

# **MODELOS DE DURACION:**

## **Una aplicación en el caso de la inflación y la tasa de interés.**

**HUGO OLIVEROS C.\***

July 27, 1998

### **Abstract**

En este documento se derivan algunas regularidades empíricas del comportamiento de la inflación anual y de las tasas de interés de los CDT a 90 días para Colombia, a partir de modelos probabilísticos asociados con las duraciones de las fases de los "ciclos" de dichas variables.

En el caso de la inflación se encuentra que sus fases son de dependencia positiva, [es decir, si se incrementa la permanencia (la duración) en una

---

\* Se agradecen los comentarios de Enrique Lopez, Luis Fernando Melo y Martha Misas a versiones preliminares de este documento, así como las sugerencias hechas por los asistentes al Seminario Semanal de la SGEE. Como es usual en estos casos, los errores, omisiones y opiniones presentadas aquí son responsabilidad del autor y no comprometen al Banco de la República.

fase, también se incrementa la probabilidad de abandonarla] y que éstas están asociadas con la misma distribución probabilística, distribución Weibull. Adicionalmente, desde el segundo semestre de 1991, su fase de ascenso tiene asociada una función de riesgo que cambia significativamente. En este caso la probabilidad de que se presente un punto de quiebre en la fase de ascenso, una vez se ha entrado en dicha fase, se incrementa considerablemente respecto de la que se venía observado.

Con relación a las tasas de interés de los CDT a 90 días, se observa que sus funciones de riesgo siguen distribuciones probabilísticas distintas, en consecuencia, las leyes que gobiernan las fases de ascenso (dependencia positiva) y descenso (dependencia neutra) de dicha variable son diferentes. Este hecho puede ser catalogado como una evidencia a favor de la caracterización del ciclo de la tasa de interés como asimétrico. Un ejercicio adicional que parte de una especificación autorregresiva y que considera como factible la existencia de asimetría, TGARCH, permite concluir, desde otra alternativa metodológica, que la evidencia de asimetría derivada a partir de los modelos de duración tiene soporte.

## 1. Introducción

### 1.1. A manera de motivación

La primera pregunta que regularmente se hace alguien cuando inicia un trabajo de esta naturaleza es cual será el beneficio que obtendrá al comprobar o "descubrir" los determinantes o "las leyes" (es decir, las variables explicativas, los modelos, o los parámetros que determinan las distribuciones implícitas) que producen, o reproducen, ciertos patrones de comportamiento de algunas variables económicas, o los indicadores que se derivan de éstas. En ese contexto este trabajo sobre la caracterización de las duraciones de las fases de la inflación y de las tasas de interés en Colombia pretende (i) comprobar si es posible ajustar distribuciones probabilísticas, *similares o distintas*, a las fases de dichas variables, y a partir de ello (ii) derivar indicadores y caracterizaciones estadísticas de la naturaleza de éstas

Dos posibles beneficios podrían argumentarse. El primero, asociado con la necesidad, en algunos casos imperiosa, de poder anticipar con algún grado de certidumbre, y preferiblemente a partir de un conjunto de información limitado, la cercanía de un punto de quiebre (turning point) cuando se manifiesta claramente una tendencia en el comportamiento de las variables. El segundo, relacionado con la posibilidad de proveer algún tipo de hecho estadístico que permita ayu-

dar a catalogar los efectos que tiene la evolución de unas variables sobre otras, como simétricos o asimétricos en persistencia o en duración, utilizando para ello la información proveniente de las distribuciones probabilísticas ajustadas a las duraciones de las fases de las variables<sup>1</sup>.

Respecto del primer beneficio mencionado es importante anotar lo siguiente. Existe una estrecha relación entre este problema y el de la caracterización de las variables como caminatas aleatorias. Si bien cada vez es mayor y compleja la batería de pruebas existentes que permiten evaluar si las series pueden ser caracterizadas como estacionarias,  $I(0)$ , o no-estacionarias,  $I(1)$ , un hecho que resulta importante destacar es el siguiente. En la medida en que dichas series sean consideradas como no-estacionarias  $I(1)$ , y en particular, como caminatas aleatorias, la probabilidad de que la variable presente un nivel inferior (un descenso), o superior (un ascenso), respecto del nivel observado en el momento  $t$ , dado que en los últimos  $k$  periodos la serie ha estado, por ejemplo, en una fase de ascenso, **es la misma** que se obtendría si la serie hubiese estado en la fase opuesta. Así, resulta

---

<sup>1</sup>En Peel y Speight (1996), en el cual se encuentra una revisión reciente sobre el tema de las asimetrías en el ciclo de los negocios de la economía americana, se afirma, por ejemplo, que un hecho regularmente aceptado es que las series de tiempo económicas son asimétricas respecto del ciclo de los negocios y que dichas asimetrías son susceptibles de parametrizar a partir de modelos no-lineales. De otro lado, Beaudry y Koop (1993) insisten en que el uso de modelos que parten de filtros simétricos (por ejemplo: representaciones ARMA del cambio del GNP generan impulso respuesta simétricos) sesgó los resultados y el análisis de persistencia de muchos trabajos sobre el producto. Peel y Speight (1996) señalan también la importancia de los modelos "Switching" de Hamilton para probar y describir cambios de régimen a partir de un filtro iterativo *no-lineal* que permite hacer inferencia sobre la verosimilitud de los estados de la naturaleza del proceso basada en que la misma estructura dinámica gobierna el proceso.

razonable investigar<sup>2</sup> si el número de periodos de tiempo involucrados en una fase de ascenso y descenso de una variable puede estar asociado a la existencia de un ciclo, puesto que esto implicaría que *existe algún grado de predictibilidad* tanto de la longitud de la fase (la duración de la racha) como del momento a partir del cual se presente un corte de ésta, es decir, el momento a partir del cual se cambia de fase y que en la literatura sobre este tema se conoce como punto de quiebre<sup>3</sup>.

El argumento que está detrás del segundo beneficio es el siguiente. En la literatura de ciclo de los negocios, Kydland y Prescott (1982,1990), (KP), el tratamiento más común para derivar evidencia a favor de la caracterización, por ejemplo, de los precios, como procíclicos o contracíclicos, es el encontrar significativa la correlación contemporánea (medida simétrica) entre la componente cíclica de los precios y la componente cíclica del producto real, definidas a partir de la diferencia entre la variable y su componente de tendencia, derivada esta última del paso por el filtro de Hodrick-Prescott (HP) de la respectiva variable. Este hecho implica que el proceso generador de los datos (DGP) de la componente cíclica, la cual es  $I(0)$ , mantenga características: (i) de unicidad en la distribu-

---

<sup>2</sup>Los trabajos de Cochran y Defina (1995), Sichel (1991) y Kiefer (1988) se mueven en esta dirección. Sin embargo, alguien podría considerar que los movimientos de las series, o sus cambios absolutos o relativos, son equivalentes a el resultado que obtendría el participante en un juego de azar, y en consecuencia, sus rachas pueden ser interpretadas tan solo como una de las tantas posibles combinaciones que se derivan de dicho juego.

<sup>3</sup>Así, la existencia de un ciclo y la posibilidad de "*predecir*" el momento en el cual se presente un punto de quiebre con algún grado de certidumbre, hace parte, por ejemplo, de la evidencia a favor de la no-caracterización de alguna serie como una caminata aleatoria.

ción probabilística que lo genera y (ii) de homocedasticidad. Así, por ejemplo, si las distribuciones probabilísticas asociadas a las fases de ascenso y descenso del ciclo de los precios son distintas, resulta razonable suponer que existen indicios de efectos asimétricos del producto a los precios<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Como se mencionó en el primer beneficio, el caso más extremo es el de la caracterización de la variable como una caminata aleatoria, lo cual implicaría que una descomposición de la serie  $x_t$  como  $x_t = c_t^x + \tau_t^x$ , Watson (1986), (la cual supone que la componente estacional no existe, o que ha sido eliminada), existe y tiene las siguientes características: (a) la componente cíclica,  $c_t^x$ , sigue un proceso estacionario de la forma:  $c_t^x = \frac{\Theta_x(B)}{\Phi_x(B)} \varepsilon_t^x$ , es decir, sigue un ARMA(p,q) donde la varianza del error tiende a cero o es significativamente menor comparada con la varianza del error de la componente de tendencia y (b) la componente de tendencia,  $\tau_t^x$ , sigue una caminata aleatoria con (o sin  $\equiv \delta^x = 0$ ) parámetro de deriva:  $\tau_t^x = \delta^x + \tau_{t-1}^x + \xi_t^x$ .

Notese:

(i) En el caso de KP se construye una medida de tendencia,  $\tau_t^x$ , usando HP y se deriva a la componente cíclica, la cual es  $I(0)$ , a partir de la diferencia,  $c_t^x = (x_t - \tau_t^x)$ , en consecuencia, para cualquier otra variable,  $y$ , es posible hacer lo mismo. Usando Watson (1986) es equivalente a construir  $c_t^y = \frac{\Theta_y(B)}{\Phi_y(B)} \varepsilon_t^y$ . En ambos casos, la única restricción que se impone a  $c_t^w$  para  $w = x, y$ , es su condición de estacionaridad, la cual se deriva claramente de las propiedades estocásticas de  $\varepsilon_t^x$  y  $\varepsilon_t^y$  las cuales son ruido blanco.

(ii) La correlación entre  $c_t^y$  y  $c_t^x$  depende teóricamente de la correlación entre  $\varepsilon_t^y$  y  $\varepsilon_t^x$ , los cuales no son observados ni construidos, puesto que bajo KP basta con la diferencia entre la variable y su respectiva componente de tendencia. Sin embargo, esto implica la existencia de un ciclo de longitud fija, el cual implícitamente depende fundamentalmente de las propiedades estocásticas de  $\varepsilon_t^y$  y  $\varepsilon_t^x$  como de la forma  $\frac{\Theta_w(B)}{\Phi_w(B)}$  para  $w = x, y$ .

Como se mencionó inicialmente en este trabajo es posible encontrar variables cuyas duraciones de las fases de los ciclos tengan asociadas distribuciones probabilísticas distintas, *lo cual haría incompatible, por ejemplo, la caracterización de procíclica o contracíclica a esa variable*, pero que si abriría la puerta a modelos del tipo Threshold o Switching donde se reconoce explícitamente efectos asimétricos en la media, en la varianza, o en persistencia. En Peel y Speight (1996) se presenta evidencia a favor de lo anterior para varias series que podrían verse afectadas por el ciclo de los negocios de la economía americana. La discusión en este caso se presenta en términos de medidas de persistencia derivadas de la construcción de modelos TAR y SETAR. En el Anexo 1 se ilustra a partir de un ejemplo algunas de las ideas expuestas aquí.

## 1.2. El problema y sus datos

El reconocimiento de la existencia de un ciclo de longitud "fija"<sup>5</sup> ha generado un conjunto de interrogantes sobre la naturaleza de la relación que mantienen el número de periodos que restan para la finalización del ciclo y la longitud que éste tiene. Es decir, existe un interés en saber si la probabilidad de que la fase de un ciclo finalice se aumenta en la medida en que ella envejece. Además de lo anterior, algunos investigadores han encontrado plausible suponer que las duraciones de dichos ciclos, y en consecuencia sus fases, se ven afectadas por cambios que se presentan a través del tiempo y que se derivan de: (i) la introducción de decisiones de carácter administrativo, (ii) la aparición de eventos de carácter internacional o local y (iii) los cambios que se observan en los niveles de otras variables.

En este documento, de carácter exploratorio, se investiga la posibilidad de que las longitudes de las fases de los ciclos (definidos empíricamente) de algunas series colombianas puedan ser caracterizados como (i) de longitud fija y (ii) si la probabilidad de que la fase finalice instantáneamente dado que ha durado  $m$  períodos está, por ejemplo, asociada con: (a) algunas decisiones de política económica, (b) la evolución de algunos indicadores económicos y (c) la duración de la fase opuesta precedente.

---

<sup>5</sup>En la literatura sobre el tema se habla de ciclo de longitud fija cuando el modelo que describe el ciclo no es el de una caminata aleatoria.

Las series para las que se investiga este problema de duración en sus fases son: los crecimientos anuales del índice de precios al consumidor total nacional ( $\pi$ ) y la tasa de interés de los CDT a noventa días ( $\eta$ ). En el caso de  $\pi$  se usan series mensuales desde enero de 1955 hasta diciembre de 1997, mientras que para  $\eta$  se consideran series semanales desde mayo de 1981 hasta diciembre de 1997.

El mecanismo que se utiliza para la determinación del ciclo de la inflación se basa en algunos de los lineamientos sugeridos por Niemira y Klein (1994), Artis et al (1991) y Melo, L. (1997) en lo que respecta al ciclo de la inflación. En el caso de las tasas de interés de los CDT a noventa días se usa una aproximación de la magnitud del ciclo a partir de HP y se derivan las longitudes de las duraciones de las fases a partir de la comparación de cada observación respecto de su nivel de tendencia.

Las series utilizadas en este documento para derivar las longitudes de las duraciones de las fases son series desestacionalizadas, debido a la necesidad de eliminar al máximo distorsiones en la señal<sup>6</sup> que se utiliza para la construcción de las longitudes de las fases y que podrían estar asociadas con movimientos estacionales que pueden subsistir, o existir, en la serie mensual de inflación anual

---

<sup>6</sup>El concepto de señal que se usa en este documento está asociado no tanto con la magnitud, sino con el signo, que se deriva de comparar el nivel de la serie en el momento  $t$  con algunos indicadores de su tendencia, o con los cambios que se observan en el comportamiento de indicadores relacionados con su tendencia y que son utilizados para tomar decisiones sobre puntos de quiebre.

o en la serie semanal de tasa de interés efectiva anual de los CDT a 90 días<sup>7</sup>.

## 2. El modelo Probabilístico

### 2.1. Modelos Marginales de Duración

En esta sección se presentan algunos de los elementos básicos de la teoría de probabilidad usados en la solución de problemas de duración. Con tal propósito, se usan algunos de los resultados, comentarios y soluciones propuestas por Abraham y Farber (1987), Kiefer (1988), Lancaster (1990), Sichel (1991), Cochran y Defina (1995) y Mátyás y Sevestre (1996) para aproximarse al fenómeno de duración en datos económicos.

En primer lugar, es necesario iniciar señalando que el problema de las rachas (serie sucesiva de eventos que tienen la misma naturaleza) y la probabilidad de que en  $m$  períodos  $\pi$  o  $\eta$  cambien de la fase en la que se encuentran a otra, es similar en su naturaleza, aunque cualitativamente distinto en su significado, al de encontrar la probabilidad de que un jugador gane (pierda) en el  $m - \text{ésimo}$  juego, dado que ha ganado (perdido) en los juegos previos.

En segunda instancia, es conveniente indicar que en términos de la medición

---

<sup>7</sup>La desestacionalización de la inflación se hizo a través del procedimiento X-11. Para las tasas de interés se usa un ajuste por promedios móviles de orden 52 que permite construir los "tradicionales cocientes estacionales", y derivar tanto la componente estacional, como la respectiva serie desestacionalizada.

de la longitud de la fase (la duración) existen dos puntos a considerar:

(i) Una observación de  $\pi$  o  $\eta$  puede ser clasificada como perteneciente a una fase específica, si (a) cumple con las condiciones para pertenecer a dicha fase<sup>8</sup> y (b) si ella está en las vecindades de observaciones caracterizadas de la misma manera de tal forma que sea posible constituir una racha. En consecuencia, como existe algún grado de incertidumbre sobre la clasificación de las observaciones en la fase es necesario **truncar**<sup>9</sup> los datos de duración.

(ii) Es imposible saber con certeza si con la última observación disponible se finaliza una fase, así, la longitud de la fase que se estaría configurando "*no es cierta*", y por lo tanto, para la estimación de la probalidades es necesario considerar dicho evento, es decir, **censurar** dicho dato.

---

<sup>8</sup>En términos de los métodos de clasificación de las observaciones se usa uno similar al sugerido por Artis et al (1995) y Melo (1997), aunque existen algunas diferencias que se concentran fundamentalmente en lo siguiente:

(i) En lugar de usar la información de  $\pi_t$  se construyen medias móviles centradas (*c*) y no centradas (*nc*) hasta el periodo (*t*) de orden  $\tau_i$   $i = 1, 2$ ,  $\tau_1 < \tau_2$  denotadas como  $[\bar{\pi}(c)_t^{\tau_i}, \bar{\pi}(nc)_t^{\tau_i}]$  y se reconocen como representativas de  $\pi_t$ .

(ii) Se utilizan (a) sus primeras diferencias para generar una señal inicial y (b) los cruces entre dichas medidas para generar los puntos iniciales de quiebre.

(iii) Se examinan las señales conjuntamente (se suman las señales) y se decide si es necesario hacer truncamientos.

(iv) Algunas de las decisiones se toman a partir de cambios relativos fuertes.

Las longitudes de los promedios móviles usadas en este ejercicio para  $\pi$  son 5 y 11. Ejercicios con longitudes mayores, 7 y 13 por ejemplo, generan señales similares. Sin embargo, en la medida en que la longitud del promedio móvil se incremente considerablemente, (75% o más) el resultado cambia significativamente en lo que respecta a los puntos de iniciación y finalización de las fases.

Para  $\eta$  se construye una aproximación de la magnitud del ciclo usando HP y se derivan las señales usando como medida  $c_t^\eta = [\eta_t - \tau_t^\eta(HP), \lambda = 25000]$ . Los procedimientos adicionales para obtener la señal definitiva son similares a algunos de los descritos para  $\pi$ .

<sup>9</sup>Como lo señala Sichel (1991), el truncamiento aparece como una solución al problema que se deriva de una *no muy clara separación* entre la finalización de un fase y el inicio de otra.

Dados los anteriores argumentos, algunos autores encuentran mucho más simple solucionar el problema de duración en datos económicos utilizando probabilidades condicionales, en lugar de no-condicionales, y usar funciones de supervivencia y de riesgo, (*hazard functions*), para aproximarse a la caracterización de la variable aleatoria duración de la fase. En particular se parte de la siguiente función de: distribución,  $F$ , densidad,  $f$ , supervivencia,  $S$ , riesgo,  $\lambda$ , y riesgo integrado,  $\Lambda$ , cuya forma general es descrita a continuación:

$$F(t) = \Pr(T < t); f(t) = \frac{dF(t)}{dt}; S(t) = 1 - F(t); \lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}; \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du \quad (2.1)$$

En este caso  $\lambda(t)$  se puede interpretar como la probabilidad condicional de que una fase con duración igual a  $t$  finalice dado que dicha fase ha sobrevivido hasta el momento  $t$ , o como, una "tasa instantánea de muerte". Es posible utilizar algunas distribuciones conocidas para construir a  $\lambda(t)$ , sin embargo, como lo señala Kieffer (1988) es necesario usar funciones de riesgo que recojan adecuadamente a través de sus parámetros los posibles eventos que se desean caracterizar del fenómeno de duración bajo análisis<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup>Por ejemplo, si  $F$  es una normal, las distribuciones de riesgo que se derivan, además de ser complejas, no generan valores de  $\lambda(t)$  constantes, lo cual, en algunos casos, puede ser un resultado deseable, o que se requiere comprobar; es decir, que se espera o se necesita probar, si, por ejemplo, la probabilidad de que la fase finalice depende de su duración.

Al igual que Sichel (1991) y Cohran y Defina(1995), en este ejercicio se utiliza una distribución de Weibull en la medida en que ésta permite derivar funciones de riesgo, "hazard functions", constantes y no-constantes. Las funciones descritas en (2.1) toman entonces la siguiente forma:

$$F(t) = 1 - \exp(-t^\beta \lambda) , \text{ con } \lambda = \frac{1}{\alpha^\beta} ; 0 \leq t < \infty; \beta, \alpha, \lambda > 0 \quad (2.2)$$

$$f(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \exp(-\lambda t^\beta) ; S(t) = \exp(-\lambda t^\beta) ; \lambda(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} ; \Lambda(t) = \lambda t^\beta \quad (2.3)$$

En este caso, el parámetro  $\lambda$  está asociado con una característica de la duración que puede depender de algunos de los eventos de carácter exógenos mencionados en la sección (1.2) y en (3.2) para el caso de  $\pi$ ;  $\beta$  determina la forma de la función de distribución, densidad y riesgo. La definición de  $\lambda(t)$  presentada en (2.3) permite establecer, por ejemplo, si el parámetro  $\beta$  es distinto de 1 la función de riesgo no será constante. De esta forma, es posible distinguir entre tres tipos de dependencia, positiva, neutra (ninguna  $\beta = 1$ ) y negativa. Dos casos se presentan cuando estadísticamente la hipótesis  $\beta = 1$  es rechazada: (a) dependencia positiva si  $\beta > 1$ , e implica que la probabilidad de que se presente

un punto de quiebre **se incrementa** en la medida en que la duración de la fase **se aumenta** y (b) dependencia negativa si  $\beta < 1$  y significa que la probabilidad de que se presente un punto de quiebre **se disminuye** en la medida en que la duración de la fase **se aumenta**.

## 2.2. Estimación de los parámetros

En la medida en que es posible obtener estimativos de  $\lambda$  y  $\beta$  a partir de estimadores de máxima verosimilitud, los cuales dependen de los valores muestrales de las duraciones,  $t_i$ , derivados del examen de las observaciones de  $\pi$  o  $\eta$  y sus clasificaciones en alguna de las dos posibles fases consideradas: ascenso y descenso, es necesario introducir al problema de estimación de los parámetros presentados en (2.2) y (2.3) los elementos de truncamiento y censuramiento discutidos previamente.

Como se había señalado anteriormente, la clasificación de una observación de  $\pi$  o  $\eta$  dentro de una fase (ascendente o descendente) depende de la existencia de una duración mínima en dicha fase, por lo tanto, es necesario usar esta información en la construcción de la función de verosimilitud. El valor de truncamiento,  $t_o$ , asociado a cada una de las fases, está relacionado con la longitud mínima de duración aceptada por el investigador para configurar una fase. Varias posibles reglas pueden ser utilizadas para determinar el valor de  $t_o$ , y son recogidas al

considerar el siguiente esquema  $t_o = \{0, 1, \dots, \min(t_i) - 1\}$ <sup>11</sup>. El censuramiento se usa tan solo para la última medida disponible de duración de la fase no concluida a la que está asociada la última observación disponible de  $\pi$  o  $\eta$ , y se nota como  $t_n$ .

Como se mencionó previamente, es posible justificar el uso de una distribución Weibull considerando algunos de los elementos presentados en la sección anterior<sup>12</sup>, sin embargo, es necesario considerar los argumentos de censuramiento y de truncamiento discutidos para obtener una estimación eficiente de los parámetros. Nótese que de (2.2) y (2.3) se tiene que :

$$f(t) = \lambda(t) * S(t) ; \ln(S_t) = -\Lambda(t) \quad (2.4)$$

y que en la medida en que se debe *truncar los datos de duración* es necesario alterar la función de supervivencia,  $S(t)$ .

De otro lado se tiene que el logaritmo de la función de verosimilitud debe recoger también el efecto de *censurar los datos*. Kiefer (1988) y Abraham y Farber (1987) sugieren el uso del siguiente esquema:

---

<sup>11</sup>Con relación a este punto, Siechel (1991) usando la definición duración de ciclo de los negocios en USA hecha por el NBER, para el periodo 1854-1982 a partir de series mensuales, encuentra eventos de expansión y contracción del ciclo de los negocios de la economía americana cuya longitud mínima es, por ejemplo, 10 y 6 meses, respectivamente.

<sup>12</sup>Véase por ejemplo el tratamiento de este tipo de problemas en Greene (1993).

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n; \lambda, \beta) = \sum_{i=1}^n \{di * \ln[f(t)]\} + \sum_{i=1}^n \{(1 - di) \ln[S(t)]\} \quad (2.5)$$

donde  $di$  puede tomar solo dos valores: (i)  $di = 1$ , significa que la  $i$  - *ésima* duración no está censurada y (ii)  $di = 0$ , significa que dicha observación está censurada. Dados los anteriores argumentos y recordando que se censura únicamente la última medida de duración se tiene que el logaritmo de la función de verosimilitud puede ser reescrito como<sup>13</sup> :

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n; \lambda, \beta) = \sum_{i=1}^{n-1} [\ln(\lambda\beta) + (\beta - 1) * \ln(t_i) - \lambda(t_i^\beta - t_o^\beta)] - \lambda(t_n^\beta - t_o^\beta) \quad (2.6)$$

### 2.3. Modelos Condicionales de Duración

Como se mencionó en las secciones anteriores y como lo manifiesta, Lancaster (1990), "los datos económicos son raramente homogéneos...por lo tanto es poco frecuente encontrar observaciones que puedan ser vistas como repetidas extracciones de una misma distribución", en consecuencia resulta verosímil suponer que

---

<sup>13</sup>La estimación de los parámetros de interés en este caso puede hacerse utilizando métodos numéricos no-lineales convencionales, véase Kiefer (1988). En este ejercicio se utiliza para solucionar el problema de estimación la subrutina NLPNRA de IML/SAS.

Con el propósito de obtener una aproximación de los errores standard asintóticos de los parámetros se usa la matriz hessiana y se derivan los errores partir del cómputo de la hessiana en los valores "óptimos" encontrados para los parámetros, es decir, usando los valores estimados de éstos, los cuales maximizan a  $L$  en (2.6).

el parámetro  $\lambda$ <sup>14</sup> se vea afectado por eventos de carácter exógeno que de alguna manera cambien significativamente las longitudes de las fases de  $\pi$  o  $\eta$ . El interrogante que regularmente se plantea en este contexto, está asociado con la necesidad de establecer una diferenciación en el tiempo del patrón de duración que siguen las fases, a partir del reconocimiento de eventos que podrían estar vinculados con dicho cambio<sup>15</sup>.

En este sentido, es posible suponer que dichos eventos deben afectar de una manera directa el parámetro de localización  $\lambda$  y que una posible estrategia para resolver este interrogante puede estar asociada con: (a) la detección de cambios en la media de la duración de las fases; (b) la comprobación de la existencia de una tendencia en la duración de las fases; (c) el encuentro de una relación inversa o directa entre de la longitud de la fase y la longitud de la fase opuesta precedente y (d) el descubrimiento de una marcada dependencia de las duraciones respecto del comportamiento de otras variables<sup>16</sup>.

---

<sup>14</sup>En este sentido es importante reconocer que a pesar de que en las funciones presentadas en (2.2) y (2.3) existe otro parámetro, la derivación de dichas distribuciones se hace a partir de modificaciones de una distribución de riesgo de un solo parámetro, (léase  $\lambda$ ), por lo tanto la endogenización de ese parámetro resulta razonable. Una discusión detallada al respecto se encuentra en el capítulo 3 de Lancaster (1990).

<sup>15</sup>Por ejemplo, es posible que se plantee la hipótesis, de que se debería observar una disminución importante en la duración de las fases de ascenso de  $\pi$ , así como, un incremento de sus duraciones de descenso desde que se comenzaron a anunciar las metas de inflación o se decretó la autonomía del Banco Central. De igual forma, en el caso de  $\eta$  se podría señalar que dependiendo de la laxitud o intensidad de la política monetaria se podría observar un incremento pronunciado y permanente en sus fases de ascenso o de descenso.

<sup>16</sup>Con relación a éste punto, Lancaster (1990) señala la necesidad de garantizar un grado de *exogenidad* de las covariables (*covariates*) respecto del fenómeno de duración que se investiga.

Con el propósito de darle solución al problema de la estimación de los parámetros, una alternativa que surge es establecer una relación funcional entre  $\lambda$  y sus determinantes ( $Z_i$ ). La función  $g$  más utilizada es la exponencial<sup>17</sup> y permite descomponer  $\lambda$  de la siguiente forma:

$$\lambda = g(\lambda) = \lambda_1 * \exp(\lambda_2 * Z_i) \quad (2.7)$$

de donde se tiene que  $\lambda = \lambda_1$  si  $\lambda_2 = 0$ , en consecuencia la discusión se centra en probar la hipótesis  $\lambda_2 = 0$ . En este caso  $Z_i$  representa: a una variable dummy caso (a); a una variable de tendencia caso (b); a la duración de la fase opuesta previa caso (c) y a una variable distinta a las ya mencionadas en el caso (d). Para efectos de la estimación solo se requiere la introducción de (2.7) en (2.6) y de nuevo utilizar métodos numéricos para encontrar tanto los valores de los parámetros como los respectivos estimativos de los errores estandar.

#### 2.4. Pruebas de Bondad de Ajuste

Tanto en el caso de los modelos marginales de duración, como de los condicionales, es necesario estimar los valores de los parámetros partiendo del supuesto de que

---

En particular la discusión se centra en la necesidad de soportar la hipótesis de que la magnitud, o intensidad de la señal, de la covariable no dependa de la longitud de la fase o del ciclo.

<sup>17</sup>Mátyás y Sevestre (1996) en el capítulo 19, presentan los argumentos sobre los cuales las transformaciones de la función de riesgo, a partir de una función  $g$ , deben cumplir con el hecho de que  $g$  sea una función no-negativa y preferiblemente estrictamente monótona creciente.

la distribución especificada es la adecuada (en este caso, la distribución usada es la Weibull) de tal forma que ella permita una buena caracterización del problema de duración. En consecuencia, es necesario confirmar si existe coherencia entre los datos de longitud de las fases (duraciones observadas) y los que se podrían derivar de la distribución hipotetizada.

Varias alternativas para comprobar dicha coherencia pueden ser utilizadas y van desde: pruebas paramétricas y no-paramétricas, hasta la confrontación a través de métodos gráficos de algunas medidas.

Al igual que en muchos de los trabajos de econometría tradicional, la "confiabilidad" de un modelo se verifica a partir de: (i) la comparación de algunas estadísticas con ciertos valores críticos, (ii) la comprobación de propiedades estadísticas de sus residuos y (iii) la evaluación de su capacidad para simular adecuadamente las observaciones pasadas partir de un conjunto inicial de información.

En este sentido el test, que se presenta a continuación, propuesto por Jaggia (1991) y que se construye a partir de unos residuos generalizados y de una función criterio auxiliar definida como  $m[t, \theta = (\lambda, \beta)] = m$ , cuyo valor esperado es igual cero, se inscribe dentro de la segunda alternativa señalada. La prueba, que es conocida como un test de restricción de momentos condicionales, (CMT), está

basada en la magnitud de la estadística  $Q$  y  $\tilde{\tau}$ <sup>18</sup> que se presentan en (2.8)

$$Q = N * \tilde{\tau} [V_{mm} - V_{md} H^{-1} V_{dm}]^{-1} \tilde{\tau} \quad \text{con} \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{N} \sum m[t, \tilde{\theta}] \quad (2.8)$$

donde  $V_{mm}$ ,  $V_{md}$  y  $H$  corresponden a:

$$V_{mm} = E[mm'], \quad V_{md} = E[md'] \quad \text{y} \quad H = -E\left[\frac{\partial^2 l_i}{\partial \theta \partial \theta'}\right] = E[dd'] \quad (2.9)$$

en este caso y si los valores esperados no pueden ser derivados analíticamente es posible utilizar los momentos muestrales tal que (2.8) tome la siguiente forma:

$$V_{mm} = \frac{1}{N} \sum \tilde{m}_i \tilde{m}'_i, \quad V_{md} = \frac{1}{N} \sum \tilde{m}_i \tilde{d}'_i, \quad H = \frac{1}{N} \sum \tilde{d}_i \tilde{d}'_i \quad (2.10)$$

y en consecuencia la estadística  $Q$  puede ser representada como:

$$Q = I * M [M' * M - M' * D * (D' * D)^{-1} * D' * M]^{-1} * M' * I \sim \chi^2(q) \quad (2.11)$$

donde  $I$  :  $(N \times 1)$  vector de unos ;  $M$  :  $(N \times q)$  siendo  $q$  = número de restricciones

---

<sup>18</sup>Donde  $\tilde{\theta}$  significa que el criterio auxiliar es evaluado a partir de las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros

de momentos usadas;  $D : (N \times k)$  siendo  $k =$  número de parámetros involucrados en la estimación. El censuramiento tiene un efecto en la construcción del test en la medida en que la matriz  $D$ , que contiene las derivadas del logaritmo de la función de verosimilitud, tiene involucrado dicho efecto.

### **3. Resultados**

En esta sección se presentan, desde un punto de vista estadístico, algunas regularidades empíricas encontradas acerca de las duraciones de las fases de ascenso y descenso de series mensuales y semanales de la inflación anual colombiana  $\pi$  y de la tasa de interés de los CDT a noventa días  $\eta$ , respectivamente. Los resultados se presentan a partir de las dos grandes subdivisiones mencionadas en la sección anterior.

#### **3.1. Modelos Marginales - Inflación**

En el cuadro 1 se presenta la caracterización de los ciclos de ascenso y descenso de la serie de  $\pi$  usadas para desarrollar este ejercicio.

Para  $\pi$  se observa fundamentalmente dos eventos: (i) una marcada tendencia en las fases a partir de 1991: las de descenso más prolongadas que las de ascenso, y (ii) el promedio de duración en la fase de descenso (18.0 meses) no es mayor

Cuadro 1  
 Descripción del Ciclo de Inflación Anual  
 (Ene-1956:Dic-1997)

Fase de Ascenso		No. de Meses en fase de:	
Desde	Hasta	Descenso	Ascenso
Ene-56	Nov-57	-	23
Ago-60	Jun-61	32	11
Jul-62	Dic-63	12	18
Jul-65	Jun-66	18	12
Jun-69	Dic-69	35	7
Nov-70	Dic-71	10	14
Sep-72	Mar-74	8	19
Ago-74	Dic-74	4	5
May-76	Jul-77	16	15
Sep-78	Nov-79	13	15
Feb-81	Ago-81	14	7
Jul-84	Jul-85	34	13
Sep-86	Jul-88	13	23
Ago-89	Feb-91	12	19
Sep-93	Abr-94	30	8
Jun-96	Dic-96	25	7
-	-	12	-
Promedio		18.0	13.5
Wilcoxon test de medias : P-value=0.1585			

(significancia del 0.1) que el de la fase de ascenso (13.5 meses)<sup>19</sup>.

De otro lado, el gráfico de la inflación y la descripción de su ciclo, presentado en la figura 3.1<sup>20</sup>, muestra claramente una mayor variabilidad en el período com-

<sup>19</sup>Los p-values que se presentan en el Cuadro 1 de la prueba no-paramétrica de *Wilcoxon* se refieren aquellos que se obtienen bajo una hipótesis alterna en la cual la media de la fase de descenso,  $\mu_D$ , es mayor que la media de la fase de ascenso,  $\mu_A$ . La prueba es equivalente a un prueba paramétrica compuesta bajo distribución conocida.

<sup>20</sup>Las líneas continuas representan a las fases: la ascendente corresponde al valor de uno, en tanto que la descendente, esta asociada con el valor cero.

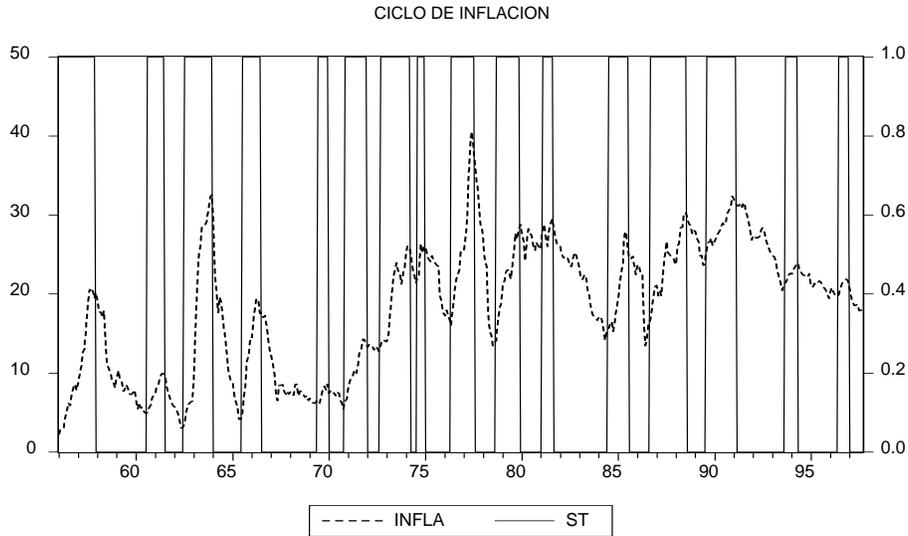


Figure 3.1:

prendido entre los años 1956-1980. Se observa también una marcada tendencia a la baja desde 1992 con una ligera estabilización en su variabilidad durante los últimos años.

En el Cuadro 2 se presentan los resultados de las primeras estimaciones por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo más simple de duración, descrito en la sección 2, para la serie de inflación anual ( $\pi$ ). Los resultados de la estimación de los parámetros en el caso de  $\pi$  permiten concluir lo siguiente:

- (i) El parámetro  $\beta$  es mayor que 1 tanto en la fase de descenso como en la

Cuadro 2  
Estimación de Parámetros de la Función de Riesgo  
Variable: Inflación Anual

Fase:	Descenso		Ascenso	
$t_0$	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
0	0.0019	2.047 (0.410)	0.0007	2.644 (0.529)
1	0.0021	2.030 (0.419)	0.0008	2.634 (0.535)
2	0.0024	1.984 (0.434)	0.0009	2.594 (0.551)
3	0.0031	1.912 (0.453)	0.0011	2.511 (0.575)
4	-	- -	0.0017	2.369 (0.609)
Entre paréntesis se presentan los errores estándar				

de ascenso. Los p-values para la prueba a una cola<sup>21</sup> no superan el 0.03 y por lo tanto existe una primera evidencia de que el ciclo de la inflación en Colombia para el periodo 1956-1997 tiene la característica de ser de dependencia positiva, es decir, a mayor longitud de la fase específica, mayor es la probabilidad de que se presente un punto de quiebre.

(ii) La duración mediana<sup>22</sup> en las fases de ascenso es superior a la de descenso y se sitúa, para  $t_0 = \min[t_i] - 1$ , en 16.8 y 12.6 meses, respectivamente.

(iii) Las funciones de riesgo (hazard) y de supervivencia mantienen el patrón ya descrito por la duración mediana. Las funciones de riesgo son similares en los 3 primeros meses para ambas fases y a partir de este momento las "tasas de riesgo

---

<sup>21</sup>La prueba se construye como:  $t_c = \frac{\hat{\beta}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$  y se compara con la cuantila  $(1-\alpha)$  de la distribución "t" con  $(n-1)$  grados de libertad.

<sup>22</sup>Derivada a partir del despeje de  $t$  en la función de supervivencia descrita en (2.3), usando como valores los parámetros estimados y  $S(t) = \frac{1}{2}$ .

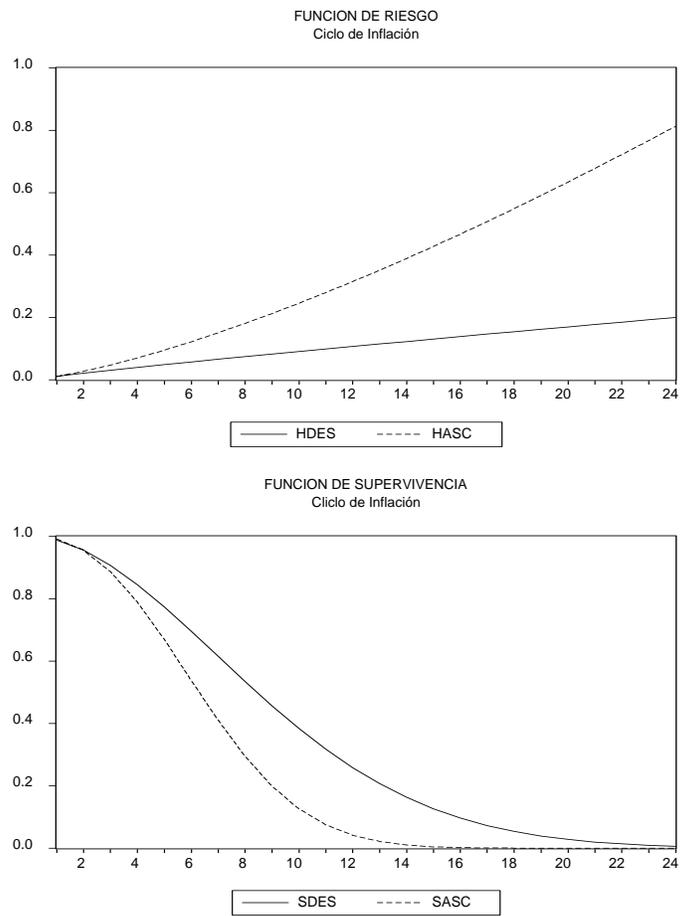


Figure 3.2:

instantáneo” [asociadas con el hecho de abandonar dicho estado en ese preciso momento y equivalentes a la probabilidad de morir en el momento  $t + \Delta t$  con  $\Delta t \rightarrow 0$ , dado que se estaba vivo en el momento  $t$ ] comienzan a separarse la una de la otra, siendo, ”afortunadamente”, cada vez mayor la asociada con la fase de ascenso, como se observa en la figura 3.2<sup>23</sup>. Un comportamiento inverso al descrito se evidencia en la función de supervivencia.

(iv) Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste bajo momentos condicionales no son satisfactorios para la fase de ascenso, sus p-values *se sitúan siempre* por debajo de 0.005. Una situación distinta se presenta en el caso de la fase de descenso en la cual el uso de la distribución Weibull tan solo se rechaza en dos de los cuatro casos considerados en el truncamiento.

### 3.2. Modelos Condicionales - Inflación

Con el propósito de investigar si es posible construir un modelo condicional de las duraciones de la inflación ( $\pi$ ), se parte de la especificación del parámetro  $\lambda$  presentada en (2.7),  $g(\lambda) = \lambda_1 \exp(\lambda_2 * Z_i)$ . Si existe el modelo condicional se espera que  $\lambda_2$  sea distinto de cero. Los resultados de la estimación de los parámetros de los posibles modelos condicionales son reportados en el Cuadro 3 y se presentan para algunos de los valores de truncamiento. Adicionalmente, se señalan

---

<sup>23</sup>Por ejemplo, seis meses despues es 1.5 veces más grande la hasc (hazard de descenso) respecto de la hdes (hazard de ascenso). En el gráfico, cada marca sobre la abscisa corresponde a 2 meses.

Cuadro 3  
 Estimación de Parámetros de la Función de Riesgo  
 Variable: Inflación Anual

Caso	$t_0$	Fase	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\beta$
CB	3	D	0.0036	-0.247 (0.518)	1.901 (0.450)
CB	4	A	0.0017	0.058 (0.504)	2.367 (0.609)
BC	3	D	0.0035	-0.784 (0.760)	1.918 (0.445)
BC	4	A	0.0003	2.399 (0.944)	2.945 (0.705)
T	3	D	0.0034	-0.009 (0.051)	1.905 (0.454)
T	4	A	0.0008	0.009 (0.053)	2.601 (0.649)
DFOP	3	D	0.0028	0.007 (0.043)	1.908 (0.453)
DFOP	4	A	0.0020	-0.025 (0.025)	2.519 (0.703)
GAPM	3	D	0.0031	-0.380 (6.294)	1.914 (0.455)
GAPM	4	A	0.0017	4.677 (7.742)	2.388 (0.605)

Entre paréntesis se presentan los errores estándar

las diferentes alternativas de caracterización de las variables "explicativas" de las longitudes de las fases para los cuatro casos descritos en la sección 2.3.

El caso (a), caracterizado como de cambio en la media, usa el siguiente argumento: una posible fuente de variabilidad en el comportamiento del indicador de sus cambios y por ende, de las duraciones, puede ser resultado de una decisión administrativa y/o un evento de carácter local. La decisión administrativa que se considera está asociada con el cambio de base del indicador ocurrido en 1978, (CB), dado que dicho cambio fue el más drástico que experimento el indicador de precios durante el periodo de referencia. El evento local que se examina aquí corresponde a la decisión de política económica de introducir las Bandas Cam-

biarias (BC)<sup>24</sup>. Para los casos (b) y (c) se trabaja con lo señalado en la sección 2, tendencia ,(T), y duración de la fase opuesta precedente, (DFOP), respectivamente. En el caso (d) se consideró como una medida de las sorpresas monetarias a la componente de ciclo de la Base Monetaria, (GAPM), en este caso se usó a HP para derivar la componente de tendencia<sup>25</sup>.

De los casos presentados en el Cuadro 3 únicamente el asociado con un cambio de régimen, (BC) , provee información distinta a la ya conocida en el caso marginal. Al parecer la introducción de las bandas cambiarias, o en su defecto, la consideración de eventos acaecidos recientemente en la economía colombiana, como eventos de cambio de régimen señalan una modificación en el comportamiento de la función de riesgo de la fase de ascenso de las duraciones de  $\pi$ . En este sentido, es conveniente señalar que la función de riesgo se mueve de (0.069) en el modelo marginal a (0.520) en el modelo condicional para el caso en el cual la duración observada se sitúa en 8 meses y la dummy BC es igual a 1. De esta forma, al utilizar la variable dummy que refleja dicho cambio, es decir, una vari-

---

<sup>24</sup>Tan solo uno de los múltiples eventos que se sucedieron durante este período es explorado en esta versión. A partir de junio de 1991, se introducen los certificados de cambio con descuento generando un mecanismo similar al de bandas cambiarias. Desafortunadamente, este evento, por ejemplo, coincide también para las duraciones involucradas en el Cuadro 1 con la puesta en marcha de la decisión constitucional de tener un Banco Central Independiente, o con el inicio de la apertura económica, entre otros.

<sup>25</sup>Con el propósito de asociar alguna medida a las duraciones dentro de las respectivas fases se uso el promedio del (GAPM) observado durante la duraciones específicas de  $c/u$  de las fases identificadas para  $\pi$ . La información de base es de carácter trimestral y sus fuentes son: Principales indicadores de Colombia 1923-1992 y los informes semanales de JD.

able que toma el valor de uno a partir del segundo semestre de 1991 y cero en otro caso, se encuentra que la probabilidad de que se presente un punto de quiebre en las fase de ascenso de la inflación se incrementa considerablemente.

### **3.3. Modelos Marginales - Tasa de interes de los CDT 90 días**

Una descripción del ciclo que se deriva para la serie semanal de tasa de interés de los CDT a noventa días,  $\eta$  es presentada en el Cuadro 4. Se observan dos hechos fundamentalmente: (i) las rachas semanales de descenso y ascenso mantienen duraciones promedio a lo largo de la muestra que no se diferencian en su comportamiento, 23.9 semanas (6 meses) y 28.9 semanas (7 meses), respectivamente; (ii) las duraciones máximas de los ascensos superan a las de descenso, y (iii) el descenso más prolongado se observa en el período Ago96-Ago97, vease figura 3.3 y Cuadro 4 para más detalles.

En el Cuadro 5 se presentan los resultados de la estimación del modelo marginal para  $\eta$  permitiendo encontrar los siguientes hechos para las fases de ascenso y de descenso de la tasas de interés de CDT a 90 días.

(i) La fase de ascenso puede caracterizarse como de dependencia positiva, es decir, es posible soportar el argumento que cuando ( $\eta \uparrow$ ) la probabilidad de que se presente un punto de quiebre se incrementa. En este caso se rechaza la hipótesis nula ( $\beta = 1$ ) en favor de ( $\beta > 1$ ) con niveles máximos de significancia cercanos al

Cuadro 4  
 Descripción del Ciclo de TCDT a 90 días  
 (Jun-1981:Dic-1997)

Fase de Ascenso		No. de Semanas en fase de:	
Desde	Hasta	Descenso	Ascenso
12-jun-81	13-nov-81	-	23
22-ene-82	12-mar-82	9	8
07-may-82	03-dic-82	7	31
04-feb-83	25-mar-83	8	8
13-ene-84	17-ago-84	41	32
25-ene-85	15-mar-85	22	8
24-may-85	31-ene-86	9	37
18-jul-86	20-feb-87	23	32
13-nov-87	26-ago-88	37	42
03-feb-89	18-ago-89	22	29
16-feb-90	11-ene-91	25	48
15-mar-91	26-abr-91	8	7
26-jul-91	13-dic-91	12	21
21-ago-92	30-jul-93	35	50
17-jun-94	23-jun-95	45	54
05-ene-96	16-ago-96	27	33
22-ago-97	-	52	20
Promedio		23.9	28.9
Wilcoxon test de medias : P-value=0.258			

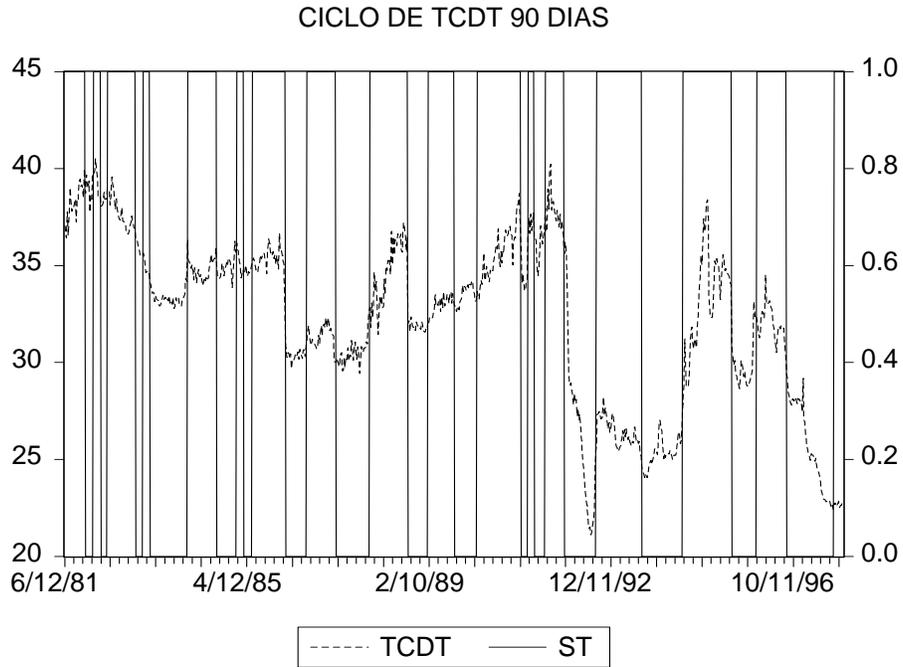


Figure 3.3:

0.1.

(ii) Otro hecho que es importante destacar es el relacionado con la estimación del parámetro de dependencia de la fase de descenso, del cual se desprende que existe una clara evidencia para soportar la hipótesis de que la función de riesgo es constante en esa fase .

(iii) Como es de esperarse, los resultados del test de momentos condicionales señalan que  $Q^{DES} > Q^{ASC}$ , sinembargo, ambos sugieren que la distribución

Cuadro 5  
 Estimación de Parámetros de la Función de Riesgo  
 Variable: Tasa de Interés CDT-90 Días

Fase:	Descenso		Ascenso	
$t_0$	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
4	0.0062	1.572 (0.417)	0.0012	1.923 (0.464)
5	0.0094	1.465 (0.432)	0.0016	1.832 (0.480)
6	0.0160	1.329 (0.460)	0.0021	1.778 (0.498)
7	0.0324	1.155 (0.490)	-	- -
Entre paréntesis se presentan los errores estándar				

Weibull no es adecuada. En el caso de la fase de descenso (DES), este hecho resulta razonable en la medida en que existe evidencia a favor de la hipótesis de  $\beta = 1$ , en consecuencia, el uso de una distribución distinta como alternativa sería adecuado<sup>26</sup>

(iv) Los resultados de la estimación señalan que una distribución cuya función de riesgo sea constante podría aproximar mucho más adecuadamente a las observaciones de las duraciones de  $\eta$  en su fase de descenso. Un ejercicio considerando una distribución exponencial fue desarrollado, (Cuadro 6) encontrándose que para cada uno de los distintos valores de truncamiento, la estimación del parámetro  $\lambda$ <sup>27</sup> es significativa y se sitúa por encima de 0.050. Es importante anotar que, si

---

<sup>26</sup>Tanto para el caso de  $\pi$  como para el de  $\eta$  es necesario anotar que el CMT presenta problemas con muestras pequeñas. Un ejercicio pequeño de simulación con 50 muestras de tamaño 500 y 20 (las primeras 20 observaciones de cada una de las muestras de tamaño 500) respectivamente, muestra el siguiente comportamiento de la estadística  $Q$  bajo 2 restricciones:

$Q_{20} < \chi_{\alpha=0.01}^2(2)$  en el 62% de los casos.

$Q_{500} < \chi_{\alpha=0.01}^2(2)$  en el 96% de los casos.

<sup>27</sup>La distribución exponencial es un caso particular de la Weibull cuando el parámetro de

Cuadro 6  
 Estimación de Parámetros de la Función de Riesgo Exponencial  
 Variable: Tasa de Interes CDT-90 Días

Fase:	Descenso
$t_0$	$\lambda$
4	0.0502 (0.013)
5	0.0528 (0.013)
6	0.0557 (0.014)
7	0.0590 (0.015)
Entre paréntesis se presentan los errores estándar	

bien la función de riesgo permanece constante la función de supervivencia  $S(t)$  descrita en (2.3) no permanece constante,  $S(t) = \exp(-\lambda t)$ .

### 3.3.1. Acerca de las asimetrías en la distribución de las fases de $\eta$

En la sección introductoria se mencionó que la existencia de fases con funciones de riesgo distintas podría ser considerado como un indicio para caracterizar el modelo que podría ajustar a la serie (o a su primera diferencia, si la variable es no-estacionaria) como perteneciente a la familia de modelos no-lineales estocásticos (en la media condicional y/o en la varianza condicional), en lugar de considerarlo como miembro de la familia de modelos lineales. Los argumentos que se mencionaron anteriormente están asociados con la posibilidad de aproximarse a la media y/o a la varianza condicional de la serie a partir de modelos no-lineales.

---

forma  $\beta$  es igual a uno. En este caso se no se tiene evidencia para rechazar la hipótesis  $\beta = 1$  para la fase de descenso.

De otro lado, una regularidad empírica en la literatura es que la mayoría de las series de tiempo financieras (tasas de interés, tasas de cambio, etc) pueden ser caracterizadas como estacionarias en su primera diferencia, (DS), e incluso, algunas de ellas pueden ser clasificadas como caminatas aleatorias. De acuerdo a Mills (1993), esto se basa en la comprobación de que la primera diferencia de la serie pueda ser aproximada a partir de una serie *ruido blanco estricta*, (SWN)<sup>28</sup> más una constante. Además, Mills señala la notoria frecuencia con que se presentan violaciones al supuesto de varianza condicional constante al examinar dichas series. El mismo autor, introduce por ejemplo, a la familia de modelos GARCH, los cuales son una generalización de los modelos ARCH, (Autoregressive Conditional Heterocedastic Models), como un caso particular de los modelos proceso-producto, los cuales a su vez hacen parte de la familia de modelos no-lineales univariados. Es importante señalar, que las estimaciones de la media condicional son sesgadas en el caso de un modelo lineal, si la presencia de heterocedasticidad, implica la existencia de una representación ARCH-M.

Dados estos argumentos y con el propósito de ilustrar estos hechos en el caso de  $\eta$  se contruyó un modelo GARCH el cual tiene la característica de ser asimétrico

---

<sup>28</sup>Es decir, que se compruebe que los residuos del modelo sean independientes y que su varianza sea constante a través del tiempo. Es importante recordar que la independencia (IND) implica no-autocorrelación (No-A) y que la no-autocorrelación es tan solo una condición necesaria, más no suficiente, para la independencia, es decir,  $(No - A) \nrightarrow (IND)$ .

y es conocido dentro de la literatura sobre el tema como TGARCH o GJR<sup>29</sup>.

Para llevar a cabo la identificación y estimación del modelo TGARCH se usaron los siguientes argumentos y herramientas de diagnóstico<sup>30</sup>:

(i) La serie desestacionalizada de  $\eta$ ,  $(\eta_t^{SA})$ , se comporta como una serie no-estacionaria, es decir, es DS<sup>31</sup>. Existe una representación autorregresiva de  $\nabla\eta_t^{SA} = (1 - B)\eta_t^{SA}$  y los resultados de ese ejercicio se presentan en el Anexo2 (Cuadro 1). En dicho ejercicio y con el propósito de no sesgar el resultado hacia heterocedasticidad por la presencia de valores extremos se incluyen dos variables dummy que recogen efectos simétricos sobre la media del proceso. DUMV1 es igual a uno si  $\nabla\eta_t^{SA} > 2\sigma_{\nabla\eta_t^{SA}}$  y cero en otro caso; DUMV2 igual a 1 si  $\nabla\eta_t^{SA} < -2\sigma_{\nabla\eta_t^{SA}}$  y cero en otro caso.

(ii) El modelo descrito en (i) tiene residuos,  $\hat{\varepsilon}_t$ , no correlacionados, sin embargo, el correlograma de los residuos al cuadrado,  $\hat{\varepsilon}_t^2$ , permite confirmar la existencia de una representación autoregresiva en éstos. Pruebas de heterocedasti-

---

<sup>29</sup> Véase, "Measuring and Testing the impact of News" Engle, R. and Ng, K. (1993) presentado en ARCH Selected Readings (1995), Engle, R.

<sup>30</sup> Algunos de los argumentos pueden ser verificados al examinar el Anexo 2.

<sup>31</sup> Pruebas tipo Dickey y Fuller aumentadas, ADF, para la serie semanal fueron utilizadas para dos períodos, los cuales no involucran la gran caída desde Sep/91 hasta Jul/92, [véase en Vasquez (1996) los problemas de especificación del test de Perron en este caso] la cual podría generar problemas, dado que la potencia de las pruebas tipo DF en presencia de cambio de régimen, tipificadas ampliamente por Perron (1989), es muy baja frente hipótesis alternas de estacionariad. Los resultados de los test por subperíodos y para el período completo, Mar/81-Oct/97 confirman la presencia de no-estacionaridad de la serie. La estadística  $\tau$  tiene el siguiente patrón de comportamiento en todos los casos considerados,  $\tau > -1.0$ , mientras que, los valores críticos en la muestra mas grande se sitúan en  $-1.616$  al 10%.

cidad tipo *Lagrange Multiplier* como las sugeridas por Engle (1982) y conocidas como, (ARCH-LM), para diferentes rezagos, sugieren como mínimo la existencia de un modelo para la varianza condicional. Adicionalmente, los residuos son asimétricos,  $Sk=-0.18$ , y la distribución es leptocúrtica,  $K=4.08$ . Por lo tanto, los residuos no son normales, el test de Jarque-Bera arroja un valor de 45.9, véase Anexo 2 (Cuadro 1, Diagnóstico de los Residuos)

(iii) Dado que los GARCH son modelos mucho más generales y en algunos casos mucho más parsimoniosos que los ARCH, se usa esa especificación para garantizar, a partir de un número pequeño de parámetros, una aproximación de la varianza condicional de los errores del modelo especificado<sup>32</sup>. En la medida en que se tenían expectativas sobre asimetrías se procedió a utilizar una representación que permitiese probar la existencia de éstas, en consecuencia, se estimó el modelo más simple, un modelo TGARCH(1,1) cuya forma general es:

$$\nabla \eta_t^{SA} = \varphi Dummies + \sum_i \Phi_i \nabla \eta_{t-i}^{SA} + \varepsilon_t; \quad i = 2, 17, 32 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \quad e_t \sim N(0, 1) \quad (3.2)$$

$$h_t = \omega + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (3.3)$$

$$S_{t-1}^- = 1 \text{ si } [\varepsilon_t < 0]; \quad 0 \quad \text{en otro caso} \quad (3.4)$$

---

<sup>32</sup>Los test ARCH-LM sugieren la existencia de una especificación  $ARCH(p)$  con  $p > 2$ .

y donde la existencia de asimetría está dada por la significancia del parámetro  $\gamma$ . Los resultados de la estimación confirman la existencia de asimetría, véase Anexo 2 Cuadro 3<sup>33</sup>, y permiten que concluir que la evidencia encontrada usando los modelos de duración acerca de la existencia de asimetrías en el comportamiento de la tasa de interés es soportada por la encontrada en la estimaciones AR-GARCH de  $\eta_t^{SA}$ .

#### 4. Conclusiones

En este documento se presenta una aproximación a las duraciones de las fases de la inflación anual con series mensuales: 1955-1997, y de la tasa de interés semanal desde 1981-1997 a partir de modelos probabilísticos. La distribución de probabilidad que se utiliza para aproximarse a las duraciones de las fases de ambas series es la distribución Weibull<sup>34</sup>.

---

<sup>33</sup>Nótese que a partir de la comparación entre el logaritmo de la función de verosimilitud del modelo GARCH(1,1) [Cuadro 2, Anexo2] y del TGARCH(1,1)[Cuadro 3, Anexo 2] es posible derivar un test, (cociente o de log de verosimilitud) el cual conduce a señalar que TGARCH(1,1) es un modelo verosímil. Nótese que el valor del test es de 4.12 en tanto que el valor crítico de una  $\chi^2$  al 0.05 de significancia, con un grado de libertad, es de 3.84.

En la medida en que las realizaciones de los errores cumplen en ambos casos con la condición de normalidad supuesta en la especificación, ( $e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$ ) bastaría examinar el valor de las estadística "t" o su p-value para confirmar lo señalado anteriormente.

<sup>34</sup>El uso de una distribución Weibull se mantiene a pesar de que los test de momentos condicionales en varios casos rechazan el ajuste de la distribución dada su baja potencia sobre muestras pequeñas.

Pruebas no-paramétricas para dos muestras del tipo Kolmogorov-Smirnov (K-S) fueron utilizadas con resultados que soportan la escogencia de la distribución. En el caso de K-S los valores de los p-values fluctúan entre 0.215 y 0.952.

En el caso de la inflación se reconoce la presencia de una dependencia positiva, es decir, a medida que se aumenta la duración en las fases es más alta la probabilidad de que se presente un punto de quiebre, en el caso de aproximar los modelos probabilísticos a partir del modelos marginales. Adicionalmente, se reconoce que dicha probabilidad se aumenta significativamente, para la fase de ascenso, desde el segundo semestre de 1991, fecha en la cual se introduce una variable dummy para significar un cambio de régimen el cual puede estar asociado con un cambio en la media de las duraciones de la fases<sup>35</sup>.

En lo relacionado con la tasa de interés, se observa inicialmente que la tasa de interés de los CDT presenta dependencia positiva en el caso de la fase de ascenso, en tanto que la fase de descenso puede ser considerada de dependencia neutra. Este hecho sugiere la existencia de un comportamiento asimétrico en la tasa de interés, el cual se refleja en la aproximación de las duraciones de las fases de ascenso y de descenso a partir de una distribución Weibull y una Exponencial, respectivamente. Esta hipótesis es "validada", desde una perspectiva distinta; a partir de la estimación de un modelo no-lineal del tipo TGARCH para la primera diferencia de  $\eta_t^{SA}$ .

Por último vale la pena señalar, que si la "evidencia empírica" sobre asimetría

---

<sup>35</sup>Un ejercicio adicional, en el cual se considera como parte del ciclo de ascenso el período comprendido Mar74-Dic74, el cual involucra las duraciones menos prolongadas, presenta similares resultados tanto en caso del modelo marginal como el del modelo condicional.

en la tasa de interés de corto plazo puede tener algún significado adicional, éste podría estar del lado del ciclo del producto. Los argumentos expuestos en el caso de la economía americana sugieren, por ejemplo, que un mecanismo expedito para afectar las duraciones de las fases del ciclo de la economía es acelerar (desacelerar) o cambiar "drásticamente" la tendencia que viene presentando la tasa de interés de corto plazo, véase Niemira y Klein (1994) a ese respecto. Así, si este fuese el caso de la economía colombiana, la pregunta que habría que resolver es: qué tan simétrico es el ciclo del producto en Colombia?, o en su defecto, qué tan asimétricas son las duraciones de las fases de las variables sujetas al ciclo de la economía, dada la evidencia a favor de comportamientos asimétricos en la tasa de interés de corto plazo?

## REFERENCIAS

**Abraham, K., and Farber, H., (1987).** "Job Duration, Seniority, and Earnings," *The American Economic Review*, 77: 3 (278—297).

**Artis, E. et all (1995).** "Predicting Turning Points in the UK Inflation Cycle," *The Economic Journal*, (1145-1164).

**Beaudry, P., and Koop, G., (1993).** "Do recessions permanently change output?," *Journal of Monetary Economics*, 31: (149-163).

**Cochran, X., and Defina, Y., (1995).** "Duration Dependence in the US Stock Market Cycle: A parametric Approach," *Applied Financial Economics*, 5 (309-318).

**Granger, C., and Terasvirta, T., (1993),** Modelling Nonlinear Economic Relationships, Oxford University Press.

**Greene, W., (1993),** Econometric Analisis, Mcmillan.

**Hodrick, R., Prescott, E., (1980)** "Post-War US Business Cycles: An empirical investigation" (mimeo Carnegie-Mellon Univeristy)

**Jaggia, S., (1991).** "Test of moments restrictions in parametric duration models," *Economics Letters*, 37: (35—38).

**Kiefer, N., (1988).** "Economic Duaration Data and Hazard Functions," *Journal of Economic Literature*, 26: (646—679).

**Kydland, F., Prescott, E. (1990)**, "Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth," *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, (3—18).

**Lancaster, T., (1990)**, *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press.

**Mátyás, L., and Sevestre, P., (1997)**, *The econometric of Panel Data: A Handbook of the Theory with Applications*, Kluwer Academic Publishers.

**Melo, L.,F., (1997)**, "Predicción de cambios de tendencia de la inflación colombiana," mimeo Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República.

**Mills, T., (1993)**, *The econometric Modelling of Finacial Time Series*, Cambridge University Press.

**Niemira, M, and Klein, P., (1994)**, *Forecasting Financial and Economic Cycles*, John Wiley and Sons.

**Peel, D, and Speight E. (1996)**, "Is the US business cycle asymmetric?. Some further evidence." *Applied Economics* 28: (405—415).

**Sichel, D., (1991)**. "Business Cycle Duration Dependence: A parametric approach." *The Review of Economics and Statistics*, (254—260).

**Sill, K., (1996)**, "The ciclical Volatility of Interest Rates," *Business Review* Federal Reserve Bank of Philadelphia, (15—29).

**Vazquez, D. (1996)**. "La tasa de interés en Colombia: Algunos aspectos

relacionados con su evolución de corto y largo plazo”, mimeo, Seminario semanal Banco de la República.

**Watson, M., (1986),** ”Univariate Detending Methods with Stochastic Trends,”  
*Journal of Monetary Economics*, 18: (49—75).

## ANEXO 1

### Sobre la aproximación a la señal del Ciclo y sus duraciones

En este anexo se presentan los resultados de un ejercicio de simulación que recoge lo planteado en la nota de pie de página número 4. Con el propósito de **ilustrar** la discusión se simulan dos series utilizando en cada una de ellas la aproximación propuesta por Watson (1986):  $x_t = c_t + \tau_t$  donde  $c_t = \frac{\Theta_x(B)}{\Phi_x(B)}\varepsilon_t$  y  $\tau_t = \delta + \tau_{t-1} + \xi_t$ , dejando que cada una de ellas tenga la misma componente de ciclo,  $c_t$ , cambiando solo la varianza de la componente de tendencia de tal forma que, en el primer caso, la serie generada de  $x$ , la cual por comodidad se notará  $z$ , es no—estacionaria, y en el segundo, en el cual la serie generada se notará como  $w$ , la serie resultante es estacionaria<sup>36</sup>.

Para construir el ciclo de  $z$  y  $w$  se utilizó un modelo AR(2) con media distinta de cero  $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)c_t = \alpha + \varepsilon_t$ , con  $\varepsilon_t \sim NI[0, (0.5)^2]$  el cual genera un ciclo cuya longitud (duración), o período  $p$ , depende la siguiente expresión :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\arccos\left(\frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}}\right)}$$

siendo  $(\phi_1, \phi_2) = (1.6, -0.8)$ , los cuales generan un ciclo cuya longitud es de 13.6

---

<sup>36</sup>Para el primer caso, es decir, para  $z$ , la varianza del error asociada con la componente de tendencia  $V(\xi_t)$  domina a la varianza del error de la componente de ciclo  $V(\varepsilon_t)$ . En el caso de  $w$  se presenta la situación contraria.

períodos. En el caso de los  $\tau^l$ s se simuló a  $\xi_t$  como una variable aleatoria normal con  $E(\xi_t) = 0$  y  $V(\xi_t) = 1$  o  $(0.01)^2$ , respectivamente.

En el Cuadro 1 se presentan los resultados de las pruebas de raíz unitaria, ADF, y los valores del test de autocorrelación de los residuos del test ADF, Ljung-Box, para las variables de interés. Como era de esperar  $w$  sigue un proceso  $I(0)$ , mientras que  $z$ , sigue un proceso  $I(1)$ . Es importante observar que la relación entre  $V(\varepsilon_t)/V(\xi_t) = 0.25$  en el caso de  $z$ , mientras que para  $w$  dicha relación se sitúa en 2500.

Cuadro 1		
Variable	(ADF,lag)	LB(12,24)
$\tau^z$	(-1.09,0)	(4.1,15.5)
$\tau^w$	(-1.41,0)	(4.2,15.6)
$z$	(-1.36,6)	(6.8,14.5)
$w$	(-17.3,1)	(13.2,22.6)

Con el propósito de derivar la componente de tendencia y a partir de ella encontrar la de ciclo de  $z$  y  $w$  se utiliza el filtro de Hodrick y Prescott (HP)<sup>37</sup>. Para tener una idea acerca de la similaridad de las componentes de ciclo estimadas se presentan dos medidas que permiten medir el grado y sentido de la asociación

---

<sup>37</sup> En este caso, y dado que el ejercicio de simulación permite conocer las componentes de las series, se optó por encontrar el valor del  $\lambda$  de HP, a partir de la maximización de la correlación entre  $c_t$  y  $(c_t^w, c_t^z)$  respectivamente.

entre dichas aproximaciones. La primera medida, correlación de Pearson, (P), se preocupa del grado de asociación entre los niveles del ciclo simulado y el ciclo estimado, notados como  $c_t$  y  $\hat{c}_t$ , respectivamente. La segunda, correlación de Kendall, (K) permite conocer el grado de coherencia que mantienen las parejas de señales,  $[c_t > 0, \hat{c}_t > 0]$ , denotadas como  $[s_t, \hat{s}_t]$ <sup>38</sup> respectivamente. Los resultados de este ejercicio se presentan en el Cuadro 2 y permiten concluir que existe una "muy alta" y positiva correlación entre el ciclo estimado a partir de la variable  $w$  y el ciclo "verdadero (simulado)", mientras que en el caso de  $z$ , variable no—estacionaria, la correlación es menor.

Cuadro 2					
	P			K	
	$\hat{c}_t^z$	$\hat{c}_t^w$		$\hat{s}_t^z$	$\hat{s}_t^w$
$c_t$	0.75	0.97	$s_t$	0.50	0.85

Claramente, el fuerte dominio de  $V(\varepsilon_t)$  sobre  $V(\xi_t)$  en el caso de  $w$  genera unas correlaciones mucho más altas que las que se encuentran en el caso de  $z$ . Así, aparece otro interrogante, el cual está relacionado con la incidencia que para la estimación de los parámetros de los modelos de duración usados en este documento tiene el uso del filtro de HP en el caso de no-estacionaridad dada la "baja" correlación observada entre:  $(c_t, \hat{c}_t^z)$  y  $(s_t, \hat{s}_t^z)$ . En el Cuadro 3 se presenta

---

<sup>38</sup>Si se define una regla de esta naturaleza como "el mecanismo" para derivar la señal.

un resumen de los resultados de la estimación de los parámetros del modelo de duración presentados en (2.2) y (2.3) para las series  $c_t$  y  $\hat{c}_t^z$ .

Cuadro 3				
Fase de Descenso				
$t_o$	$c_t$		$\hat{c}_t^z$	
	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
2	0.009 (0.007)	2.069 (0.288)	0.008 (0.006)	2.163 (0.299)
3	0.018 ((0.016)	1.817 (0.319)	0.019 (0.017)	1.856 (0.335)
Fase de Ascenso				
$t_o$	$c_t$		$\hat{c}_t^z$	
	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
2	0.012 (0.009)	1.972 (0.274)	0.006 (0.005)	2.322 (0.302)
3	0.028 (0.022)	1.689 (0.308)	0.014 (0.011)	2.030 (0.338)
Entre paréntesis se presentan los errores estándar				

Los resultados de la estimación de de los parámetros presentados en el Cuadro 3 permiten concluir en este caso, que aun a pesar de la "baja" correlación entre  $(c_t, \hat{c}_t^z)$  y  $(s_t, \hat{s}_t^z)$  se puede encontrar un traslape entre los intervalos de confianza<sup>39</sup>, ( 95% de confianza), que se podrían derivar para los parámetros  $(\lambda, \beta)$  de

<sup>39</sup>Mucho más fuerte en el caso de la fase de descenso.

$c_t$  y los intervalos correspondientes a  $\hat{c}_t^z$ . De lo anterior se deriva que al menos para este ejercicio existen indicios de que el procedimiento usado no afecta "significativamente" los resultados de estimación de  $(\lambda, \beta)$ <sup>40</sup>.

Por último vale la pena mencionar que los resultados de la estimación de la mediana implícita para la fase de ascenso, (A), y de descenso, (D), que se obtienen tanto para  $c_t$  como para  $\hat{c}_t^z$  son muy similares entre sí, como se desprende del Cuadro 4 . La longitud del ciclo teórico es de 13.6 períodos, el simulado se sitúa en 14.1 y el derivado de la serie  $z \sim I(1)$  alcanza el valor de 13.6 períodos.

Cuadro 4				
$t_o = 3$	$c_t$		$\hat{c}_t^z$	
	A	D	A	D
Mediana	6.7	7.4	6.8	6.8

---

<sup>40</sup>Para el caso de  $w$  no se examina el efecto que tiene HP en la derivación de la componente de ciclo en la medida en que la componente  $c_t$  y  $\hat{c}_t^w$  y sus señales  $s_t$  y  $s_t^w$  presentan una alta correlación.