con el propósito de alcanzar resultados similares a los obtenidos para LM1 en el VEC, la estimación del sistema parcial bajo mínimos cuadrados ordinarios debe ser consistente con el número de rezagos considerados en la representación del sistema encontrada bajo VEC (o VAR). El cuadro 11 muestra los resultados de la estimación bajo MCO del modelo condicional o sistema parcial⁴⁵. Es de anotar, que debido a que se tiene un único vector de cointegración y que el VAR es de orden 4, dicho modelo condicional adquiere la forma de un modelo de corrección de errores unietápico de longitud 3⁴⁶.

El cuadro 12 presenta los resultados de las distintas pruebas estadísticas llevadas a cabo con el fin de evaluar posibles problemas: (i) en el comportamiento de los residuales y (ii) en la especificación de la forma funcional del modelo de regresión uniecuacional (cuadro 11). Los resultados confirman tanto, el cumplimiento de los supuestos básicos del análisis de regresión, como también, la adecuada selección de la forma funcional lineal utilizada.

Los gráficos 3 y 4 presentan los resultados de las pruebas sobre estabilidad de los parámetros. Como se observa, en el caso de la prueba CUSUM no existe evidencia para rechazar la hipótesis de estabilidad. Un resultado similar se obtiene, al examinar el número de puntos, 7.1% a un nivel de significancia del 5.0%, que caen por fuera de las bandas de confianza construidas a partir del error de pronóstico un período hacia adelante.

⁴⁵En esta representación, al igual que en la VEC, también se consideran dummies estacionales centradas, con el objeto de incorporar dentro del modelo los posibles efectos estacionales existentes en las variables bajo análisis.

⁴⁶En este caso, existe una relación de equivalencia entre la estimación VEC y la encontrada en el modelo uniecuacional, al considerar las variables en niveles rezagadas 4 períodos y rezagos hasta de orden 3 de las variables en cambios. En general, como lo muestra Bardsen (1992), si se valida el paso del sistema al modelo uniecuacional, la estimación de un VEC(k-1), VAR(k), es equivalente a la estimación del modelo uniecuacional considerando (k-1) rezagos de las variables en cambios y el rezago 1 o k de las variables en niveles.

CUADRO 11
ESTIMACION DEL SISTEMA PARCIAL BAJO MCO

MCO Variable Dependiente: D(LM1)
Muestra(Ajustada): 1982:1 1995:4
Observaciones Incluidas: 56 después de ajuste

Variable	Coefficiente	Desviación Estándar	Estadística-t	Prob.
C	-6.891043	4.578828	-1.504980	0.1418
LM1(-4)	-0.743033	0.236743	-3.138559	0.0036
LIPC(-4)	0.592811	0.175726	3.373495	0.0019
LPIBKV(-4)	1.236567	0.572546	2.159771	0.0382
TCDT(-4)	-0.009385	0.002613	-3.592136	0.0011
D(LIPC)	0.275321	0.254302	1.082652	0.2868
D(LIPC(-1))	0.261095	0.257873	1.012492	0.3187
D(LIPC(-2))	0.603750	0.261032	2.312929	0.0271
D(LIPC(-3))	0.725455	0.299835	2.419516	0.0212
D(LPIBKV)	0.651057	0.241402	2.696987	0.0109
D(LPIBKV(-1))	0.814061	0.323984	2.512655	0.0170
D(LPIBKV(-2))	0.972938	0.390230	2.493246	0.0178
D(LPIBKV(-3))	1.130331	0.512960	2.203546	0.0346
D(TCDT)	-0.000625	0.002162	-0.289263	0.7742
D(TCDT(-1))	-0.007670	0.002233	-3.434324	0.0016
D(TCDT(-2))	-0.005537	0.002988	-1.852949	0.0729
D(TCDT(-3))	-0.005699	0.002720	-2.095298	0.0439
D(LM1(-1))	-0.611771	0.173377	-3.528559	0.0013
D(LM1(-2))	-0.590623	0.193643	-3.050058	0.0045
D(LM1(-3))	-0.913807	0.226678	-4.031303	0.0003
DC1	-0.113251	0.045457	-2.491403	0.0179
DC2	-0.092886	0.031440	-2.954420	0.0057
DC3	-0.089380	0.047468	-1.882959	0.0685
R ²	0.974609	Media var. dependiente		0.060600
R ² Ajustado	0.957681	S.D. var. dependiente		0.114202
S.E. de regresión	0.023493	Akaike criterio inf.		-7.209519
Suma resid. cuadrados	0.018213	Schwarz criterio info		-6.377678
Log Máxima Verosimilitud	145.4060	Estadística-F		57.57546
Durbin-Watson	1.869915	Prob(F-statistic)		0.000000

CUADRO 12
ESTADÍSTICAS SOBRE RESIDUALES
(MODELO UNIECUACIONAL SOBRE DLM1)

Prueba sobre		Estadística	P-Value
Normalidad	Jarque-Bera	0.4389	0.8029
Autocorrelación (Lags 12)	Ljung-Box	16.035	0.1900
Correlación Serial Lag(4) Estadística F Obs.*R ²	Breusch-Godfrey	1.1530 7.6843	0.3517 0.1039
Heteroscedasticidad Lag(1) : Estadística F Obs.*R ² Lag(4) : Estadística F Obs.*R ²	ARCH	1.4604 1.4749 0.6605 2.7677	0.2322 0.2245 0.6224 0.5974
Estadística F Obs.*R ²	White	1.7637 46.181	0.11176 0.2321
Especificación Término cuadrático Estadística F Razón de Verosimilitud	Ramsey	0.0003 0.0005	0.9856 0.9809

GRAFICO 3

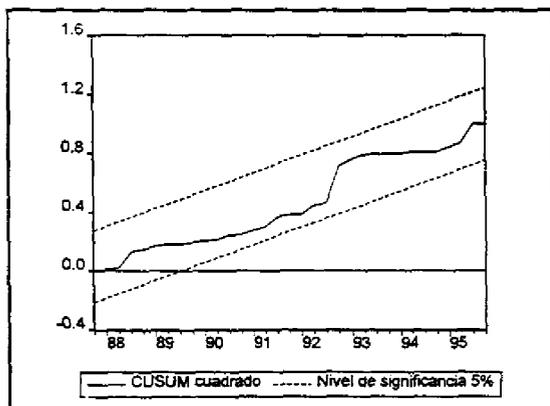
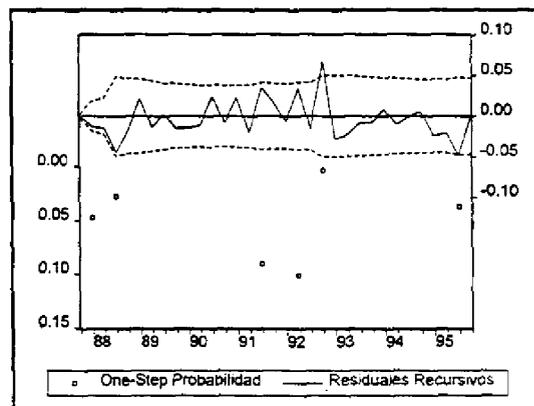


GRAFICO 4



La estimación de los parámetros de largo plazo y de sus correspondientes desviaciones estándar se llevan a cabo de la forma sugerida por Bardsen (1992)⁴⁷ y sus resultados se consignan en el cuadro 13. Como se observa, estos parámetros son iguales a los estimados bajo VEC, los cuales conforman el β' en el cuadro 10⁴⁸.

CUADRO 13
COEFICIENTES DE LARGO PLAZO
(BAJO EL MODELO DE REGRESION)

Variable	Coficiente (β_i)	Desviacion estándar de (β_i)
LPIBK	1.6642	0.4520
LIPC	0.7978	0.0723
TCDT	-0.0126	0.0023

Con el objetivo de verificar si los resultados ya obtenidos, bajo VEC, sobre la

⁴⁷ Bardsen (1992) propone estimar:

$$\nabla y_t = \alpha'_0 \nabla z_t + \sum_{i=1}^{k-1} (\gamma'_i \nabla y_{t-i} + \delta'_i \nabla z_{t-i}) + \gamma'_k y_{t-k} + \delta'_k z_{t-k} + \omega D_t + u_t$$

$$\gamma'_k y_{t-k} + \delta'_k z_{t-k} = \alpha \beta' [y_{t-k}, z_{t-k}]'$$

$$\hat{\beta}_p = \frac{-\hat{\delta}'_k[\rho]}{\hat{\gamma}'_k}$$

$$\text{vâr}(\hat{\beta}_p) = \frac{(\hat{\beta}_p)^2 \text{vâr}(\hat{\gamma}'_p) + \text{vâr}(\hat{\delta}'_k[\rho]) + 2\hat{\beta}_p \text{côv}(\hat{\gamma}'_k, \hat{\delta}'_k[\rho])}{(\hat{\gamma}'_k)^2}$$

⁴⁸Es de recordar, que los parámetros asociados al vector de cointegración hacen referencia a la combinación lineal estacionaria de las variables, por tanto, los signos esperados en el modelo uniecuacional, variable dependiente o endógena - variables independientes o exógenas, deben ser los inversos aditivos de las componentes del vector de cointegración.

validación de las hipótesis de homogeneidad de precios e ingreso se mantienen en la estimación uniecuacional, se llevan a cabo pruebas individuales y conjuntas, tipo Wald, cuadro 14. Tales pruebas confirman la homogeneidad precio y rechazan la de ingreso, como también, rechazan la estacionariedad de la velocidad de circulación del dinero (M1).

CUADRO 14
HOMOGENEIDAD
(BAJO EL MODELO DE REGRESION)

Precios		Ingreso		Conjunta	
Prueba	P-value	Prueba	P-value	Prueba	P-value
3.48	0.0622*	1.7311	0.1882	12.93	0.0015**

Con el propósito de evaluar si la función de demanda de M1, aquí analizada, está o no sujeta a la crítica de Lucas⁴⁹ se plantean, en este estudio, modelos para explicar el comportamiento de la inflación trimestral y de los cambios trimestrales de la la tasa de interés, con el objeto de determinar, posteriormente, si las variables explicativas de estos modelos, diferentes a las consideradas en el sistema, afectan a los parámetros del modelo condicional. Si éste es el caso, como lo señalan Engle y Hendry (1993), los parámetros de interés pierden la propiedad de invarianza frente a los parámetros de los modelos marginales asociados y por tanto, no se cumple la segunda condición de super exogeneidad.

En el cuadro 15 se presenta el modelo estimado para DLIPC, inflación trimestral, en el cual se incluyen como variables explicativas, además de su rezago de orden 4 y de las variables *dummies* estacionales, a la devaluación trimestral rezagada 6 períodos y a dos variables *dummies* A y B que afectan, tan solo, el nivel autónomo del crecimiento de los precios, éstas representan períodos de máxima deflación y devaluación, respectivamente.

⁴⁹En consecuencia, el modelo no debe ser utilizado para llevar a cabo simulaciones de política.

CUADRO 15
ESTIMACION DEL MODELO SOBRE DLIPC

MCO Variable Dependiente es DLIPC

Muestra(ajustada): 1982:4 1995:4

observaciones Incluidas: 53 después de ajuste

Variable	Coeficiente	Desviación		Prob.
		Estándar	Estadística-t	
C	0.019788	0.008050	2.458197	0.0179
DLIPC(-4)	0.412087	0.121624	3.388196	0.0015
DLTCF(-6)	0.222327	0.068682	3.237065	0.0023
DUMQ1	0.021871	0.006637	3.295405	0.0019
DUMQ2	0.014947	0.005470	2.732464	0.0090
DUMQ3	-0.007474	0.005113	-1.461762	0.1508
DUMMYA	-0.041143	0.010054	-4.092400	0.0002
DUMMYB	0.022320	0.009717	2.296919	0.0263
R ²	0.769569	Media var. dependiente		0.052373
R ² Ajustado	0.733725	S.D. var dependiente		0.024436
S.E. de regresión	0.012609	Akaike criterio info.		-8.608355
Suma resid. cuadrados	0.007155	Schwarz criterio		-8.310953
Log Máxima Verosimilitud	160.9177	F		21.46950
Durbin-Watson	2.024617	Prob(F)		0.000000

El cuadro 16 presenta los resultados de las diferentes pruebas estadísticas llevadas a cabo sobre los residuales, éstos sugieren un comportamiento adecuado de los residuos, como también, una correcta especificación de la forma funcional del modelo.

Los gráficos 5 y 6 muestran los resultados de las pruebas sobre estabilidad de los parámetros. Bajo la prueba CUSUM no existe evidencia para rechazar la hipótesis de estabilidad, sin embargo, se observa que para el período comprendido entre 1986-1992 existe una marcada tendencia de la estadística a estar situada en el límite superior del intervalo de confianza. El resultado de estabilidad en los parámetros se confirma al examinar el número de puntos, 3.57% a un nivel de significancia del 5.0%, que caen por fuera de las bandas de confianza construidas a partir del error de pronóstico un período hacia adelante.

CUADRO 16
ESTADÍSTICAS SOBRE RESIDUALES
(MODELO UNIECUACIONAL SOBRE DLIPC)

Prueba sobre		Estadística	P-Value
Normalidad	Jarque-Bera	0.7579	0.6845
Autocorrelación (Lags 12)	Ljung-Box	9.4532	0.664
Correlación Serial Lag(4) Estadística F Obs.*R ²	Breusch-Godfrey	1.0411 4.8872	0.3977 0.2990
Heteroscedasticidad Lag(1): Estadística F Obs.*R ² Lag(4): Estadística F Obs.*R ²	ARCH	0.3118 0.3223 0.5804 2.4560	0.5790 0.5702 0.6783 0.6525
Estadística F Obs.*R ²	White	2.9545 20.2515	0.00801 0.01642
Especificación Término cuadrático Estadística F Razón de Verosimilitud	Ramsey	1.2176 1.4467	0.2758 0.2290

GRAFICO 5

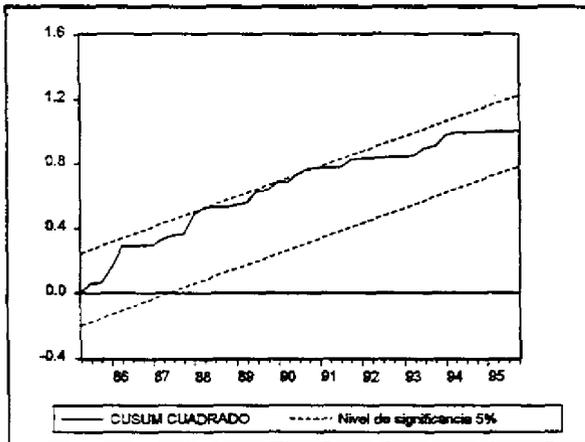
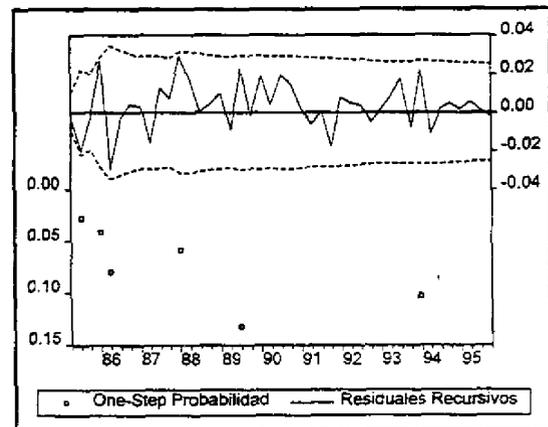


GRAFICO 6



El modelo estimado para explicar los cambios absolutos (trimestrales) de la tasa de interés se presenta en el cuadro 17. El conjunto de variables explicativas considera, además de su primer rezago, la inflación rezagada 4 periodos, el segundo rezago del crecimiento monetario y una variable *dummy* (dumtas) que incorpora el efecto de los controles administrativos que, sobre la tasa de interés, se han llevado a cabo durante el periodo de análisis (véase, Vásquez 1996).

En el cuadro 18 se aprecia que los residuos del modelo sobre DTCDT cumplen con la mayoría de los supuestos básicos de regresión⁵⁰. Adicionalmente, la forma funcional seleccionada es adecuada.

CUADRO 17
ESTIMACION DEL MODELO SOBRE DTCDT

MCO Variable Dependiente DTCDT				
Muestra(Ajustada): 1982:2 1995:4				
Observaciones Incluidas: 55 después de ajuste				
Variable	Coefficiente	Desviación Estándar	Estadística-t	Prob.
C	1.318953	0.472398	2.792035	0.0074
DUMTAS	-3.732280	0.599717	-6.223400	0.0000
D(LM1(-1))	-3.623147	1.847206	-1.961420	0.0554
D(TCDT(-1))	0.156775	0.100854	1.554475	0.1264
D(LIPC(-4))	-14.47582	8.541470	-1.694769	0.0963
R ²		0.563668	Media Var. dependiente	-0.162182
R ² Ajustado		0.528762	S.D. var dependiente	2.048344
S.E. de regresión		1.406122	Akaike criterio inf.	0.768180
Suma resid. cuadrados		98.85901	Schwarz criterio inf.	0.950665
Log Máxima Verosimilitud		-94.16656	Estadística F	16.14792
Durbin-Watson		1.461087	Prob(F)	0.000000

⁵⁰ Es de señalar, que la prueba sobre heteroscedasticidad al rezago 1 evidencia problemas en el comportamiento de la varianza del error del modelo. Dicha situación no es inesperada, dado el comportamiento de la tasa de interés en el periodo de estudio, el cual se ve afectado por decisiones de política las cuales no son consideradas en el sistema analizado.

Las pruebas CUSUM y de error de predicción un período hacia adelante, reportadas en los gráficos 7 y 8 permiten concluir que en términos generales hay estabilidad en los parámetros. Sin embargo, en el período correspondiente a 1991, la estadística CUSUM se ubica por fuera del límite inferior del intervalo de confianza, lo cual señala a éste como un breve período de inestabilidad.

CUADRO 18
ESTADÍSTICAS SOBRE RESIDUALES
(MODELO UNIECUACIONAL SOBRE DTCDT)

Prueba sobre		Estadística	P-Value
Normalidad	Jarque-Bera	2.8931	0.2353
Autocorrelación (Lags 12)	Ljung-Box	12.588	0.4000
Correlación Serial Lag(4) Estadística F Obs.*R ²	Breusch-Godfrey	2.2527 9.0091	0.0778 0.0608
Heteroscedasticidad Lag(1): Estadística F Obs.*R ² Lag(4): Estadística F Obs.*R ²	ARCH	4.2878 4.1135 1.4559 5.7310	0.0434 0.0425 0.2310 0.2201
Estadística F Obs.*R ²	White	1.4223 9.6145	0.2189 0.2115
Especificación Término cuadrático Estadística F Razón de Verosimilitud	Ramsey	0.1222 0.1370	0.7280 0.7112

GRAFICO 7

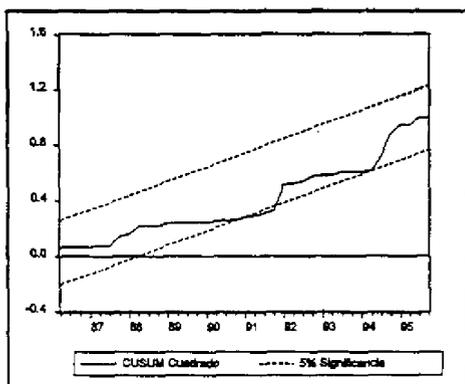
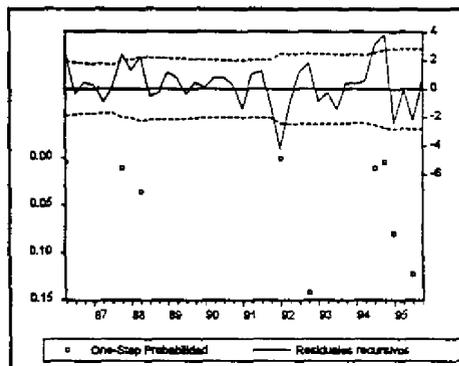


GRAFICO 8



Como se mencionó anteriormente, el modelo condicional está sujeto a la crítica de Lucas en la medida en que los parámetros bajo la estimación original, cuadro 11, cambien su significancia ante la inclusión de intervenciones relevantes en los modelos marginales. En este caso, dichas intervenciones están asociadas con los períodos de extrema deflación y devaluación, como también, con los cambios de régimen sobre la tasa de interés, discutidas en los modelos marginales sobre DLIPC y DTCDT cuadros 15 y 17, respectivamente.

El cuadro 19 reporta los resultados de la estimación uniecuacional bajo MCO del modelo condicional de DLM1, considerando las intervenciones mencionadas. Al comparar la significancia de los parámetros estimados en el cuadro 11 con las obtenidas en la estimación presentada en el cuadro 19, se observa como 7 de los 23 parámetros estimados en el modelo condicional (cuadro 11) dejan de ser significativos al 10.0%. Es importante enfatizar que la prueba conjunta, tipo Wald, sobre significancia de las intervenciones confirma su relevancia conjunta al 10.0% y por tanto, la no invarianza de los parámetros del modelo condicional ante cambios en los parámetros de los modelos marginales. En consecuencia, el modelo condicional está sujeto a la crítica de Lucas y no debe ser utilizado para simulaciones de política.

CUADRO 19
PRUEBA SOBRE INVARIANZA DE LOS PARAMETROS DEL
MODELO CONDICIONAL

MCO Variable Dependiente DLM1

Muestra(ajustado): 1982:1 1995:4

Observaciones Incluidas: 56 después de ajuste

Variable	Coeficiente	Desviación		Prob.
		Estándar	Estadística-t	
C	-0.917916	5.476076	-0.167623	0.8680
LM1(-4)	-0.572153	0.260115	-2.199617	0.0354
LIPC(-4)	0.522419	0.183899	2.840790	0.0079
LPIBKV(-4)	0.565589	0.675147	0.837726	0.4086
TCDT(-4)	-0.008050	0.002714	-2.965852	0.0058
D(LM1(-1))	-0.642880	0.167658	-3.834462	0.0006
D(LM1(-2))	-0.553425	0.210096	-2.634157	0.0130
D(LM1(-3))	-0.859852	0.236214	-3.640133	0.0010
D(LPIBKV)	0.446843	0.247113	1.808251	0.0803
D(LPIBKV(-1))	0.482143	0.343866	1.402125	0.1708
D(LPIBKV(-2))	0.586620	0.413806	1.417620	0.1663
D(LPIBKV(-3))	0.502221	0.588060	0.854030	0.3996
D(LIPC)	0.666765	0.295742	2.254553	0.0314
D(LIPC(-1))	0.245668	0.247302	0.993396	0.3282
D(LIPC(-2))	0.748169	0.255957	2.923025	0.0064
D(LIPC(-3))	0.419850	0.314972	1.332976	0.1923
D(TCDT)	0.003367	0.002923	1.152089	0.2581
D(TCDT(-1))	-0.007998	0.002129	-3.756440	0.0007
D(TCDT(-2))	-0.004015	0.002992	-1.342110	0.1893
D(TCDT(-3))	-0.005858	0.002754	-2.126977	0.0415
DC1	-0.098748	0.043743	-2.257442	0.0312
DC2	-0.099648	0.031083	-3.205868	0.0031
DC3	-0.065264	0.046694	-1.397695	0.1721
DUMMYB	-0.040322	0.023259	-1.733645	0.0929
DUMTAS	0.027607	0.016877	1.635706	0.1120
R ²	0.978412	Media var. dependiente		0.060600
R ² Ajustado	0.961698	S.D. var dependiente		0.114202
S.E. de regresion	0.022350	Akaike criterio Info.		-7.300342
Sum resid. cuadrado	0.015486	Schwarz criterio		-6.396167
Log máxima verosimilitud	149.9490	Estadística-F		58.53998
Durbin-Watson	1.815419	Prob(F)		0.000000
Prueba conjunta sobre los coeficientes asociados con las intervenciones de los modelos marginales: DUMMYB y DUMTAS :				
Prueba de Wald	F: 2.7304	Prob. : 0.080		
	χ^2 : 5.4608	Prob.: 0.065		

Como se mencionó en el marco analítico, existe otra forma alternativa para probar super exogeneidad mediante la verificación de la significancia, dentro del modelo condicional, de los residuales de los modelos marginales. Al utilizar este esquema de prueba se encuentra que los residuos de los modelos (15) y (17) son conjuntamente significativos al 12.0%, al ser incluidos en el modelo condicional⁵¹ y considerando, tan solo, los residuos del modelo marginal de DTCDT, (17), éstos resultan significativos al 6%. Bajo esta alternativa se corrobora lo obtenido previamente, es decir, existen indicios de incumplimiento de la segunda condición de super exogeneidad y por consiguiente el modelo condicional estaría sujeto a la crítica de Lucas.

C. Conclusiones

En la modelización multivariada de las relaciones existentes entre las variables M3B, IPC, PIBK y los diferenciales de la tasa de interés para el período comprendido entre el primer trimestre de 1986 y el primer trimestre de 1997, se encuentra la existencia de un vector de cointegración o relación de equilibrio de largo plazo, interpretable como una función de demanda, como también, un comportamiento endógeno en M3B, precios e ingreso y exógeno en los dos diferenciales de tasa de interés.

La imposición de metas sobre las variables es totalmente inadecuada: (i) en el caso de los diferenciales, a pesar de su carácter exógeno débil, las pruebas de Granger señalan causalidad, por ejemplo, de M3B a éstos y (ii) el ingreso y los precios presentan un carácter endógeno. Es decir, la imposición de metas sobre alguna de estas variables es errónea. Por consiguiente, si el objetivo es el pronóstico, éste tan solo se puede construir a partir de una simulación dinámica libre. El pronóstico libre de M3B, bajo el sistema sin restricciones, sitúa su variación anual a diciembre de 1997 en 20.58%. Sin embargo, este resultado podría cambiar en la medida en que el dato correspondiente al producto para el primer trimestre de 1997, utilizado en la estimación, se derivó de una senda con crecimiento anual de 4.0%, la cual podría no ser correcta.

⁵¹La inclusión de los residuos dentro del modelo condicional no hace cambiar el comportamiento de los residuales de éste.

Es de señalar, que en el caso de que se desee plantear una representación uniecuacional para la función de demanda de M3B, el no incluir los desequilibrios de las ecuaciones correspondientes al ingreso y a los precios (variables endógenas), como lo sugiere Mehra (1996), sesga los resultados de la estimación debido a que se tiene un caso típico de variable omitida, el cual puede ser erróneamente capturado, por ejemplo, a través de la inclusión de una tendencia determinística si el desequilibrio es estacionario alrededor de ésta o mediante un intercepto, si el desequilibrio es estacionario alrededor de una media.

En la modelización de M1, IPC, PIBK, como proxy de ingreso, y la tasa de interés de los CDT, TCDT, para el período comprendido entre el primer trimestre de 1981 y el cuarto trimestre de 1995, se encuentra la existencia de un vector de cointegración o relación de equilibrio de largo plazo y un comportamiento endógeno en M1 y exógeno débil en las variables de precios, ingreso y tasa de interés. Es importante señalar que los desequilibrios monetarios, o parte no anticipada en la relación de largo plazo entre dichas variables, no afectan el comportamiento de corto plazo⁵² de los precios, el ingreso y la tasa de interés. La naturaleza endógena del dinero, M1, y exógena de las restantes variables permite la construcción de un sistema parcial, en este caso uniecuacional, que "afortunadamente" puede ser interpretado como una función tradicional de demanda de dinero.

Los resultados de esta aproximación univariada confirman lo encontrado bajo la estimación del sistema y posibilitan la evaluación del modelo en el contexto de la crítica de Lucas. La evidencia empírica muestra que existen fuertes indicios de que los parámetros de la función de demanda han sido afectados por intervenciones de política, las cuales han estado asociadas primordialmente con la tasa de interés, y por consiguiente la función de demanda de M1 en Colombia, para el período de análisis, podría estar sujeta a la crítica de Lucas, es decir, no debería ser utilizada para llevar a cabo simulaciones de política.

⁵² Entendido éste como los crecimientos trimestrales en ingreso y precios y el cambio trimestral en la tasa de interés.

Este ejercicio hace parte de una continua investigación sobre métodos de estimación en sistemas conformados por variables integradas. El paso a seguir en este proceso es la incorporación de pruebas de cointegración en sistemas de ecuaciones bajo cambios estructurales y en frecuencias estacionales.

BIBLIOGRAFIA

Banerjee, A., Dolado, J., Galbraith, J. W., and Hendry, D. F., Co-integration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1994.

Bardsen, G., "Dynamic Modelling of the Demand for Narrow Money in Norway", Discussion Paper 07, Norwegian School of Economics and Business Administration; 1990. Compilado por Ericsson N. y Iron, J. en Testing Exogeneity, 1994.

Carrasquilla, A. y Rentería, C., "¿Es inestable la demanda por dinero en Colombia?", ESPE, 17; 1990.

Clavijo, S. y Gómez, H., "Selección y control de agregados monetarios óptimos", ESPE, 14; 1988.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A., "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root", Econometrica, 49; 1981.

Doornik, J. A. and Hansen, H., "An omnibus test for univariate and multivariate normality", Working Paper, Nuffield College, Oxford; 1994. Citado por Hansen, H y Juselius, K, en Cats in Rats; 1995.

Engle, R. F. and Granger, C. W. J. "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", Econometrica, 55; 1987.

Engle, R. F. and Hendry, D. F., "Testing Superexogeneity and Invariance in Regression Models", Journal of Econometrics, 56; 1993. Compilado por Ericsson N. y Iron, J. en Testing Exogeneity, 1994.

Ericsson, N. R., "Testing Exogeneity: An Introduction" en Ericsson, N. R. and Irons J. S., Testing Exogeneity, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1994.

Ericsson, N. R. and Irons J. S., Testing Exogeneity, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1994.

Cheung, Y. and Lai, K. "Finite-Sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Test for Cointegration", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 55; 1993.

Cuthbertson, K., Hall, S. G., and Taylor, M. P., Applied Econometric Techniques; Harvester Wheatsheaf; 1992.

Granger, C. W. J., Modelling Economic Series, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1992.

- Gujarati, D. N.**, Basic Econometrics, Third Edition, McGraw Hill; 1995.
- Hamilton, J. D.**, Time Series Analysis. Princeton University Press; 1994.
- Hansen, H. and Juselius, K.**, CATS in RATS. Cointegration Analysis of Time Series, Estima; 1995.
- Hargreaves, C. P.**, Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1994.
- Hendry, D. F.**, Dynamic Econometrics, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1995.
- Johansen, S.**, "Statistical Analysis of Cointegrating Vectors", Journal of Economic Dynamics and Control, 12; 1988.
- Johansen, S.**, "The Role of the Constant and Linear Terms in Cointegration Analysis of Nonstationary Variables"; Econometric Reviews, 13; 1994.
- Johansen, S.**, Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Auto-regressive Models, Advanced Text in Econometrics, Oxford University Press; 1995.
- Johansen, S. and Juselius K.**, "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - with Applications to the Demand for Money", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52; 1990.
- Lutkepohl, H.**, Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, Second Edition; 1993.
- Mehra, Y. P.**, "Monetary Policy and Long-Term Interest Rates", Bulletin of Federal Reserve Bank of Richmond; 1996.
- Misas, M. y Suescún, R.**, "Funciones de demanda de dinero y el comportamiento estacional del mercado monetario", ESPE, 23; 1993.
- Misas, M., Oliveros, H. y Uribe J. D.**, "Especificaciones y estabilidad de la demanda por dinero en Colombia", ESPE, 25; 1994.
- Ogaki, M.** "Unit Roots in Macroeconometrics: A Survey", Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 364; 1993.
- Osterwald-Lenum, M.** "A note with Fractiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics: Four Cases", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54; 1992. Citado por Banerjee, A. et all. 1994.

Park, J. Y. "Canonical Cointegrating Regressions", *Econometrica*, 60; 1992. Citado por Ogaki, M. (1993).

Phillips, P. C. and Hansen, B.E., "Statistical Inference in Instrumental Variables Regression with I(1) Processes", *Review of Economic Studies*; 1990.

Saikkonen, P. "Estimation and Testing of Cointegrated Systems by an Autoregressive Approximation", *Econometric Theory*, 8;1991. Citado por Ogaki, M. 1993.

Stock, J. H. and Watson, M. W. "A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher order Integrated Systems". *Econometrica*, 61, No. 4; July 1993.

Vásquez, D. M., "La Tasa de Interés en Colombia: algunos aspectos relacionados con su evolución de corto y largo plazo", Mimeo Charlas de Economía, Banco de la República; 1996.