

El crecimiento económico colombiano en el siglo XX: aspectos globales

Por GRECO *

*** Grupo de estudios del crecimiento económico colombiano**

Director :	Miguel Urrutia
Investigadores :	Adriana Pontón Carlos Esteban Posada
Asistente de investigación:	Camila Reyes

Tabla de contenido

El crecimiento económico colombiano en el siglo XX: aspectos globales

1. Introducción

2. Aspectos teóricos

3. Evidencia empírica

3.1. Posición internacional de Colombia

3.1. Análisis descriptivo de las series colombianas

3.2. Resultados econométricos

3.3. La tasa “natural” de crecimiento y el producto potencial

4. Resumen y conclusiones

Anexos

1. Modelo teórico	32
2. La tasa de inversión.....	33
3. La estimación del capital (1905-1924)	36
4. Pruebas de estacionariedad	38
5. Pruebas de cointegración	39
6. Hipótesis especiales en la cointegración	42
7. ¿Es endógeno el producto per cápita? (prueba de exogeneidad fuerte)	44
8. Prueba de estabilidad de los coeficientes	45

REFERENCIAS (incluye texto, anexos y tablas)	50
---	-----------

El crecimiento económico colombiano en el siglo XX: aspectos globales

Autores : GRECO (Grupo de estudios del crecimiento económico colombiano)

Director : Miguel Urrutia Montoya

Investigadores : Adriana Pontón

Carlos Esteban Posada

Resumen

Con base en el modelo neoclásico de crecimiento económico (Solow-Swan), se describen las características generales del crecimiento económico colombiano en el siglo XX: al identificar una relación estable de largo plazo entre el capital per cápita y el producto per cápita en el período 1925-1997 se obtiene el nivel promedio de la elasticidad producto-capital y la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral. Con los resultados de este ejercicio se compara el desempeño de Colombia con el de otros países, se identifica un quiebre en la tendencia del PIB después de 1981, se establece una metodología para el cálculo el capital y la inversión para el período 1905-1924, en el cual los datos son inexistentes para el caso colombiano y se calcula un PIB potencial para Colombia en el siglo XX.

Dentro del anterior contexto se da una posible respuesta a las siguientes incógnitas: ¿Porqué Colombia tuvo un crecimiento del PIB per cápita de 2.3% anual y no uno mas alto? ¿es su crecimiento alto o bajo con respecto a la historia del desarrollo de otros países? ¿qué diferencia a Colombia del resto de países en términos de crecimiento económico en el último siglo? y ¿cuál es su perspectiva de largo plazo si mantiene su tasa de crecimiento actual?

La existencia de una relación de largo plazo se verifica mediante el uso del método de cointegración de Johansen; con ella se observa la estabilidad de los parámetros a través del tiempo, se comprueba si ocurren cambios estructurales en el tiempo, se calcula la tasa de cambio técnico, se prueba exogeneidad fuerte y débil del capital con respecto al producto y se formaliza el modelo escogido mediante las pruebas de exclusión de las variables. El uso de este instrumental econométrico permite otorgarle validez a la retrapolación de las series de capital e inversión y de igual forma encontrar una tasa natural de crecimiento.

El crecimiento económico colombiano en el siglo XX: aspectos globales

GRECO*

1. Introducción

Las diferencias en los niveles de ingreso real entre países se deben a diferencias en las tasas de crecimiento de sus productos a través de largos períodos de tiempo. Por ejemplo, si Colombia hubiera alcanzado una tasa de crecimiento per cápita promedio anual de 1 punto adicional en el último siglo estaría más cerca de los países desarrollados que de aquellos en vía de desarrollo. ¿Por qué Colombia tuvo un crecimiento del PIB per cápita de 2.3% anual y no uno más alto? Para responder a lo anterior es importante indagar sobre las características del crecimiento económico colombiano en el siglo XX y cómo se enmarcan dentro del contexto internacional; un estudio sobre esto permitiría responder preguntas como las siguientes: ¿es su crecimiento alto o bajo con respecto a la historia del desarrollo de otros países? ¿qué diferencia a Colombia del resto de países en términos de crecimiento económico en el último siglo? y ¿cuál es su perspectiva de largo plazo si mantiene su tasa de crecimiento actual?

El presente trabajo escoge como marco conceptual para despejar tales incógnitas un modelo que resume el proceso mediante el cual los esfuerzos y capacidades productivas de la sociedad se combinan para lograr una cantidad de producto que se eleva a través del tiempo.

* Grupo de estudios del crecimiento económico colombiano

El presente documento es una versión para comentarios y no expresa la posición oficial del Banco de la República ni la de su Junta Directiva. Agradecemos la asesoría de Juan Manuel Julio y Luis Fernando Melo y los comentarios de José Darío Uribe, Enrique López, María Teresa Ramírez y Daniel Mejía; en una segunda versión incorporaremos sus sugerencias. Motivamos a nuestros lectores a enviarnos sus comentarios, pues este es un borrador del primer capítulo de un libro sobre el crecimiento económico colombiano; en los siguientes capítulos se abordarán aspectos que permitirán un análisis más profundo de sus causas.

El modelo escogido para interpretar el crecimiento es el denominado neoclásico o Solow-Swan¹. Varios criterios nos llevaron a adoptar este modelo, descrito de manera específica mas adelante. El primero de ellos fue la disponibilidad de series estadísticas. En nuestro caso se dispuso de series con frecuencia anual del producto total, de la población económicamente activa y del capital total desde 1925. Estas series bastan para describir el proceso de crecimiento económico a la luz de tal modelo. En cambio, otros modelos de crecimiento, como aquellos que incorporan variables de educación, infraestructura, recursos invertidos en investigación y desarrollo, tamaño del estado, etcétera, exigen estadísticas que, para el caso colombiano, son cortas, precarias, discontinuas o inexistentes.

El otro criterio fue el de pertinencia. En efecto, la economía colombiana ha sido relativamente atrasada y sencilla si se la compara en términos internacionales (sección 3.1) y se cataloga como importadora de tecnología. Por consiguiente es comprensible que un modelo como el escogido, que resalta el papel de la expansión del capital físico por trabajador, sea útil para ayudar a explicar los principales aspectos macroeconómicos del crecimiento colombiano, a pesar de dejar implícitos otros factores que elevan la productividad.

La misma carencia de información adicional también nos ha obligado a suponer que el aumento del capital es exógeno. Esto quiere decir que no se intentará explicar el crecimiento del producto con base en las conductas y prácticas sociales causantes del ahorro interno o en los factores determinantes de la disponibilidad del ahorro externo. Esto último ha sido, en cualquier caso, secundario. Con todo, somos conscientes de que recurrir a un modelo con variables macroeconómicas obliga a dejar implícitas las condiciones institucionales, sociales, políticas y culturales que pudieron afectar la tasa de crecimiento del producto en el largo plazo.

El DANE re-estimó (y dio a conocer en mayo de 1999) la cifra del PIB real a partir de 1994. Los cambios más significativos consistieron en fijar un nuevo año base, 1994, para los valores en precios constantes y para el nuevo sistema de precios relativos e incluir producciones ilegales². Hasta el momento (julio de 1999) el DANE ha publicado los resultados para 1994 y 1995, y por ahora tiene proyectado actualizar las cifras de cuentas

¹ Solow (1956), Swan (1956) y Solow (1969).

² DANE (1999), Pag.13.

nacionales para el período 1990-1997; sin embargo, en el presente trabajo no se adoptan las cifras del PIB obtenidas con la nueva base 1994 porque se estarían incluyendo elementos inexistentes en la estimación anterior del PIB. Así, mientras el DANE revisa toda la serie histórica del PIB, lo mejor es utilizar la serie antigua (base 1975) para efectos como los del presente trabajo, es decir, para describir e interpretar el proceso de crecimiento de la economía colombiana en el presente siglo.

En la segunda parte de este documento se describirá el modelo utilizado y los distintos aspectos teóricos que lo respaldan; en la tercera parte se mostrará su pertinencia empírica en términos de los resultados de su estimación econométrica; con base en estos resultados se calculará la tasa natural de crecimiento. Por último se expondrá un resumen y las conclusiones. En varios anexos se presentan aclaraciones técnicas adicionales, pruebas estadísticas y cifras básicas utilizadas.

2. Aspectos teóricos

A continuación se expondrá el modelo de crecimiento de Solow (1956) y de Swan (1956) el cual se basa en una función de producción neoclásica. El modelo supone que el producto global depende de dos factores: el capital físico y el trabajo medido en unidades de eficiencia. Además de las características explicadas en la sección 1, el modelo requiere supuestos adicionales como los siguientes: rendimientos constantes a escala, rendimientos marginales decrecientes con respecto a cada factor, sustituibilidad (imperfecta) entre capital y trabajo, mercados competitivos y flexibilidad del salario real y de la tasa de interés real.

El modelo inicial propuesto por Solow y Swan suponía que el nivel de tecnología era exógeno (determinado por fuera del modelo) y constante a través del tiempo, por lo cual en el largo plazo la tasa de crecimiento del producto per cápita era cero, puesto que por las propiedades de la función de producción, aumentos adicionales de los insumos cada vez producían incrementos menores en el producto. La evidencia empírica internacional ha demostrado que las tasas de crecimiento del producto per cápita han sido positivas por más de un siglo y no revelan una tendencia al decrecimiento. Los teóricos de fines de los años cincuenta y sesenta reconocieron esta deficiencia del modelo y lo solventaron identificando el progreso técnico (exógeno) como el responsable de las tasas de crecimiento positivas de largo plazo.

En los modelos más generales con evolución tecnológica exógena (determinada por fuera del modelo) es necesario entender esta como un mejoramiento en la eficiencia de la fuerza laboral, con el fin de encontrar una solución de estado estable en la cual las variables en el largo plazo tienen un crecimiento positivo y constante³. Si el progreso tecnológico mejora la eficiencia del capital existe la posibilidad de que surjan rendimientos crecientes a escala y no se encuentre un estado estable. No obstante, si se escoge una función de producción tipo Cobb-Douglas, con rendimientos constantes a escala y rendimientos marginales decrecientes con respecto a cada factor, aun los cambios tecnológicos que incrementan la eficiencia del capital pueden ser expresados en términos de incrementos en la eficiencia laboral. Así, una función de producción Cobb-Douglas general, tal que:

³ Demostración en Barro y Sala-i- Martín (1995) páginas 54 y 55.

$$(1) \quad Y = (\text{constante})(Ke^{zt})^\alpha (Le^{xt})^{1-\alpha}$$

Siendo:

Y : producto interno bruto real;

K : capital real;

α : elasticidad del producto al capital; $0 < \alpha < 1$;

L : población laboral;

z : tasa de crecimiento de la eficiencia del capital

x : tasa de crecimiento de la eficiencia del trabajo

expresa dos tipos de progreso tecnológico; el primero, un mejoramiento de la eficiencia del capital con a una tasa de crecimiento z ; el segundo, un mejoramiento de la eficiencia del trabajo con una tasa de crecimiento x . La ecuación (1) puede ser resumida de la siguiente manera:

$$Y = (\text{constante})K^\alpha (Le^v)^{1-\alpha}$$

Donde

$$(2) \quad v = \frac{[z\alpha + x(1-\alpha)]}{(1-\alpha)}$$

Y v incluye tanto el mejoramiento de la eficiencia del capital como el del trabajo. Si la tasa de progreso tecnológico del capital, z , no es cero, y existe un estado estable, entonces la función de producción debe tomar la forma Cobb-Douglas. Además, si la función de producción es Cobb-Douglas, entonces siempre se puede expresar el cambio tecnológico como un aumento en la eficiencia laboral, a la tasa v expresada anteriormente. Por lo cual, cuando se hable de mejoramiento en la eficiencia laboral en una función Cobb-Douglas se debe entender esta en un sentido amplio⁴.

Una función de producción más específica se puede re-expresar de la siguiente forma⁵ (la derivación del presente modelo se encuentra en el **Anexo 1**):

$$Y_{t+1} = K_{t+1}^\alpha \left(A_{t+1} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) L_{t+1} \right)^{(1-\alpha)} = K_{t+1}^\alpha A_{t+1} L_{t+1}^{1-\alpha}$$

$$(3) \quad Y_{t+1} = K_{t+1}^\alpha A_t (1+g)^{1-\alpha} L_{t+1}^{1-\alpha}$$

⁴ Barro y Sala-i- Martín (op.cit.)

⁵ El modelo fue tomado de Obstfeld y Rogoff (1996), cap. 2, apéndice 2A.

Siendo:

A : parámetro de eficiencia de la población laboral; $A > 1$;

$t+1$: un período del tiempo cualquiera.

g : la tasa de crecimiento por período del parámetro A cuando está elevado a la potencia $1/1-\alpha$.

Si se divide la ecuación (3) por el número de trabajadores, se puede establecer una relación entre el producto por trabajador y el capital por trabajador con una forma bastante conocida:

$$(4) \quad y_{t+1} = A_t(1+g)^{1-\alpha} k_{t+1}^\alpha = A_{t+1} k_{t+1}^\alpha$$

siendo:

$$y_{t+1} \equiv \frac{Y_{t+1}}{L_{t+1}} \quad y \quad k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}$$

Así, el producto por trabajador es una función Cobb-Douglas del capital por trabajador e incluye un parámetro tecnológico, A , que crece a una tasa constante g por período, elevada al factor $(1-\alpha)$. Mediante un análisis econométrico se obtendrá una estimación de la elasticidad α y de la tasa g .

Otra ventaja de utilizar este esquema teórico, además de asociar el cambio técnico al mejoramiento de la calidad de la fuerza laboral, consiste en que podríamos estimar la tasa de inversión de la economía y, por ende, el nivel del capital entre 1905 y 1924, período para el cual aún no se dispone de estimaciones más confiables. Para el cálculo de la inversión se requiere especifican supuestos adicionales, los cuales se describen a continuación.

El primer supuesto adicional es el de la igualdad entre la tasa de interés real (r) y la productividad marginal del capital ($\partial y/\partial k$), como condición de maximización de ganancias y, por lo tanto, una de las características de un estado de equilibrio estable. Con este supuesto, y dadas las estimaciones de la elasticidad α y la tasa g , se pueden deducir los niveles del capital. En efecto, según el modelo la tasa de inversión o relación entre

⁶ Específicamente: $g = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)} - 1$; utilizar el componente exponencial $(1-\alpha)$ permite simplificar la ecuación en la relación inversión/producto, que se expondrá mas adelante.

inversión y producto (i/y) de equilibrio estable es (su derivación se encuentra en el **Anexo 2**):

$$(5) \quad \frac{i}{y} = \frac{\alpha g}{r}$$

Entonces, dada r y estimadas α y g se puede calcular la tasa de inversión. A su turno, el nivel de la inversión total se puede computar con base en la tasa de inversión y en el nivel del producto; una vez estimada la inversión se puede “retrapolar” el capital desde 1925 hasta 1905. En el Anexo 3 se describe la estimación del capital con base en lo anterior.

Los cálculos de la inversión y el capital suponen que los coeficientes α y g vigentes entre 1905 y 1925 fueron iguales a los del periodo 1925-1981, estimados con el método de cointegración mencionado mas adelante.

3. Evidencia empírica

3.1. Posición internacional de Colombia

En 1950 el PIB per cápita colombiano a precios corrientes no alcanzó a ser 17% del de Estados Unidos; aún hoy, apenas llega a ser 20% del correspondiente a este país (Gráfico 1), y medido a precios constantes ha tenido un crecimiento bastante lento con respecto al de éste (Gráfico 2).

Gráfico 1

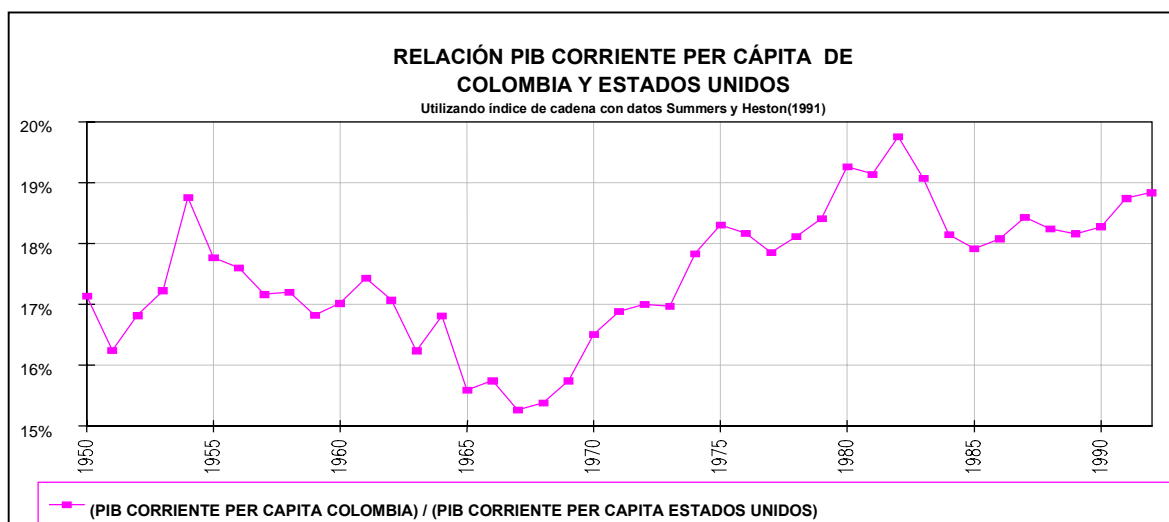
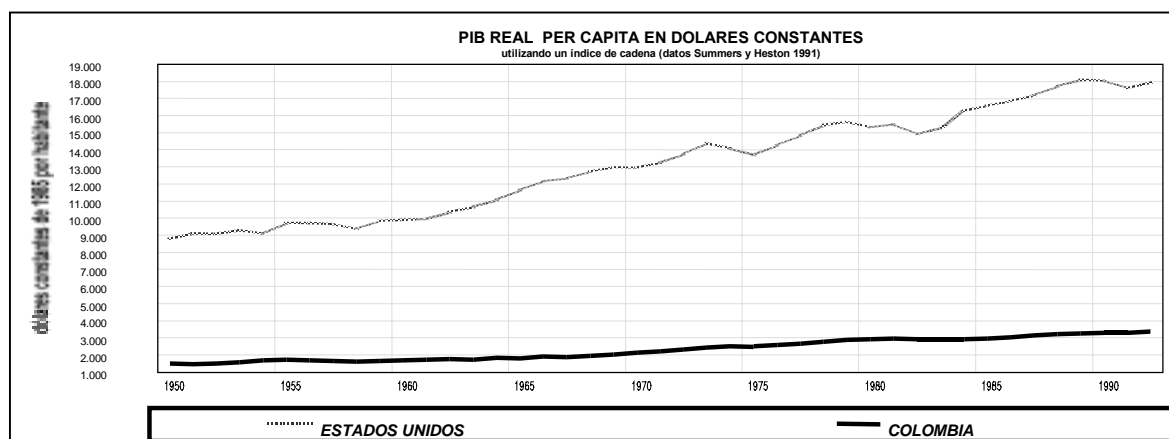


Gráfico 2



Sin embargo, para todo el siglo el comportamiento del PIB per cápita colombiano no parece deplorable a juzgar por la experiencia de los países desarrollados en su proceso de transición hacia su estado actual (**Tabla 1**). Los períodos para cada país señalados en la tabla difieren porque son calculados desde su respectivo punto de partida de crecimiento de una economía moderna⁷. Si se ordenara por la tasa de crecimiento del producto total real, Colombia estaría ubicado de primero; sin embargo, el crecimiento de su población ha sido mas elevado que el de cualquiera de los países desarrollados en su etapa de crecimiento económico moderno, así que en términos per cápita se ubica de tercero, después de Japón y Suiza.

Tabla 1

La transición internacional al desarrollo y el caso colombiano					
	Período	Duración	Crecimiento Producto real	Crecimiento población total	Crecimiento PIB per cápita
		(años)	(porcentajes y promedios anuales)		
Suecia	1861 /9 -1963 /7	100	3,2	0,6	2,6
Japón	1885 /9 -1963 /7	78	3,6	1,1	2,5
Colombia	1906 -1997	92	4,6	2,3	2,3
Italia	1895 /9 -1963 /7	68	2,8	0,7	2,1
Noruega	1865 /9 -1963 /7	98	2,8	0,8	2,0
Dinamarca	1865 /9 -1963 /7	98	2,9	1,0	1,9
Canadá	1870 /4 -1963 /7	93	3,5	1,8	1,7
Alemania	1850 /9 -1963 /7	110,5	2,7	1,0	1,7
Francia	1831 /40 -1963 /7	128,5	2,0	0,3	1,7
Estados Unidos	1834 /43 -1963 /7	125,5	3,6	2,0	1,6
Suiza	1910 -1963 /7	55	2,3	0,8	1,5
Bélgica	1900 /4 -1963 /7	63	1,9	0,5	1,4
Holanda	1860 /9 -1963 /7	100,5	2,5	1,3	1,2
Gran Bretaña	1765 /85 -1963 /7	180,5	2,2	1,0	1,2
Australia	1861 /9 -1963 /7	100,5	3,2	2,2	1,0

Notas:
 Producto real = PNB (o PIB, PNN, Ingreso nacional)
 Tomado de Minami (1986); datos colombianos en Anexo Tablas 2A.

⁷ Según metodología de Kuznets (Minami 1986) pp11-14, tabla 1.

Tabla 2

Tasas de crecimiento del PIB per cápita (dólares internacionales de 1990* y porcentajes por año)					
ordenados ascendentemente por ingreso inicial	1950-1973		ordenados ascendentemente por ingreso inicial	1973-1996	
	Ingreso Inicial	Crecimiento		Ingreso Inicial	Crecimiento
Japón	1.873	8,0	Noruega	10.229	3,4
Italia	3.425	5,0	Italia	10.409	2,1
Alemania	4.281	5,0	Japón	11.017	2,5
Francia	5.221	4,0	Bélgica	11.905	1,8
Bélgica	5.346	3,5	Gran Bretaña	11.992	1,6
Noruega	5.403	3,2	Holanda	12.763	1,6
Holanda	5.850	3,1	Francia	12.940	1,5
Dinamarca	6.683	3,1	Alemania	13.152	1,8
Suecia	6.738	3,1	Dinamarca	13.416	1,7
Gran Bretaña	6.847	2,5	Suecia	13.494	1,2
Suiza	8.939	3,1	Estados Unidos	16.607	1,6
Estados Unidos	9.573	2,4	Suiza	17.953	0,5
Brasil	1.673	3,76	Colombia**	3.539	1,86
México	2.085	3,08	Brasil**	3.913	0,90
Colombia	2.089	2,32	México**	4.189	1,05
Chile	3.827	1,19	Chile**	5.028	1,94
China	537	2,1	China	839	5,4
Corea del Sur	876	5,2	Corea del Sur	2.840	6,8
Taiwan	922	6,2	Taiwan	3.669	6,1
Hong Kong	1.962	5,5	Singapur	5.412	6,1
Singapur	2.038	4,3	Hong Kong	6.768	5,1

Fuente: Crafts (1999) basado en Maddison (1995).

*Se refiere a dólares constantes de 1990 corregidos por paridad de poder de compra para cada país.

**Para Chile, Brasil, Colombia y México los datos con la metodología de Maddison se encuentran hasta 1992.

Según la teoría de convergencia absoluta sobre los niveles del PIB, los países con menor ingreso per cápita inicial crecen más rápido que aquellos que tienen un ingreso per cápita más alto⁸; así, en el largo plazo los países pobres alcanzan a los ricos. En 1950 Japón y los países del este asiático (Corea del Sur, Taiwan, Hong Kong y Singapur) tuvieron un ingreso per cápita menor al de Colombia, y entre 1950 y 1973 crecieron a una tasa superior a la colombiana en 2 a 5 puntos porcentuales. Estos países crecieron tan rápidamente que en 1973 todos superaron el PIB de Colombia, con la excepción de Corea del Sur. En el período 1973-1996 Corea del Sur creció a una tasa de 6.8% anual mientras

Colombia, en el período 1973-1992 solo creció en 1.86%, tasa menor a la observada en el período 1950-1973 (2.32%). Entonces, algunos países avanzaron más rápido que Colombia, y de acuerdo con la literatura de convergencia, en ello influyó no solamente el ingreso per cápita inicial, sino también los niveles iniciales de educación, de infraestructura, de desarrollo institucional, de grado de apertura, etc. (Barro y Sala-i-Martin (1995).

Hamilton y Monteagudo (1998) estudiaron los cambios en la tasa de crecimiento a través del tiempo y encontraron que la mayoría de países experimentó una desaceleración en el crecimiento después de 1973⁹. Empero, otros países cambiaron sus tendencias y experimentaron una aceleración en el crecimiento; y según la Tabla 2, estos fueron Noruega, Chile, China, Corea del Sur y Singapur. Hamilton y Monteagudo opinan que este logro se debió a mayores niveles de inversión en capital físico o a un crecimiento de la población mas bajo.

Hall y Jones (1998) encontraron que las diferencias en capital físico y humano explican parcialmente porqué algunos países producen más que otros. Sin embargo, con un análisis de contabilidad del crecimiento con el modelo de Solow hallaron una gran variación en la productividad total de los factores (el “residuo de Solow”) entre países. El trabajo de estos autores se basa en el siguiente modelo:

$$Y = K^{\alpha} (A H)^{(1-\alpha)}$$

$$H = e^{\phi(E)} L$$

siendo:

Y: producto

K: stock de capital físico

H: cantidad de capital humano o fuerza laboral entrenada con un cierto número de años de educación, donde “E” es el número de años de educación.

A: eficiencia de la población laboral calculado como un residuo.

L: número de trabajadores

Si se divide por el número de trabajadores, L, y se reagrupa la ecuación, el modelo de Hall y Jones (1998) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{Y_i}{L_i} = \left(\frac{K_i}{Y_i} \right)^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)} \left(\frac{H_i}{L} \right) A_i$$

⁸ Esto surge como consecuencia de los rendimientos decrecientes del capital.

⁹ Esto era lo esperado dentro del contexto de Solow y de Mankiw, Romer y Weil (1991) considerando lo sucedido como un proceso de convergencia a sus respectivas trayectorias de estado estable.

La **Tabla 3** fue construida con base en este modelo y, para el caso colombiano, se interpreta así:

Tabla 3

Cálculos de productividad				
Medido con respecto a valores de Estados Unidos en 1988				
	Y/L	Contribución al crecimiento del producto por trabajador de:		
		$(K/Y)^{\alpha/(1-\alpha)}$	H/L	A
Estados Unidos	1,000	1,000	1,000	1,000
Canadá	0,941	1,002	0,908	1,034
Suiza	0,874	1,189	0,832	0,883
Australia	0,843	1,094	0,900	0,856
Bélgica	0,836	1,023	0,836	0,978
Italia	0,834	1,063	0,650	1,207
Alemania	0,818	1,118	0,802	0,912
Francia	0,818	1,091	0,666	1,126
Holanda	0,806	1,060	0,803	0,946
Suecia	0,787	1,029	0,853	0,897
Noruega	0,759	1,196	0,909	0,699
Gran Bretaña	0,727	0,891	0,808	1,011
Dinamarca	0,690	1,082	0,905	0,705
Hong Kong	0,608	0,741	0,735	1,115
Singapur	0,606	1,031	0,545	1,078
Japón	0,587	1,119	0,797	0,658
Taiwan	0,445	0,821	0,699	0,776
México	0,433	0,868	0,538	0,926
Corea del Sur	0,380	0,861	0,761	0,580
Colombia	0,264	0,818	0,544	0,593
Chile	0,263	0,989	0,661	0,403
China	0,060	0,891	0,632	0,106
Promedio de 127 países	0,296	0,853	0,565	0,516
Desviación Estándar	0,268	0,234	0,168	0,325
Fuente: Hall y Jones(1998)				

el producto por trabajador de Colombia es 24.6% del de Estados Unidos, aunque tiene 81.8% de la intensidad de capital de Estados Unidos (cuando esta intensidad es elevada a la potencia $\alpha/(1-\alpha)$) y 54.4% del capital humano de este mismo país. El menor nivel de capital humano y la baja eficiencia de la población laboral (A) explican porque Colombia tiene un menor producto por trabajador. Como las tres últimas columnas se multiplican para obtener Y/L, si Colombia tuviera la eficiencia laboral de Estados Unidos (1,000), su

producto por trabajador sería igual al de Taiwan. El comportamiento del producto per cápita de Colombia es muy cercano al promedio de los 127 países incluidos en la muestra.

Al comparar el desempeño colombiano con el de las principales economías latinoamericanas a lo largo del siglo XX los resultados son favorables para Colombia, si se tiene en cuenta su bajo nivel inicial de ingreso per cápita (**Tabla 4 y Gráfico 3**); aun así, su desempeño no tuvo el notable ritmo exhibido por Venezuela (hasta mediados de los años setenta) asociado sin duda a su creciente renta petrolera. El comportamiento del PIB colombiano se parece más al de Brasil y México; Chile y Argentina persistentemente tuvieron niveles per cápita superiores al colombiano durante el siglo XX.

No obstante, si se compara el crecimiento económico colombiano con el observado en los llamados “tigres del Asia” (**Tabla 5**) durante el periodo de rápido crecimiento de estos (1966-1961) sí se hace evidente el creciente rezago de la economía colombiana.

Tabla 4

PIB per cápita en algunos países latinoamericanos dólares internacionales de 1990*							
	1820	1870	1900	1913	1950	1973	1992
Argentina		1311	2756	3797	4987	7970	7616
Brasil	670	740	704	839	1673	3913	4637
Chile			1949	2653	3827	5028	7238
Colombia			973	1236	2089	3539	5025
México	760	710	1157	1467	2085	4189	5112
Perú			817	1037	2263	3953	2484
Venezuela			821	1104	7424	10717	9163
Tasas de crecimiento anual (con respecto al año previo)							
	1820	1870	1900	1913	1950	1973	1992
Argentina			2,51	2,50	0,74	2,06	-0,24
Brasil		0,20	-0,17	1,36	1,88	3,76	0,90
Chile				2,40	1,00	1,19	1,94
Colombia**				1,86	1,43	2,32	1,86
México		-0,14	1,64	1,84	0,95	3,08	1,05
Perú				1,85	2,13	2,45	-2,42
Venezuela				2,30	5,29	1,61	-0,82

Fuente: Maddison 1995.

* Se refiere a dólares constantes de 1990 corregidos por paridad de poder de compra en cada país.

**Los datos de Colombia para 1900-1913 son el promedio de las tasas de crecimiento de Chile y de Brasil en 1913 aplicadas hasta obtener el nivel de PIB per cápita de 1900.

Gráfico 3

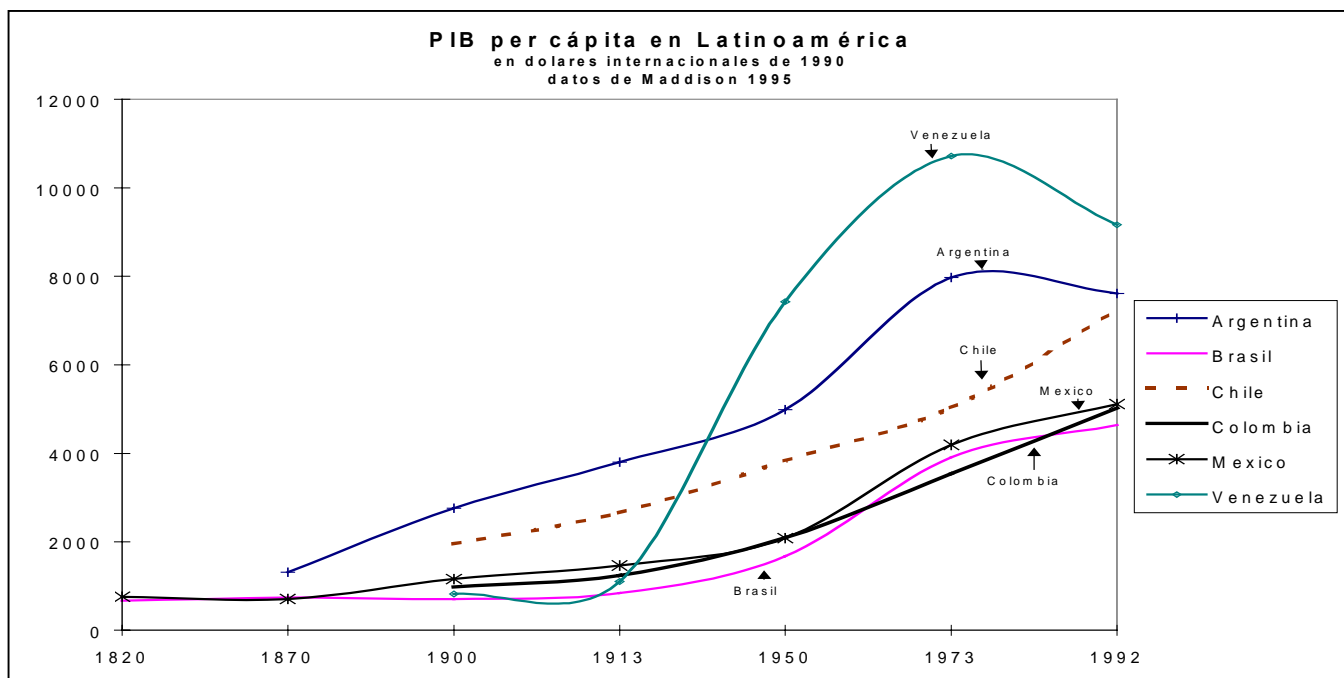


Tabla 5

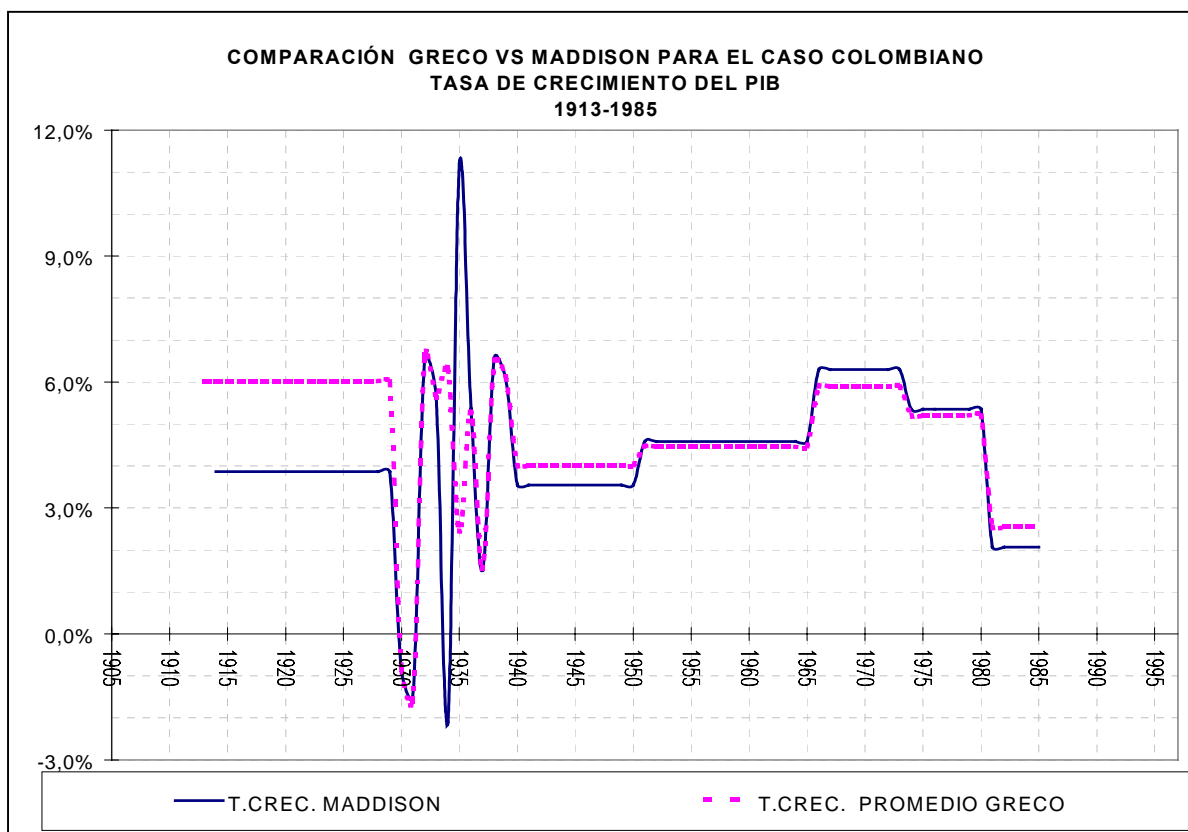
Comparación entre el desempeño de Colombia y el de los “tigres del Asia” Tasas de crecimiento anuales en porcentajes						
	Hong Kong	Singapur	Corea del Sur	Taiwan	Promedio tigres del Asia	Colombia
	1966-1991	1966-1990	1966-1990	1966-1990	1966-1990/91	1960-1994
Producto	7,3	8,7	10,3	8,9	8,8	4,5
Capital	8,0	11,5	13,7	12,3	11,4	4,5
Trabajo	3,2	5,7	6,4	4,9	5,1	3,2
Y/K inicial	0,357	0,497	0,310	0,261	0,356	0,331

Fuente: Young (1998); pagina 2. Datos de Colombia tomados del presente trabajo

Según los artículos de Crafts(1999) y Sarel (1997) el crecimiento de los “tigres asiáticos” estuvo fundamentado en una altísima acumulación de factores, una transición demográfica acelerada y una asimilación efectiva de las oportunidades tecnológicas, dado un capital humano con capacidad para absorber tales oportunidades. Es evidente que el crecimiento del capital colombiano fue mucho más bajo que el de los mencionados países asiáticos, siendo el nuestro de 4.5% anual, mientras que el de aquellos ha sido superior al 11% en los últimos treinta años (**Tabla 5**). El crecimiento de la fuerza laboral en Colombia también fue más bajo (3.2%) que en el Asia (5.2%) y con un menor nivel de educación al asiático. Empero, la relación producto/capital de Colombia en los años sesenta era similar a la asiática en los mismos años.

3.1. Análisis descriptivo de las series colombianas

Gráfico 4

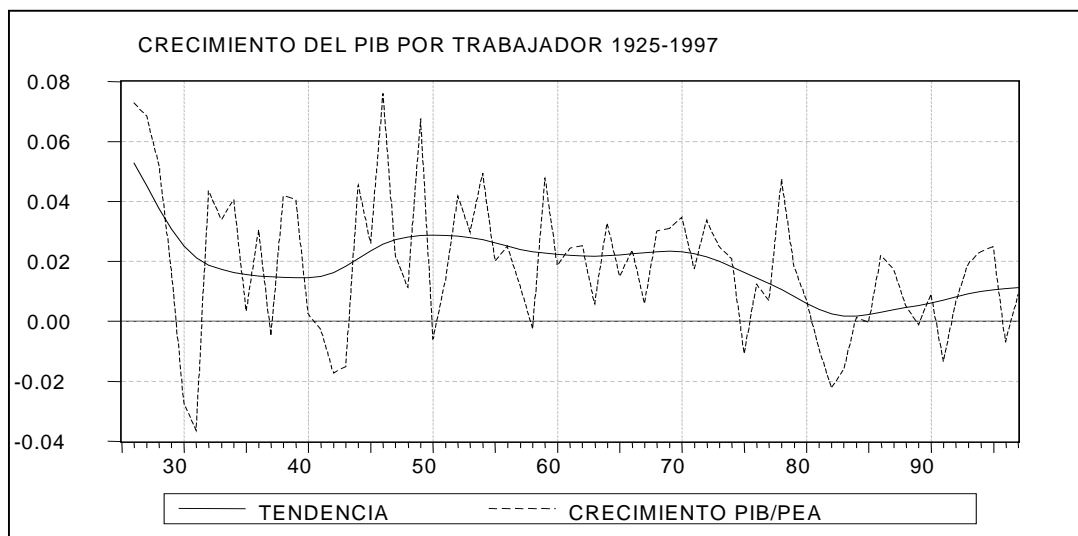


Nota: La comparación de las cifras exactas entre Greco y Maddison se encuentra en el Anexo Tabla 15A.

El gráfico presenta las tasas medias de crecimiento del PIB real total. Las dos series del gráfico solo difieren antes de 1929. A nuestro juicio la serie de Maddison para los años anteriores a 1929 subestima el ritmo de crecimiento colombiano en los años posteriores a la guerra civil llamada “de los Mil Días” (1898-1902)¹⁰.

¹⁰ La fuente de Maddison (1991) para las cifras del PIB entre 1913 y 1929 es L.J. Zimmerman (1964), *Arme en rijke landen*, The Hague.

Gráfico 5

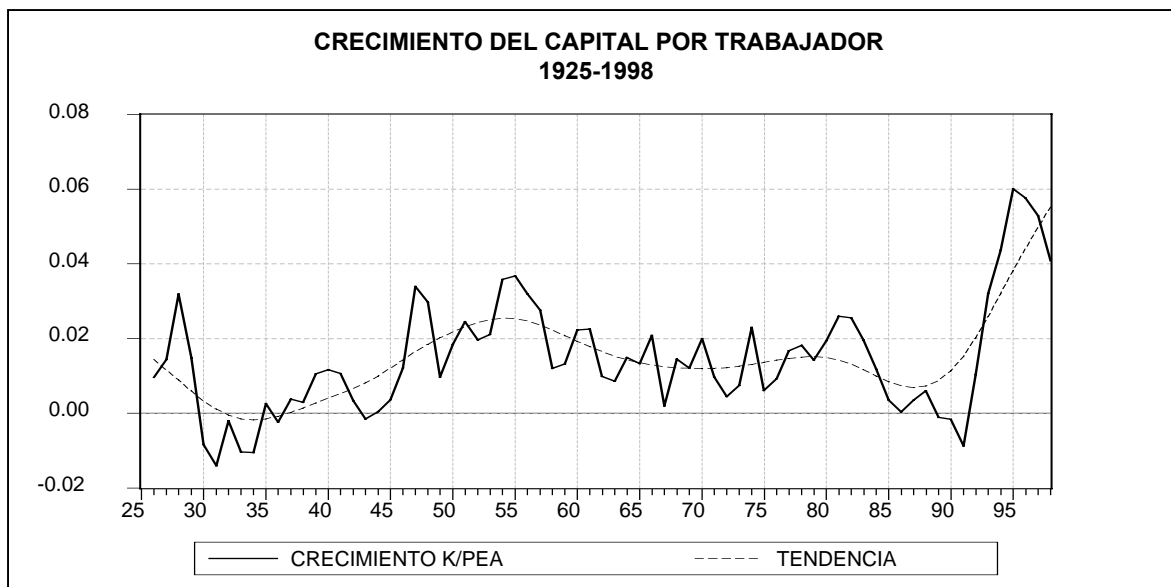


El gráfico 5 permite apreciar el crecimiento económico medido por los cambios de la relación entre el PIB real y la población económicamente activa (según las series que nos parecen más confiables y presentadas en el **Anexo 2**). Sobresale cómo entre 1932 y 1974 (aproximadamente) la tasa anual de aumento del PIB por miembro de la PEA¹¹ osciló alrededor de un nivel medio estable: 2.37% anual. Antes de 1932 se registró una alta inestabilidad: un auge extraordinario en la segunda mitad de los años 20, seguido por la Gran Depresión de principios de los años 30 cuando el producto por trabajador llegó a decrecer en casi 4% en 1931.

Después de 1974 parece insostenible la idea de que el crecimiento continúa por una trayectoria relativamente estable y constante. En efecto, a mediados de los años setenta se inició una caída de la tasa de crecimiento del producto en magnitud poco usual hasta entonces y llegó a -2.2% en 1982. Entre 1984 y 1998 el crecimiento promedio del producto por trabajador fue apenas de 0.7% anual.

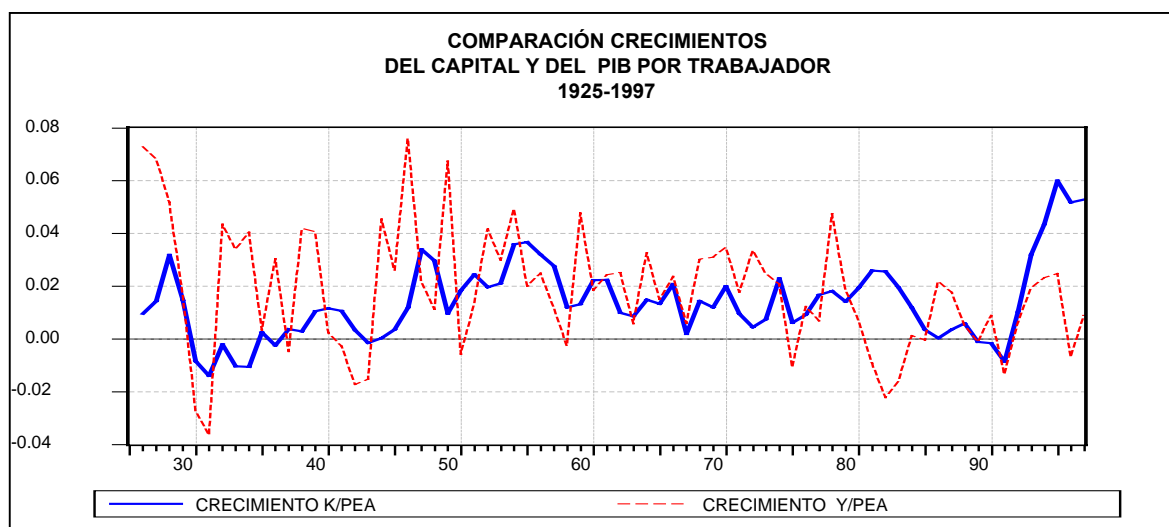
¹¹ Es un indicador no demasiado burdo tanto del producto por trabajador como del ingreso real per cápita.

Gráfico 6



El crecimiento del capital por persona activa (nuestro indicador de capital por trabajador) se vio más afectado por la crisis de los años treinta y por la segunda guerra mundial que el producto y solo se recuperó en el decenio de los cincuenta (Gráfico 6). Entre los sesenta y los setenta creció alrededor de 1.4% anual y solo a partir de 1992 inició un incremento acelerado con respecto a la tendencia.

Gráfico 7



En cuanto a la relación entre los crecimientos del capital y del PIB per cápita se observa que fue bastante estrecha entre 1947 y 1979. El gráfico 7 revela que en los años anteriores y posteriores a este período la relación es más débil. Por lo demás, el crecimiento promedio del PIB por persona activa ha sido mayor que el del capital per cápita en el conjunto de los años 1925-1998, pero menor en promedio desde 1975 (**Tabla 6**)¹².

Tabla 6

COMPARACIÓN DE LAS SERIES CAPITAL Y PRODUCTO POR PERSONA ACTIVA (promedio tasas de crecimiento anual, %)		
PERÍODOS	CAPITAL POR TRABAJADOR	PRODUCTO POR TRABAJADOR
1925-1950	0,70	2,34
1950-1975	1,74	2,17
1975-1990	1,11	0,55
1990-1998	3,19	0,65
1925-1998	1,46	1,79

3.2. Resultados econométricos

Con un análisis estadístico formal se sometieron a prueba las siguientes dos hipótesis:

- el producto por trabajador y el capital por trabajador mantienen una relación de equilibrio de largo plazo, es decir, las dos series están cointegradas (**Anexo 5**);
- la relación de cointegración adopta la forma de la ecuación (4) presentada en la sección anterior y se puede también expresar de la siguiente manera.

$$(6) \quad y_t = A_0 (1+g)^{(1-\alpha)t} k_t^\alpha$$

siendo:

y_t = PIB real dividido por la población económicamente activa;

A_0 = Parámetro de eficiencia de la población laboral en el momento inicial ($t=0$);

g = Tasa de crecimiento del parámetro A de eficiencia laboral;

α = Elasticidad del producto al capital;

¹² Véase la tabla 2 del Anexo sobre otras estadísticas descriptivas de las series colombianas.

k_t = Capital real dividido por la población económicamente activa.;

En términos logarítmicos la ecuación anterior queda así:

$$(7) \quad y_t = \mu + [(1-\alpha)\delta]t + \alpha k_t$$

siendo:

$$\mu = \ln A_0; \quad y_t = \ln y_t; \quad k_t = \ln k_t;$$

$$\delta = \ln(1+g)$$

Si las series estadísticas del capital por trabajador y del producto por trabajador son integradas de orden 1 (I(1)) se puede establecer una relación de largo plazo entre ambas series si al menos existe un vector de cointegración, o lo mismo, una combinación lineal de las dos series cuyo residuo sea estacionario. Se hicieron distintos ejercicios de cointegración para la relaciones de largo plazo y cuando no se encontró cointegración en ciertos períodos se realizaron ejercicios por mínimos cuadrados restringidos.

Tabla 7

PERÍODO	TIPO DE ESTIMACIÓN	PARÁMETROS	
		α	g
1925-1981	Cointegración de Johansen	0,4202	2,77%
1926-1994	Mínimos cuadrados restringidos	0,3565	2,24%
1950-1994	Mínimos cuadrados restringidos	0,4080	1,56%

La **Tabla 7** presenta los valores de los parámetros para las distintas estimaciones que resultaron válidas según los tests estadísticos (**Anexo 8**). Solo se encontró una relación de largo plazo estable entre las variables capital por trabajador y producto por trabajador en el período 1925-1981. El coeficiente α se mantuvo estable, alrededor de 0.42 en el período 1925-1981, al igual que la tasa de crecimiento de la eficiencia de la población laboral, g , alrededor de 2.80%¹³. α y g son altamente inestables después de 1983.

¹³ Una explicación mas detallada de la estabilidad de los coeficientes se realiza en el Anexo 6.

Como las series producto y capital por persona activa son I(1) y no se encuentra cointegración en los períodos 1925-1994 y 1925-1997, se diferenciaron las variables del modelo inicial y se realizó un ejercicio por mínimos cuadrados restringidos. En el período 1926-1994 (se pierde un dato al diferenciar) las variables del lado derecho de la regresión explican solo 3.48% de la variación de la variable dependiente ($\ln(\text{PIB}/\text{PEA})$), pero el parámetro α (la elasticidad del producto al capital) es significativo al 87.5% (Anexo Tabla 8A). Cuando se analiza el período 1950-1994, α aumenta su significancia al 92.05%, aunque el ajuste de la regresión sigue siendo muy bajo, 6.97%. El nivel del parámetro α se encuentra entre 0.356 y 0.407% (Anexo Tabla 8A). Este rango es compatible con otras estimaciones del caso colombiano posterior a 1950 (Posada 1993, Sánchez et al. 1996 –en su Anexo1).

La **Tabla 8** muestra los α obtenidos en distintos trabajos internacionales. Para el caso latinoamericano, Rincón (1998), en un ejercicio “*panel*” de 18 países para los años 1960-1990, calculó una elasticidad promedio, α , igual a 0.246, bastante inferior a la participación de los ingresos de capital en el producto, los cuales oscilaron entre 40% y 50%; según este autor, esta diferencia es un indicador del grado de imperfección del mercado de capital en América Latina. Para el caso estadounidense, Holtz-Eakin (1992), con una estimación del modelo de Solow con capital humano y con un modelo de convergencia, obtuvo un α entre 0.20 y 0.24. Para el caso mundial, Crafts (1999) identificó como válido un valor uniforme de α igual a 0.35 y para el Asia del Este, excluyendo Singapur, encontró un rango entre 0.28 y 0.35. Mankiw, Romer y Weil (1991) en su trabajo pionero del modelo de Solow con capital humano, encontraron un α de 0.31 para 95 países no petroleros y uno de 0.29 para 75 países intermedios.

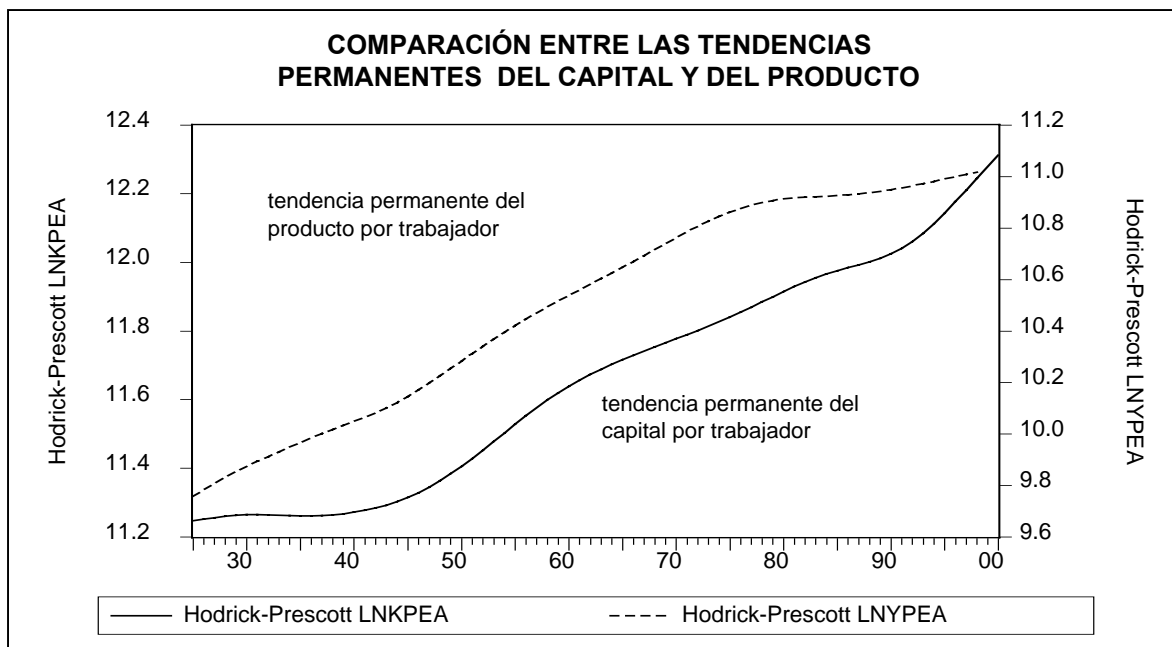
Tabla 8

COMPARACIONES INTERNACIONALES DEL PARÁMETRO α								
	LATINO-AMÉRICA	MUNDIAL	PAÍSES INTER-MEDIOS	OECD	USA		ASIA DEL ESTE	MUNDIAL
	Rincón (1998)	Mankiw et al. (1991)			Holtz-Eakin (1992)		Crafts (1999)*	
	1960-1990	1960-1989			1973-1986		1950-1996	
	Panel 18 países (incluye Colombia)	95 países no petroleros (incluye Colombia)	75 países no petroleros (incluye Colombia)	22 países	Modelo de Solow aumentado (con capital humano)	Controlando por condiciones iniciales (modelo de convergencia)	Contabilidad de crecimiento	
α	0.246	0.31	0.29	0.14	0,20	0,24	0,28-0,35	0,35
Notas:								
*En el artículo de Crafts (1999) los cálculos de α son obtenidos de la participación de las ganancias de capital en el ingreso nacional para utilizarlo en los ejercicios de contabilidad del crecimiento. Estos suponen este α es igual a la elasticidad del producto con respecto al crecimiento del capital, lo cual es estrictamente válido bajo competencia perfecta y cuando los retornos al capital social y privado son idénticos.								

El **Gráfico 8** muestra las tendencias de las series de capital y producto por trabajador y en él se hacen visibles dos hechos: primero, a partir de 1982 se aplanan la tendencia de la serie de producto por trabajador (LNYPEA), evidenciando una desaceleración de su crecimiento; segundo, el capital por trabajador (LNKPEA) mantiene su tendencia hasta 1990, año a partir del cual acelera su crecimiento. Estos cambios en las series conllevan al rompimiento de la relación de largo plazo entre las dos y se rechaza la hipótesis de cointegración al 5% de confianza en los períodos 1925-1994 o 1925-1997.

Sin embargo, cuando se realizan las estimaciones por mínimos cuadrados los coeficientes α y g no cambian mucho, revelando que las estimaciones básicas se mantienen en un cierto rango hasta 1994.

Gráfico 8



3.3. La tasa “natural” de crecimiento y el producto potencial

Con la relación de equilibrio de largo plazo de las variables capital por trabajador y producto por trabajador para 1925-1981 se calculó un PIB potencial, o lo mismo, un nivel de equilibrio de producción dados los factores productivos. Así, para el cálculo del PIB potencial se excluyeron los coeficientes de corto plazo del vector de corrección de errores (VEC) y se utilizó únicamente la relación de cointegración, específicamente la ecuación (7) para 1925-1981.

El **Gráfico 9** compara el PIB potencial con el observado. La no existencia de cointegración a partir de 1982 sugiere que el comportamiento del modelo es distinto a partir de tal año; sin embargo, para extender el cálculo del PIB potencial hasta 1997 se ejecutó una regresión por mínimos cuadrados restringidos y se supuso que los coeficientes α , μ y β ¹⁴ adoptan los mismos valores que en el período 1925-1981; además, para capturar el cambio estructural se incluyeron dos *dummies* a partir de 1982, una de intercepto y otra de tendencia¹⁵. La **Tabla 9** expone la regresión utilizada para extender el cálculo del PIB potencial hasta 1997; el **Gráfico 10** muestra el grado de ajuste del modelo presentado en la Tabla 9.

¹⁴ Recordemos que $\mu = \ln A_0$, $\beta = (1-\alpha)\delta$ y $\delta = \ln(1+g)$

¹⁵ También se reestimaron los valores de los coeficientes de corto plazo de Δy_{t-1} y Δk_{t-1} del VEC, pero el resultado del cálculo del PIB potencial no fue muy distinto al obtenido sin ellos; en cambio, al incluir las *dummies* en el momento del cambio estructural sí se mejoró la estimación.

Gráfico 9

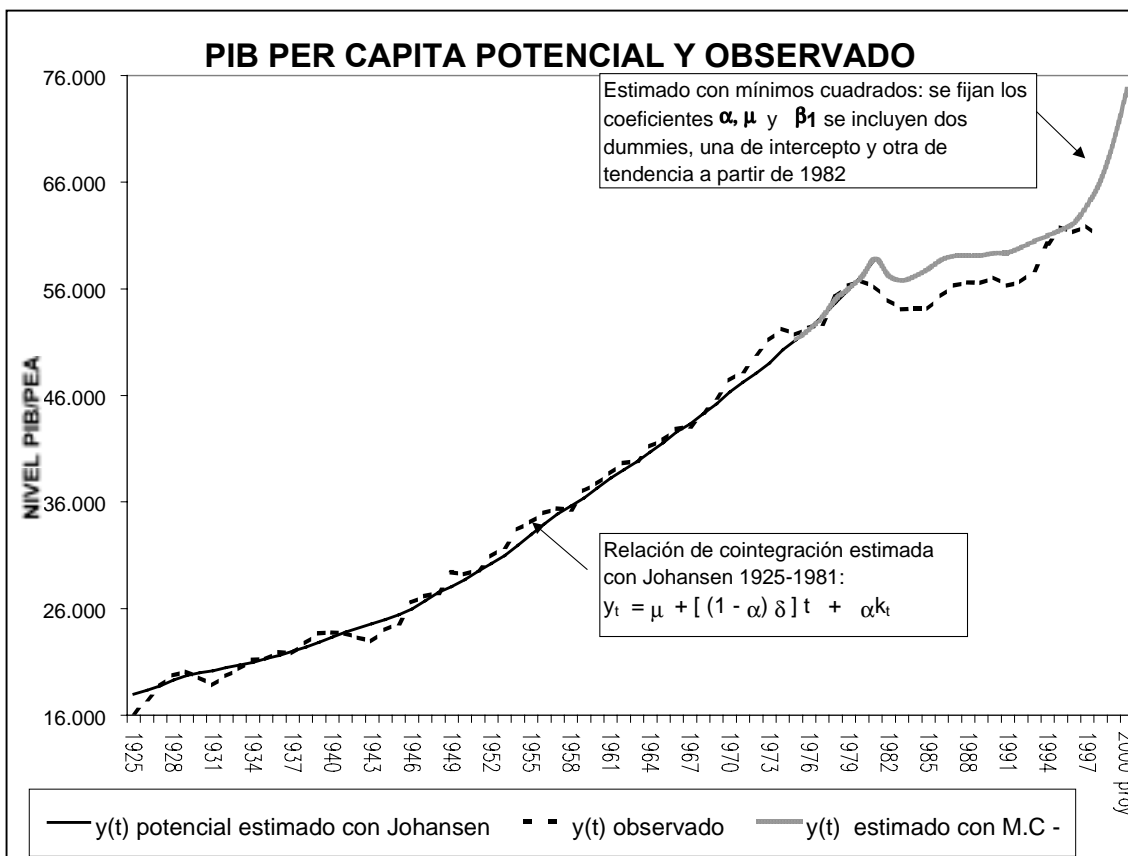
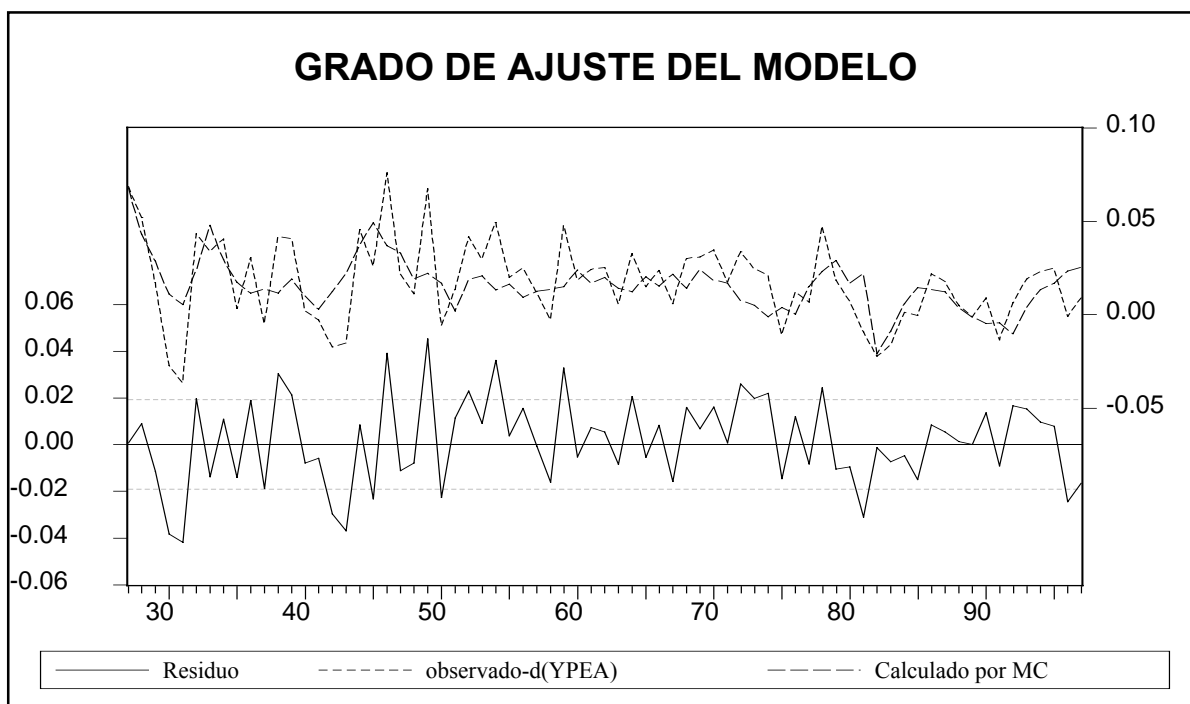


Tabla 9

Regresión por Mínimos Cuadrados Restringidos				
Muestra ajustada (datos anuales): 1927-1997				
Número de observaciones (ajustadas): 71				
Variable dependiente: $\Delta(\text{LNPIBPEA})$: Dy_t				
Ecuación: $\Delta y_t = \lambda[y(t-1) - \mu - \alpha k(t-1) - \beta t] + \phi_1 + \phi_2 * \text{dummy} + \phi_3 * \text{dummy}_2 + \varepsilon_t$				
	Coefficiente	Error estándar	Estadístico 't'	Probabilidad
α (dado)	0,4202			
β (dado)	0,0158			
μ (dado)	4,7642			
λ (dado)	-0,5190			
ϕ_1	0,0155	0,0028	5,5831	0,0000
ϕ_2	-0,0686	0,0112	-6,1042	0,0000
ϕ_3	-0,0059	0,0011	-5,2171	0,0000
R cuadrado:	0,301	Durbin Watson:		2,126
R cuadrado ajustado:	0,270	Prob(estadístico F)		0,000

Gráfico 10



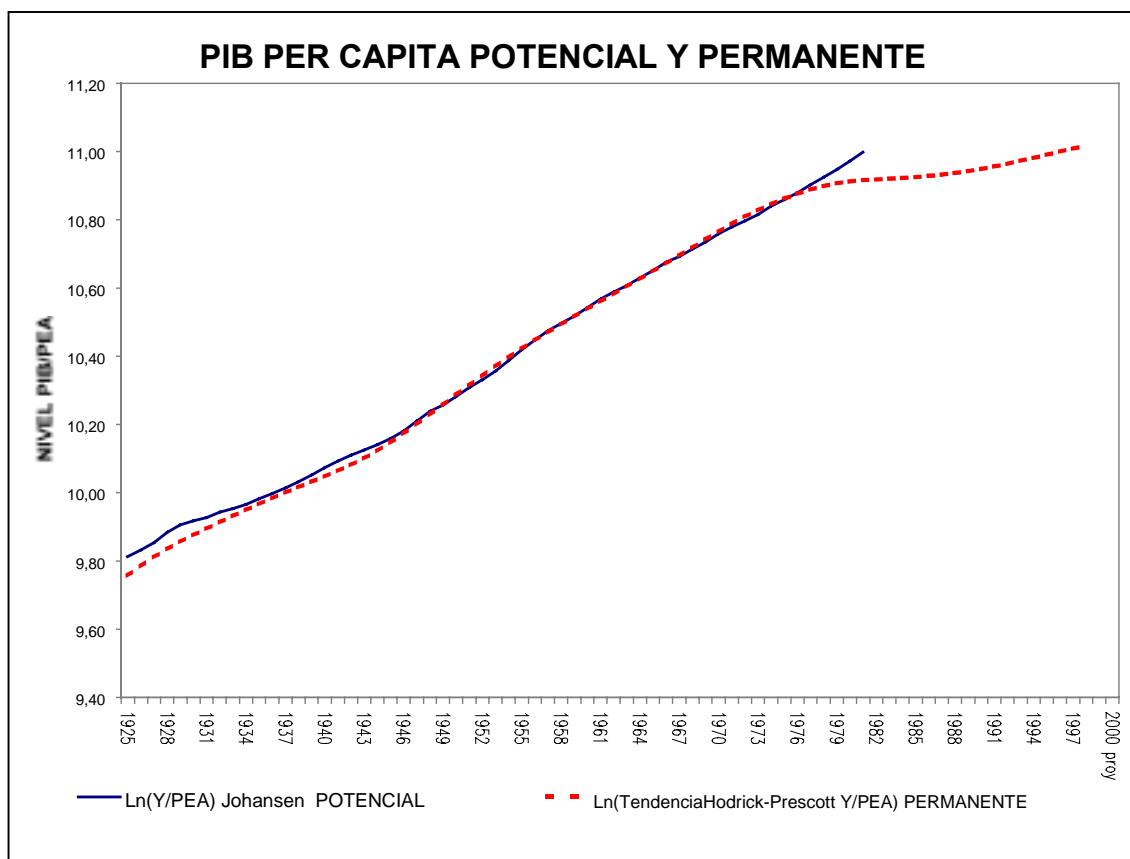
Además, quisimos comparar el comportamiento del PIB potencial obtenido de la relación de cointegración con el PIB permanente derivado de aplicar el filtro de Hodrick y Prescott. Según el resultado (Gráfico 11) las dos series son muy similares, aunque se percibe alguna subestimación de los auges antes de 1940 por parte del producto potencial calculado con Johansen. Con el filtro de Hodrick y Prescott se evidencia el cambio de tendencia en la serie observada del PIB desde fines de los setenta.

En realidad, encontramos dos posibles razones por las cuales se hace difícil la estimación del PIB potencial posterior a 1982 con base en el modelo Solow-Swan (y con otros modelos que hacen énfasis en la acumulación de capital físico); la primera es una desaceleración del cambio técnico, sustentada con los coeficientes negativos de las *dummies*, y ello hace que el PIB observado tenga un crecimiento tendencial más lento¹⁶; y la segunda, ya mencionada antes, es el crecimiento asombroso del capital a partir de los años noventa sin correspondencia con el crecimiento del PIB observado.

¹⁶ Este hecho fue documentado por Clavijo (1994), por Sánchez et al. (1996) y Ramírez y Jaramillo (1996).

Por lo anterior consideramos que estimar el PIB potencial con base en el componente permanente del PIB calculado con el filtro Hodrick-Prescott parece ser un recurso aceptable¹⁷.

Gráfico 11



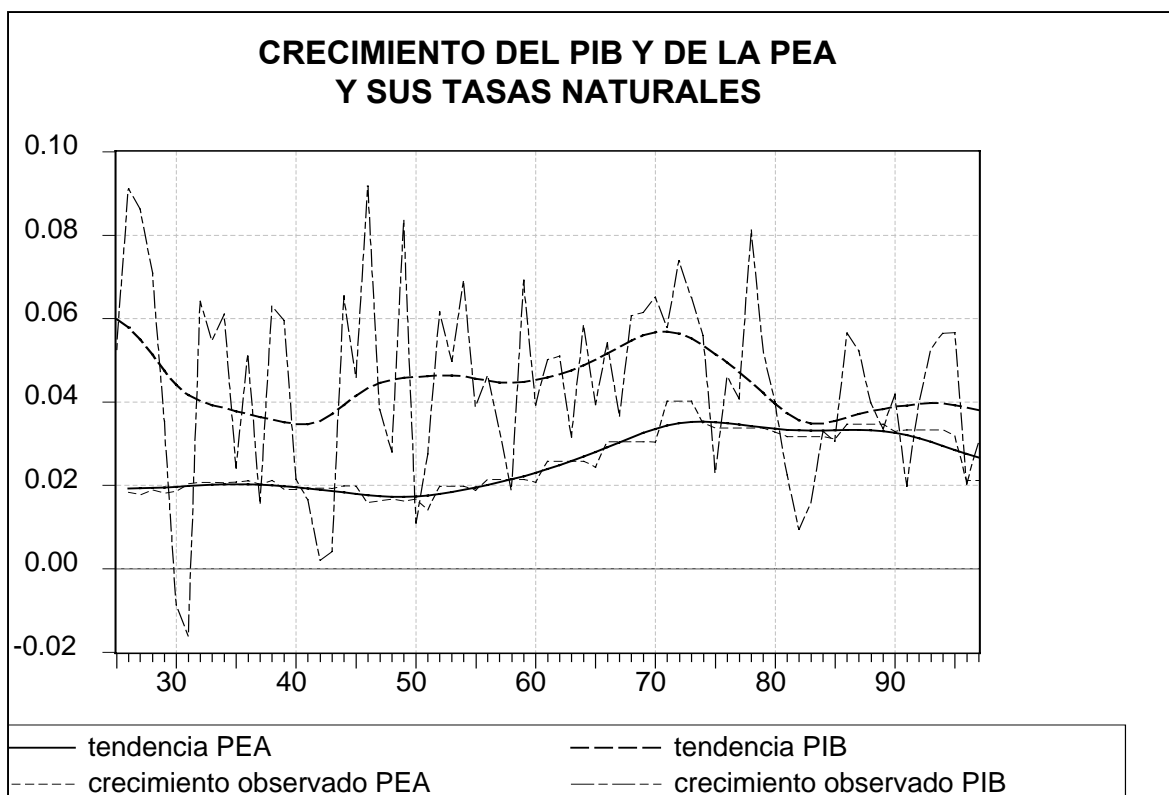
La principal implicación de lo anterior es la siguiente: entre 1925 y 1981 la tasa natural de crecimiento del PIB por miembro de la PEA (ó la tasa de crecimiento del PIB potencial o permanente) fue 2.07% anual y la de la PEA fue 2.40% anual, siendo la tasa natural de crecimiento del PIB total 4.57% anual; entre 1982 y 1997 dichas tasas fueron 0,57%, 3.15% y 3.77% respectivamente (**Tabla 10** y **Gráfico 12**), período en el cual el crecimiento de la PEA aumenta y el del PIB total disminuye.

¹⁷ Greenwood y Jovanovic (1998) argumentan que si bien el modelo de Solow (1956) identifica procesos de desaceleración en la productividad encontrados en la mayoría de los países después de 1973, no explica

Tabla 10

TASAS DE CRECIMIENTO NATURAL EN COLOMBIA (% anual)			
	PEA	PIB	PIB por trabajador
1905-1924	1,94	5,36	3,42
1925-1981	2,39	4,57	2,18
1982-1997	3,24	3,85	0,62
1925-1997	2,58	4,41	1,84

Gráfico 12



cuales son las causas de este estancamiento tecnológico reciente, y entra en contradicción con lo que actualmente se vive: el desarrollo de computadoras personales, teléfonos celulares, robots, internet, etc.

4. Resumen y conclusiones

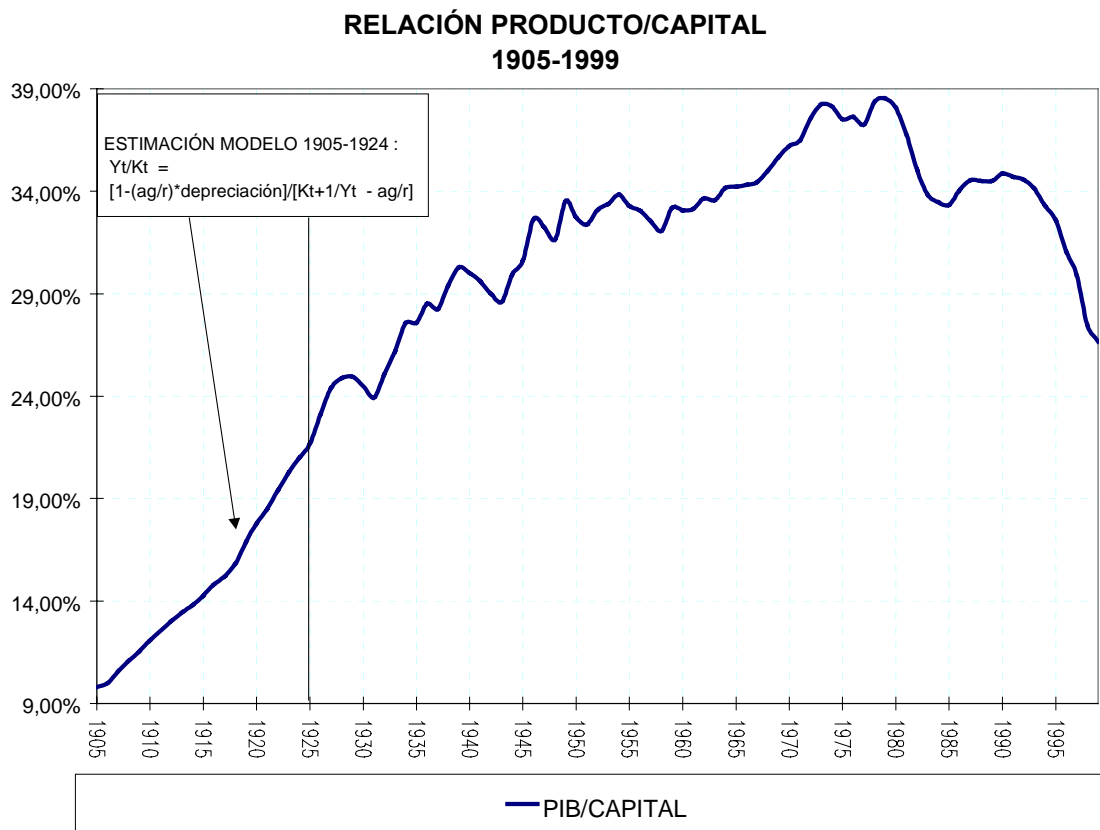
Una forma práctica de resumir y presentar conclusiones es la de enumerar algunas tesis que sobresalen del análisis previo, como se hará a continuación:

1. El crecimiento del producto colombiano en la segunda mitad del siglo fue mediocre comparado con el de Estados Unidos y el de los “tigres asiáticos”, pero su crecimiento a lo largo del siglo XX fue alto contrastado con la experiencia de los países desarrollados en el período 1850-1963, años en los cuales experimentaron el proceso de transición hacia su estado actual de desarrollo. También su desarrollo per cápita es semejante al de Brasil y México.
2. Las series de producto per cápita y capital per cápita no fueron estacionarias a lo largo del siglo XX, ni siquiera en torno a una tendencia determinística; fueron, por el contrario, series cuya tendencia tuvo un componente estocástico significativo. A la luz del modelo teórico, esto se traduce en que los impactos aleatorios provenientes de factores de oferta han dejado una huella perdurable en los niveles del producto y del capital per cápita.
3. Entre 1925 y 1981 tales variables sostuvieron una relación de cointegración o de equilibrio de largo plazo.
4. La relación de cointegración se ajusta a una formulación específica: la del modelo de Solow-Swan de crecimiento; bajo ésta el producto por trabajador depende del capital por trabajador, con rendimientos marginales decrecientes y rendimientos de escala constantes.
5. Entre 1925 y 1981 la elasticidad del producto al capital, α , fue 0.42 y la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral, g , fue 2.8% anual.
6. Con posterioridad a 1981 desaparece la evidencia de cointegración; aun así, los ejercicios con regresiones por mínimos cuadrados para 1925-1994 y 1950-1994 permiten estimar α y g en rangos casi similares aunque con valores medios algo mas bajos.
7. La no cointegración a partir de 1981 y los resultados de las estimaciones por mínimos cuadrados son síntomas de dos hechos básicos ocurridos desde mediados o fines de los

años setenta: el primero, una desaceleración en el crecimiento del producto por trabajador asociado a una caída de la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral; el segundo, una aceleración en el ritmo de crecimiento del capital por trabajador en la primera mitad de los noventa.

8. Aunque parte de lo ocurrido con la evolución del capital por trabajador a partir de 1991 puede explicarse por una sobreestimación de la inversión bruta, es preocupante el hecho de que el crecimiento económico haya adoptado en los últimos quinquenios una modalidad bajo la cual los esfuerzos de acumulación de capital físico no se traducen en ritmos compatibles de aumento del producto per cápita y por trabajador. Así, la relación producto/capital ha disminuido desde 1980 persistentemente (Gráfico 13), regresando recientemente a los niveles alcanzados en 1940. Un síntoma de lo anterior es el hecho de que el producto per cápita colombiano no se esté acercando al de Estados Unidos, como se mencionó y previamente.

Gráfico 13



9. Entre 1925 y 1981 la tasa natural de crecimiento del PIB por miembro de la PEA fue 2.07% anual y la de la PEA fue 2.40% anual, por lo cual la tasa natural de crecimiento del PIB total fue 4.57% anual; entre 1982 y 1997 dichas tasas fueron 0,57%, 3.15% y 3.77% respectivamente (**Tabla 10**).
10. En el Anexo 3 se presenta una estimación (provisional) del capital y de la relación producto/capital para 1905-1924. De acuerdo con tal estimación, entre 1905 y 1924 el capital creció a una tasa promedio de 1.28% anual, crecimiento menor a la tasa media de crecimiento del producto, la cual fue 5.43% anual (**Tabla 11**). Si se aceptan estos cálculos como válidos, la relación producto/capital promedio debió aumentar entre 1905 y 1924; así, el incremento de la misma entre 1925 y 1979 fue parte de un proceso iniciado desde principios del siglo XX.

Tabla 11

Producto y capital entre 1905 y 1924		
	Tasa crecimiento del PIB real	Tasa crecimiento del capital real
	<i>estimado por GRECO (1999)</i>	<i>estimación actual Anexo Tabla 9A</i>
1905-1924	5,43%	1,28%

Anexos

1. Modelo teórico

La función de producción que se utiliza en este trabajo es la siguiente:

$$(1) \quad Y_{t+1} = K_{t+1}^{\alpha} \left(A_{t+1}^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} L_{t+1} \right)^{(1-\alpha)}$$

Siendo:

Y : producto interno bruto real;

K : capital real;

α : elasticidad del producto al capital; $0 < \alpha < 1$;

L : población laboral;

A : puede ser entendido como un parámetro de eficiencia de la población laboral; $A > 1$;

$t+1$: un período del tiempo cualquiera.

Además, el modelo supone que el parámetro de eficiencia de la población laboral sigue la siguiente ley de evolución en el tiempo:

$$(2) \quad A_{t+1} = A_t (1+g)^{1-\alpha} \quad A_{t+1}^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = A_t^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} (1+g)$$

Siendo g la tasa de crecimiento por período del parámetro A cuando está elevada a la potencia $1/(1-\alpha)$ ¹⁸. Específicamente:

$$g = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} - 1;$$

Por tanto:

$$(3) \quad Y_{t+1} = K_{t+1}^{\alpha} A_t (1+g)^{1-\alpha} L_{t+1}^{1-\alpha}$$

¹⁸ Utilizar el componente exponencial $(1-\alpha)$ permite simplificar la ecuación (1) hasta obtener una relación inversión/producto muy sencilla, la cual se expondrá mas adelante.

Dado lo anterior, podemos establecer una relación entre el producto por trabajador y el capital por trabajador con una forma bastante conocida:

$$(4) \quad \frac{Y_{t+1}}{L_{t+1}} \equiv y_{t+1} = A_t(1+g)^{1-\alpha} \left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \right)^\alpha; \quad \text{sea:} \quad k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}$$

y en términos per cápita (por trabajador)

$$(5) \quad y_{t+1} = A_t(1+g)^{1-\alpha} k_{t+1}^\alpha = A_{t+1} k_{t+1}^\alpha$$

Así, el producto por trabajador es una función Cobb-Douglas del capital por trabajador expresada en una forma tradicional que incluye un parámetro tecnológico, A , el cual crece a una tasa constante por período, g .

2. La tasa de inversión

Con el anterior modelo se puede estimar la tasa de inversión de la economía y, por ende, el nivel del capital entre 1905 y 1924, período para el cual aún no se dispone de estimaciones directas y más confiables. Esta estimación supone que la tasa de interés real (r) es igual a la productividad marginal del capital ($\partial y / \partial k$); el anterior supuesto es necesario para cumplir con la condición de maximización de ganancias y, por lo tanto, se requiere para alcanzar un estado de equilibrio estable.

por lo tanto, si se cumple el supuesto :

$$(6) \quad \frac{\partial y}{\partial k} = r$$

entonces se reemplaza la derivada del producto con respecto al capital :

$$\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} = r$$

se despeja el capital de la ecuación anterior :

$$k_{t+1} = \left(\frac{\alpha A_{t+1}}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

por otra parte, la inversión se define de la siguiente manera :

$$(7) \quad i_t \equiv k_{t+1} - k_t$$

reemplazando la definición de capital :

$$i_t = \left(\frac{\alpha A_{t+1}}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left(\frac{\alpha A_t}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

reagrupando

$$i_t = \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} (1+g) - \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

por lo tanto, la inversión es igual a :

$$(8) \quad i_t = \left(\frac{\alpha A_t}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} g$$

Ahora bien, puesto que la ecuación (5) nos permite estimar el producto por trabajador en el período t, así:

$$y_t = A_t k_t^\alpha$$

Y hemos visto como el capital de equilibrio estable se puede expresar como:

$$k_t = \left(\frac{\alpha A_t}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Por lo cual, si se reemplazan las dos ecuaciones resulta:

$$(9) \quad y_t = A_t (A_t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

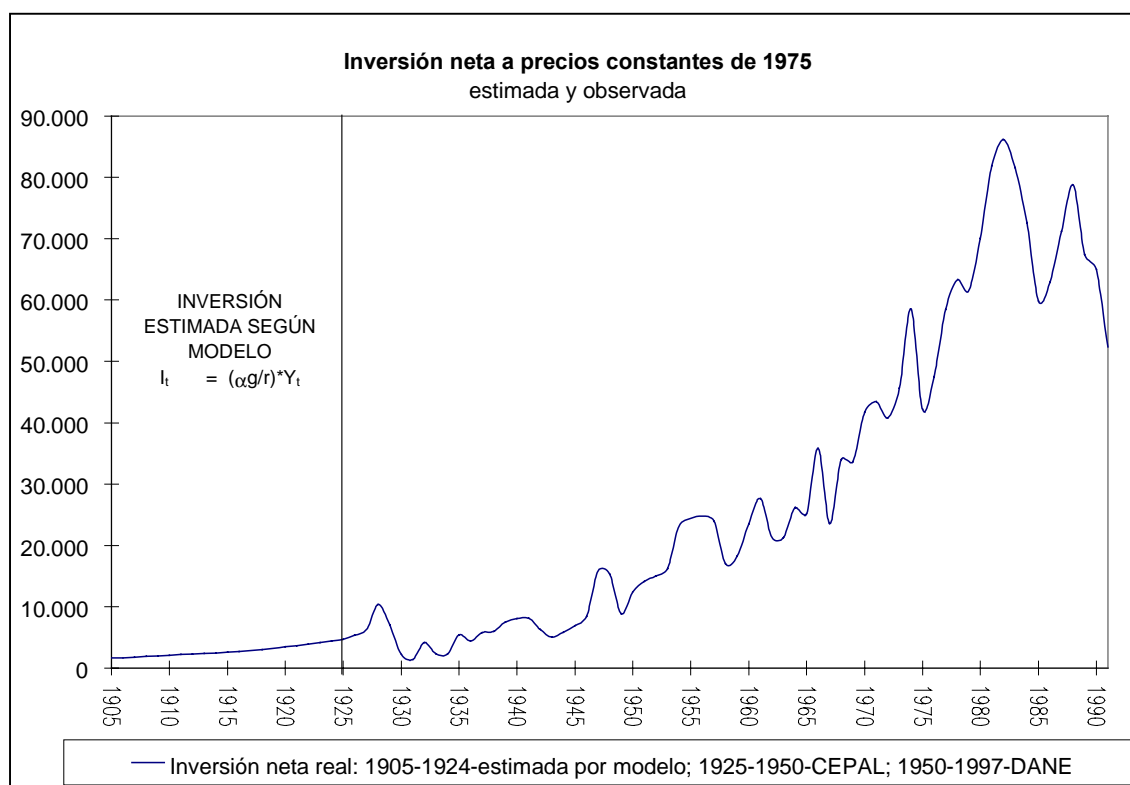
$$y_t = A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Por tanto, según las ecuaciones (8) y (9), la tasa de inversión o relación entre inversión y producto (i/y) de equilibrio estable es:

$$(10) \quad \frac{i}{y} = \frac{\alpha g}{r}$$

Dada r y estimadas α y g se puede calcular la tasa de inversión. A su turno, el nivel de la inversión total se puede calcular con base en la tasa de inversión y en el nivel del producto. Las estimaciones de la inversión y el capital suponen que los coeficientes α y g del modelo econométrico son estadísticamente estables.

Gráfico 14



3. La estimación del capital (1905-1924)

Si se considera que en estado estacionario se cumple la siguiente relación derivada del modelo expuesto:

$$(10.a) \quad \frac{i_n}{y_n} = \frac{\alpha g}{r}$$

Donde i_n = inversión neta por trabajador
 y_n = producto neto por trabajador

entonces en cada periodo t se cumple :

$$(10.b) \quad i_{n_t} = \frac{\alpha g}{r} y_{n_t}$$

para obtener la inversión neta total se multiplica por el número de trabajadores :

$$i_{n_t} L_t = \frac{\alpha g}{r} y_{n_t} L_t$$

o lo que es equivalente, el lado derecho de la ecuación se multiplica por el producto neto total :

$$(10.c) \quad I_{n_t} = \frac{\alpha g}{r} Y_{n_t}$$

pero el producto neto está compuesto por el producto bruto menos la depreciación del capital (δK):

$$(10.d) \quad I_{n_t} = \frac{\alpha g}{r} (Y_t - \delta K_t)$$

$$I_{n_t} = \frac{\alpha g}{r} Y_t - \frac{\alpha g}{r} \delta K_t;$$

además, la inversión neta es igual a la diferencia de capitales :

$$(10.e) \quad I_{n_t} = K_{t+1} - K_t$$

integrando las ecuaciones (10.d) y (10.e) :

$$(10.f) \quad K_{t+1} - K_t = \frac{\alpha g}{r} Y_t - \frac{\alpha g}{r} \delta K_t$$

reorganizando la ecuación (10.f) :

$$(10.g) \quad K_{t+1} - K_t + \frac{\alpha g}{r} \delta K_t = \frac{\alpha g}{r} Y_t$$

$$K_{t+1} - \frac{\alpha g}{r} Y_t = \left(1 - \frac{\alpha g}{r} \delta\right) K_t$$

despejando K_t (esta es la ecuación que se utiliza para retrapolar el capital desde 1925 hacia atrás) :

$$(10.h) \quad K_t = \frac{K_{t+1} - \frac{\alpha g}{r} Y_t}{1 - \frac{\alpha g}{r} \delta}$$

dividiendo por el producto bruto :

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{Y_t} - \frac{\alpha g}{r}}{1 - \frac{\alpha g}{r} \delta}$$

e invirtiendo la anterior relación para obtener la relación producto capital :

$$(10.i) \quad \frac{Y_t}{K_t} = \frac{1 - \frac{\alpha g}{r} \delta}{\frac{K_{t+1}}{Y_t} - \frac{\alpha g}{r}}$$

El problema de esta retrapolación del capital consiste en que α y g estimados econométricamente por el modelo del presente trabajo son derivados del producto bruto y de la inversión bruta. Por lo cual esto nos obliga a suponer que los α y g estimados econométricamente son iguales a los parámetros α y g de la igualdad expresada en la ecuación (10.a), los cuales se obtendrían con la inversión neta y el producto neto. Los resultados de esta estimación se encuentran en el **Tabla 9 A**.

4. Pruebas de estacionariedad

El proceso generador de una serie puede ser *estacionario o no estacionario*. Para explicar lo anterior, supóngase un mecanismo bajo el cual la serie y_t está generada por un proceso autorregresivo de primer orden:

$$(11) \quad y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

Si $\rho = 1$ (o mayor), entonces y_t será *no estacionario* y el valor actual de y_t dependerá de su valor inicial y de todos los errores del pasado. Así, la media y la varianza de y_t aumentarán a medida que $t \rightarrow \infty$ y no hay fuerza que revierta la serie a un valor medio. Si el valor inicial de y fuese cero, y_t sería la sumatoria de los errores del pasado¹⁹.

Si $|\rho| < 1$, entonces y_t es *estacionario*²⁰ con media y varianza constantes e independientes del tiempo. Así, las series estacionarias tienden a regresar a sus valores medios y fluctúan alrededor de ellos dentro de un rango más o menos constante, mientras que una serie no estacionaria tiene una media diferente en cada punto del tiempo. Igualmente, un choque a una variable estacionaria necesariamente tiene efecto temporal y la serie regresa a su media de largo plazo. En cambio, un choque a una variable no estacionaria tiene efecto permanente.

Si las dos series son no estacionarias, una regresión simple (por ejemplo, mediante mínimos cuadrados) puede encontrar relaciones aparentemente significativas, cuando en realidad lo que existen son solo correlaciones contemporáneas, siendo espúrea la aparente significancia de largo plazo. Si bien diferenciar las variables evade el problema de una regresión espúrea, elimina información de largo plazo.

Para evitar deducir relaciones falsas entre las variables primero se prueba si las series son estacionarias (al menos si lo son entorno a una tendencia determinística). Por tanto, la primera prueba es la de raíz unitaria sobre las series LNYPEA (logaritmo de

¹⁹ Si $y_0 = 0$ entonces $y_t = \sum_{i=1}^t \rho^{t-i} u_i$

Si $|\rho| \geq 1$ la media y la varianza crecen a medida que la muestra crece.

Si $|\rho| < 1$ la media y la varianza son independientes del la muestra temporal

²⁰ Por lo cual se denominaría variable integrada de orden cero I(0))

PIB/PEA), y LNKPEA (logaritmo del capital/PEA). La prueba de Dickey-Fuller aumentada (ADF), cuya hipótesis nula es la existencia de raíz unitaria, fue aplicada a las dos series y sus resultados no rechazan la existencia de una raíz unitaria y sugieren que las series LNYPEA y LNKPEA son integradas de orden 1 (I(1)) (**Tablas 4A y 5A**, incluidas pruebas de integración de segundo orden).

Utilizando la prueba alterna de KPSS²¹, la hipótesis nula es la existencia de estacionariedad en la serie (inversa a la prueba ADF); con este ejercicio se acepta que LNYPEA sea I(1), pero en el caso de LNKPEA solo acepta no estacionariedad al 10% (confiabilidad de 90%). Esto se puede justificar por el hecho de que las pruebas de raíz unitaria no son perfectamente confiables y, consecuentemente, las variables pueden ser consideradas como I(1)²² (**Tablas 4A y 5A**).

5. Pruebas de cointegración

Suponiendo que las dos variables tienen el mismo grado de integración, con una probabilidad de rechazo de la hipótesis correcta de 10%, se puede establecer una relación de largo plazo entre las dos si al menos existe un vector de cointegración, o lo mismo, si existe una combinación lineal de las mismas que sea estacionaria.

Dados los componentes de un vector Y_t ($m \times 1$) se dice que están cointegrados de órdenes “d” y “b”, y el vector Y_t se denota por

$$Y_t \sim CI(d,b),$$

si todos los componentes de Y_t son integrables del mismo orden “d” (I(d)) y existe un vector α , no nulo, tal que

$$\alpha' Y_t = z_t \sim I(d-b) \text{ donde } b > 0$$

Entonces al vector α se le denomina vector de cointegración. En el caso de dos variables con el mismo grado de integración y un vector de cointegración, los errores z_t serían integrados de orden cero (estacionarios). Con base en un proceso de máxima verosimilitud, el método de Johansen establece el número de vectores o ecuaciones de cointegración existentes.

²¹ Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992).

²² Harris (1995).

Para aplicar la técnica de cointegración de Johansen se requiere seleccionar el nivel apropiado de rezagos de un modelo VAR en los niveles de las variables LNYPEA y LNKPEA con el fin de asegurar términos de errores gaussianos en el vector de corrección de errores –es decir, asegurar que los errores no estén autocorrelacionados, sean normales, etc.-. El número óptimo de rezagos²³ del modelo VAR se establece mediante las siguientes tareas que se deben ejecutar conjuntamente (**Tabla 6A**):

- a. Encontrar el valor mínimo de los criterios de información de Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn, y sus recientes modificaciones, RWNAR-Akaike, RWNAR-Schwarz, RWNAR-Hannan-Quinn, los cuales penalizan por exceso de variables, para el conjunto de rezagos incluidos.
- b. Verificar ruido blanco en los errores del modelo VAR seleccionado en el paso a., mediante el estadístico Q de Ljung-Box, el cual mide la existencia de autocorrelación de orden superior a 1 en los errores.
- c. Verificar si los errores del modelo seleccionado tienen una distribución normal multivariada, para lo cual utilizamos la prueba de Doornik y Hansen (1994) para el tercer y cuarto momento de los errores.

Para la mayoría de los criterios el rezago óptimo es 2 para el modelo VAR en niveles y para tales rezagos los errores no están correlacionados (prueba Ljung-Box multivariada cuyo *p-value* es mayor que 0.05) y se distribuyen normalmente (prueba de Doornik y Hansen cuyo *p-value* también es mayor a 0.05).

Si las dos variables son integradas de orden 1 (I(1)) se puede establecer una relación de largo plazo entre las dos si al menos existe un vector de cointegración, o lo mismo, una combinación lineal de las dos series cuyo residuo sea estacionario. El modelo de cointegración se puede formular como un vector que incluye relaciones tanto de corto como de largo plazo. Así, el modelo presentado en la ecuación (7) de la sección 3.3 se transforma en un vector de corrección de errores, VEC, que tiene la siguiente forma:

$$(12) \quad \Delta y_t = \phi_{11}\Delta y_{t-1} + \phi_{12}\Delta k_{t-1} + \lambda_1[y_{t-1} - \alpha k_{t-1} - \mu - \beta t] + \varepsilon_{1t}$$

²³ Para saber cuantas variables del pasado se introducen en el Vector de Corrección de Errores: (t-1), (t-2),... (t-n).

$$\Delta k_t = \varphi_{21}\Delta y_{t-1} + \varphi_{22}\Delta k_{t-1} + \lambda_2 [y_{t-1} - \alpha k_{t-1} - \mu - \beta t] + \varepsilon_{2t}$$

Siendo $\beta = (1-\alpha)\delta$

Así, la relación entre el producto y el capital por trabajador debe girar alrededor de una constante, una tendencia determinística y un nivel de capital por trabajador si los valores absolutos de los coeficientes φ_{ij} y los λ_i son menores que 1. Ahora bien, como el método de cointegración de Johansen utiliza una estimación mediante máxima verosimilitud y dada la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud, entonces:

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{\beta}}{(1-\hat{\alpha})}$$

y puesto que $\delta = \ln(1+g)$, entonces:

$$(e^{\hat{\delta}} - 1) = \hat{g}$$

Los coeficientes φ_{11} , φ_{12} , φ_{21} , φ_{22} reflejan el impacto de corto plazo de cambios en las variables en $t-1$. De igual forma, λ_1 y λ_2 representan velocidades de ajuste a un desequilibrio entre el producto y sus determinantes de largo plazo. Mientras, α , μ y β son los coeficientes de largo plazo.

El problema típico que se enfrenta en cointegración es probar si $\lambda_1=0$ o $\lambda_2=0$. Si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$, entonces hay un solo vector de cointegración²⁴; pero si los dos λ son distintos de cero, hay dos vectores de cointegración.

Para el período 1925-1994 se rechaza cualquier cointegración a un nivel de significancia del 10% (**TABLA 7A**) o, de igual forma, en ese período no se evidencia una relación de largo plazo entre las variables. Si las dos variables son I(1) al 90% de acuerdo con las pruebas ADF y KPSS (Anexos), entonces se pueden diferenciar las variables y analizar su relación en una regresión por mínimos cuadrados²⁵ (MC). La regresión por MC a realizar es la siguiente:

$$(13) \quad dy_t = (1-\alpha)\delta + \alpha dk_t$$

donde:

$$dy_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

²⁴ De igual forma sucedería si $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1 = 0$

²⁵ También podría denominarse mínimos cuadrados restringidos porque se impone una forma específica.

$$dk_t = \ln k_t - \ln k_{t-1}$$

$$\delta = \ln(1+g)$$

Los resultados de la regresión por mínimos cuadrados restringidos se encuentran en la **Tabla 8A**, donde se analizan los períodos 1926-1994 y 1950-1994. Con estos resultados se sustenta la sección 3.3. de la parte principal de este documento.

Se encontró una relación de cointegración para el período 1925-1981²⁶ (**Tabla 9A**); además, se realizó recursivamente el ejercicio, disminuyendo uno a uno los años y la relación de cointegración se mantuvo hasta el período 1925-1960, pero no se sostuvo para el período 1925-1959 (**Tabla 10A**). El coeficiente α se mantuvo estable, alrededor de 0.42, al igual que la tasa de crecimiento de la eficiencia de la población laboral, g , alrededor de 2.80%²⁷ (**Tabla 11A**). Sobre el análisis de la estabilidad de los coeficientes léase el Anexo 8.

6. Hipótesis especiales en la cointegración

6.1. Prueba de exclusión

La prueba de exclusión se realiza para observar cual es el número de variables válidas dentro del vector de cointegración, pues cuando se analiza un modelo VAR existe la posibilidad de que solo un subconjunto de variables sea necesario dentro del espacio de cointegración. Así, la hipótesis nula es: “la variable no es necesaria para obtener relaciones estacionarias de largo plazo al 95% de confianza”. Entonces, si se define matricialmente el VEC de la siguiente manera.

(14)

²⁶ Para el período 1925-1981 se realizaron las pruebas de raíz unitaria correspondientes, las cuales se encuentran en los Anexos-Tablas 4A y 5A, y en el Anexo-Tabla 6A se muestra la escogencia del rezago óptimo para el VAR.

²⁷ Una explicación mas detallada de la estabilidad de los coeficientes se realiza en el Anexo 6.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta k_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ \Delta k_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ k_{t-1} \\ \mu_t \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

y según nuestro modelo

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 & \eta_2 &= -\alpha \\ \eta_3 &= -1 & \eta_4 &= -\beta \end{aligned}$$

Y si, por ejemplo, si la prueba cuestiona que k_{t-1} no es necesaria para obtener relaciones estacionarias de largo plazo, entonces, en este caso la hipótesis nula es que $\eta_2 = -\alpha = 0$. De igual forma, si la prueba cuestiona que la tendencia no es necesaria para obtener relaciones estacionarias de largo plazo, entonces, en este caso la hipótesis nula es que $\eta_4 = \beta = 0$.

En este caso todas las variables son necesarias dentro del vector de cointegración, incluso la tendencia, en todos los subperíodos de la muestra (**Tabla 12A**).

6.2. Prueba de estacionariedad multivariada (Hansen y Juselius)

Usualmente se verifica la estacionariedad con pruebas univariadas tipo ADF o KPSS. Sin embargo, esta es una prueba multivariada bajo la cual la hipótesis nula es: “existe estacionariedad dado el vector de cointegración”, en oposición al test univariado de Dickey-Fuller cuya hipótesis nula es la de “no estacionariedad de la serie”. Además esta prueba es una χ^2 , mientras que el test univariado tiene una distribución distinta encontrada por Dickey y Fuller.

Según esta prueba, las variables y_t (LNYPEA) y k_t (LNKPEA) son no estacionarias para todos los subperíodos, dado el espacio de cointegración (**Tabla 12A**).

6.3. Exogeneidad débil para los parámetros de largo plazo

La prueba de exogeneidad débil es una hipótesis sobre las filas de la matriz λ (en nuestro caso el vector λ), cuando los parámetros de interés son los parámetros de largo

plazo α y β . Entonces, la condición para que LNKPEA sea exógena es que $\lambda_2=0$ y esto implica que Δ LNKPEA no contiene información sobre los parámetros de largo plazo de η (siendo η el vector de coeficientes de largo plazo).

Según los resultados, se acepta que la variable LNKPEA es exógenamente débil para los parámetros de largo plazo α y β (**Tabla 12A**).

7. ¿Es endógeno el producto per cápita? (prueba de exogeneidad fuerte)

Sea :

$$(15) \quad y_t = \psi_0 + \psi_1 x_t + \psi_2 y_{t-1} + u_t$$

si x_t es estocástico, el proceso de generación de datos puede estar dado por :

$$(16) \quad x_t = \xi x_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\xi| < 1 \quad y \quad \varepsilon_t \sim NIID (0, \sigma^2)$$

Si μ_t y ε_t no están correlacionadas, se puede decir que la covarianza de los dos errores es cero ($E(\mu_t \varepsilon_s)=0$ para todo t y s). De esta manera es posible tratar x_t como si fuera fija e independiente de u_t (así, la covarianza de x_t y u_t es cero: $E(x_t, u_t)=0$) con el propósito de estimar la ecuación (15). Así x_t se puede considerar como exógena fuerte en términos de la ecuación (15) y decir que x_t causa a y_t en el sentido de Granger.

Si (16) es reformulado como:

$$(17) \quad x_t = \xi_1 x_{t-1} + \xi_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

se sigue cumpliendo que $E(x_t, u_t)=0$, pero como los valores pasados de y_t ahora determinan a x_t , entonces x_t solo puede ser considerada como exógena débil en el modelo (15). Esto quiere decir que x_t todavía causa a y_t , pero no en el sentido de Granger, porque los valores rezagados de y_t determinan x_t .

En términos prácticos, la exogeneidad fuerte se cumple cuando habiendo encontrado exogeneidad débil también se cumple la prueba de no causalidad de Granger de y con respecto a x .

La aproximación de Granger (1969) al problema de saber si x causa y se utiliza para observar cuanto del valor actual de y puede ser explicado por valores pasados de y ;

luego se observa si añadiendo valores rezagados de x se puede mejorar la explicación. Si los coeficientes de x rezagados son estadísticamente significativos en la ecuación de y , entonces x causa a y en el sentido de Granger.

Al realizar la prueba de causalidad tipo Granger para los períodos 1925-94 y 1925-81 no se puede rechazar la hipótesis “LNKPEA no causa LNYPEA en el sentido de Granger” pero si se puede rechazar la hipótesis “LNYPEA no causa LNKPEA en el sentido de Granger”. Así la causalidad de Granger corre en un solo sentido de LNYPEA a LNKPEA y no en sentido contrario. Por lo tanto, queda demostrado que el capital per cápita es una variable exógena débil pero no exógena fuerte (**Tabla 13A**).

8. Prueba de estabilidad de los coeficientes

8.1. Estabilidad de α

Estimando un VEC recursivo en donde se añade un año adicional en cada nueva estimación, se calculó el coeficiente α y se encontró que es estable en el período en el cual se obtiene cointegración (1925-1981), pero no en períodos anteriores a 1925-1960 o en períodos que incluyan años posteriores a 1981 (**Gráfico 2A y Tabla 11A**).

8.2 Estabilidad de δ (y, por ende, de g)

También con un VEC recursivo se calculó la estabilidad del coeficiente de la tendencia, β , siendo estable entre los subperiodos 1927-1954 y 1927-1981 (**Gráfico 3A**). La tasa de crecimiento de la eficiencia laboral en el VEC recursivo es baja inicialmente hasta 1954 y se vuelve estable en el periodo de cointegración (**Gráfico 4A**).

8.3 Estabilidad del conjunto de coeficientes

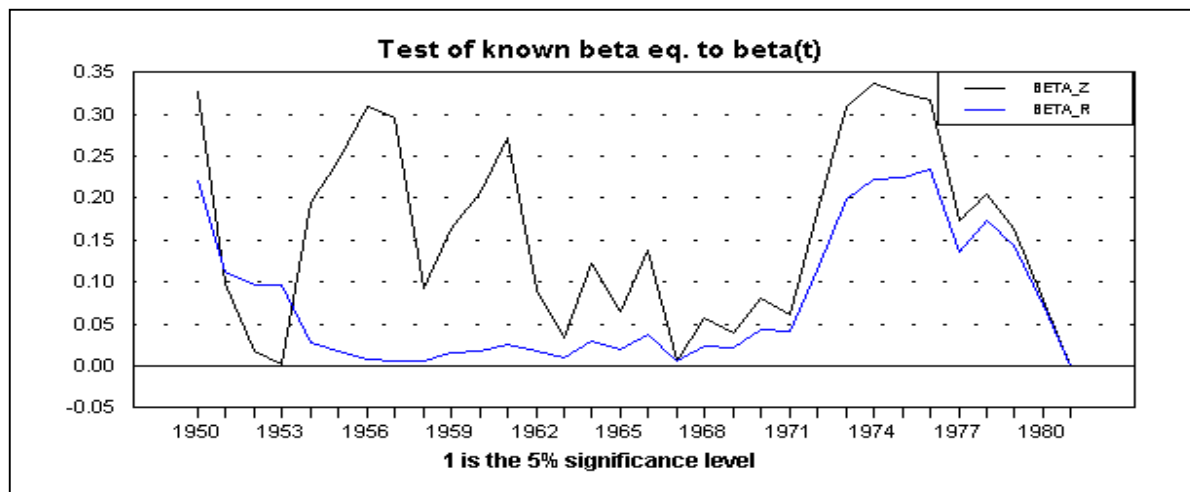
Con una estimación recursiva, el programa CATS realiza una prueba para el conjunto de coeficientes del vector de cointegración. La prueba permite apreciar dos características de los coeficientes del vector dependiendo de si se escoge el período completo de la estimación o una submuestra de éste. La primera característica del vector que se puede observar mediante la prueba es la ubicación del modelo dentro o fuera del espacio de cointegración; la segunda característica observable es la estabilidad de los coeficientes.

La primera opción de la prueba, con la cual se verifica la constancia del espacio de cointegración, toma el período completo y estima recursivamente con una ventana muestral que elimina año tras año. La prueba se distribuye asintóticamente como una χ^2 con 1 grado de libertad según nuestro caso²⁸. Como este test ha sido re-escalonado de manera tal que la unidad corresponde a la prueba con 5% de significancia, entonces, si $Z(t)$ y $R(t)$ ²⁹ están por debajo de la unidad se puede decir que el modelo identificado se encuentra en el espacio de cointegración en todas las submuestras. En el **Gráfico 5A** se muestra la prueba para el período 1925-1981, estimando recursivamente hacia atrás hasta 1950. Como todos los valores se ubican por debajo de 1 se puede concluir que el modelo identificado con constante y tendencia se encuentra dentro del espacio de cointegración en todos los subperíodos.

²⁸ Los grados de libertad están determinados por la siguiente ecuación: $(p-r)r$, siendo p el número de variables y r el rango o número de vectores cointegrados.

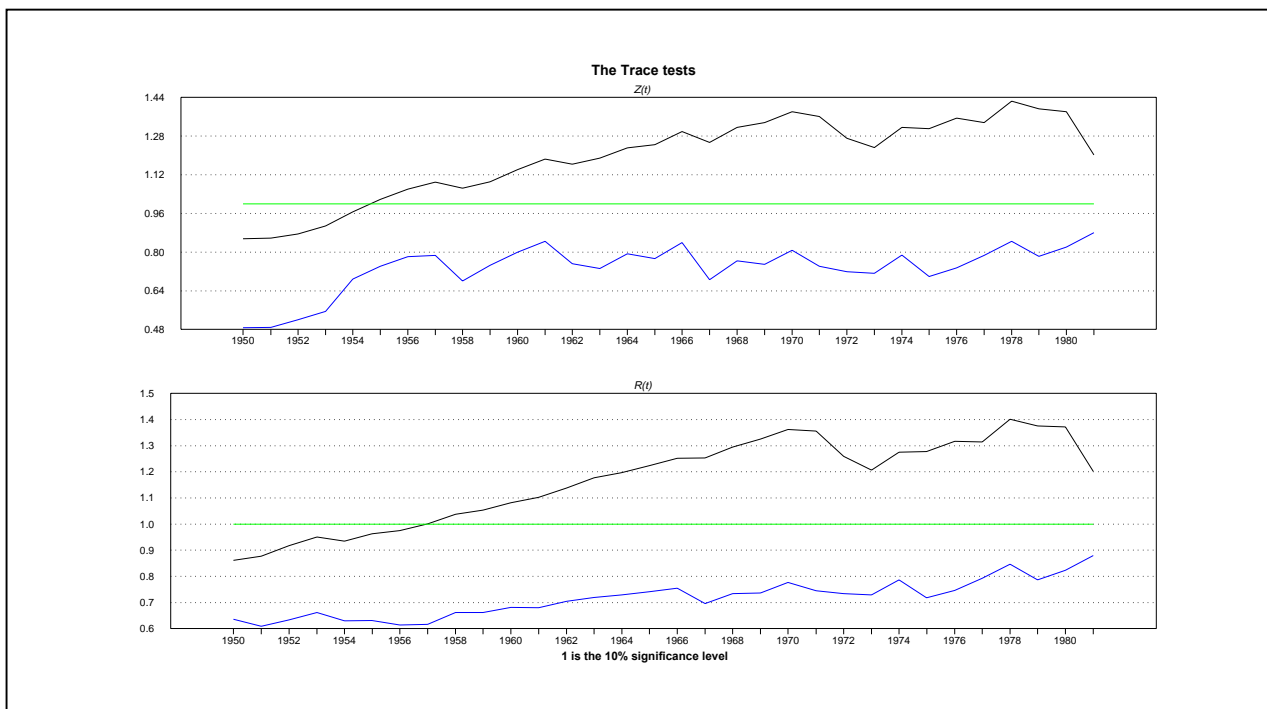
²⁹ $Z(t)$ corresponde al modelo VEC completo con efectos de corto y largo plazo, $\beta'z_t$ muestra el desequilibrio actual como una función de las dinámicas de corto y largo plazo, $R(t)$ es el vector de los residuos y $\beta'R_t$ es el desequilibrio actual en función de los efectos de largo plazo. “Beta” en el manual de CATS corresponde al vector (ó la matriz) de coeficientes del vector de cointegración.

Gráfico 5A (constancia del espacio de cointegración)



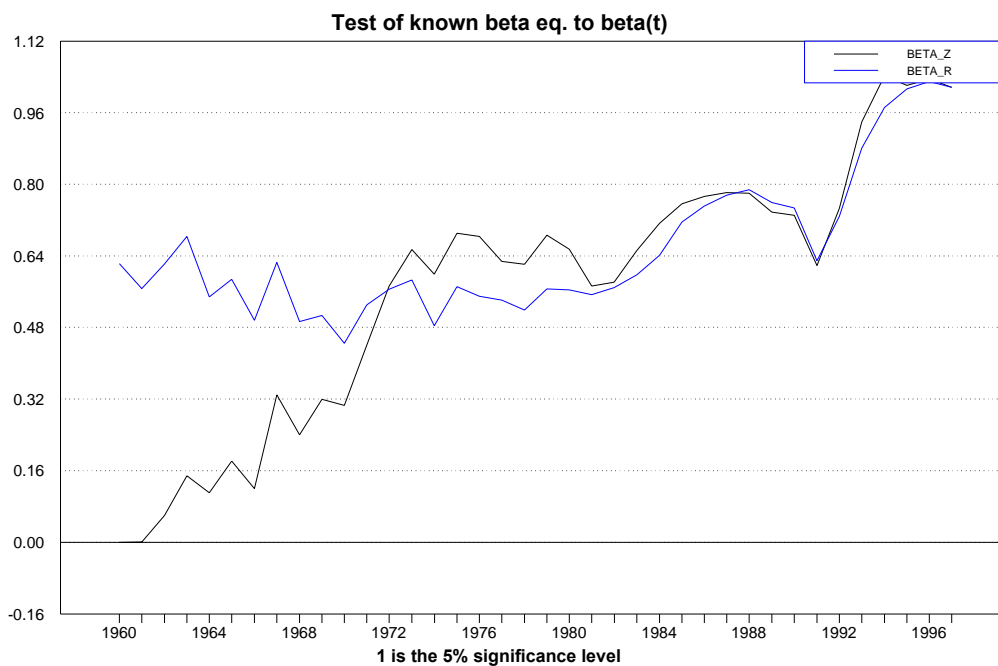
La prueba de la traza representada en el Gráfico 6A revela el número de veces que el test estadístico está por encima de la unidad verificando así el grado de cointegración del modelo especificado, el cual en este caso es 1 a partir de 1954.

Gráfico 6A (prueba de la traza para verificar el rango de cointegración)



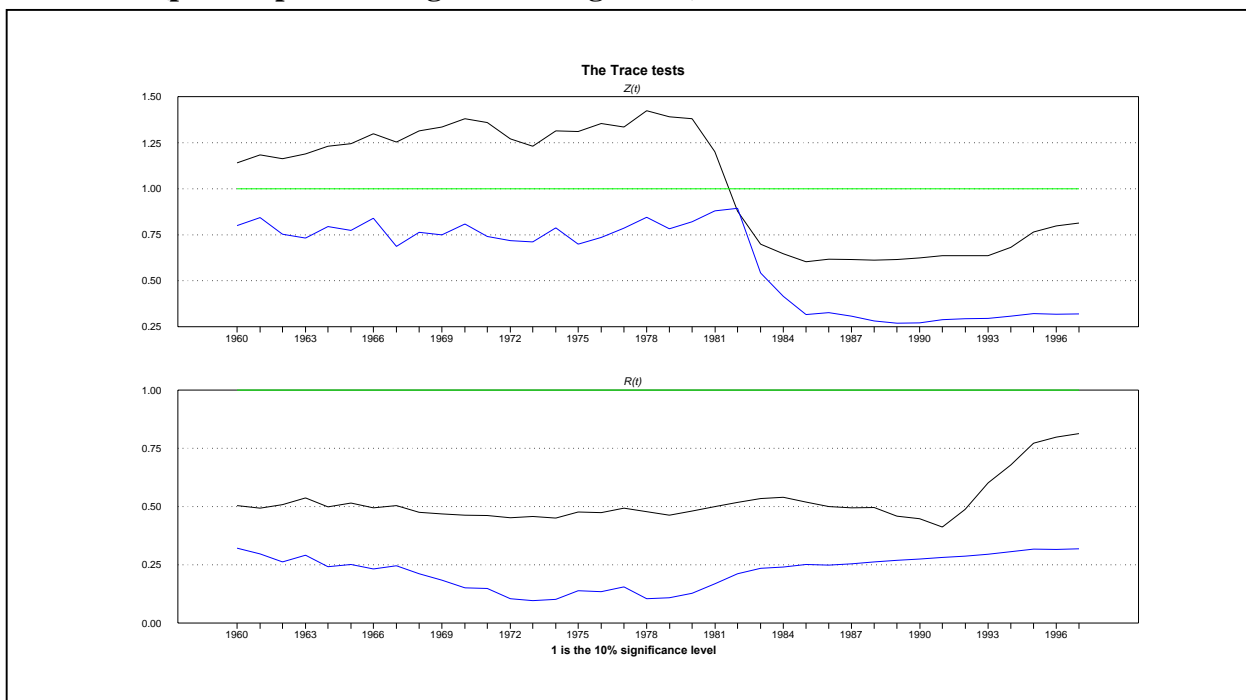
La segunda opción estima el modelo partiendo de una submuestra y con una ventana muestral va añadiendo año tras año recursivamente. Con este método revisa si existe un quiebre estructural en algún punto. De igual forma, el *test* es equivalente al anterior tal que la unidad corresponde a la prueba con 5% de significancia. Entonces, partiendo de una submuestra 1925-1960 y observando el **Gráfico 7A**, si $Z(t)$ y $R(t)$ están por debajo de la unidad se puede decir que los coeficientes del vector de cointegración son estables; según el gráfico los coeficientes son estables hasta 1994, año a partir del cual existe un quiebre estructural.

Gráfico 7A (estabilidad de los coeficientes de la ecuación de cointegración)



Con la misma segunda opción con la que se estima el modelo partiendo de una submuestra que se amplía recursivamente, la prueba de la traza representada en el **Gráfico 8A** evidencia un grado de cointegración igual a 1 que sólo se sostiene hasta 1982.

Gráfico 8A (prueba para el rango de cointegración)



REFERENCIAS (incluye texto, anexos y tablas)

- **Barrios, Adriana, Martha Luz Henao, Carlos Esteban Posada, Fanny Mercedes Valderrama y Diego Mauricio Vásquez;** “Empleo y capital en Colombia: nuevas estimaciones (1950-1992)”. *Archivos de Macroeconomía (DNP)*, No. 15 (1993).
- **Barro, Robert J. y Xavier Sala-i-Martin;** *Economic Growth*; McGraw-Hill, Inc. 1995.
- **CEPAL;** *Análisis y proyecciones del desarrollo económico. El desarrollo económico de Colombia. Anexo estadístico*, DANE, 1957.
- **Clavijo, Sergio;** “Crecimiento económico y productividad en Colombia: una perspectiva de largo plazo (1957-1994)”, *Archivos de Macroeconomía (DNP)*, No. 30 (1994).
- **Crafts, Nicholas;** “East Asian growth before and after crisis”; *IMF Staff papers*, Vol. 46, No 2 (Junio 1999).
- **Departamento Administrativo Nacional, DANE;** *Nueva base de cuentas nacionales, Resultados 1994-1995*, (Mayo 1999).
- **Engle, Robert F., David F. Hendry y Jean-Francois Richard;** “Exogeneity”. *Econometrica* , 51 (1983).
- **Flórez, Carmen Elisa;** *Las Transformaciones Socio-Demográficas en Colombia durante el siglo XX*. Documento CEDE presentado al Banco de la República (Agosto 1998).
- **Granger, C. W. .J.;** “Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods” , *Econometrica*, 37 (1969).
- **GRECO (Grupo de Estudios del Crecimiento Económico Colombiano);** “El desempeño macroeconómico colombiano –series estadísticas (1905-1997)- Segunda Versión”. *Borradores de Economía (Banco de la República)*, No. 121 (Febrero 1999).
- **Greenwood, Jeremy y Boyan Jovanoic;** “Accounting for growth”; *NBER working paper 6647* (Julio 1998)
- **Hall, Robert y Charles H. Jones;** “Why do some countries produce so much more output per worker than others?”; *NBER working paper 6564* (mayo 1998)

- **Hamilton, James D. y Josefina Monteagudo;** “Augmented Solow model and productivity slowdown” ; *Journal of Monetary Economics*, 42, (1998)
- **Harris Richard. I.D.;** *Using Cointegration Analysis in Econometric Modelling*. Prentice Hall /Harvester Wheatsheaf, 1995.
- **Holtz-Eakin, Douglas;** “Solow and the states: capital accumulation, productivity and economic growth”, *NBER working paper* 4144 (1992).
- **Johansen, Soren y Katarina Juselius;** “Maximum Likelihood Estimation and Inferences on Cointegration—with applications to the demand for money,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52 (1990).
- **Johansen, Soren.** *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, 1995.
- **Johansen, Soren;** “Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models,” *Econometrica*, 59 (1991).
- **Kwiatkowski Denis, Peter C.B. Phillips, Peter Schmidt y Yongcheol Shin;** "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?", *Journal of Econometrics*, 54 (1992).
- **López Alejandro, Carolina Gómez y Norberto Rodríguez;** “La caída de la tasa de ahorro en Colombia durante los años noventa: evidencia a partir de una base de datos para el período 1950-1993”. *Borradores Semanales de Economía* (Banco de la República), No. 57 (1996).
- **Maddison, Angus;** *Monitoring the world economy 1820-1992*; OEDC Developing Centre Studies , 1995.
- **Maddison, Angus;** *Long-term trends in Latin American economic development*; Interamerican Delopment Bank, 1991.
- **Mankiw, N. Gregory, David Romer y David Weil;** “A contribution to the empirics of economic growth” ; *Quarterly Journal of Economics*, 107 (Mayo, 1991)
- **Minami, Ryōshin;** *The Economic Development of Japan. A Quantitative Study*; St. Martin’s Press, New York , 1986.

- **Obstfeld, Maurice y Kenneth Rogoff;** *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge (Ma), 1996.
- **Ohkawa, Kazushi y Henry Rosovsky;** *Japanese economic growth: trend acceleration in the twentieth century*; Stanford University Press and Oxford University Press, 1973.
- **Posada, Carlos Esteban;** “Productividad, crecimiento y ciclos en la economía colombiana (1967 1992)” ; *Archivos de Macroeconomía* (DNP), No. 16 (1993).
- **Ramírez, Manuel y Fernando Jaramillo;** “Los determinantes de la productividad total de los factores en Colombia” en *El crecimiento de la productividad en Colombia* (Ricardo Chica, coordinador), DNP- Colombia -Fonade, 1996.
- **Rincón, Augusto;** "Crecimiento económico en la América Latina. Estudio basado en el modelo neoclásico", *El Trimestre Económico*, Vol. LXV, No. 259 (1998).
- **Sánchez, Fabio, Jorge Iván Rodríguez y Jairo Nuñez,** “Evolución y determinantes de la productividad en Colombia: un análisis global y sectorial” en *El crecimiento de la productividad en Colombia* (Ricardo Chica, coordinador), DNP -Colombia- Fonade, 1996.
- **Sarel, Michael;** “Growth in East Asia:What we can and what we cannot infer” ; IMF Working Paper 95/98, 1997.
- **Solow, Robert M.;** “A contribution to the theory of economic growth”; *Quarterly Journal of Economics*, No. 70, 1, (Febrero 1956).
- **Solow, Robert M.;** *Growth theory – an exposition- (The Radcliffe lectures delivered in the University of Warwick, 1969, and Nobel Prize lecture, 1987)*; Oxford University Press, 1987.
- **Summers, Robert y Alan Heston;** “The Penn World Tables (Mark 5): An expanded set of international comparisons”; *Quarterly Journal of Economics*, No 106, (1991)
- **Summers, Robert y Alan Heston;** “The Penn World Tables (Version 5.5”); disponible en diskette en el National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA. (1993)
- **Swan, Trevor;** “Economic growth and capital accumulation” *Economic Record*, No. 32 (Noviembre 1956).

- **Young, Alwyn;** “Paasche vs Laspeyres: the elasticity of substitution and bias in measures of TFP growth”; *NBER working paper 6663* (julio 1998).

ANEXO - Tabla 1 A

EXPLICACIÓN DE LAS SERIES		
<u>Nombre de la serie</u>	<u>Valores en :</u>	<u>Fuente</u>
CAPITAL	Millones de Pesos de 1975	Barrios et al. (1993) retrapolado desde 1950 con las tasas de crecimiento de la serie CEPAL (1957) . La actualización de datos a partir de 1990 se realiza utilizando datos de DANE y Cuentas Nacionales de Colombia, siguiendo la misma metodología de Barrios et al. (1993). 1994 - 1997: datos tomados de DANE - DNP - UMACRO 1994 son provisionales 1995 - 1997: son proyectados
PIB	Producto Interno Bruto Millones de Pesos de 1975	PIB real (base=1975) 1905-1997. Propuesta GRECO (1999) 1905-1924: con el promedio de las tasas de crecimiento de las estimaciones con funciones de demanda de dinero y de comercio exterior se retrapoló el PIB a partir de 1925 (estimación GRECO 1999). 1925-1949: con las tasas de crecimiento del PIB real construido por la CEPAL (1957, cuadro No. 1) se retrapoló el PIB real estimado por López et al. (1996, basado en Cuentas Nacionales). 1950-1993: fuente: López et al. (1996) 1994-1997: datos actualizados con estimaciones del DANE. 1995 - 1997: son proyectados
PEA	Población Económicamente Activa Número de personas	Flórez, Carmen Elisa (1998) Estimación basada en datos al 30 de junio de cada año. La estimación de la PEA se basa en la relación observada de PEA/PT de la CELADE, proporción luego aplicada a la población total estimada por Flórez (1998); incluye población rural y urbana.
POBTOTAL	Población total Número de personas	Flórez, Carmen Elisa (1998)
KPEA	CAPITAL/PEA	CAPITAL por persona económicamente activa, medido en pesos de 1975 fórmula: $(CAPITAL * 1'000,000 / pea)$
LNKPEA	logaritmo natural de kpea	
D(KPEA)	tasa de crecimiento de capital per capita	Diferencia de logaritmos
YPEA	PIB/PEA	Producto Interno Bruto por persona económicamente activa medido en pesos de 1975. fórmula: $((PIB * 1'000,000) / pea)$
LNYPEA	logaritmo natural de pibpea	
D(YPEA)	tasa de crecimiento de PIB per capita	Diferencia de logaritmos

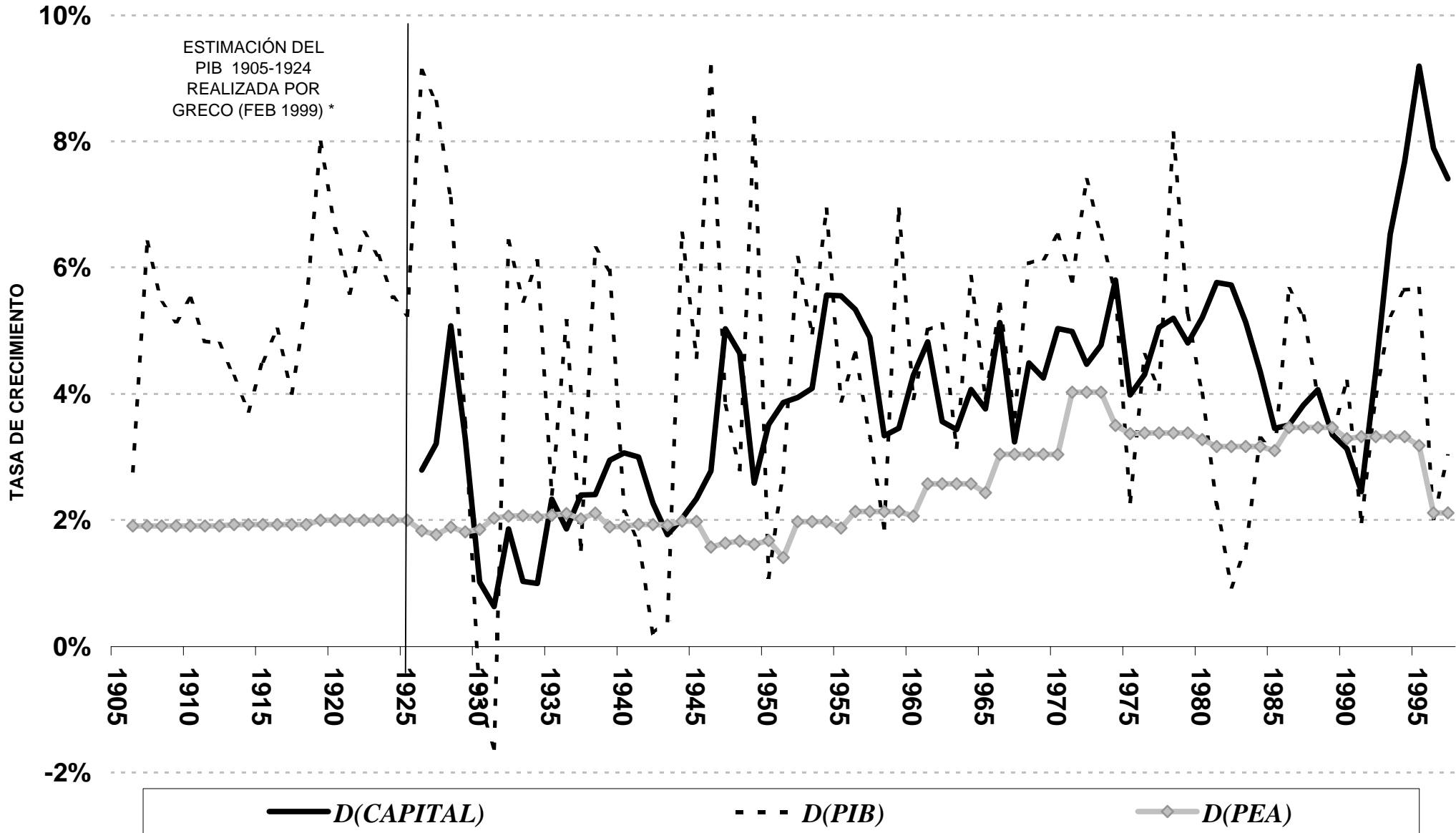
ANEXO - Tabla 2A

SERIES UTILIZADAS														
	CAPITAL	D(CAPITAL)	PIB	D(PIB)	PEA	D(PEA)	POBTOTAL	D(POBTOT)	KPEA	LNKPEA	D(KPEA)	YPEA	LNYPEA	D(YPEA)
1905	#N/A		14.148		1.694.072		4.737.588		#N/A	#N/A	#N/A	8.352	9.0302	#N/A
1906	#N/A		14.547	2,78%	1.726.740	1,91%	4.828.948	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	8.425	9.0389	0,87%
1907	#N/A		15.509	6,40%	1.760.038	1,91%	4.922.069	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	8.812	9.0839	4,49%
1908	#N/A		16.376	5,44%	1.793.979	1,91%	5.016.985	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	9.128	9.1191	3,53%
1909	#N/A		17.241	5,15%	1.828.574	1,91%	5.113.732	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	9.428	9.1515	3,24%
1910	#N/A		18.217	5,51%	1.863.836	1,91%	5.212.345	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	9.774	9.1875	3,60%
1911	#N/A		19.120	4,84%	1.899.778	1,91%	5.312.859	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	10.064	9.2168	2,93%
1912	#N/A		20.059	4,80%	1.936.413	1,91%	5.415.312	1,91%	#N/A	#N/A	#N/A	10.359	9.2456	2,89%
1913	#N/A		20.935	4,27%	1.974.170	1,93%	5.520.903	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	10.605	9.2690	2,34%
1914	#N/A		21.731	3,73%	2.012.664	1,93%	5.628.554	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	10.797	9.2870	1,80%
1915	#N/A		22.735	4,52%	2.051.909	1,93%	5.738.303	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	11.080	9.3129	2,59%
1916	#N/A		23.906	5,02%	2.091.918	1,93%	5.850.193	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	11.428	9.3438	3,09%
1917	#N/A		24.886	4,02%	2.132.708	1,93%	5.964.264	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	11.669	9.3647	2,09%
1918	#N/A		26.268	5,41%	2.174.293	1,93%	6.080.559	1,93%	#N/A	#N/A	#N/A	12.081	9.3994	3,48%
1919	#N/A		28.451	7,98%	2.218.238	2,00%	6.203.455	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	12.826	9.4592	5,98%
1920	#N/A		30.396	6,61%	2.263.071	2,00%	6.328.835	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	13.431	9.5053	4,61%
1921	#N/A		32.146	5,60%	2.308.811	2,00%	6.456.749	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	13.923	9.5413	3,60%
1922	#N/A		34.323	6,55%	2.355.475	2,00%	6.587.248	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	14.571	9.5868	4,55%
1923	#N/A		36.513	6,19%	2.403.082	2,00%	6.720.384	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	15.194	9.6287	4,18%
1924	#N/A		38.587	5,53%	2.451.651	2,00%	6.856.212	2,00%	#N/A	#N/A	#N/A	15.739	9.6639	3,53%
1925	187.511		40.669	5,25%	2.501.202	2,00%	6.994.784	2,00%	74.968	11.2248	#N/A	16.260	9.6964	3,25%
1926	192.824	2,79%	44.552	9,12%	2.547.447	1,83%	7.136.158	2,00%	75.693	11.2344	0,96	17.489	9.7693	7,29
1927	199.114	3,21%	48.565	8,62%	2.593.008	1,77%	7.280.389	2,00%	76.789	11.2488	1,44	18.729	9.8378	6,85
1928	209.491	5,08%	52.132	7,09%	2.642.496	1,89%	7.427.535	2,00%	79.278	11.2807	3,19	19.728	9.8898	5,20
1929	216.510	3,30%	54.008	3,54%	2.690.895	1,81%	7.577.654	2,00%	80.460	11.2955	1,48	20.071	9.9070	1,72
1930	218.731	1,02%	53.544	-0,86%	2.741.281	1,86%	7.730.808	2,00%	79.791	11.2872	-0,83	19.532	9.8798	-2,72
1931	220.117	0,63%	52.689	-1,61%	2.797.594	2,03%	7.887.058	2,00%	78.681	11.2732	-1,40	18.834	9.8434	-3,64
1932	224.257	1,86%	56.182	6,42%	2.855.992	2,07%	8.046.465	2,00%	78.521	11.2711	-0,20	19.672	9.8869	4,35
1933	226.584	1,03%	59.340	5,47%	2.915.765	2,07%	8.209.095	2,00%	77.710	11.2607	-1,04	20.352	9.9209	3,40
1934	228.859	1,00%	63.075	6,10%	2.976.224	2,05%	8.375.011	2,00%	76.896	11.2502	-1,05	21.193	9.9614	4,05
1935	234.260	2,33%	64.617	2,42%	3.038.758	2,08%	8.544.280	2,00%	77.091	11.2527	0,25	21.264	9.9648	0,34
1936	238.667	1,86%	68.035	5,16%	3.103.442	2,11%	8.716.971	2,00%	76.904	11.2503	-0,24	21.922	9.9953	3,05
1937	244.459	2,40%	69.094	1,54%	3.166.849	2,02%	8.893.152	2,00%	77.193	11.2541	0,38	21.818	9.9905	-0,48
1938	250.412	2,41%	73.590	6,30%	3.234.430	2,11%	9.072.894	2,00%	77.421	11.2570	0,29	22.752	10.0324	4,19
1939	257.910	2,95%	78.105	5,95%	3.296.286	1,89%	9.294.207	2,41%	78.243	11.2676	1,06	23.695	10.0730	4,06
1940	265.942	3,07%	79.795	2,14%	3.359.598	1,90%	9.520.918	2,41%	79.159	11.2792	1,16	23.751	10.0754	0,24
1941	274.044	3,00%	81.133	1,66%	3.425.242	1,94%	9.753.160	2,41%	80.007	11.2899	1,07	23.687	10.0727	-0,27
1942	280.334	2,27%	81.300	0,21%	3.491.994	1,93%	9.991.066	2,41%	80.279	11.2933	0,34	23.282	10.0554	-1,72
1943	285.345	1,77%	81.635	0,41%	3.559.868	1,93%	10.234.776	2,41%	80.156	11.2917	-0,15	22.932	10.0403	-1,51
1944	291.191	2,03%	87.152	6,54%	3.631.269	1,99%	10.484.430	2,41%	80.190	11.2922	0,04	24.001	10.0858	4,55
1945	298.085	2,34%	91.240	4,58%	3.703.933	1,98%	10.740.174	2,41%	80.478	11.2957	0,36	24.633	10.1119	2,60
1946	306.489	2,78%	100.009	9,18%	3.762.755	1,58%	11.002.156	2,41%	81.453	11.3078	1,20	26.579	10.1879	7,60
1947	322.303	5,03%	103.892	3,81%	3.824.904	1,64%	11.270.529	2,41%	84.264	11.3417	3,39	27.162	10.2096	2,17
1948	337.620	4,64%	106.846	2,80%	3.889.375	1,67%	11.545.449	2,41%	86.806	11.3714	2,97	27.471	10.2209	1,13
1949	346.469	2,59%	116.172	8,37%	3.952.926	1,62%	11.827.074	2,41%	87.649	11.3811	0,97	29.389	10.2884	6,75
1950	358.871	3,52%	117.454	1,10%	4.019.784	1,68%	12.115.569	2,41%	89.276	11.3995	1,84	29.219	10.2826	-0,58
1951	373.007	3,86%	120.742	2,76%	4.076.863	1,41%	12.411.101	2,41%	91.494	11.4240	2,45	29.616	10.2961	1,35
1952	388.016	3,94%	128.408	6,16%	4.158.392	1,98%	12.786.527	2,98%	93.309	11.4437	1,96	30.879	10.3378	4,18
1953	404.217	4,09%	134.953	4,97%	4.241.550	1,98%	13.173.310	2,98%	95.299	11.4648	2,11	31.817	10.3678	2,99
1954	427.346	5,56%	144.625	6,92%	4.326.372	1,98%	13.571.793	2,98%	98.777	11.5006	3,58	33.429	10.4172	4,94
1955	451.755	5,55%	150.362	3,89%	4.408.342	1,88%	13.982.329	2,98%	102.477	11.5374	3,68	34.109	10.4373	2,01
1956	476.516	5,34%	157.507	4,64%	4.503.656	2,14%	14.405.284	2,98%	105.806	11.5694	3,20	34.973	10.4623	2,50
1957	500.438	4,90%	162.823	3,32%	4.601.032	2,14%	14.841.033	2,98%	108.766	11.5970	2,76	35.388	10.4741	1,18
1958	517.428	3,34%	165.916	1,88%	4.700.512	2,14%	15.289.964	2,98%	110.079	11.6090	1,20	35.297	10.4716	-0,26
1959	535.635	3,46%	177.806	6,92%	4.802.144	2,14%	15.752.474	2,98%	111.541	11.6221	1,32	37.026	10.5194	4,78
1960	559.135	4,29%	184.932	3,93%	4.902.415	2,07%	16.228.974	2,98%	114.053	11.6444	2,23	37.723	10.5380	1,86

ANEXO - Tabla 2A

SERIES UTILIZADAS														
	CAPITAL	D(CAPITAL)	PIB	D(PIB)	PEA	D(PEA)	POBTOTAL	D(POBTOT)	KPEA	LNKPEA	D(KPEA)	YPEA	LNYPEA	D(YPEA)
1961	586.773	4,82%	194.432	5,01%	5.030.317	2,58%	16.719.888	2,98%	116.647	11.6669	2,25	38.652	10.5624	2,43
1962	608.064	3,56%	204.613	5,10%	5.161.556	2,58%	17.225.652	2,98%	117.806	11.6768	0,99	39.642	10.5876	2,53
1963	629.314	3,44%	211.178	3,16%	5.296.219	2,58%	17.746.715	2,98%	118.823	11.6854	0,86	39.873	10.5935	0,58
1964	655.458	4,07%	223.915	5,86%	5.434.396	2,58%	18.283.540	2,98%	120.613	11.7003	1,49	41.203	10.6263	3,28
1965	680.582	3,76%	232.906	3,94%	5.568.284	2,43%	18.813.059	2,86%	122.225	11.7136	1,33	41.827	10.6413	1,50
1966	716.407	5,13%	245.865	5,41%	5.740.469	3,05%	19.357.913	2,86%	124.799	11.7345	2,08	42.830	10.6650	2,37
1967	740.000	3,24%	254.985	3,64%	5.917.978	3,05%	19.918.547	2,86%	125.043	11.7364	0,19	43.086	10.6710	0,60
1968	774.007	4,49%	270.928	6,07%	6.100.976	3,05%	20.495.418	2,86%	126.866	11.7509	1,45	44.407	10.7012	3,02
1969	807.632	4,25%	288.102	6,15%	6.289.633	3,05%	21.088.996	2,86%	128.407	11.7630	1,21	45.806	10.7322	3,10
1970	849.354	5,04%	307.496	6,51%	6.483.890	3,04%	21.699.764	2,86%	130.995	11.7829	2,00	47.425	10.7669	3,47
1971	892.810	4,99%	325.825	5,79%	6.750.268	4,03%	22.328.222	2,86%	132.263	11.7925	0,96	48.268	10.7845	1,76
1972	933.609	4,47%	350.813	7,39%	7.027.590	4,03%	22.974.881	2,86%	132.849	11.7970	0,44	49.919	10.8182	3,36
1973	979.254	4,77%	374.398	6,51%	7.316.306	4,03%	23.640.267	2,86%	133.845	11.8044	0,75	51.173	10.8430	2,48
1974	1.037.758	5,80%	395.910	5,59%	7.577.147	3,50%	24.198.027	2,33%	136.959	11.8274	2,30	52.251	10.8638	2,08
1975	1.079.950	3,99%	405.108	2,30%	7.836.895	3,37%	24.768.947	2,33%	137.803	11.8336	0,61	51.692	10.8531	-1,07
1976	1.127.464	4,31%	424.263	4,62%	8.106.476	3,38%	25.353.336	2,33%	139.082	11.8428	0,92	52.336	10.8654	1,24
1977	1.185.911	5,05%	441.906	4,07%	8.385.330	3,38%	25.951.514	2,33%	141.427	11.8595	1,67	52.700	10.8724	0,69
1978	1.249.193	5,20%	479.335	8,13%	8.673.777	3,38%	26.563.804	2,33%	144.020	11.8777	1,82	55.263	10.9199	4,75
1979	1.310.717	4,81%	505.119	5,24%	8.972.146	3,38%	27.190.541	2,33%	146.087	11.8920	1,43	56.299	10.9384	1,86
1980	1.380.804	5,21%	525.765	4,01%	9.270.861	3,28%	27.832.065	2,33%	148.940	11.9113	1,93	56.712	10.9457	0,73
1981	1.462.710	5,76%	537.736	2,25%	9.569.363	3,17%	28.488.725	2,33%	152.853	11.9372	2,59	56.194	10.9366	-0,92
1982	1.548.898	5,73%	542.836	0,94%	9.877.476	3,17%	29.160.877	2,33%	156.811	11.9628	2,56	54.957	10.9143	-2,23
1983	1.630.469	5,13%	551.380	1,56%	10.195.509	3,17%	29.848.889	2,33%	159.920	11.9824	1,96	54.081	10.8982	-1,61
1984	1.703.054	4,36%	569.855	3,30%	10.523.782	3,17%	30.553.132	2,33%	161.829	11.9943	1,19	54.149	10.8995	0,13
1985	1.762.893	3,45%	587.561	3,06%	10.855.203	3,10%	31.273.992	2,33%	162.401	11.9978	0,35	54.127	10.8991	-0,04
1986	1.825.814	3,51%	621.781	5,66%	11.238.180	3,47%	31.942.983	2,12%	162.465	11.9982	0,04	55.328	10.9210	2,19
1987	1.896.996	3,82%	655.164	5,23%	11.634.670	3,47%	32.626.286	2,12%	163.047	12.0018	0,36	56.311	10.9387	1,76
1988	1.975.761	4,07%	681.791	3,98%	12.045.148	3,47%	33.324.204	2,12%	164.030	12.0078	0,60	56.603	10.9438	0,52
1989	2.043.215	3,36%	705.068	3,36%	12.470.108	3,47%	34.037.052	2,12%	163.849	12.0067	-0,11	56.541	10.9427	-0,11
1990	2.108.178	3,13%	735.259	4,19%	12.887.441	3,29%	34.765.149	2,12%	163.584	12.0051	-0,16	57.052	10.9517	0,90
1991	2.160.541	2,45%	749.976	1,98%	13.322.910	3,32%	35.508.821	2,12%	162.167	11.9964	-0,87	56.292	10.9383	-1,34
1992	2.256.898	4,36%	780.312	3,97%	13.773.093	3,32%	36.268.401	2,12%	163.863	12.0068	1,04	56.655	10.9447	0,64
1993	2.409.150	6,53%	822.371	5,25%	14.238.488	3,32%	37.044.229	2,12%	169.200	12.0388	3,21	57.757	10.9640	1,93
1994	2.601.455	7,68%	870.151	5,65%	14.719.609	3,32%	37.130.566	0,23%	176.734	12.0824	4,36	59.115	10.9872	2,32
1995	2.851.891	9,19%	920.880	5,67%	15.195.619	3,18%	37.924.837	2,12%	187.678	12.1425	6,01	60.602	11.0121	2,48
1996	3.086.051	7,89%	939.758	2,03%	15.520.673	2,12%	38.736.099	2,12%	198.835	12.2002	5,77	60.549	11.0112	-0,09
1997	3.323.310	7,41%	968.515	3,01%	15.852.680	2,12%	39.564.714	2,12%	209.637	12.2531	5,29	61.095	11.0202	0,90

TASAS DE CRECIMIENTO DEL CAPITAL, EL PIB Y LA PEA



*con base en el promedio simple de los resultados de dos estimaciones: la primera, una función de demanda de dinero y la segunda, una función de comercio exterior.

Anexo Tabla 2A-A

DATOS DE POBLACIÓN Y SUS CÁLCULOS

TOMADOS DE FLOREZ (1998)

	Población Total	Tasa bruta de participación	PEA
1905	4.737.588	35,76	1.694.072
1906	4.828.948	35,76	1.726.740
1907	4.922.069	35,76	1.760.038
1908	5.016.985	35,76	1.793.979
1909	5.113.732	35,76	1.828.574
1910	5.212.345	35,76	1.863.836
1911	5.312.859	35,76	1.899.778
1912	5.415.312	35,76	1.936.413
1913	5.520.903	35,76	1.974.170
1914	5.628.554	35,76	2.012.664
1915	5.738.303	35,76	2.051.909
1916	5.850.193	35,76	2.091.918
1917	5.964.264	35,76	2.132.708
1918	6.080.559	35,76	2.174.293
1919	6.203.455	35,76	2.218.238
1920	6.328.835	35,76	2.263.071
1921	6.456.749	35,76	2.308.811
1922	6.587.248	35,76	2.355.475
1923	6.720.384	35,76	2.403.082
1924	6.856.212	35,76	2.451.651
1925	6.994.784	35,76	2.501.202
1926	7.136.158	35,70	2.547.447
1927	7.280.389	35,62	2.593.008
1928	7.427.535	35,58	2.642.496
1929	7.577.654	35,51	2.690.895
1930	7.730.808	35,46	2.741.281
1931	7.887.058	35,47	2.797.594
1932	8.046.465	35,49	2.855.992
1933	8.209.095	35,52	2.915.765
1934	8.375.011	35,54	2.976.224
1935	8.544.280	35,56	3.038.758
1936	8.716.971	35,60	3.103.442
1937	8.893.152	35,61	3.166.849
1938	9.072.894	35,65	3.234.430
1939	9.294.207	35,47	3.296.286
1940	9.520.918	35,29	3.359.598
1941	9.753.160	35,12	3.425.242
1942	9.991.066	34,95	3.491.994
1943	10.234.776	34,78	3.559.868
1944	10.484.430	34,63	3.631.269
1945	10.740.174	34,49	3.703.933
1946	11.002.156	34,20	3.762.755
1947	11.270.529	33,94	3.824.904
1948	11.545.449	33,69	3.889.375
1949	11.827.074	33,42	3.952.926
1950	12.115.569	33,18	4.019.784
1951	12.411.101	32,85	4.076.863
1952	12.786.527	32,52	4.158.392
1953	13.173.310	32,20	4.241.550
1954	13.571.793	31,88	4.326.372
1955	13.982.329	31,53	4.408.342

SUPUESTO:

PARA OBTENER LA PEA ANTES DE 1925
EL GRECO SUPONE QUE LA TBP ES FIJA
ENTRE 1905 Y 1927.

Anexo Tabla 2A-A

DATOS DE POBLACIÓN Y SUS CÁLCULOS

TOMADOS DE FLOREZ (1998)

	Población Total	Tasa bruta de participación	PEA
1956	14.405.284	31,26	4.503.656
1957	14.841.033	31,00	4.601.032
1958	15.289.964	30,74	4.700.512
1959	15.752.474	30,49	4.802.144
1960	16.228.974	30,21	4.902.415
1961	16.719.888	30,09	5.030.317
1962	17.225.652	29,96	5.161.556
1963	17.746.715	29,84	5.296.219
1964	18.283.540	29,72	5.434.396
1965	18.813.059	29,60	5.568.284
1966	19.357.913	29,65	5.740.469
1967	19.918.547	29,71	5.917.978
1968	20.495.418	29,77	6.100.976
1969	21.088.996	29,82	6.289.633
1970	21.699.764	29,88	6.483.890
1971	22.328.222	30,23	6.750.268
1972	22.974.881	30,59	7.027.590
1973	23.640.267	30,95	7.316.306
1974	24.198.027	31,31	7.577.147
1975	24.768.947	31,64	7.836.895
1976	25.353.336	31,97	8.106.476
1977	25.951.514	32,31	8.385.330
1978	26.563.804	32,65	8.673.777
1979	27.190.541	33,00	8.972.146
1980	27.832.065	33,31	9.270.861
1981	28.488.725	33,59	9.569.363
1982	29.160.877	33,87	9.877.476
1983	29.848.889	34,16	10.195.509
1984	30.553.132	34,44	10.523.782
1985	31.273.992	34,71	10.855.203
1986	31.942.983	35,18	11.238.180
1987	32.626.286	35,66	11.634.670
1988	33.324.204	36,15	12.045.148
1989	34.037.052	36,64	12.470.108
1990	34.765.149	37,07	12.887.441
1991	35.508.821	37,52	13.322.910
1992	36.268.401	37,98	13.773.093
1993	37.044.229	38,44	14.238.488
1994	37.130.566	38,90	14.444.920
1995	37.924.837	39,32	14.912.046
1996	38.736.099	39,32	15.231.034
1997	39.564.714	39,32	15.556.846

Anexo Tabla 2A-B

ESTADÍSTICAS DE LAS VARIABLES EN NIVELES						
	Muestra: 1925 - 1997		Muestra: 1925 - 1994		Muestra: 1925 - 1981	
	KPEA	YPEA	KPEA	YPEA	KPEA	YPEA
Media	120.173	39.696	116.680	38.755	105.215	34.561
Mediana	118.866	39.387	114.942	38.085	97.112	32.422
Máximo	212.356	61.887	180.095	60.239	155.760	57.790
Mínimo	76.394	16.569	76.394	16.569	76.394	16.569
Desv. estándar	36.918	14.854	33.434	14.434	25.529	12.643
Asimetría	0,45	0,00	0,29	0,04	0,41	0,38
Curtosis	2,09	1,47	1,64	1,47	1,68	1,82
Jarque-Bera	4,93	7,08	6,37	6,81	5,78	4,67
Probabilidad	0,09	0,03	0,04	0,03	0,06	0,10

ESTADÍSTICAS DE LAS VARIABLES EN TASAS DE CRECIMIENTO						
	Muestra: 1925 - 1997		Muestra: 1925 - 1994		Muestra: 1925 - 1981	
	D(KPEA)	D(YPEA)	D(KPEA)	D(YPEA)	D(KPEA)	D(YPEA)
Media	1,42%	1,83%	1,24%	1,87%	1,27%	2,21%
Mediana	1,20%	1,86%	1,19%	1,86%	1,21%	2,27%
Máximo	6,01%	7,60%	4,36%	7,60%	3,68%	7,60%
Mínimo	-1,40%	-3,64%	-1,40%	-3,64%	-1,40%	-3,64%
Desv. estándar	1,48%	2,33%	1,23%	2,36%	1,18%	2,40%
Asimetría	0,7715	0,2267	0,1964	0,1954	-0,0452	0,0165
Curtosis	3,8317	3,0240	2,7356	2,9824	2,7422	2,9837
Jarque-Bera	9,2174	0,6184	0,6445	0,4400	0,1742	0,0032
Probabilidad	0,0100	0,7340	0,7245	0,8025	0,9166	0,9984

NOTA:

KPEA	Capital por persona económicamente activa.
YPEA	Producto por persona económicamente activa.

ANEXO - Tabla 3A

CAPITAL TOTAL								
Metodología de BARRIOS et al. (1993)								
(Millones de pesos de 1975)								
Años	Tasa de Crecimiento Capital Total CEPAL (%)	Capital en Construcción y Vivienda 1	Capital en Maquinaria y Equipo 2	Nivel de Existencias 3	Capital Total 4=1+2+3	Tasa de Crecimiento K Total %	Capital Fijo 5=1+2	Tasa de Crecimiento K Fijo %
1.925					187.511			
1.926	2,83				192.824			
1.927	3,26				199.114			
1.928	5,21				209.491			
1.929	3,35				216.510			
1.930	1,03				218.731			
1.931	0,63				220.117			
1.932	1,88				224.257			
1.933	1,04				226.584			
1.934	1,00				228.859			
1.935	2,36				234.260			
1.936	1,88				238.667			
1.937	2,43				244.459			
1.938	2,43				250.412			
1.939	2,99				257.910			
1.940	3,11				265.942			
1.941	3,05				274.044			
1.942	2,30				280.334			
1.943	1,79				285.345			
1.944	2,05				291.191			
1.945	2,37				298.085			
1.946	2,82				306.489			
1.947	5,16				322.303			
1.948	4,75				337.620			
1.949	2,62				346.469			
1.950	3,58	218.426	133.055	7.390	358.871		351.481	
1.951		223.649	137.962	11.396	373.007	3,94	361.611	2,88
1.952		229.544	143.484	14.988	388.016	4,02	373.028	3,16
1.953		236.857	155.194	12.166	404.217	4,18	392.051	5,10
1.954		247.265	168.153	11.928	427.346	5,72	415.418	5,96
1.955		258.433	181.540	11.782	451.755	5,71	439.973	5,91
1.956		269.593	192.126	14.797	476.516	5,48	461.719	4,94
1.957		280.267	193.511	26.660	500.438	5,02	473.778	2,61
1.958		289.818	194.403	33.207	517.428	3,40	484.221	2,20
1.959		301.183	195.180	39.272	535.635	3,52	496.363	2,51
1.960		311.617	201.414	46.104	559.135	4,39	513.031	3,36
1.961		323.617	208.436	54.720	586.773	4,94	532.053	3,71
1.962		336.339	214.244	57.481	608.064	3,63	550.583	3,48
1.963		347.105	218.627	63.582	629.314	3,49	565.732	2,75
1.964		358.642	225.862	70.954	655.458	4,15	584.504	3,32
1.965		370.044	230.621	79.917	680.582	3,83	600.665	2,76
1.966		383.019	236.123	97.265	716.407	5,26	619.142	3,08
1.967		399.671	239.950	100.379	740.000	3,29	639.621	3,31
1.968		418.538	246.991	108.478	774.007	4,60	665.529	4,05
1.969		438.940	252.938	115.754	807.632	4,34	691.878	3,96
1.970		459.787	263.866	125.701	849.354	5,17	723.653	4,59
1.971		480.264	276.787	135.759	892.810	5,12	757.051	4,62
1.972		499.552	288.741	145.316	933.609	4,57	788.293	4,13
1.973		523.392	299.916	155.946	979.254	4,89	823.308	4,44
1.974		549.241	313.208	175.309	1.037.758	5,97	862.449	4,75
1.975		572.185	325.747	182.018	1.079.950	4,07	897.932	4,11
1.976		596.382	341.858	189.224	1.127.464	4,40	938.240	4,49
1.977		621.754	355.983	208.174	1.185.911	5,18	977.737	4,21
1.978		647.500	374.926	226.767	1.249.193	5,34	1.022.426	4,57
1.979		671.803	396.702	242.212	1.310.717	4,93	1.068.505	4,51
1.980		701.065	422.190	257.549	1.380.804	5,35	1.123.255	5,12
1.981		733.066	448.597	281.047	1.462.710	5,93	1.181.663	5,20
1.982		766.230	474.649	308.019	1.548.898	5,89	1.240.879	5,01
1.983		800.919	498.347	331.203	1.630.469	5,27	1.299.266	4,71
1.984		837.160	519.826	346.068	1.703.054	4,45	1.356.986	4,44
1.985		875.681	532.075	355.137	1.762.893	3,51	1.407.756	3,74
1.986		916.504	547.785	361.525	1.825.814	3,57	1.464.289	4,02
1.987		950.101	569.940	376.955	1.896.996	3,90	1.520.041	3,81
1.988		989.790	595.254	390.717	1.975.761	4,15	1.585.044	4,28
1.989		1.023.453	618.643	401.119	2.043.215	3,41	1.642.096	3,60
1.990		1.051.656	642.808	413.714	2.108.178	3,18	1.694.464	3,19
1.991		1.079.054	658.921	422.566	2.160.541	2,48	1.737.975	2,57
1.992		1.110.293	681.827	464.796	2.256.916	4,46	1.792.120	3,12
1.993		1.149.559	734.364	525.245	2.409.168	6,75	1.883.923	5,12
1994prov		1.216.509	787.587	609.620	2.613.716	8,49	2.004.096	6,38
1995py		1.285.328	841.357	698.697	2.825.383	8,10	2.126.686	6,12
1996py		1.346.666	886.334	796.014	3.029.014	7,21	2.233.000	5,00
1997py		1.410.064	932.349	897.347	3.239.760	6,96	2.342.413	4,90

NOTA: Actualización de datos a partir de 1990 tomados de DANE, Cuentas Nacionales de Colombia.

Datos de 1994 - 1997 tomados de DANE - DNP - UMACRO: 1994 son provisionales, 1995 - 1997 proyectados.

Datos 1925-1950: Se retrapolan los datos de Barrios et al. con base en las tasas de crecimiento de Capital total de la CEPAL.

ANEXO - Continuación de la Tabla 3A

CALCULO DEL CAPITAL PARA CONSTRUCCION Y VIVIENDA					
Millones de pesos de 1975					
Años	FBKF para construcción y vivienda 1	Depreciación 2	FNKF para construcción y vivienda 3	Capital en construcción y vivienda 4	Tasa de crecimiento del capital
1.925					
1.926					
1.927					
1.928					
1.929					
1.930					
1.931					
1.932					
1.933					
1.934					
1.935					
1.936					
1.937					
1.938					
1.939					
1.940					
1.941					
1.942					
1.943					
1.944					
1.945					
1.946					
1.947					
1.948					
1.949					
1.950	10.845	4.236	6.609	218.426	
1.951	9.592	4.369	5.223	223.649	2,39
1.952	10.368	4.473	5.895	229.544	2,64
1.953	11.904	4.591	7.313	236.858	3,19
1.954	15.146	4.737	10.409	247.266	4,39
1.955	16.113	4.945	11.168	258.434	4,52
1.956	16.329	5.169	11.160	269.594	4,32
1.957	16.066	5.392	10.674	280.269	3,96
1.958	15.156	5.605	9.551	289.819	3,41
1.959	17.161	5.796	11.365	301.184	3,92
1.960	16.512	6.024	10.488	311.672	3,48
1.961	18.180	6.233	11.947	323.619	3,83
1.962	19.194	6.472	12.722	336.340	3,93
1.963	17.943	6.727	11.216	347.556	3,33
1.964	18.480	6.951	11.529	359.085	3,32
1.965	18.574	7.182	11.392	370.478	3,17
1.966	20.376	7.410	12.966	383.444	3,50
1.967	24.312	7.669	16.643	400.087	4,34
1.968	26.861	8.002	18.859	418.946	4,71
1.969	28.773	8.379	20.394	439.341	4,87
1.970	29.626	8.787	20.839	460.180	4,74
1.971	29.672	9.204	20.468	480.648	4,45
1.972	28.894	9.613	19.281	499.929	4,01
1.973	33.831	9.999	23.832	523.762	4,77
1.974	36.316	10.475	25.841	549.602	4,93
1.975	33.929	10.992	22.937	572.539	4,17
1.976	35.641	11.451	24.190	596.730	4,23
1.977	37.300	11.935	25.365	622.095	4,25
1.978	38.181	12.442	25.739	647.834	4,14
1.979	37.253	12.957	24.296	672.130	3,75
1.980	42.698	13.443	29.255	701.386	4,35
1.981	46.022	14.028	31.994	733.380	4,56
1.982	47.825	14.668	33.157	766.537	4,52
1.983	50.014	15.331	34.683	801.221	4,52
1.984	52.259	16.024	36.235	837.455	4,52
1.985	55.265	16.749	38.516	875.971	4,60
1.986	58.336	17.519	40.817	916.788	4,66
1.987	51.927	18.336	33.591	950.379	3,66
1.988	58.691	19.008	39.683	990.062	4,18
1.989	53.459	19.801	33.658	1.023.720	3,40
1.990	48.410	20.474	27.936	1.051.656	2,73
1.991	48.431	21.033	27.398	1.079.054	2,61
1.992	52.820	21.581	31.239	1.110.293	2,90
1.993	61.472	22.206	39.266	1.149.559	3,54
1994prov	89.942	22.991	66.950	1.216.509	5,82
1995py	93.150	24.330	68.819	1.285.328	5,66
1996py	87.045	25.707	61.338	1.346.666	4,77
1997py	90.332	26.933	63.398	1.410.064	4,71

ANEXO - Continuación de la Tabla 3A

DATOS BASICOS PARA EL CALCULO DEL CAPITAL									
Millones de pesos de 1975									
Años	Tasa de Crecimiento FBKF Total CEPAL (%)	FBKF Construcción y Vivienda 1	FBKF Maquinaria y Equipo 2	FBKF TOTAL 3=1+2	Variación de Existencias 4	Inversión bruta total cepal mill. Pesos 1950	Tasa de Crecimiento inversión bruta CEPAL (%)	Total Inversión Bruta Nacional 5=3+4	Inversión Neta Nacional 6=capital(t)-capital(t-1)
1.925				8.951	1.808	550		10.759	
1.926	24,80			11.170	1.879	684	21,28	13.049	5.313
1.927	20,90			13.505	2.263	810	20,84	15.769	6.290
1.928	18,24			15.969	3.206	990	21,60	19.175	10.377
1.929	-13,48			13.817	2.412	835	-15,37	16.229	7.019
1.930	-34,89			8.995	1.164	546	-37,40	10.159	2.221
1.931	-17,38			7.432	887	446	-18,11	8.319	1.386
1.932	17,77			8.753	1.487	631	23,09	10.240	4.140
1.933	-2,09			8.570	1.147	520	-5,11	9.717	2.328
1.934	1,89			8.732	1.161	524	1,81	9.894	2.274
1.935	14,31			9.982	1.796	622	19,05	11.778	5.402
1.936	10,18			10.999	1.722	670	8,00	12.721	4.407
1.937	15,96			12.754	2.117	771	16,90	14.871	5.793
1.938	2,35			13.054	2.164	789	2,33	15.218	5.952
1.939	14,22			14.910	2.608	903	15,12	17.518	7.498
1.940	-3,97			14.318	2.638	904	-3,20	16.956	8.031
1.941	-4,30			13.703	2.605	894	-3,82	16.308	8.102
1.942	-12,09			12.047	2.137	814	-13,02	14.184	6.290
1.943	6,07			12.778	3.923	951	17,75	16.701	5.011
1.944	8,95			13.921	-1.389	719	-24,96	12.532	5.846
1.945	24,53			17.336	4.723	1.178	76,02	22.059	6.894
1.946	18,34			20.516	-1.649	1.013	-14,47	18.867	8.405
1.947	20,49			24.720	5.038	1.567	57,72	29.758	15.814
1.948	-2,09			24.204	4.547	1.511	-3,38	28.751	15.316
1.949	-23,80			18.444	-5.273	752	-54,19	13.171	8.849
1.950	15,60	10.845	10.477	21.322	5.595	1.466	104,37	26.917	12.402
1.951		9.592	11.560	21.152	4.006	1.651		25.158	14.136
1.952		10.368	12.420	22.788	3.592	1.574		26.380	15.009
1.953		11.904	18.885	30.789	-2822	1621		27.967	16.201
1.954		15.146	20.719	35.865	-237			35.628	23.129
1.955		16.113	21.795	37.908	-146			37.762	24.409
1.956		16.329	19.662	35.991	3.015			39.006	24.761
1.957		16.066	10.991	27.057	11.863			38.920	23.922
1.958		15.156	10.568	25.724	6.547			32.271	16.990
1.959		17.161	10.497	27.658	6.065			33.723	18.207
1.960		16.512	15.993	32.505	6.832			39.337	23.500
1.961		18.180	17.093	35.273	8.616			43.889	27.638
1.962		19.194	16.230	35.424	2.761			38.185	21.291
1.963		17.493	15.095	32.588	6.101			38.689	21.250
1.964		18.480	18.166	36.646	7.372			44.018	26.144
1.965		18.574	16.052	34.626	8.963			43.589	25.124
1.966		20.376	17.033	37.409	17.348			54.757	35.825
1.967		24.312	15.632	39.944	3.114			43.058	23.593
1.968		26.861	19.039	45.900	8.100			54.000	34.007
1.969		28.773	18.296	47.069	7.276			54.345	33.625
1.970		29.626	23.575	53.201	9.947			63.148	41.722
1.971		29.672	26.114	55.786	10.058			65.844	43.456
1.972		28.894	25.793	54.687	9.557			64.244	40.799
1.973		33.831	25.612	59.443	10.630			70.073	45.645
1.974		36.316	28.288	64.604	19.363			83.967	58.504
1.975		33.929	28.200	62.129	6.709			68.838	42.192
1.976		35.641	32.398	68.039	7.206			75.245	47.514
1.977		37.300	32.118	69.418	18.950			88.368	58.447
1.978		38.181	36.742	74.923	18.593			93.516	63.282
1.979		37.253	40.522	77.775	15.445			93.220	61.524
1.980		42.698	45.323	88.021	15.337			103.358	70.087
1.981		46.022	47.517	93.539	23.498			117.037	81.906
1.982		47.825	48.482	96.307	26.972			123.279	86.188
1.983		50.014	47.430	97.444	23.184			120.628	81.571
1.984		52.259	46.397	98.656	14.865			113.521	72.585
1.985		55.265	38.240	93.505	9.069			102.574	59.839
1.986		58.336	42.314	100.650	6.388			107.038	62.921
1.987		51.927	49.544	101.471	15.430			116.901	71.182
1.988		58.691	53.811	112.502	13.762			126.264	78.765
1.989		53.459	53.152	106.611	10.402			117.013	67.454
1.990		48.410	54.636	103.046	12.595			115.641	64.963
1.991		48.431	48.254	96.685	8.852			105.537	52.363
1.992		52.820	55.852	108.672	42.230			150.902	96.375
1.993		61.472	86.628	148.100	60.449			208.549	152.252
1994prov		89.942	89.942	179.883	84.375			264.258	204.549
1995py		93.150	93.150	186.299	89.077			275.376	211.666
1996py		87.045	87.045	174.089	97.317			271.406	203.632
1997py		90.332	90.332	180.663	101.333			281.996	210.746

ANEXO - Continuación de la Tabla 3A

CALCULO DEL CAPITAL PARA MAQUINARIA Y EQUIPO						
Millones de pesos de 1975						
Años	FBKF en Maquinaria y Equipo 1	Depreciación 2	FNKF Maquinaria y Equipo 3	Tasa de Crecimiento Inv. Neta 4	Stock de Capital en Maq. y Eq. 5	Tasa de Crecimiento del Capital %
1.925						
1.926						
1.927						
1.928						
1.929						
1.930						
1.931						
1.932						
1.933						
1.934						
1.935						
1.936						
1.937						
1.938						
1.939						
1.940						
1.941						
1.942						
1.943						
1.944						
1.945						
1.946						
1.947						
1.948						
1.949						
1.950	10.477	6.451	4.026		133.055	
1.951	11.560	6.653	4.907	21,89	137.962	3,69
1.952	12.420	6.898	5.522	12,53	143.484	4,00
1.953	18.885	7.174	11.711	112,08	155.195	8,16
1.954	20.719	7.760	12.959	10,66	168.154	8,35
1.955	21.795	8.408	13.387	3,30	181.541	7,96
1.956	19.662	9.077	10.585	-20,93	192.126	5,83
1.957	10.991	9.606	1.385	-86,92	193.511	0,72
1.958	10.568	9.676	892	-35,55	194.404	0,46
1.959	10.497	9.720	777	-12,96	195.180	0,40
1.960	15.993	9.759	6.234	702,50	201.414	3,19
1.961	17.093	10.071	7.022	12,65	208.437	3,49
1.962	16.230	10.422	5.808	-17,29	214.245	2,79
1.963	15.095	10.712	4.383	-24,54	218.628	2,05
1.964	18.166	10.931	7.235	65,07	225.862	3,31
1.965	16.052	11.293	4.759	-34,22	230.621	2,11
1.966	17.033	11.531	5.502	15,61	236.123	2,39
1.967	15.632	11.806	3.826	-30,46	239.949	1,62
1.968	19.039	11.997	7.042	84,05	246.990	2,93
1.969	18.293	12.350	5.943	-15,59	252.934	2,41
1.970	23.575	12.647	10.928	83,87	263.862	4,32
1.971	26.114	13.193	12.921	18,23	276.783	4,90
1.972	25.793	13.839	11.954	-7,48	288.737	4,32
1.973	25.612	14.437	11.175	-6,51	299.912	3,87
1.974	28.288	14.996	13.292	18,95	313.204	4,43
1.975	28.200	15.660	12.540	-5,66	325.744	4,00
1.976	32.398	16.287	16.111	28,48	341.855	4,95
1.977	32.118	17.093	15.025	-6,74	356.880	4,40
1.978	36.742	17.844	18.898	25,77	375.778	5,30
1.979	40.522	18.789	21.733	15,00	397.511	5,78
1.980	45.323	19.876	25.447	17,09	422.959	6,40
1.981	47.517	21.148	26.369	3,62	449.328	6,23
1.982	48.482	22.466	26.016	-1,34	475.343	5,79
1.983	47.430	23.767	23.663	-9,04	499.006	4,98
1.984	46.397	24.950	21.447	-9,37	520.453	4,30
1.985	38.240	26.023	12.217	-43,03	532.670	2,35
1.986	42.314	26.634	15.680	28,35	548.351	2,94
1.987	49.544	27.418	22.126	41,11	570.477	4,04
1.988	53.811	28.524	25.287	14,28	595.764	4,43
1.989	53.152	29.788	23.364	-7,61	619.128	3,92
1.990	54.636	30.956	23.680	1,35	642.808	3,82
1.991	48.254	32.140	16.114	-31,95	658.921	2,51
1.992	55.852	32.946	22.906	42,15	681.827	3,48
1.993	86.628	34.091	52.537	129,36	734.364	7,71
1994prov	89.942	36.718	53.223	1,31	787.587	7,25
1995py	93.150	39.379	53.770	1,03	841.357	6,83
1996py	87.045	42.068	44.977	-16,35	886.334	5,35
1997py	90.332	44.317	46.015	2,31	932.349	5,19

Anexo Tabla 5A

PRUEBA DE RAIZ UNITARIA PARA LNKPEA 1925-1994

PRUEBA DE DICKEY-FULLER AUMENTADA (ADF) PARA LNKPEA					PRUEBA DE KPSS PARA LNKPEA	
Valores críticos de MacKinnon para rechazar la hipótesis de Raíz Unitaria					1. Ho: {LNKPEA} es una serie estacionaria alrededor de un nivel.	
Prueba Estadística ADF	-2,70124		Valor Crítico al 1%	-4,0969		
			Valor Crítico al 5%	-3,4759		
			Valor Crítico al 10%	-3,1651		
Como -2,7012 es mayor que los valores críticos de MacKinnon, no se puede rechazar la hipótesis nula de que existe raíz unitaria, ni se puede decir que la serie sea estacionaria.					Estadístico η_{μ} del rezago óptimo 7 : 0,9589	
Ecuación de la PRUEBA DE DICKEY-FULLER AUMENTADA (ADF)					Valor crítico al 1% 0,739	
Estimación por Mínimos cuadrados // La variable dependiente es D(LNKPEA)					Valor crítico al 5% 0,463	
Muestra(ajustada): 1927 1994					Valor crítico al 10% 0,347	
Observaciones incluidas: 68 después de ajustar por datos perdidos al diferenciar y por datos n.d.					2. Ho: {LNKPEA} es una serie estacionaria alrededor de una tendencia.	
Variable	Coefficiente	Error Estándar	t-Estadístico	Probabilidad	Estadístico η_{τ} del rezago óptimo 7 : 0,1202	
LNKPEA(-1)	-0,0549	0,0203	-2,7012	0,0088	Valor crítico al 1% 0,216	
D(LNKPEA(-1))	0,6988	0,0916	7,6282	0,0000	Valor crítico al 5% 0,146	
C	0,6129	0,2262	2,7096	0,0086	Valor crítico al 10% 0,119	
			$\tau_{\alpha} = 3,47 \rightarrow N=50$		NOTA: Como el valor de η_{μ} > el valor crítico de la prueba, entonces se rechaza la posibilidad de que LNKPEA sea estacionaria alrededor de un nivel a un nivel de significancia del 5% y no es estacionaria alrededor de una tendencia a un nivel de aceptación del 10% .	
			$\tau_{\alpha} = 3,42 \rightarrow N=100$			
Tendencia	0,0008	0,0003	2,8664	0,0056		
			$\tau_{\beta} = 3,18 \rightarrow N=50$			
			$\tau_{\beta} = 3,14 \rightarrow N=100$			
Estadístico Durbin-Watson	1,7532					
Correlograma de residuos						
Q-Estadístico del rezago 17 (#observ.incl./4)	12,452					
P-value del rezago 17	0,772					
El p-value y el Durbin-Watson sugieren que los residuos de la prueba ADF no están correlacionados						
NOTA: Aunque en este modelo la tendencia no es significativa, al eliminarla cambia el signo del coeficiente de la variable rezagada en niveles, LNKPEA(-1), y el comportamiento de la serie sería explosivo. Por esta razón es válido dejarla.						
PRUEBA DE RAIZ UNITARIA PARA D(LNKPEA) 1925-1994 PRUEBA PARA INTEGRACION DE SEGUNDO ORDEN					PRUEBA DE KPSS PARA D(LNKPEA)	
Valores críticos de MacKinnon para rechazar la hipótesis de Raíz Unitaria					1. Ho: {D(LNKPEA)} es una serie estacionaria alrededor de un nivel.	
Prueba Estadística ADF	-1,739183		Valor Crítico al 1%	-2,5968		
			Valor Crítico al 5%	-1,9452		
			Valor Crítico al 10%	-1,6183		
A un nivel de aceptación del 10% se rechaza la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria, y se sugiere que la primera diferencia de la serie LNKPEA es estacionaria.					Estadístico η_{μ} del rezago óptimo 7 : 0,2143	
Ecuación de la PRUEBA DE DICKEY-FULLER AUMENTADA (ADF)					Valor crítico al 1% 0,739	
Estimación por Mínimos cuadrados // La variable dependiente es D(LNKPEA,2)					Valor crítico al 5% 0,463	
Muestra(ajustada): 1927 1994					Valor crítico al 10% 0,347	
Observaciones incluidas: 68 después de ajustar por datos perdidos al diferenciar y por datos n.d.					2. Ho: {D(LNKPEA)} es una serie estacionaria alrededor de una tendencia.	
Variable	Coefficiente	Error Estándar	t-Estadístico	Probabilidad	Estadístico η_{τ} del rezago óptimo 7 : 0,0945	
D(LNKPEA(-1))	-0,1203	0,0692	-1,7392	0,0866	Valor crítico al 1% 0,216	
Estadístico Durbin-Watson 1,7822					Valor crítico al 5% 0,146	
Correlograma de residuos					Valor crítico al 10% 0,119	
Q-Estadístico del rezago 17 (#observ.incl./4)	13,191				NOTA: Como los valores de η_{μ} y η_{τ} son menores el valor crítico de la prueba, entonces se acepta la posibilidad de que D(LNKPEA) sea estacionaria alrededor de un nivel y también sea estacionaria alrededor de una tendencia.	
P-value del rezago 17	0,723					
El p-value y el Durbin-Watson sugieren que los residuos de la prueba ADF no están correlacionados						

Anexo Tabla 6A

CRITERIOS PARA ESCOGER EL ORDEN DE REZAGOS PARA MODELOS VAR						
Muestra :	1925-1994	Datos anuales				
Variables:	LNKPEA	LNYPEA	CONSTANTE	TENDENCIA		
A. Guías para la selección del número de términos (rezagos) en el modelo multivariado VAR						
(Buscar el mínimo valor de los criterios de información Schwarz, Hannan-Quinn y RWNAR - Akaike)						
	Numero rezagos incluidos en el VAR	SCHWARZ*	HANNAN-QUINN*	RWNAR-AKAIKE	RWNAR-BIC	RWNAR-HANNAN QUINN
	1	-16,444	-16,521			
	2	-16,935	-17,090	-17,421	-17,421	-17,421
	3	-16,763	-16,995			
	4	-16,764	-17,074			
	5	-16,758	-17,145			
	6	-16,559	-17,024			
	valor mínimo	-16,935	-17,145	-17,421	-17,421	-17,421
	rezago mínimo	2	5	2	2	2
NOTA: El rezago óptimo del modelo incluyendo constante y sin tendencia también es 2. El p-value con el que se está trabajando es del 5%.						
B. Verificación de ruido blanco en los errores del modelo VAR						
Test de Ljung-Box -correlación serial en el modelo multivariado						
	Numero rezagos incluidos en el VAR	Test Ljung-Box en rezago 17	Probabilidad value	P-		
	1	102,33	0,00			
	2	59,30	0,50			
	3	53,87	0,56			
	4	58,09	0,26			
	5	41,82	0,72			
	6	40,58	0,62			
C. Prueba multivariada de normalidad de los errores						
Test de Doornik y Hansen (1994) para el tercer y cuarto momento de los errores						
	Numero rezagos incluidos en el VAR	Test Doornik&Hansen	Probabilidad P-value			
	1	11,52	0,021			
	2	0,23	0,994			
	3	0,43	0,980			
	4	1,39	0,845			
	5	2,22	0,696			
	6	0,92	0,921			

Anexo Tabla 7A

PRUEBA DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN						VECTOR DE CORRECCIÓN DE ERRORES			
Muestra efectiva:	1927-1994					Ecuación de Cointegración			
Observaciones incluidas:	68					EC. de COINT1			
Rezagos en el modelo VAR:	2					LNYPEA(-1)	1,0000		
Supuesto de la prueba:	Existe una tendencia lineal determinística en los datos. Constante y tendencia no restringidas en el vector de cointegración					LNKPEA(-1)	-0,2038		
Variables endógenas:	LNKPEA LNYPEA					Error estándar	0,1003		
Análisis I (1)						Estadístico-t	-2,0313		
						TENDENCIA	-0,0144		
Valores Propios (Eigenvalues)						Error estándar	0,0014		
						Estadístico-t	-9,9729		
L-max.						C	-6,43977		
						Traza	D(LNYPEA)		D(LNKPEA)
Ho: r						EC. de COINT1	-0,1751		0,0783
						L-máx.90	0,0774		0,0330
Traza90						Estadístico-t	-2,2626		2,3769
						0,1665	12,38		15,63
Se rechaza cualquier cointegración a un nivel de significancia del 10%.						D(LNYPEA(-1))	0,2679		0,0787
						0,0466	3,25		3,25
						Error estándar	0,1141		0,0486
						Estadístico-t	2,3484		1,6207
						D(LNKPEA(-1))	0,2995		0,5365
						Error estándar	0,2940		0,1252
						Estadístico-t	1,0187		4,2848
						C	0,0100		0,0052
						Error estándar	0,0051		0,0022
						Estadístico-t	1,9582		2,3813
						Criterio Akaike			-17,25
						Criterio Schwarz			

Anexo Tabla 8A

REGRESIONES UTILIZANDO MÍNIMOS CUADRADOS				
Muestra ajustada:	1926-1994	Datos anuales		
Número de observaciones:	69 después de ajustar por datos perdidos y por datos n.d.			
Variable dependiente:	$D(YPEA)_t = LN(PIB/PEA)_t - LN(PIB/PEA)_{t-1} = LNYPEA_t - LNYPEA_{t-1}$			
Ecuación:	$D(YPEA)_t = (1-\alpha) \delta + \alpha D(KPEA)_t$			
	Coefficiente	Error estándar	Estadístico 't'	Probabilidad
α	0,3565	0,2294	1,5539	0,1249
δ	0,0222	0,0056	3,9716	0,0002
R cuadrado:	0,0348	Durbin - Watson:	1,4067	
R cuadrado ajustado:	0,0204			
Muestra ajustada:	1950-1994	Datos anuales		
Número de observaciones:	45 después de ajustar por datos perdidos y por datos n.d.			
Variable dependiente:	$D(YPEA)_t = LN(PIB/PEA)_t - LN(PIB/PEA)_{t-1} = LNYPEA_t - LNYPEA_{t-1}$			
Ecuación:	$D(YPEA)_t = (1-\alpha) \delta + \alpha D(KPEA)_t$			
	Coefficiente	Error estándar	Estadístico 't'	Probabilidad
α	0,4080	0,2272	1,7960	0,0795
δ	0,0155	0,0042	3,6925	0,0006
R cuadrado:	0,0698	Durbin - Watson:	1,2474	
R cuadrado ajustado:	0,0481			

Anexo Tabla 9A

PRUEBA DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN						VECTOR DE CORRECCIÓN DE ERRORES		
Muestra efectiva:	1927-1981					Período:	1927 - 1981	
Observaciones incluidas:	55					Número observaciones	55	
Rezagos en el modelo VAR:	2 (Un rezago en el modelo VEC)					Ecuación de cointegración EC. de COINT1		
Supuesto de la prueba:	Existe una tendencia lineal determinística en los datos. Constante y tendencia no restringidas en el vector de cointegración					LNYPEA(-1)	1,0000	
Variables endógenas:	LNKPEA LNYPEA					LNKPEA(-1)	-0,4202	
Análisis I (1)						Error estándar	-0,0790	
Valores Propios (Eigenvalues)	L-máx.	Traza	Ho: r	L-máx.90	Traza90	Estadístico-t	-5,3196	
0,2828	18,28	27,57	0	12,39	22,95	TENDENCIA	-0,0158	
0,1554	9,29	9,29	1	10,56	10,56	Error estándar	-0,0012	
El estadístico L-máx. indica que existe por lo menos un vector de cointegración a un nivel de significancia del 10%.						Estadístico-t	-13,5764	
						C	-4,7642	
Corrección de Errores:						D(LNYPEA)	D(LNKPEA)	
EC. de COINT1						-0,5190	0,0515	
Error estándar						-0,1370	-0,0572	
Estadístico-t						-3,7888	-0,9015	
D(LNYPEA(-1))						0,3475	0,1057	
Error estándar						-0,1283	-0,0535	
Estadístico-t						-2,7076	-1,9754	
D(LNKPEA(-1))						0,4281	0,5554	
Error estándar						-0,2869	-0,1197	
Estadístico-t						-1,4922	-4,6413	
C						0,0080	0,0034	
Error estándar						-0,0054	-0,0022	
Estadístico-t						-1,4866	-1,5365	
Criterio Akaike						-11,46		
Criterio Schwarz						-11,06		

Anexo Tabla 10A

PRUEBA DE COINTEGRACIÓN DE JOHANSEN para otros tamaños de muestra					
Series: LNKPEA LNYPEA - Incluyendo un rezago.					
Periodo Muestral (No. observaciones)	Valores Propios (Eigenvalues)	Razón de verosimilitud	Valor crítico al 5%	Valor crítico al 1%	Ho: r
1925 - 1959	0,4057	25,05	25,32	30,45	0
(33)	0,2122	7,87	12,25	16,26	1
* El estadístico de prueba rechaza cualquier cointegración a un nivel de significancia del 5%.					
1925 - 1960	0,4068	26,2	25,32	30,45	0
(34)	0,2200	8,45	12,25	16,26	1
* El estadístico de prueba acepta a existencia de por lo menos una relación de cointegración a un nivel de significancia del 5%.					
1925 - 1982	0,1743	20,16	25,32	30,45	0
(56)	0,1549	9,43	12,25	16,26	1
* El estadístico de prueba rechaza cualquier cointegración a un nivel de significancia del 5%.					

Anexo Tabla 11A

ESTABILIDAD DE LOS COEFICIENTES DEL VECTOR DE COINTEGRACIÓN

Periodo	α gorro *	Error estándar	Máximo	Mínimo	β_1 gorro **	Error estándar	Máximo	Mínimo	g***
1927 - 1950	-0,0510	-0,2863	-0,3373	0,2353	-0,0177	-0,0013	-0,0190	-0,0164	1,88%
1927 - 1951	-0,2037	-0,2531	-0,4567	0,0494	-0,0169	-0,0013	-0,0182	-0,0157	2,15%
1927 - 1952	-0,3141	-0,2165	-0,5306	-0,0976	-0,0167	-0,0012	-0,0179	-0,0155	2,47%
1927 - 1953	-0,3591	-0,1853	-0,5444	-0,1737	-0,0166	-0,0012	-0,0178	-0,0155	2,63%
1927 - 1954	-0,4369	-0,1667	-0,6036	-0,2702	-0,0161	-0,0012	-0,0173	-0,0150	2,91%
1927 - 1955	-0,4053	-0,1518	-0,5571	-0,2535	-0,0162	-0,0011	-0,0173	-0,0151	2,76%
1927 - 1956	-0,4097	-0,1360	-0,5458	-0,2737	-0,0162	-0,0011	-0,0172	-0,0151	2,77%
1927 - 1957	-0,3822	-0,1207	-0,5029	-0,2615	-0,0162	-0,0010	-0,0172	-0,0152	2,66%
1927 - 1958	-0,3626	-0,1070	-0,4696	-0,2556	-0,0162	-0,0010	-0,0172	-0,0152	2,58%
1927 - 1959	-0,4210	-0,0918	-0,5129	-0,3292	-0,0161	-0,0010	-0,0171	-0,0151	2,82%
1927 - 1960	-0,4034	-0,0835	-0,4869	-0,3199	-0,0160	-0,0010	-0,0170	-0,0151	2,72%
1927 - 1961	-0,4010	-0,0782	-0,4792	-0,3228	-0,0160	-0,0010	-0,0170	-0,0151	2,71%
1927 - 1962	-0,4112	-0,0730	-0,4842	-0,3382	-0,0161	-0,0009	-0,0170	-0,0152	2,77%
1927 - 1963	-0,4070	-0,0687	-0,4757	-0,3383	-0,0161	-0,0009	-0,0170	-0,0152	2,75%
1927 - 1964	-0,4175	-0,0663	-0,4838	-0,3512	-0,0160	-0,0009	-0,0169	-0,0151	2,79%
1927 - 1965	-0,4156	-0,0643	-0,4799	-0,3513	-0,0160	-0,0009	-0,0169	-0,0151	2,78%
1927 - 1966	-0,4125	-0,0627	-0,4752	-0,3498	-0,0160	-0,0009	-0,0169	-0,0151	2,76%
1927 - 1967	-0,4170	-0,0612	-0,4782	-0,3557	-0,0159	-0,0009	-0,0168	-0,0150	2,77%
1927 - 1968	-0,4205	-0,0601	-0,4806	-0,3604	-0,0159	-0,0009	-0,0167	-0,0150	2,78%
1927 - 1969	-0,4214	-0,0587	-0,4802	-0,3627	-0,0159	-0,0009	-0,0168	-0,0151	2,79%
1927 - 1970	-0,4246	-0,0580	-0,4826	-0,3667	-0,0159	-0,0009	-0,0167	-0,0150	2,80%
1927 - 1971	-0,4224	-0,0571	-0,4795	-0,3653	-0,0160	-0,0008	-0,0168	-0,0152	2,81%
1927 - 1972	-0,4204	-0,0601	-0,4805	-0,3603	-0,0162	-0,0009	-0,0171	-0,0153	2,84%
1927 - 1973	-0,4175	-0,0628	-0,4804	-0,3547	-0,0164	-0,0009	-0,0173	-0,0155	2,85%
1927 - 1974	-0,4344	-0,0630	-0,4973	-0,3714	-0,0161	-0,0009	-0,0170	-0,0152	2,89%
1927 - 1975	-0,4299	-0,0618	-0,4917	-0,3681	-0,0162	-0,0009	-0,0171	-0,0152	2,87%
1927 - 1976	-0,4311	-0,0611	-0,4923	-0,3700	-0,0161	-0,0009	-0,0170	-0,0152	2,87%
1927 - 1977	-0,4311	-0,0640	-0,4951	-0,3672	-0,0160	-0,0009	-0,0169	-0,0151	2,85%
1927 - 1978	-0,4236	-0,0625	-0,4860	-0,3611	-0,0161	-0,0009	-0,0171	-0,0152	2,84%
1927 - 1979	-0,4320	-0,0639	-0,4958	-0,3681	-0,0159	-0,0009	-0,0169	-0,0150	2,85%
1927 - 1980	-0,4316	-0,0660	-0,4976	-0,3656	-0,0159	-0,0010	-0,0168	-0,0149	2,83%
1927 - 1981	-0,4202	-0,0790	-0,4992	-0,3412	-0,0158	-0,0012	-0,0170	-0,0147	2,77%
1927 - 1982	-0,5829	-0,1842	-0,7671	-0,3987	-0,0125	-0,0030	-0,0155	-0,0095	3,03%

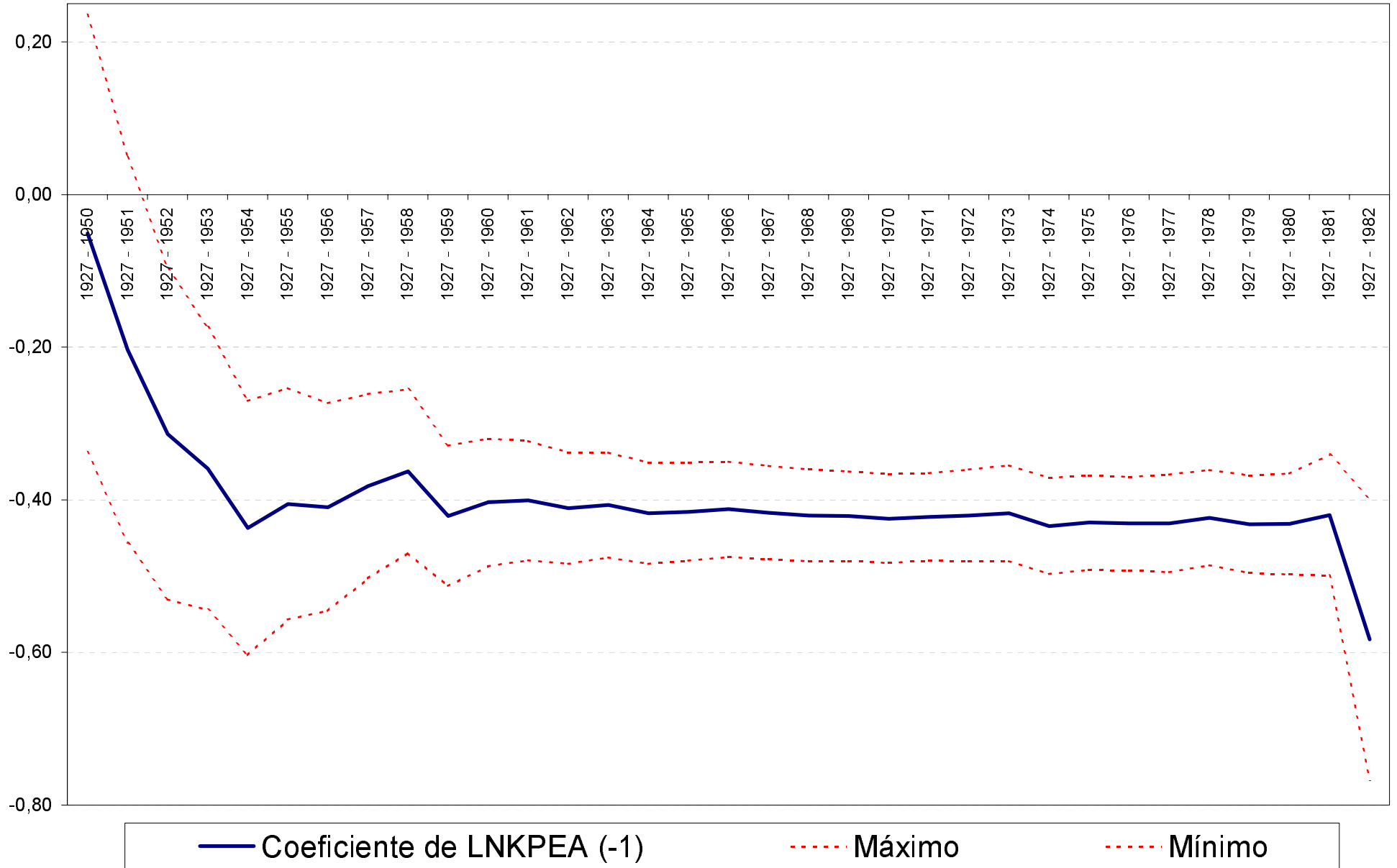
* α gorro: Coeficiente estimado de LNKPEA t_{-1}

** β_1 gorro: Coeficiente estimado de la tendencia en el modelo.

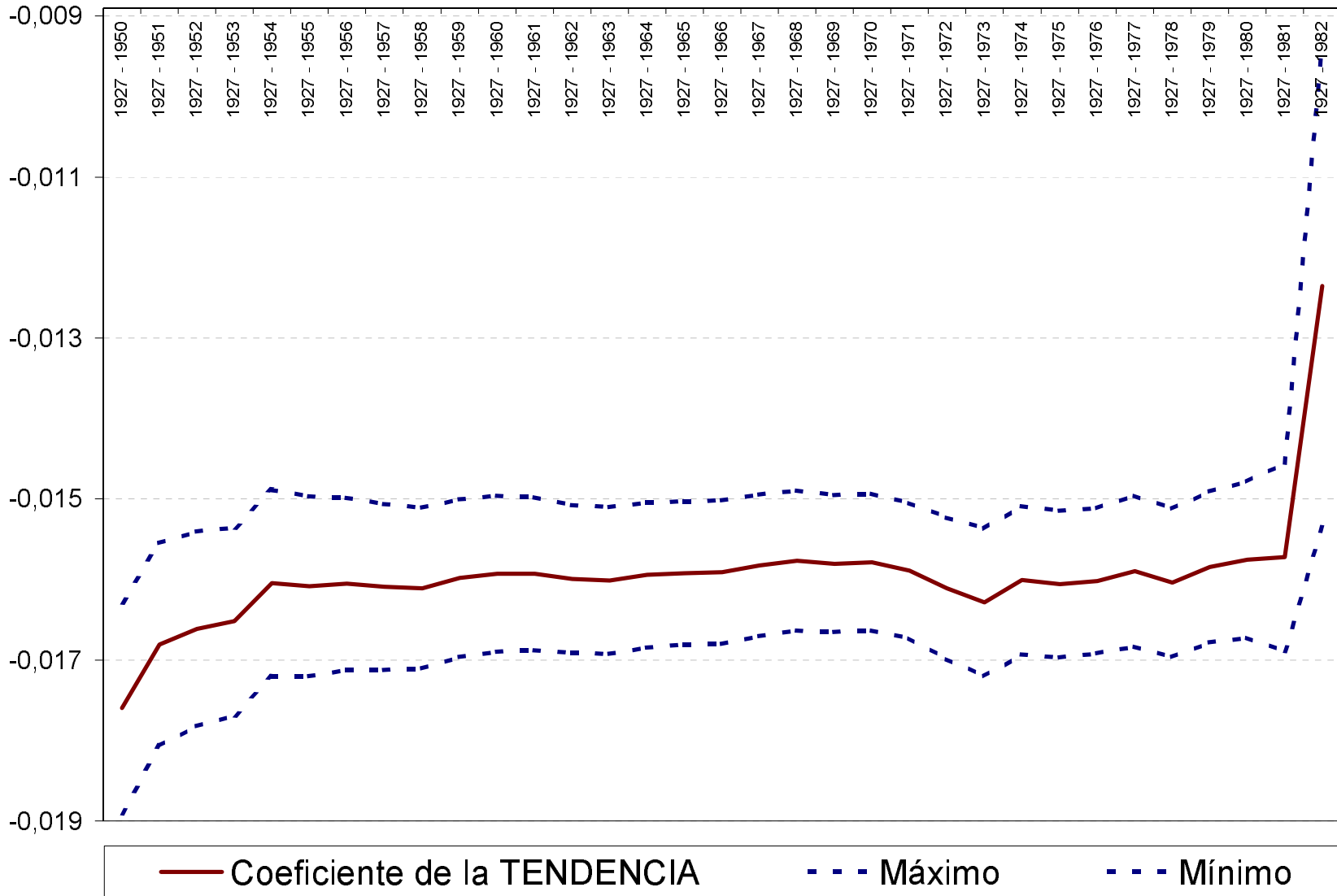
*** g: Tasa de crecimiento de la eficiencia laboral $\rightarrow g = e^{(b^1 \text{ gorro} / 1 - a \text{ gorro})} - 1$

En los periodos recursivos 1927-1983 hacia delante los coeficientes α son mayores que 1 y altamente inestables.

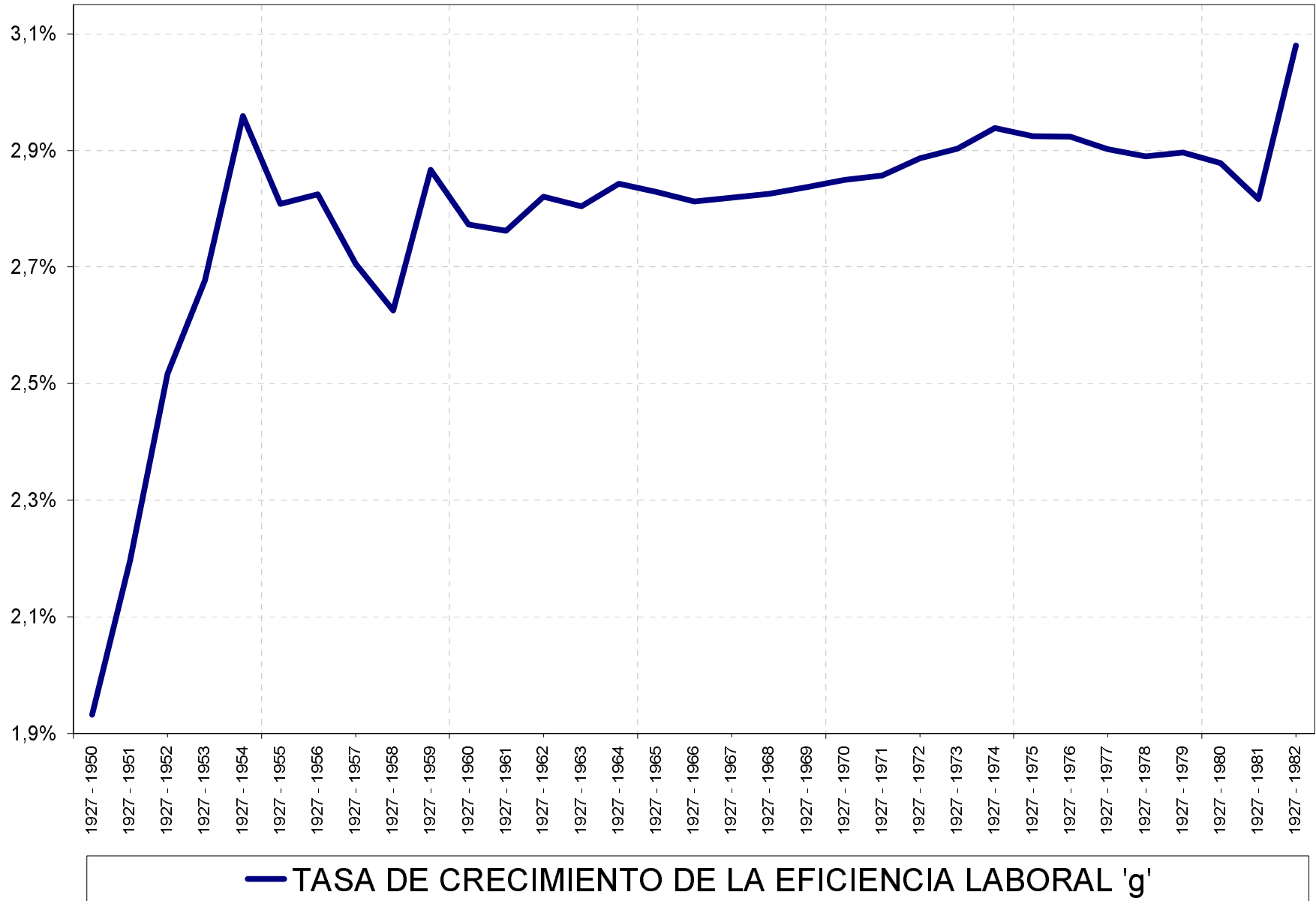
**ESTABILIDAD DEL COEFICIENTE " α " EN EL VEC RECURSIVO:
1927-1950...1927-1982**



**ESTABILIDAD DEL COEFICIENTE DE LA TENDENCIA EN EL VEC RECURSIVO:
1927-1950... 1927-1982**



COMPORTAMIENTO DE LA EFICIENCIA LABORAL EN EL VEC RECURSIVO:
1927-1950...1927 - 1982



Anexo Tabla 12A

HIPÓTESIS ESPECIALES Prueba de cointegración de Johansen

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN

VARIABLES ENDÓGENAS: LNKPEA LNYPEA

* Constante y tendencia no restringidas en el espacio de cointegración

** Se incluyeron en todas las pruebas 2 rezagos en el modelo VAR.

Pruebas

1. Exclusión: Revisa la validez de una variable en la relación estacionaria de largo plazo.

Ho: La variable está excluida y no es necesaria para obtener relaciones estacionarias de largo plazo.

Ha: La variable no está excluida.

Prueba de máxima verosimilitud es asintóticamente distribuida como una $\chi^2_{0,05;r}$ donde r es el número de vectores de cointegración.

2. Estacionaridad: Revisa si las variables individuales son estacionarias dentro de una prueba multivariada.

Ho: La variable es estacionaria dado el espacio de cointegración.

Ha: La variable no es estacionaria dado el espacio de cointegración

Prueba de máxima verosimilitud es asintóticamente distribuida como una $\chi^2_{0,05;(p-r)}$ donde (p-r) es el número de grados de libertad.

p: número de rezagos en el modelo VAR.

r: número de vectores de cointegración.

3. Exogeneidad débil: Es una prueba para investigar si las variaciones de corto plazo de alguna de las variables no afectan la relación de largo plazo entre variables.

Ho: La variable es exógena débil.

Ha: La variable no es exógena débil.

Prueba de máxima verosimilitud es asintóticamente distribuida como una $\chi^2_{0,05;r}$ donde r es número de vectores de cointegración.

Continuación de la Tabla 12A

HIPÓTESIS ESPECIALES

Muestra efectiva	No de observaciones	Observaciones menos No. de variables	Test de exclusión			Test de estacionaridad		Test de exogeneidad débil	
			LNKPEA	LNYPEA	TENDENCIA	LNKPEA	LNYPEA	LNKPEA	LNYPEA
Valores críticos →			$\chi^2_{0,05; 1} = 3.84.$			$\chi^2_{0,05; 2} = 5,99.$		$\chi^2_{0,05; 1} = 3.84.$	
1927 - 1960	34	28	8,47	9,10	8,14	15,04	10,37	0,27	7,35
1927 - 1961	35	29	8,80	9,13	8,17	15,29	10,57	0,29	7,36
1927 - 1962	36	30	9,01	10,70	9,67	17,49	13,77	0,24	8,78
1927 - 1963	37	31	9,29	11,70	10,49	18,64	15,44	0,23	9,66
1927 - 1964	38	32	9,83	11,34	10,16	18,40	15,00	0,27	9,18
1927 - 1965	39	33	10,14	12,04	10,71	19,24	16,21	0,31	9,66
1927 - 1966	40	34	10,51	11,83	10,50	19,00	15,63	0,36	9,43
1927 - 1967	41	35	11,38	14,03	12,32	20,94	18,69	0,57	10,46
1927 - 1968	42	36	12,00	13,67	11,94	20,76	18,04	0,69	9,89
1927 - 1969	43	37	12,34	14,52	12,80	21,75	19,43	0,68	10,57
1927 - 1970	44	38	12,53	14,33	12,65	21,76	19,31	0,71	10,30
1927 - 1971	45	39	12,61	15,38	13,72	22,70	20,85	0,55	11,41
1927 - 1972	46	40	10,65	13,95	12,74	21,20	19,92	0,24	11,18
1927 - 1973	47	41	9,60	13,22	12,18	20,45	19,37	0,12	11,04
1927 - 1974	48	42	10,85	13,39	11,86	20,96	19,27	0,56	10,11
1927 - 1975	49	43	11,60	15,13	13,37	22,24	20,93	0,40	11,53
1927 - 1976	50	44	12,03	15,34	13,46	22,63	21,13	0,49	11,58
1927 - 1977	51	45	11,11	13,67	11,74	21,09	19,30	0,55	10,41
1927 - 1978	52	46	11,33	14,66	12,94	22,48	20,70	0,31	11,60
1927 - 1979	53	47	11,79	15,13	13,07	22,73	21,18	0,55	11,34
1927 - 1980	54	48	11,18	13,93	11,81	21,59	19,82	0,63	10,47
1927 - 1981	55	49	7,09	8,53	6,99	15,88	13,88	0,46	6,85

Anexo Tabla 13A

PRUEBA DE CAUSALIDAD TIPO GRANGER			
Variables:	LNKPEA	LNYPEA	
Muestra:	1925 -1994		
Rezagos:	2		
Hipótesis nula:	Número Observaciones	Estadístico F*	Probabilidad
LNKPEA no causa LNYPEA en el sentido de Granger	68	0,0987	0,9061
LNYPEA no causa LNKPEA en el sentido de Granger	68	5,0374	0,0093
<hr/>			
Variables:	LNKPEA	LNYPEA	
Muestra:	1925 -1981		
Rezagos:	2		
Hipótesis nula:	Número Observaciones	Estadístico F*	Probabilidad
LNKPEA no causa LNYPEA en el sentido de Granger	55	0,0495	0,9518
LNYPEA no causa LNKPEA en el sentido de Granger	55	7,5278	0,0014
<p>Notas:</p> <p>* estadístico F reportado es el de Wald para hipótesis conjuntas</p> <p>En los dos periodos muestrales no se puede rechazar la hipótesis que LNKPEA no causa LNYPEA en el sentido de Granger pero si se puede rechazar la hipótesis de que LNYPEA no causa LNKPEA en el sentido de Granger. Así la causalidad de Granger corre en un solo sentido de LNYPEA a LNKPEA y no en sentido contrario.</p>			

Anexo Tabla 14A

Estimación capital e inversión 1905 1924							
FORMULAS (1905-1924):		$K_t = [K_{t+1} - (\alpha g/r) * Y_t] / [1 - (\alpha g/r) * (\text{depreciación})]$ $Y_t/K_t = [1 - (\alpha g/r) * (\text{depreciación})] / [K_{t+1}/Y_t - \alpha g/r]$ $I_t = (\alpha g/r) * Y_t$					
	Producto Interno Bruto Real GRECO-CEPAL-DANE Millones de pesos de 1975 (1)	Población Económicamente Activa GRECO-FLOREZ (2)	PIB per capita GRECO (3)	Capital real observado CEPAL-DANE Millones de pesos de 1975 (4)	Capital Real estimado GRECO Millones de pesos de 1975 (5)	PIB/CAPITAL GRECO-CEPAL-DANE (6)	Inversión neta estimada y observada GRECO-CEPAL-DANE Millones de pesos de 1975 (7)
1905	14.148	1.694.072	8.352		144.334	9,80%	1.608
1906	14.547	1.726.740	8.425		145.450	10,00%	1.654
1907	15.509	1.760.038	8.812		146.608	10,58%	1.763
1908	16.376	1.793.979	9.128		147.871	11,07%	1.861
1909	17.241	1.828.574	9.428		149.228	11,55%	1.960
1910	18.217	1.863.836	9.774		150.679	12,09%	2.071
1911	19.120	1.899.778	10.064		152.235	12,56%	2.173
1912	20.059	1.936.413	10.359		153.890	13,03%	2.280
1913	20.935	1.974.170	10.605		155.645	13,45%	2.380
1914	21.731	2.012.664	10.797		157.494	13,80%	2.470
1915	22.735	2.051.909	11.080		159.427	14,26%	2.584
1916	23.906	2.091.918	11.428		161.467	14,81%	2.717
1917	24.886	2.132.708	11.669		163.634	15,21%	2.829
1918	26.268	2.174.293	12.081		165.905	15,83%	2.986
1919	28.451	2.218.238	12.826		168.325	16,90%	3.234
1920	30.396	2.263.071	13.431		170.985	17,78%	3.455
1921	32.146	2.308.811	13.923		173.857	18,49%	3.654
1922	34.323	2.355.475	14.571		176.918	19,40%	3.901
1923	36.513	2.403.082	15.194		180.216	20,26%	4.150
1924	38.587	2.451.651	15.739		183.752	21,00%	4.386
1925	40.669	2.501.202	16.260	187.511		21,69%	4.623

(1) PIB real (base=1975) 1905-1997. Ver nota Tabla anterior
(2) PEA 1925-1997 Florez 1998. Ver nota Tabla anterior
(3) Ver nota Tabla anterior
(4) Capital real . Ver Anexo Tabla 3A
(5) Capital real estimado según :
FORMULA: $K_t = (K_{t+1} - \alpha g/r Y_t)/(1 - \text{depreciación})$
(6) Relación producto capital. 1905-1924 estimada según:
FORMULA: $Y_t/K_t = (1 - \text{depreciación}) / (K_{t+1}/Y_t - \alpha g/r)$
(7) Inversión. 1905-1924 estimada según:
FORMULA: $I_t = (\alpha g/r) Y_t$
1925-1997 tomado del cuadro Anexo Tabla 3A

Anexo Tabla 15A

Comparación entre datos del PIB de Greco y de Maddison

	PIB REAL	T.CREC.	PIB REAL	T.CREC.	T.CREC.	PROMEDIOS		
	GRECO	GRECO	MADDISON	MADDISON	GRECO			
	EN PESOS DE 1975		A PRECIOS CONTANTES 1929=100			PERIODOS	GRECO	MADDISON
1905	14.148					1913-1929	6,01%	3,87%
1906	14.547	2,82%				1929-1939	3,78%	3,84%
1907	15.509	6,61%				1939-1950	4,02%	3,76%
1908	16.376	5,59%				1950-1965	4,46%	4,52%
1909	17.241	5,28%				1965-1973	5,88%	6,10%
1910	18.217	5,67%				1973-1980	5,20%	5,46%
1911	19.120	4,95%				1980-1985	2,56%	2,61%
1912	20.059	4,91%						
1913	20.935	4,37%	54,50		6,01%			
1914	21.731	3,80%	56,61	3,87%	6,01%			
1915	22.735	4,62%	58,80	3,87%	6,01%			
1916	23.906	5,15%	61,07	3,87%	6,01%			
1917	24.886	4,10%	63,43	3,87%	6,01%			
1918	26.268	5,56%	65,88	3,87%	6,01%			
1919	28.451	8,31%	68,43	3,87%	6,01%			
1920	30.396	6,84%	71,08	3,87%	6,01%			
1921	32.146	5,76%	73,82	3,87%	6,01%			
1922	34.323	6,77%	76,68	3,87%	6,01%			
1923	36.513	6,38%	79,64	3,87%	6,01%			
1924	38.587	5,68%	82,72	3,87%	6,01%			
1925	40.669	5,39%	85,92	3,87%	6,01%			
1926	44.552	9,55%	89,24	3,87%	6,01%			
1927	48.565	9,01%	92,69	3,87%	6,01%			
1928	52.132	7,35%	96,28	3,87%	6,01%			
1929	54.008	3,60%	100	3,87%	6,01%			
1930	53.544	-0,86%	99,1	-0,90%	-0,86%			
1931	52.689	-1,60%	97,6	-1,51%	-1,60%			
1932	56.182	6,63%	104	6,56%	6,63%			
1933	59.340	5,62%	109,9	5,67%	5,62%			
1934	63.075	6,29%	107,6	-2,09%	6,29%			
1935	64.617	2,44%	119,6	11,15%	2,44%			
1936	68.035	5,29%	126	5,35%	5,29%			
1937	69.094	1,56%	127,9	1,51%	1,56%			
1938	73.590	6,51%	136,3	6,57%	6,51%			
1939	78.105	6,13%	144,6	6,09%	6,13%			
1940	79.795	2,16%	149,72	3,54%	4,02%			
1941	81.133	1,68%	155,03	3,54%	4,02%			
1942	81.300	0,21%	160,52	3,54%	4,02%			
1943	81.635	0,41%	166,21	3,54%	4,02%			
1944	87.152	6,76%	172,10	3,54%	4,02%			
1945	91.240	4,69%	178,20	3,54%	4,02%			
1946	100.009	9,61%	184,52	3,54%	4,02%			
1947	103.892	3,88%	191,06	3,54%	4,02%			
1948	106.846	2,84%	197,83	3,54%	4,02%			
1949	116.172	8,73%	204,84	3,54%	4,02%			
1950	117.454	1,10%	212,1	3,54%	4,02%			
1951	120.742	2,80%	221,82	4,58%	4,46%			
1952	128.408	6,35%	231,99	4,58%	4,46%			
1953	134.953	5,10%	242,63	4,58%	4,46%			
1954	144.625	7,17%	253,76	4,58%	4,46%			
1955	150.362	3,97%	265,39	4,58%	4,46%			
1956	157.507	4,75%	277,56	4,58%	4,46%			
1957	162.823	3,38%	290,28	4,58%	4,46%			
1958	165.916	1,90%	303,59	4,58%	4,46%			
1959	177.806	7,17%	317,51	4,58%	4,46%			
1960	184.932	4,01%	332,07	4,58%	4,46%			
1961	194.432	5,14%	347,29	4,58%	4,46%			
1962	204.613	5,24%	363,22	4,58%	4,46%			
1963	211.178	3,21%	379,87	4,58%	4,46%			
1964	223.915	6,03%	397,29	4,58%	4,46%			
1965	232.906	4,02%	415,5	4,58%	4,46%			
1966	245.865	5,56%	441,64	6,29%	5,88%			
1967	254.985	3,71%	469,42	6,29%	5,88%			
1968	270.928	6,25%	498,95	6,29%	5,88%			
1969	288.102	6,34%	530,33	6,29%	5,88%			
1970	307.496	6,73%	563,69	6,29%	5,88%			
1971	325.825	5,96%	599,15	6,29%	5,88%			
1972	350.813	7,67%	636,84	6,29%	5,88%			
1973	374.398	6,72%	676,9	6,29%	5,88%			
1974	395.910	5,75%	713,08	5,35%	5,20%			
1975	405.108	2,32%	751,20	5,35%	5,20%			
1976	424.263	4,73%	791,35	5,35%	5,20%			
1977	441.906	4,16%	833,65	5,35%	5,20%			
1978	479.335	8,47%	878,21	5,35%	5,20%			
1979	505.119	5,38%	925,15	5,35%	5,20%			
1980	525.765	4,09%	974,6	5,35%	5,20%			
1981	537.736	2,28%	994,73	2,07%	2,56%			
1982	542.836	0,95%	1015,28	2,07%	2,56%			
1983	551.380	1,57%	1036,25	2,07%	2,56%			
1984	569.855	3,35%	1057,65	2,07%	2,56%			
1985	587.561	3,11%	1079,5	2,07%	2,56%			

Fuente: Maddison (1991). Tabla 1.7b "Latin American GDP at constant prices, 1913-1985", pagina 7.

1913-1929 son tomados por Maddison de L.J. Zimmerman, Arme en rijke landen, The Hague, 1964; 1929-1950 son datos de la CEPAL, la misma fuente del presente trabajo.

Datos de GRECO son tomados de Anexo Tabla 2 de este trabajo.