



BANCO DE LA REPUBLICA
Subgerencia de Estudios Económicos

Una relación no lineal entre inflación y los medios de pago

Munir A. Jalil Barney
Luis Fernando Melo Velandia*

Santafé de Bogotá, Diciembre de 1999

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta Directiva. Se agradecen los comentarios y sugerencias a una versión previa del trabajo de Luis E. Arango, Arturo Galindo, Andrés González, Carlos F. Jaramillo, Enrique López, Fabio Nieto, Martha Misas, Hugo Oliveros, Jesús Otero y Adriana Pontón.

Resumen

Con la adopción de la política de 'Inflación Objetivo' en un buen número de países, uno de los principales objetivos de los bancos centrales se ha convertido en encontrar modelos que puedan dar una idea de la trayectoria de la inflación en el largo plazo. En este orden de ideas el presente artículo trata de establecer una relación entre inflación y un agregado monetario para el caso colombiano utilizando información mensual desde febrero de 1985 hasta abril de 1999. Una de las restricciones comunes que implican el estudio de la relación entre M1 e inflación utilizando modelos lineales consiste en la simetría de la función de impulso respuesta (FIR). Así, un choque positivo sobre M1 tiene el mismo efecto sobre el sistema que uno negativo. Más aún, la dinámica de la FIR no depende de la fecha cuando el choque es dado. Sin embargo, dadas las características especiales que gobiernan esta relación en Colombia, es posible pensar que las restricciones anteriores no son necesariamente válidas.

En este documento una relación no-lineal entre inflación y crecimiento de M1 es encontrada utilizando un modelo de Regresión de Transición Suave (STR). Una de las principales características de este nuevo modelo está relacionada con su capacidad de pronóstico. Utilizando varios estadísticos de evaluación y comparando estos con otros modelos utilizados en el Banco de la República, el modelo aquí hallado es el mejor para pronosticar la inflación de largo plazo. Adicionalmente, este modelo puede ser utilizado para probar la existencia de comportamiento asimétrico en la inflación originado por un choque en M1. Sobre este último punto la evidencia encontrada no es clara para el caso colombiano.

JEL: C32, E31,E37

1. Introducción

La política de 'Inflación Objetivo' es uno de los temas más importantes de discusión en los años recientes. Países como Nueva Zelanda, España, Reino Unido, Canadá, Suecia, Australia y Brasil han implementado este mecanismo y en países como Chile y Colombia las condiciones para llevar a cabo este tipo de política- la cual está basada en el continuo monitoreo de los pronósticos de inflación- están dadas. En este contexto, modelos que puedan pronosticar adecuadamente la inflación en el largo plazo y que puedan explicar la dinámica entre el dinero y la inflación pueden jugar un papel importante.

Buscando cubrir dinámicas mucho más ricas y realistas que provean unos pronósticos más adecuados en este documento se intenta especificar una relación no lineal entre la inflación y el crecimiento de M1 para Colombia utilizando información mensual desde febrero de 1985 hasta abril de 1999. Existen varios trabajos anteriores en los cuales se involucran especificaciones no lineales para la inflación de Colombia, uno de los primeros trabajos explica el proceso inflacionario como un modelo 'Switching' con tres estados (Ver Melo y Misas (1998)). Trabajos posteriores han tratado de explicar la inflación como un proceso GARCH (Ver Jalil y Tobón (1999)) y como un proceso Autorregresivo de Transición Suave (STAR) (Ver Arango y González (1999)). Todas las dinámicas no lineales anteriormente descritas están únicamente en función de la inflación pasada de tal forma que no se incluyen otras variables que puedan explicar el comportamiento de la serie y adicionalmente, en ninguno de estos trabajos se explora el comportamiento de pronósticos de la inflación bajo estos tipos de modelos. En este documento se estima una relación no lineal utilizando un modelo de Regresión de Transición Suave entre la inflación y agregados monetarios, realizando énfasis en el análisis de pronósticos.

Una ventaja de utilizar una especificación no lineal está relacionada con las propiedades de la función de impulso respuesta (FIR). Las restricciones comunes que son generadas del estudio de la relación entre M1 y la inflación utilizando modelos lineales consiste en la simetría de la FIR. Así, un choque positivo sobre M1 tiene el mismo efecto sobre el sistema que uno negativo. Mas aún, la dinámica de la FIR no depende de la fecha cuando el choque es dado, lo cual significa, que la fecha no influye en los resultados de un choque dado.

El modelo propuesto aquí puede ser utilizado para probar la existencia de comportamientos asimétricos en la función de impulso respuesta. Esto puede ser interpretado como una prueba sobre posible existencia de rigideces nominales en inflación.

El documento está organizado como sigue, la sección 2 incluye una breve explicación de las metodologías econométricas utilizadas para la estimación del modelo no lineal, la sección 3 muestra los resultados para el caso de la economía colombiana y finalmente, en la sección 4 se concluye.

2. Metodología Econométrica

2.1. Modelos Autorregresivos de transición suave (STAR)

Los modelos tipo STAR corresponden a una gama de modelos no lineales donde se supone que el proceso generador de la serie (Y_t) oscila de forma suave entre dos regímenes extremos, específicamente:

$$Y_t = \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{t-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{t-i} \right) F(Y_{t-d}) + \mathbf{e}_t \quad (1)$$

donde $\mathbf{e}_t \xrightarrow{iid} N(0, \mathbf{s}_e^2)$ y $F(Y_{t-d})$ es una función no lineal de Y_{t-d} que toma valores entre 0 y 1,

frecuentemente denominada función de transición¹; los dos modelos más comunes suponen las siguientes funciones:

$$\text{Modelo LSTAR:} \quad F(Y_{t-d}) = \left\{ 1 + \exp[-\mathbf{g}(Y_{t-d} - c)] \right\}^{-1} \quad \mathbf{g} > 0 \quad (2)$$

$$\text{Modelo ESTAR:} \quad F(Y_{t-d}) = \left\{ 1 - \exp[-\mathbf{g}(Y_{t-d} - c)^2] \right\} \quad \mathbf{g} > 0 \quad (3)$$

por lo tanto la no-linealidad que introduce los cambios de régimen por medio de la función $F(Y_{t-d})$ depende de los parámetros \mathbf{g} y c . En particular, para un modelo LSTAR los regímenes de transición ocurren alrededor de $Y_{t-d} = c$ donde el parámetro \mathbf{g} indica el grado de no linealidad, es decir qué tan rápido ocurre la transición entre los dos regímenes extremos o el paso de cero a uno en $F(Y_{t-d})$. Por ejemplo, basados en datos simulados, los Gráficos 1A y 1B muestran la función de transición $F(Y_{t-d})$ para $c = 60$ con dos valores diferentes en el parámetro \mathbf{g} (0.2 y 0.8 respectivamente), claramente se puede observar que este parámetro es menor en el gráfico 1A.

¹ Bajo esta especificación los dos regímenes lineales extremos ocurren cuando $F(Y_{t-d}) = 0$ ó $F(Y_{t-d}) = 1$ y son definidos como $Y_t = \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{t-i} + \mathbf{e}_t$ y $Y_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 + \sum_i (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) Y_{t-i} + \mathbf{e}_t$, respectivamente. Los regímenes restantes corresponden a una combinación lineal de estos dos, donde la ponderación es establecida por $F(Y_{t-d})$.

Gráfico 1A

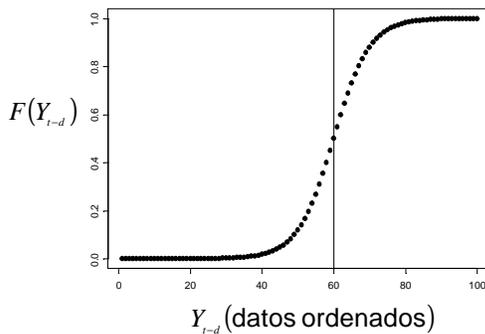
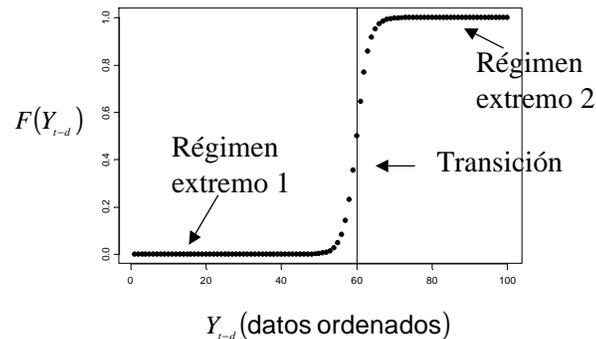
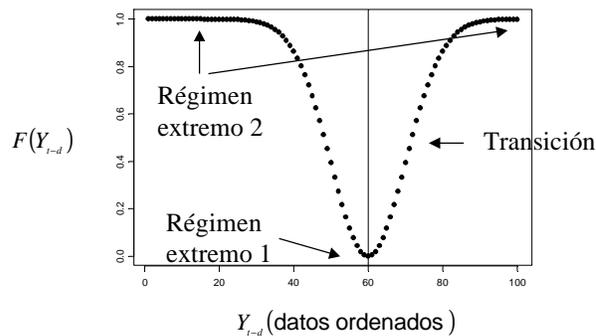


Gráfico 1B



Para los modelos ESTAR la función de transición $F(Y_{t-d})$ tiene en la siguiente forma:

Gráfico 2



Como se observa en el gráfico 2, la función $F(Y_{t-d})$ es simétrica con respecto al parámetro c , en este ejemplo de nuevo $c = 60$.

Para los dos tipos mencionados de modelos STAR la transición entre los dos regímenes extremos se realiza suavemente dependiendo de los valores de Y_{t-d} a través de $F(Y_{t-d})$, sin embargo la transición funciona de forma diferente. En los modelos LSTAR se tienen diferentes dinámicas locales de regímenes extremos para valores bajos o altos de Y_{t-d} (gráficos 1A y 1B). En contraste en los modelos ESTAR la dinámica local es la misma para valores bajos o altos de Y_{t-d} (régimen extremo 2, gráfica 2), mientras que para los valores cercanos a c se tiene la dinámica del otro régimen extremo (régimen extremo 1, gráfica 2).

Los modelos STAR² presentan varias ventajas con respecto a otros tipos de modelos no lineales; son localmente lineales, relativamente sencillos de interpretar y adicionalmente, este tipo de modelos es más general de aquellos que suponen un número finito de regímenes o estados de la economía.

² Una descripción completa de los modelos STAR se encuentra en Tong 1990, Ullah & Giles 1998 y Franses 1998.

“For instance, instead of assuming that an economy just has two discrete states, expansion and contraction, say, it may be more convenient and realistic to assume a continuum of states between the two extremes.” Teräsvirta (1998)³

Es de notar que el modelo autorregresivo lineal es un caso particular de los modelo STAR cuando $g = 0$ ó todos los parámetros β_i son iguales a cero.

2.2. Proceso de Modelación

Para la modelación de los procesos STAR se consideró la estrategia sugerida por Teräsvirta (1994) y Eitrheim y Teräsvirta (1996), la cual es similar en términos de las etapas a la propuesta por Box y Jenkins para los modelos ARIMA y se divide en las fases de: especificación, estimación y diagnóstico o evaluación del modelo.

Un supuesto importante dentro de la mayoría de los modelos no lineales y en particular para las series que siguen una dinámica descrita por los modelos STAR es que estas deben ser estacionarias. Sin embargo, las pruebas tradicionales de raíces unitarias y cointegración no consideran procesos no lineales en la hipótesis nula o en la alterna, por lo tanto si se está considerando modelar dinámicas no lineales no es conveniente considerar este tipo de pruebas. Con respecto a este problema Caner y Hansen (1998) desarrollan una nueva metodología que permite considerar simultáneamente modelos no lineales y raíces unitarias, sin embargo ellos sólo desarrollan estas pruebas de hipótesis para modelos autoregresivos con umbral TAR⁴ (“Threshold Autoregressive Models”). Una prueba más apropiada para los modelos tipo STR es la propuesta por Enders y Ludlow en 1999, estos autores consideran pruebas de raíz unitaria y cointegración dentro de un contexto no lineal más general, en este caso el proceso no lineal es considerado utilizando aproximaciones de Fourier, una mayor explicación de esta metodología se encuentra en el Anexo 1.

Una vez conocido el orden de integración de la serie, se desarrolla la etapa de especificación sobre la serie estacionaria, el primer paso consiste en realizar una prueba de linealidad donde en la hipótesis alterna se tiene un proceso no lineal tipo STAR. Para realizar esta prueba primero se estiman los residuales de un modelo lineal autorregresivo sobre la serie Y_t (ecuación 4), posteriormente se regresan estos residuales contra los términos que resultan de una aproximación de Taylor de tercer orden de la función no lineal del modelo STAR (ecuación 5). Por último, para probar la linealidad se utiliza un test tipo LM sobre la regresión final (expresión 6). Los modelos de regresión utilizados en esta prueba son los siguientes:

³ Capitulo 15 del “*Handbook of applied economic statistics*”, 1998.

⁴ Los modelos TAR constituyen un caso particular de los modelos STAR donde solo existen dos regímenes extremos sin transición.

$$Y_t = \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{f}_i Y_{t-i} + u_t \quad (4)$$

$$\hat{u}_t = \mathbf{b}_{10} + \sum_i \mathbf{b}_{1i} Y_{t-i} + \sum_i \mathbf{b}_{2i} Y_{t-i} Y_{t-d} + \sum_i \mathbf{b}_{3i} Y_{t-i} Y_{t-d}^2 + \sum_i \mathbf{b}_{4i} Y_{t-i} Y_{t-d}^3 + v_t \quad (5)$$

La hipótesis nula de linealidad es:

$$H_0 : \mathbf{b}_{2i} = \mathbf{b}_{3i} = \mathbf{b}_{4i} = 0 \quad \forall i \quad (6)$$

En este procedimiento se supone que el rezago d asociado con la variable de transición Y_{t-d} es conocido. Teräsvirta propone que para seleccionarlo se realice esta prueba de linealidad para varios rezagos y se seleccione d como el rezago con el cual se rechaza el test con el menor p-value, si ninguno de los p-values es suficientemente pequeño la linealidad no es rechazada.

Una vez se ha rechazado la linealidad del proceso que genera la serie, el siguiente paso es escoger entre los modelos ESTAR y LSTAR, para ello se realizan tres pruebas (F_2 , F_3 y F_4)⁵, si el menor p-value ocurre con la prueba F_3 se selecciona un modelo ESTAR, de lo contrario se escoge un modelo LSTAR. Los detalles de esta prueba se pueden encontrar en Teräsvirta, 94.

La siguiente etapa de la modelización corresponde a la estimación del modelo, esta es realizada por máxima verosimilitud, pero debido a las no-linealidades en la función de verosimilitud esta es efectuada utilizando algoritmos numéricos de optimización. Como es usual en este tipo de problemas numéricos los valores iniciales de los parámetros juegan un papel importante dentro del proceso de optimización. Sin embargo, debido a la dinámica local lineal de los modelos STAR, los valores iniciales dependen básicamente de los parámetros \mathbf{g} y c ⁶. Una alternativa para la selección de los valores iniciales consiste en realizar una malla bidimensional de posibles valores de estos parámetros⁷, los valores iniciales son escogidos como la combinación de los dos parámetros que optimiza la función objetivo evaluada en la malla.

Una vez se obtienen los parámetros estimados del modelo es importante verificar que estas estimaciones no cambien significativamente para diferentes combinaciones de valores iniciales de \mathbf{g} y c .

⁵ Específicamente, se tienen las siguientes hipótesis sobre el modelo especificado en (5):

$$\begin{aligned} F_4 \quad H_0 : \mathbf{b}_{4i} &= 0 \quad \forall i \\ F_3 \quad H_0 : \mathbf{b}_{3i} &= 0 \mid \mathbf{b}_{4i} = 0 \quad \forall i \\ F_2 \quad H_0 : \mathbf{b}_{2i} &= 0 \mid \mathbf{b}_{3i} = \mathbf{b}_{4i} = 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

⁶ Es decir, se tiene un modelo lineal cuando se condiciona un modelo STAR a valores fijos de \mathbf{g} y c .

⁷ Para especificar los posibles valores que pueden tomar estos dos parámetros se deben tener en cuenta las siguientes observaciones: 1. Debido a que c es un parámetro de localización este se debe encontrar dentro del rango que toma la variable Y_{t-d} . 2. Para evitar valores estimados muy grandes de \mathbf{g} Y_{t-d} se puede dividir por su desviación estándar.

En la última etapa de la metodología de modelación, se debe verificar la validez de los supuestos del modelo. Estas pruebas consideradas en Eitrheim y Teräsvirta (1996) incluyen tests de no autocorrelación en los residuales, tests de no-linealidad remanente en el modelo y tests de constancia de los parámetros.

2.3. Prueba de causalidad de Granger y modelos Star

Hasta el momento en los procesos STAR discutidos la serie analizada depende de forma no lineal de sus propios rezagos. Para considerar modelos que incluyan relaciones con otras variables es necesario estudiar en una primera etapa relaciones de causalidad dentro de este contexto no lineal. Suponiendo un proceso aditivo de regresión de transición suave (STR⁸) para dos series Y_t y X_t se tiene el siguiente modelo:

$$Y_t = \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{t-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{t-i} \right) F(Y_{t-d}) + \sum_i \mathbf{d}_i X_{t-i} + \left(\mathbf{p}_0 + \sum_i \mathbf{p}_i X_{t-i} \right) G(X_{t-e}) + \mathbf{e}_t \quad (7)$$

donde $G(X_{t-e})$ es una función de transición similar a las definidas en (2) y (3).

Skalin y Teräsvirta (1999), generalizando el test de causalidad de Granger, consideran que X_t no causa en sentido Granger a Y_t en el modelo (7) si $G(\cdot) = 0$ y $\delta_i = \pi_i = 0 \quad \forall i$. Debido a problemas de no identificación bajo la hipótesis nula de no causalidad y suponiendo que el rezago e es desconocido, la prueba de causalidad es realizada sobre el modelo (7) considerando una expansión de Taylor para $G(\cdot)$:

$$Y_t = \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{t-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{t-i} \right) F(Y_{t-d}) + \sum_i \mathbf{k}_i X_{t-i} + \sum_i \sum_j \mathbf{h}_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_i \mathbf{t}_i X_{t-i}^3 + u_t \quad (8)$$

en este caso la hipótesis nula de no causalidad: $H_0: \mathbf{k}_i = \eta_{ij} = \tau_i = 0 \quad \forall i, j$ es evaluada mediante una prueba tipo LM. Si el proceso de Y_t es lineal y X_t sigue siendo no lineal, se puede continuar utilizando esta prueba, lógicamente considerando que $F(\cdot) = 0$ y $\beta_0 = \beta_i = 0 \quad \forall i$.

2.4. Función de Impulso Respuesta

La Función de Impulso Respuesta (FIR) describe el efecto en el tiempo de un choque sobre la serie bajo análisis. Por lo tanto esta puede ser calculada como la diferencia entre el valor esperado condicional de la serie

⁸ A diferencia del modelo STAR, en el modelo STR la serie depende de otras variables en adición de rezagos de ella misma.

con y sin choque:

$$FIR(\mathbf{d}, T)_k = E(Y_{T+k} | \mathbf{e}_T = \mathbf{d}, \mathbf{e}_{T+1} = 0, \dots, \mathbf{e}_{T+n} = 0, Y_{T-1}, Y_{T-2}, \dots) - E(Y_{T+k} | \mathbf{e}_T = 0, \mathbf{e}_{T+1} = 0, \dots, \mathbf{e}_{T+n} = 0, Y_{T-1}, Y_{T-2}, \dots) \quad (9)$$

para $k = 1, 2, \dots$

En la ecuación (9) la función de impulso respuesta indica el efecto que tiene un choque de magnitud δ sobre la serie $\{Y_t\}$ en $t = T$, k periodos después de haberse realizado.

Funciones de Impulso Respuesta para modelos lineales

Si se supone que una serie estacionaria $\{Y_t\}$ sigue un proceso ARMA(p,q) por el teorema de descomposición de Wold existe la siguiente representación:

$$Y_t = \mathbf{m} + \mathbf{y}_0 \mathbf{e}_t + \mathbf{y}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{y}_2 \mathbf{e}_{t-2} + \dots \quad (10)$$

donde $\mathbf{e}_t \xrightarrow{iid} (0, \mathbf{S}_e^2)$, en este caso utilizando la definición (9) se tiene que:

$$FIR(\mathbf{d}, T)_k = \mathbf{y}_k \mathbf{d} \quad (11)$$

Del resultado descrito en (11), basado en un modelo lineal, resaltan tres características:

1. La función de impulso respuesta es simétrica, es decir un choque de magnitud $-\delta$ tiene el efecto exactamente opuesto a un choque de magnitud $+\delta$.
2. La FIR es lineal en el sentido que un choque, por ejemplo, de magnitud 2δ corresponde a dos veces el efecto de un choque de magnitud δ .
3. La función de impulso respuesta depende del número de periodos transcurridos después de efectuarse el choque (k) pero no depende del periodo de tiempo en el cual se realiza el choque, es decir no depende de T .

Estas características también se cumplen para modelos con procesos no estacionarios⁹, por ejemplo para un modelo ARIMA(p,1,q) :

$$\Phi_p(B) \Delta Y_t = \mathbf{V} + \Theta_q(B) \mathbf{e}_t \quad (12)$$

⁹ Inclusive como lo mencionan Koop, Pesaran y Potter (1996), estas características también se tienen para modelos multivariados como los modelos VAR o VEC.

se tiene el resultado:

$$FIR(\mathbf{d}, T)_k = \mathbf{d} \sum_{i=0}^k \mathbf{y}_i \quad (13)$$

los términos \mathbf{y}_i del polinomio $\Psi(B)$ se obtienen de la relación $\Psi(B)\Phi_p(B) = \Theta_q(B)$, donde:

$$\Phi_p(B) = 1 - \mathbf{f}_1 B - \mathbf{f}_2 B^2 \dots - \mathbf{f}_p B^p; \quad \Theta_q(B) = 1 - \mathbf{q}_1 B - \mathbf{q}_2 B^2 \dots - \mathbf{q}_q B^q$$

B es el operador de rezago y $\Delta = (1-B)$.

La FIR descrita en (13) confirma este resultado, es decir, esta sujeta a las tres propiedades o características comentadas anteriormente.

En la práctica estas características pueden ser muy restrictivas, estas propiedades implicarían que por ejemplo choques que ocurren durante una recesión tienen un efecto de la misma magnitud que choques durante una expansión.

Cuando se analizan las funciones de impulso respuesta de un modelo lineal como un VAR o un VEC se esta suponiendo que los efectos de un choque son los mismos sin importar en que periodo se realiza. Por ejemplo, si un estudio se efectúa para una muestra entre 1980 y 1999, se esta suponiendo que los efectos de un choque realizado en 1980 son los mismos que produciría un choque en 1990.

2.5. Funciones de Impulso Respuesta para modelos no lineales

Cuando se utilizan modelos no lineales como los procesos STAR, no se tienen las restricciones de la función de impulso respuesta de los modelos lineales. Los efectos de choques positivos no son necesariamente de la misma magnitud, en valor absoluto, que los efectos de choques negativos y adicionalmente la FIR depende del periodo en el cual se realiza el choque.

Para los modelos no lineales tipo STAR la función de impulso respuesta no tiene una solución analítica, como las obtenidas en (11) o (13), sin embargo esta puede ser estimada numéricamente utilizando la definición descrita en (9). Adicionalmente, debido a que estos modelos no tienen la restricción de simetría discutida para los modelos lineales, Potter (1995) define la siguiente medida de asimetría en la función de impulso respuesta:

$$ASIM(\mathbf{d}, T)_k = FIR(\mathbf{d}, T)_k + FIR(-\mathbf{d}, T)_k \quad (14)$$

para $k = 1, 2, \dots$

Si Y_t sigue un proceso lineal esta medida de asimetría será siempre igual a cero, mientras que para modelos no lineales esta medida dependerá del tamaño del choque y del periodo del tiempo donde se realiza.

Para conocer la significancia estadística tanto de las funciones de impulso respuesta como de la medida de asimetría discutida en (14) para los modelos STAR se pueden realizar intervalos de confianza utilizando técnicas de Bootstrapping¹⁰.

¹⁰ Véase anexo 2.

3. Resultados

En el análisis no lineal entre la inflación y los agregados monetarios se utilizaron series mensuales en el periodo comprendido entre febrero de 1985 y abril de 1999. La inflación fue tomada como la variación anual del índice total de precios al consumidor y los agregados utilizados fueron Base Monetaria, Base monetaria ajustada, Medios de pago (M1), M3 y M3 más bonos, todos medidos en variaciones anuales.

Pruebas de Raíz Unitaria

Tomando en cuenta que los modelos considerados en este trabajo tienen como supuesto la estacionariedad de las series, se llevaron a cabo dos tipos de pruebas de raíz unitaria; la de Dickey y Fuller y la de Enders y Ludlow (1999), la segunda prueba fue realizada debido a que esta tiene una mayor potencia en contextos no lineales. Los resultados presentados en la tabla 1, bajo ambos tests, muestran que todas las series consideradas se pueden tomar como integradas de orden uno¹¹.

Tabla 1
Pruebas de Raíz Unitaria*

Serie	Prueba D-F		Prueba de Enders y Ludlow				P-Value L-B**
	Estadística	P-Value L-B**	F_all	F_trig	C	CR	
Inflación	$\tau_{\mu}=-1.13$ (-2.88)	0.53	3.61 (6.72)	4.99 (7.24)	-0.92 (-3.00)	1.01 (9.92)	0.78
V_Base	$\tau_{\mu}=-1.32$ (-2.88)	0.31	4.89 (6.72)	5.57 (7.24)	-1.88 (-3.00)	4.01 (9.92)	0.87
V_Base Aj.	$\tau_{\mu}=-0.90$ (-2.88)	0.30	3.71 (6.72)	4.98 (7.24)	-0.80 (-3.00)	0.87 (9.92)	0.71
V_M1	$\tau_{\mu}=-0.17$ (-2.88)	0.95	3.31 (6.72)	4.92 (7.24)	-0.20 (-3.00)	0.09 (9.92)	0.95
V_M3	$\tau_{\mu}=-1.76$ (-2.88)	0.54	3.76 (6.72)	4.86 (7.24)	-1.11 (-3.00)	1.48 (9.92)	0.34
V_M3B	$\tau_{\mu}=-1.26$ (-2.88)	0.66	3.37 (6.72)	4.67 (7.24)	-0.74 (-3.00)	0.64 (9.92)	0.35

* Los valores críticos para un nivel de significancia del 5% son indicados entre paréntesis, V_ indica variaciones anuales.

** P-value asociado a la estadística de Ljung y Box para n/4 rezagos.

¹¹ Las estadísticas F_all, F_trig y C (Anexo 1) indican que se cumplen las hipótesis de que los coeficientes c , a_1 , y b_1 , de la ecuación (a.1.10) del anexo, son todos iguales a cero. Adicionalmente, la estadística CR muestra que se acepta que $c=r^2/4$, indicando que no existe un comportamiento de decaimiento en las series (c no es menor que $r^2/4$). Por lo tanto, las cinco pruebas indican que no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de que las series son I(1).

Pruebas de No linealidad

El primer paso en el proceso de estimación sugerido por Teräsvirta (1994) consiste en probar la linealidad versus una especificación de tipo STAR. La manera de llevar a cabo esta prueba de hipótesis, consiste en estimar inicialmente un modelo autorregresivo (AR) lineal sobre cada una de las series estacionarias. Bajo la hipótesis nula el modelo lineal AR es adecuado, mientras que la hipótesis alterna indica que se tiene un modelo no lineal STAR. Esta prueba es realizada utilizando diferentes modelos STAR, específicamente cada uno de estos modelos considera como variable de transición a distintos rezagos de la serie analizada. La estadística (F-L) con la que se rechace más fuertemente la prueba de no linealidad es la que determina cuál es la variable de transición que se debe utilizar en el modelo STAR¹². Los resultados presentados en la Tabla 2 para todas las variables analizadas muestran que la inflación es la única serie en la que claramente se obtienen “p-values” muy bajos. Con M1 se presenta un “p-value” de 0.01 lo cual podría ser interpretado como una posible existencia de no linealidad, sin embargo cuando se estimó el modelo no lineal sobre esta serie, el ajuste de este comparado con el modelo lineal fue prácticamente el mismo, por lo que se decidió tratarlo como un proceso lineal.

Tabla 2. Test de No linealidad (FL) para Inflación v agregados monetarios																		
Delay	Y=d(inflación)			Y=d(v base)			Y=d(v base ai)			Y=d(v m1)			Y=d(v m3)			Y=d(v m3b)		
	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value	F-L	P-value		
Y1	1.254	0.170	1.217	0.213	1.282	0.148	1.120	0.315	0.828	0.785	0.758	0.877						
Y2	2.130	0.001	1.430	0.074	1.146	0.280	0.839	0.724	1.084	0.360	1.253	0.163						
Y3	1.805	0.007	1.221	0.210	0.988	0.507	0.861	0.692	0.899	0.670	0.910	0.651						
Y4	1.658	0.017	1.161	0.274	0.895	0.661	1.067	0.384	0.989	0.514	0.991	0.510						
Y5	1.339	0.110	0.994	0.512	1.212	0.208	0.837	0.728	1.083	0.361	1.242	0.172						
Y6	1.711	0.012	1.355	0.110	1.628	0.020	0.612	0.956	1.372	0.084	1.400	0.071						
Y7	1.549	0.033	1.056	0.414	0.835	0.755	1.524	0.045	0.854	0.745	0.805	0.818						
Y8	1.601	0.024	1.178	0.254	0.807	0.794	1.071	0.379	0.821	0.796	0.775	0.857						
Y9	1.785	0.008	1.064	0.402	0.896	0.660	0.702	0.891	1.102	0.334	1.236	0.178						
Y10	1.225	0.197	0.796	0.826	0.971	0.535	1.139	0.293	1.379	0.081	1.487	0.042						
Y11	2.128	0.001	1.104	0.346	1.159	0.265	1.757	0.011	0.878	0.706	0.741	0.895						
Y12	1.449	0.060	0.994	0.513	1.138	0.289	1.185	0.242	0.873	0.714	1.158	0.260						
Y13	1.763	0.009	1.160	0.274	1.530	0.037	----	----	1.055	0.404	1.047	0.417						
Y14	2.140	0.001	1.131	0.310	0.895	0.660	----	----	0.936	0.606	0.889	0.687						
Y15	1.571	0.029	0.771	0.858	0.728	0.890	----	----	0.838	0.769	0.742	0.895						
Y16	1.590	0.026	0.926	0.626	1.197	0.223	----	----	0.971	0.545	1.158	0.260						
Y17	2.107	0.001	1.178	0.254	----	----	----	----	1.005	0.486	1.113	0.318						
Y18	1.723	0.011	1.236	0.195	----	----	----	----	1.661	0.014	1.489	0.042						
Y19	1.739	0.010	1.010	0.487	----	----	----	----	0.606	0.982	0.682	0.945						
Y20	2.066	0.001	1.329	0.125	----	----	----	----	1.388	0.077	1.467	0.048						
Y21	1.428	0.067	0.904	0.663	----	----	----	----	0.745	0.891	0.821	0.796						
Y22	1.448	0.060	0.867	0.722	----	----	----	----	----	----	----	----						
Y23	1.795	0.007	0.760	0.870	----	----	----	----	----	----	----	----						
Y24	1.204	0.217	0.918	0.639	----	----	----	----	----	----	----	----						

* d(x) corresponde a la diferencia de la serie x.

¹² El término fuerte es utilizado en el sentido como lo plantean Skalin y Teräsvirta (1999). El “p-value” con el cual debe rechazarse la linealidad debe ser muy bajo ya que el nivel de significancia utilizado en la prueba puede verse afectado por el número de veces que esta se realiza para la misma serie.

Pruebas de Cointegración

Una vez establecido que las series analizadas son $I(1)$ y que algunas de estas se pueden representar adecuadamente por procesos no lineales, el siguiente paso del análisis para encontrar un modelo STR adecuado entre la inflación y los agregados monetarios es verificar primero, si existe cointegración entre las series y segundo, en caso de no existir cointegración, determinar si existen causalidades y en que sentidos. Los resultados de las pruebas de cointegración de Enders y Ludlow¹³ presentados en la tabla 3 indican que no existe cointegración entre la inflación y ninguno de los agregados monetarios considerados.

Tabla 3
Prueba de Cointegración de Enders y Ludlow*

Series	F_all	F_trig	C	CR	P-Value L-B**
Inflación y V_Base	3.07 (7.79)	4.01 (7.22)	-0.90 (-3.53)	0.97 (13.77)	0.88
Inflación y V_Base Aj.	5.34 (7.79)	6.53 (7.22)	-1.59 (-3.53)	3.01 (13.77)	0.68
Inflación y V_M1	4.70 (7.79)	4.89 (7.22)	-1.95 (-3.53)	4.15 (13.77)	0.83
Inflación y V_M3	5.35 (7.79)	6.90 (7.22)	-1.49 (-3.53)	2.59 (13.77)	0.53
Inflación y V_M3B	5.56 (7.79)	7.20 (7.22)	-1.48 (-3.53)	2.59 (13.77)	0.47

* Los valores críticos para un nivel de significancia del 5% son indicados entre paréntesis.

** P-value asociado a la estadística de Ljung y Box para $n/4$ rezagos.

Pruebas de Causalidad en un contexto no lineal

Dado que la inflación no está cointegrada con ningún agregado monetario, el siguiente paso para establecer un modelo entre estas series es considerar las pruebas de causalidad dentro de un contexto no lineal sobre las variables en primeras diferencias, para ello se utiliza la metodología propuesta por Skalin y Teräsvirta (1999), la cual ha sido explicada anteriormente. Los resultados de dicha prueba se presentan en la Tabla 4 y muestran que el único agregado que causa en el sentido de Granger a la inflación es M1¹⁴.

¹³ Se decidió utilizar solamente la prueba de cointegración de Enders y Ludlow, excluyendo a pruebas como la de Johansen debido a que éstas últimas tienen menor potencia en contextos no lineales.

¹⁴ Con respecto a los resultados obtenidos es importante realizar dos aclaraciones; primero, como ya se ha comentado, los agregados monetarios son medidos en variaciones anuales y segundo, estos resultados son obtenidos sobre las variables en primeras diferencias.

Tabla 4. Pruebas de Causalidad		
Prueba de Causalidad de Granger No lineal		
Ho: El agregado no causa D(inflación)		
Rezaqos=13		
Agregado	F	P-value
d(V_m1)	1.657	0.072
d(V_m3)	1.275	0.246
d(V_m3b)	1.092	0.417
d(V_base)	0.875	0.691
d(V_base Aj)	0.754	0.840

Prueba de Causalidad de Granger		
Ho: D(inflación) no causa al agregado		
Agregado	F	P-value
d(V_m1)	1.064	0.406
d(V_m3)	0.957	0.586
d(V_m3b)	0.907	0.673
d(V_base)	0.737	0.913
d(V_base Aj)	0.928	0.637

En la segunda parte de la tabla 4 se presentan las causalidades en el sentido inverso, es decir, si la inflación causa a los agregados monetarios. Como ya se ha comprobado que todos los agregados tienen una estructura lineal, las pruebas de causalidad en el sentido de Granger se realizan bajo la modificación anotada al final de la sección 2.3. Los resultados de esta tabla indican que no se presenta causalidad en este sentido.

De lo anterior se puede concluir que el agregado con el que se debe trabajar es M1 dado que presenta las características planteadas por los modelos monetarios tradicionales: causa la inflación, pero la inflación no lo causa a él. Debido a que existe causalidad en un solo sentido, la relación entre la inflación y M1 puede ser descrita adecuadamente por un modelo uniecuacional STR donde la inflación en diferencias es explicada por rezagos de ella misma y de rezagos de la diferencia de M1.

Para completar la especificación del modelo STR anterior, se requiere conocer la variable de transición y el tipo de modelo (LSTR ó ESTR). Las pruebas se presentan en la Tabla 5 y permiten concluir que la variable de transición es el rezago 18 de la inflación y el tipo de modelo que se debe estimar es un LSTR¹⁵.

¹⁵ Para comprender el carácter de las pruebas véase la sección 2.2.

Tabla 5: Test de No linealidad (FL) para d(inflación)								
<i>Delay</i>	F-L	P-value	F4	P-val	F3	P-val	F2	P-val
d(inflación){1}	1.144	0.324	1.075	0.411	1.155	0.302	1.074	0.382
d(inflación){2}	1.877	0.014	1.229	0.268	1.919	0.012	1.610	0.038
d(inflación){3}	1.264	0.207	1.002	0.493	1.382	0.130	1.256	0.196
d(inflación){4}	1.478	0.085	1.230	0.267	1.031	0.445	1.854	0.011
d(inflación){5}	0.925	0.629	1.012	0.481	0.873	0.658	0.916	0.600
d(inflación){6}	1.064	0.424	0.988	0.510	0.827	0.720	1.469	0.076
d(inflación){7}	1.503	0.077	1.352	0.184	1.451	0.098	1.119	0.328
d(inflación){8}	1.387	0.126	0.693	0.856	1.574	0.058	2.081	0.003
d(inflación){9}	1.565	0.058	1.072	0.415	1.535	0.068	1.693	0.025
d(inflación){10}	1.109	0.366	0.684	0.863	2.006	0.008	0.819	0.736
d(inflación){11}	1.413	0.113	1.245	0.256	1.337	0.155	1.232	0.215
d(inflación){12}	1.617	0.047	1.215	0.279	1.132	0.326	2.096	0.003
d(inflación){13}	1.465	0.090	0.713	0.836	2.355	0.001	1.321	0.149
d(inflación){14}	2.006	0.008	1.375	0.171	1.830	0.018	1.703	0.024
d(inflación){15}	1.165	0.301	0.696	0.853	1.813	0.019	1.144	0.300
d(inflación){16}	1.638	0.042	1.375	0.171	1.066	0.401	1.921	0.007
d(inflación){17}	1.014	0.494	1.145	0.340	0.787	0.771	1.065	0.393
d(inflación){18}	2.021	0.008	0.770	0.774	1.851	0.016	3.204	0.000
d(inflación){19}	1.819	0.019	1.744	0.049	1.311	0.172	1.339	0.138
d(V_m1){1}	0.841	0.755	0.806	0.733	0.838	0.705	1.098	0.353
d(V_m1){2}	1.417	0.111	1.082	0.404	1.264	0.206	1.658	0.030
d(V_m1){3}	1.204	0.261	1.543	0.098	0.730	0.837	1.018	0.455
d(V_m1){4}	1.447	0.098	1.034	0.456	1.799	0.021	1.167	0.277
d(V_m1){5}	0.827	0.774	0.781	0.762	0.837	0.707	1.105	0.344
d(V_m1){6}	1.337	0.155	1.410	0.152	1.137	0.321	1.014	0.461
d(V_m1){7}	1.004	0.510	0.680	0.867	0.686	0.880	2.257	0.001
d(V_m1){8}	1.175	0.290	0.922	0.590	1.346	0.150	1.220	0.226
d(V_m1){9}	1.653	0.039	1.274	0.234	1.075	0.390	2.156	0.002
d(V_m1){10}	1.054	0.437	1.091	0.395	1.072	0.394	0.899	0.624
d(V_m1){11}	1.019	0.488	1.130	0.355	0.878	0.651	0.978	0.510
d(V_m1){12}	0.758	0.861	0.827	0.708	0.694	0.873	0.969	0.524
d(V_m1){13}	1.020	0.486	1.027	0.465	1.423	0.110	0.517	0.982

El modelo final estimado se presenta en la Tabla 6, las pruebas de diagnóstico muestran que los residuos del modelo no presentan problemas de autocorrelación ni de no normalidad¹⁶.

¹⁶ En el anexo 4 se presentan pruebas adicionales de diagnóstico. En general, todas estas pruebas muestran que el modelo STR estimado es adecuado.

Tabla 6: Estimación LSTR
Variable Dependiente: D(INFLACIÓN)
Variable de Transición: D(INFLACIÓN){18}

	<u>Coefficiente</u>	<u>STD</u>		
gamma	2.499	0.635		
c	0.415	0.149		
	<u>Lineal</u>		<u>No Lineal</u>	
<u>Variable</u>	<u>Coefficiente</u>	<u>STD</u>	<u>Coefficiente</u>	<u>STD</u>
const	-0.203	0.104	0.203	0.331
d8505	3.123	0.487	----	----
d8605	-2.323	0.740	----	----
d9902	-1.941	0.443	----	----
d(inflación){1}	0.597	0.077	-0.409	0.143
d(inflación){2}	-0.244	0.060	----	----
d(inflación){3}	0.521	0.093	-0.852	0.149
d(inflación){4}	-0.461	0.085	0.669	0.149
d(inflación){5}	0.183	0.071	-0.556	0.151
d(inflación){6}	-0.140	0.056	----	----
d(inflación){7}	0.190	0.087	-0.371	0.178
d(inflación){8}	----	----	0.426	0.113
d(inflación){11}	----	----	0.328	0.137
d(inflación){12}	-0.474	0.057	-0.798	0.201
d(inflación){13}	0.315	0.056	----	----
d(inflación){14}	-0.102	0.056	----	----
d(inflación){15}	0.209	0.054	----	----
d(inflación){16}	-0.193	0.051	----	----
d(inflación){18}	-0.281	0.092	0.294	0.145
d(inflación){19}	0.348	0.076	-0.599	0.178
d(inflación){22}	-0.202	0.073	0.507	0.180
d(inflación){23}	0.213	0.083	-0.470	0.187
d(inflación){24}	----	----	-0.620	0.131
d(V_M1){1}	0.033	0.013	----	----
d(V_M1){2}	0.040	0.018	-0.088	0.045
d(V_M1){5}	0.051	0.020	-0.252	0.083
d(V_M1){6}	----	----	-0.107	0.049
d(V_M1){7}	----	----	-0.114	0.035
d(V_M1){9}	----	----	0.049	0.028
d(V_M1){11}	-0.071	0.023	0.350	0.079
d(V_M1){12}	-0.051	0.020	0.180	0.062
d(V_M1){13}	----	----	0.156	0.050
d(V_M1){14}	----	----	0.092	0.045
d(V_M1){16}	0.051	0.020	-0.166	0.056
d(V_M1){17}	----	----	-0.112	0.044
d(V_M1){18}	----	----	-0.066	0.035
d(V_M1){23}	----	----	-0.088	0.038
Error estándar de los residuales	0.437	Asimetría		-0.139
Log likelihood	-68.009	Exceso de Kurtosis		0.712
AIC	-1.399			
SBIC	-0.389			
R-cuadrado	0.884	Jarque-Bera	4.155	0.125
Var(Nolin)/Var(Lin)	0.413	Q(24)	18.386	0.784

Los gráficos 4 y 5 junto con la Tabla 7 permiten entender mejor el comportamiento descrito por el modelo estimado. En el gráfico 4 se encuentra la función de transición del modelo en función del tiempo, debe recordarse que dicha función describe la transición que se presenta entre dos regímenes extremos (ver sección 3.1). En esta gráfica se puede observar que a partir de 1992 esta función toma en general valores menores comparados con los obtenidos al inicio de la muestra. Al observar la gráfica 5, en la que la función de transición está organizada en orden ascendente, se encuentra que la gran mayoría de datos se ubican en los valores intermedios y no en los extremos. Lo anterior significa que dentro del periodo de análisis la inflación en Colombia se encuentra en un posible proceso en transición, aunque es difícil observar algún patrón en la función de transición, se puede ver un cambio mayor en la dinámica de la serie desde de la década de los noventa.

En la tabla 7 se termina de ilustrar el comportamiento descrito por el modelo. En esta se observa que existen, dependiendo del valor de la función de transición (F), procesos estacionarios junto con otros que no lo son. Los valores esperados condicionados a distintos valores de F permiten concluir que existe una relación inversa entre los valores que toma esta función y las variaciones mensuales absolutas de la inflación. Así, entre más bajo el valor de la función de transición mayor es la disminución en la variación de la inflación. Este punto concuerda con el hecho estilizado que plantea que en la década de los 90, la inflación ha presentado una disminución.

Gráfico 3.

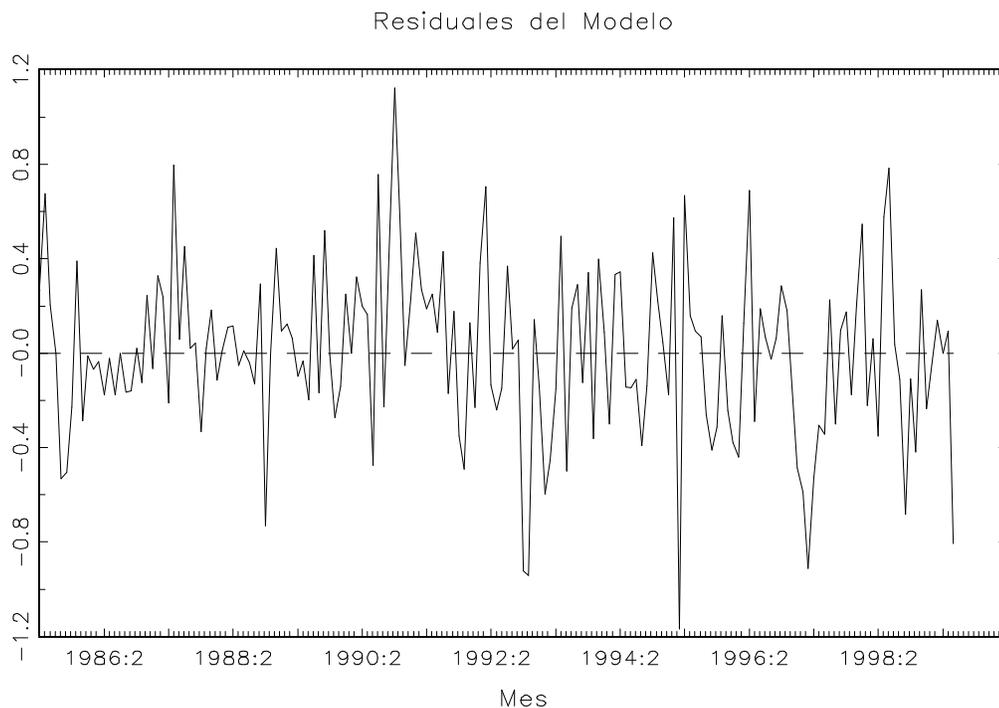


Gráfico 4.

Funcion de Transicion

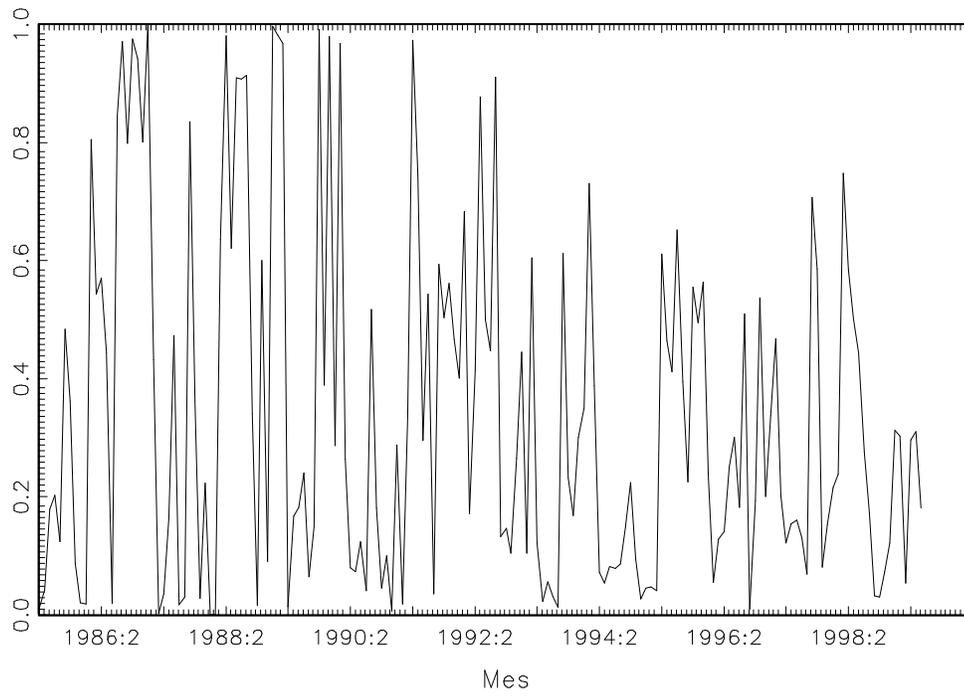


Gráfico 5.

Funcion de Transicion

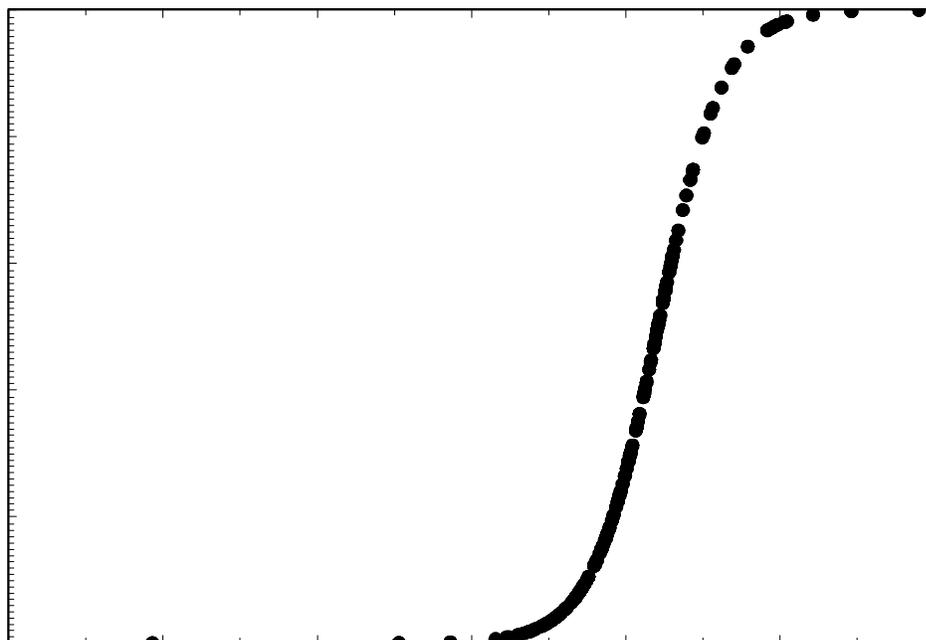


Tabla 7. Raíces, Módulo, Período y Valor esperado condicionado a valores de la función de transición.

F=0				F=0.1				F=0.2				F=0.3			
Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período	
-0.316 ± 0.953 i	1.004	3.3		-0.306 ± 0.945 i	0.993	3.3		0.259 ± 0.945 i	0.980	4.8		0.661 ± 0.716 i	0.974	7.6	
0.267 ± 0.953 i	0.990	4.8		0.264 ± 0.950 i	0.986	4.8		-0.296 ± 0.934 i	0.979	3.3		0.251 ± 0.937 i	0.970	4.8	
0.942 ± 0.226 i	0.969	26.7		-0.938 ± 0.209 i	0.961	2.2		0.653 ± 0.710 i	0.965	7.6		-0.944 ± 0.220 i	0.970	2.2	
-0.675 ± 0.690 i	0.965	2.7		-0.669 ± 0.684 i	0.956	2.7		-0.940 ± 0.214 i	0.964	2.2		-0.288 ± 0.917 i	0.961	3.4	
-0.936 ± 0.205 i	0.959	2.1		0.644 ± 0.700 i	0.951	7.6		-0.660 ± 0.670 i	0.940	2.7		-0.630 ± 0.713 i	0.952	2.7	
Valor esperado condicionado a F			***	Valor esperado condicionado a F			-0.241	Valor esperado condicionado a F			-0.166	Valor esperado condicionado a F			-0.119

F=0.4				F=0.5				F=0.6				F=0.7			
Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período	
0.668 ± 0.721 i	0.982	7.6		-0.157 ± 0.981 i	0.994	3.6		-0.159 ± 0.998 i	1.011	3.6		-0.159 ± 1.012 i	1.024	3.6	
-0.951 ± 0.226 i	0.977	2.2		0.674 ± 0.724 i	0.989	7.6		-0.973 ± 0.235 i	1.001	2.2		-0.987 ± 0.235 i	1.015	2.2	
-0.149 ± 0.959 i	0.971	3.6		-0.960 ± 0.232 i	0.988	2.2		0.680 ± 0.727 i	0.995	7.7		0.685 ± 0.730 i	1.001	7.7	
0.747 ± 0.609 i	0.964	9.2		0.751 ± 0.622 i	0.975	9.1		0.186 ± 0.966 i	0.984	4.6		0.182 ± 0.984 i	1.000	4.5	
-0.637 ± 0.722 i	0.963	2.7		-0.642 ± 0.728 i	0.971	2.7		0.752 ± 0.634 i	0.983	9.0		0.751 ± 0.643 i	0.989	8.9	
Valor esperado condicionado a F			-0.088	Valor esperado condicionado a F			-0.066	Valor esperado condicionado a F			***	Valor esperado condicionado a F			***

F=0.8				F=0.9				F=1			
Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período		Raíz	Módulo	Período	
-0.157 ± 1.023 i	1.035	3.6		-0.155 ± 1.033 i	1.044	3.7		-0.153 ± 1.041 i	1.052	3.7	
-1.001 ± 0.231 i	1.028	2.2		-1.015 ± 0.224 i	1.040	2.1		-1.029 ± 0.215 i	1.051	2.1	
0.179 ± 0.999 i	1.015	4.5		0.177 ± 1.013 i	1.029	4.5		0.176 ± 1.026 i	1.041	4.5	
0.691 ± 0.733 i	1.007	7.7		0.696 ± 0.736 i	1.013	7.7		0.702 ± 0.740 i	1.020	7.7	
0.750 ± 0.652 i	0.993	8.8		0.747 ± 0.659 i	0.996	8.7		0.743 ± 0.665 i	0.997	8.6	
Valor esperado condicionado a F			***	Valor esperado condicionado a F			***	Valor esperado condicionado a F			***

*** No se presenta el valor esperado debido a la no estacionariedad del proceso local. Se muestran las raíces con los módulos más altos

Funciones de impulso respuesta

Para el modelo final especificado en la tabla 6 se procedió a estimar la función de impulso respuesta. Esta función mide el efecto en el tiempo ante un choque sobre la serie en análisis o sobre una variable explicativa de la serie. Esta herramienta es de gran utilidad debido a que permite cuantificar las reacciones que se presentan en la inflación ante cambios en la política monetaria o ante cambios en la misma serie. En un contexto no lineal es de mucha utilidad ya que los efectos producidos por la acción de un choque positivo no son necesariamente de la misma magnitud que los efectos producidos por choques negativos, además el período de tiempo en el cual se realiza el choque se convierte en un factor determinante de la reacción final que tendrá la serie. Si el efecto de los choques positivos y negativos son distintos en valor absoluto, se puede decir que se presenta un comportamiento asimétrico en la inflación y ello sería evidencia a favor de la existencia de rigideces nominales a nivel agregado¹⁷. El procedimiento llevado a cabo para tal fin, consistió en estimar la función de impulso respuesta (FIR) para choques a comienzos de algunos años incluidos en la muestra.

¹⁷ La aproximación conocida como 'rigideces nominales', descrita por Ball y Mankiw (1994) y Mankiw y Romer (1991) ha sido probado usualmente en ambientes microeconómicos más que a nivel macro debido a la falta de información que se puede generar con el uso de un índice tal como fue planteado por Carlton (1986). Sin embargo, algunos trabajos han sido realizados con índices de precios (Ver por ejemplo el trabajo de George Stigler y James Kindhal (1970)). En Colombia, las rigideces han sido probadas a nivel micro, ver Jaramillo y Cerquera (1999).

En los gráficos 6 y 7 se presentan los resultados para los años 1989, 1993 y 1999¹⁸. Las estimaciones de la FIR y de los coeficientes de asimetría para cada choque incluyen intervalos de confianza al 95% utilizando técnicas de *Bootstrapping* basadas en 10.000 replicaciones. Los resultados obtenidos muestran que se presenta un comportamiento asimétrico positivo en todos los períodos, ello significa que el choque positivo tiene un efecto mayor, en valor absoluto, que el producido por un choque negativo. Sin embargo, al 95% los intervalos de confianza obtenidos para la asimetría generada con choques de M1, en términos generales, pasan por cero; cuando se utilizan intervalos de confianza del 85% se obtiene un mayor conjunto de observaciones con asimetría significativamente distinta de cero¹⁹. En conclusión, en este ejercicio se obtiene una asimetría positiva que en términos generales no es significativamente diferente de cero, lo cual indica que no existe una fuerte evidencia a favor de la existencia de rigideces nominales a la baja a nivel agregado. Con respecto a los choques realizados a la inflación, se observa una asimetría positiva y además significativa en un mayor número de observaciones²⁰.

Análisis de capacidad de pronóstico del modelo

Se realizó un análisis para mostrar la eficiencia de pronóstico del modelo no lineal comparándolo con los modelos de proyección de inflación más utilizados, con base en las proyecciones "rolling" fuera de muestra entre enero de 1994 y el marzo de 1999. Las estadísticas de evaluación de pronóstico utilizadas correspondieron al Error Medio (ME), la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE), el Error Absoluto Medio (MAE) y la U de Theil (U-Theil). En la Tabla 8 se presentan los resultados de estas medidas para horizontes de 1 a 8 trimestres²¹.

Los resultados obtenidos muestran que en todos los horizontes el modelo LSTR tiene un comportamiento satisfactorio y en los últimos tres trimestres obtiene los mejores resultados lo que implica, que dentro de las especificaciones consideradas, es el mejor modelo para pronosticar a horizontes largos.

¹⁸ En estas gráficas se puede observar que la asimetría es siempre igual a cero para las primeras observaciones, este hecho es debido a las características del modelo STR. Si se realiza un choque en la serie en el período $t = T$, siguiendo el modelo (1) el efecto no lineal se comienza a reflejar después de d períodos ($t = T + d$). Por lo tanto, debido a las características de la FIR mencionadas en la sección 3.4 y 3.5, antes de d períodos después del choque el coeficiente de asimetría debe ser igual a cero.

¹⁹ A pesar de este resultado, al utilizar intervalos de confianza al 85%, todavía se tiene que la mayor parte de las observaciones presentan una asimetría que no es significativamente diferente de cero.

²⁰ Este resultado es más claro cuando se emplean intervalos de confianza al 85%.

²¹ Se presenta la información en trimestres debido a que la gran mayoría de estos modelos son de frecuencia trimestral.

Tabla 8. Análisis de la capacidad de pronóstico del modelo no lineal comparado con otros modelos utilizados.

Horizonte 1					Horizonte 2				
Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL	Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL
CurPhill	0.076	0.968	0.799	0.683	CurPhill	0.179	1.323	1.051	0.731
LSTR	-0.359	1.167	0.896	0.759	CurPhill2	-1.037	1.758	1.469	1.004
CurPhill2	-0.493	1.174	0.963	0.829	Pstar	-0.644	1.818	1.549	1.035
Pstar	-0.333	1.288	1.049	0.910	ARIMA	-1.234	2.080	1.720	1.003
ARIMA	-0.561	1.355	1.065	0.882	LSTR	-1.011	2.214	1.691	1.068
Escandinavo	-0.719	1.564	1.241	1.104	Escandinavo	-1.432	2.332	1.823	1.314
Pralim	-0.475	1.732	1.600	1.223	Pralim	-1.146	2.704	2.240	1.394

Horizonte 3					Horizonte 4				
Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL	Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL
CurPhill	0.317	1.747	1.448	0.726	CurPhill	0.536	1.986	1.673	0.852
Pstar	-0.992	2.316	1.870	0.963	Pstar	-1.285	2.610	2.094	1.119
CurPhill2	-1.592	2.333	2.132	0.970	LSTR	-1.658	2.728	2.229	1.105
LSTR	-1.338	2.581	2.906	1.034	CurPhill2	-2.149	2.808	2.337	1.205
Escandinavo	-2.029	2.748	2.043	1.142	Escandinavo	-2.539	3.001	2.563	1.287
ARIMA	-1.958	2.804	2.213	1.123	ARIMA	-2.495	3.191	2.683	1.293
Pralim	-1.844	3.393	1.813	1.411	Pralim	-2.231	3.969	3.178	1.703

Horizonte 5					Horizonte 6				
Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL	Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL
CurPhill	0.823	2.264	1.880	1.069	LSTR	-1.631	2.322	2.098	1.028
Pstar	-1.711	2.558	2.153	1.207	CurPhill	1.126	2.449	1.983	1.107
LSTR	-1.662	2.630	2.176	1.206	Pstar	-2.171	2.806	2.342	1.268
ARIMA	-2.826	3.246	2.950	1.488	ARIMA	-3.290	3.571	3.290	1.581
CurPhill2	-3.010	3.702	3.202	1.747	CurPhill2	-4.002	4.639	4.002	2.096
Escandinavo	-3.429	3.784	3.429	1.786	Escandinavo	-4.522	4.925	4.522	2.225
Pralim	-2.977	5.115	3.863	2.414	Pralim	-4.007	6.269	4.477	2.832

Horizonte 7					Horizonte 8				
Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL	Modelo	ME	RMSE	MAE	U-THEIL
LSTR	-1.700	2.274	1.852	0.867	LSTR	-1.571	2.601	2.144	0.847
CurPhill	1.503	2.812	2.299	1.074	CurPhill	1.708	3.037	2.541	1.003
Pstar	-2.754	3.371	2.939	1.287	Pstar	-3.269	3.904	3.559	1.289
ARIMA	-3.800	4.030	3.800	1.536	ARIMA	-4.338	4.628	4.338	1.507
CurPhill2	-5.065	5.734	5.065	2.189	Escandinavo	-6.522	6.745	6.522	2.226
Escandinavo	-5.517	5.795	5.517	2.212	CurPhill2	-6.275	6.959	6.277	2.297
Pralim	-4.797	7.224	5.280	2.758	Pralim	-5.185	7.837	5.867	2.587

4. Conclusiones

Se encontró una relación no lineal entre inflación y el crecimiento de M1 la cual puede ser utilizada para pronosticar la inflación. Además esta sirve para probar la existencia de comportamiento asimétrico relacionado con la diferencia entre los efectos de un choque positivo y uno negativo.

La existencia de causalidad en un sentido permite estimar un modelo de uniecuacional en el cual la inflación se encuentra explicada por un componente autorregresivo y por rezagos del crecimiento de M1.

El modelo no lineal estimado muestra que la inflación se encuentra durante el período analizado, en general, dentro de una fase de transición. Aunque es difícil encontrar algún patrón en la función de transición, desde comienzos de los 90s se puede identificar un cambio mayor en la dinámica de la serie. Esta dinámica del modelo es compatible con el hecho de una inflación descendente desde comienzos de esta década.

Una de las ventajas que surgen del uso de los modelos no lineales es que es posible evaluar la existencia de asimetrías en dos sentidos: primero, con respecto a choques monetarios y , segundo, con respecto a choques sobre la misma inflación. Cuando los choques son dados a la inflación, existe una asimetría positiva lo cual significa que un choque positivo tiene un efecto mayor en la inflación que uno negativo. Además, comparado con los años anteriores (1989 y 1993), este efecto tiene menor magnitud cuando el choque es dado en 1999.

Aunque los choques en M1 generan una asimetría positiva, este resultado no es significativo. Así, no hay una evidencia clara en favor de un comportamiento asimétrico de la inflación ante choques de M1 y por consiguiente, de rigideces nominales a nivel agregado.

La capacidad de pronóstico del modelo es particularmente buena en lo que se refiere al largo plazo (18 a 24 meses), lo cual convierte a este modelo en una herramienta importante en términos de pronóstico.

El siguiente paso sería incluir en este modelo otros tipos de variables tales como el producto y las tasas de interés. Aunque este modelo presenta varias ventajas con respecto a otras especificaciones de la inflación, es importante tener en cuenta algunas de sus limitaciones; debido a su esquema dinámico bivariado esta especificación no puede ser utilizada como un modelo estructural; además, la información utilizada para el calculo de la inflación corresponde a un índice agregado el cual puede esconder algunos cambios de precios. Así, la información brindada por el modelo no puede responder todas las preguntas que usualmente se pueden hacer acerca de la existencia de rigideces nominales a la baja.

Gráfico 6. Respuesta de la inflación ante choques del 5% en M1
Intervalos de confianza del 95%

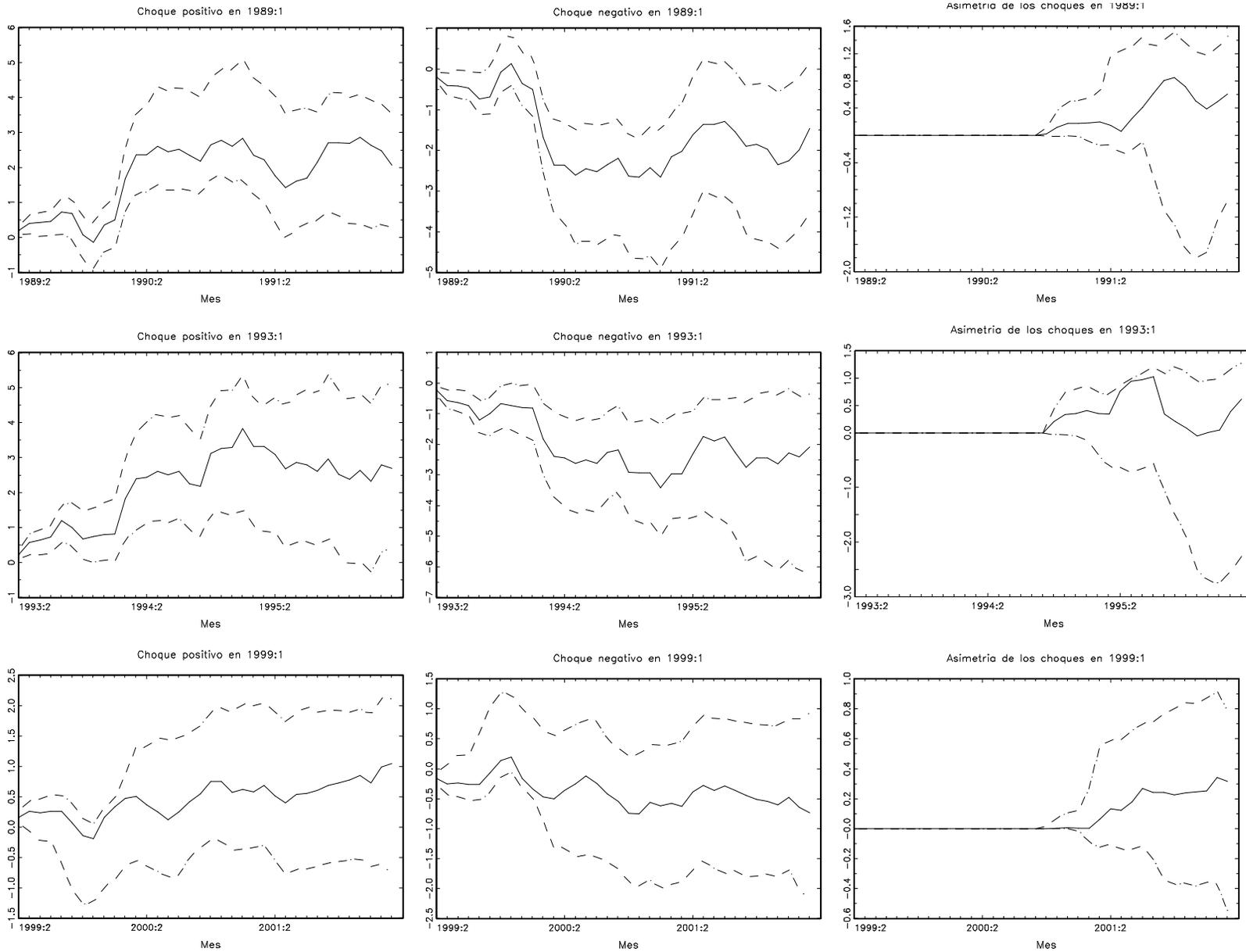
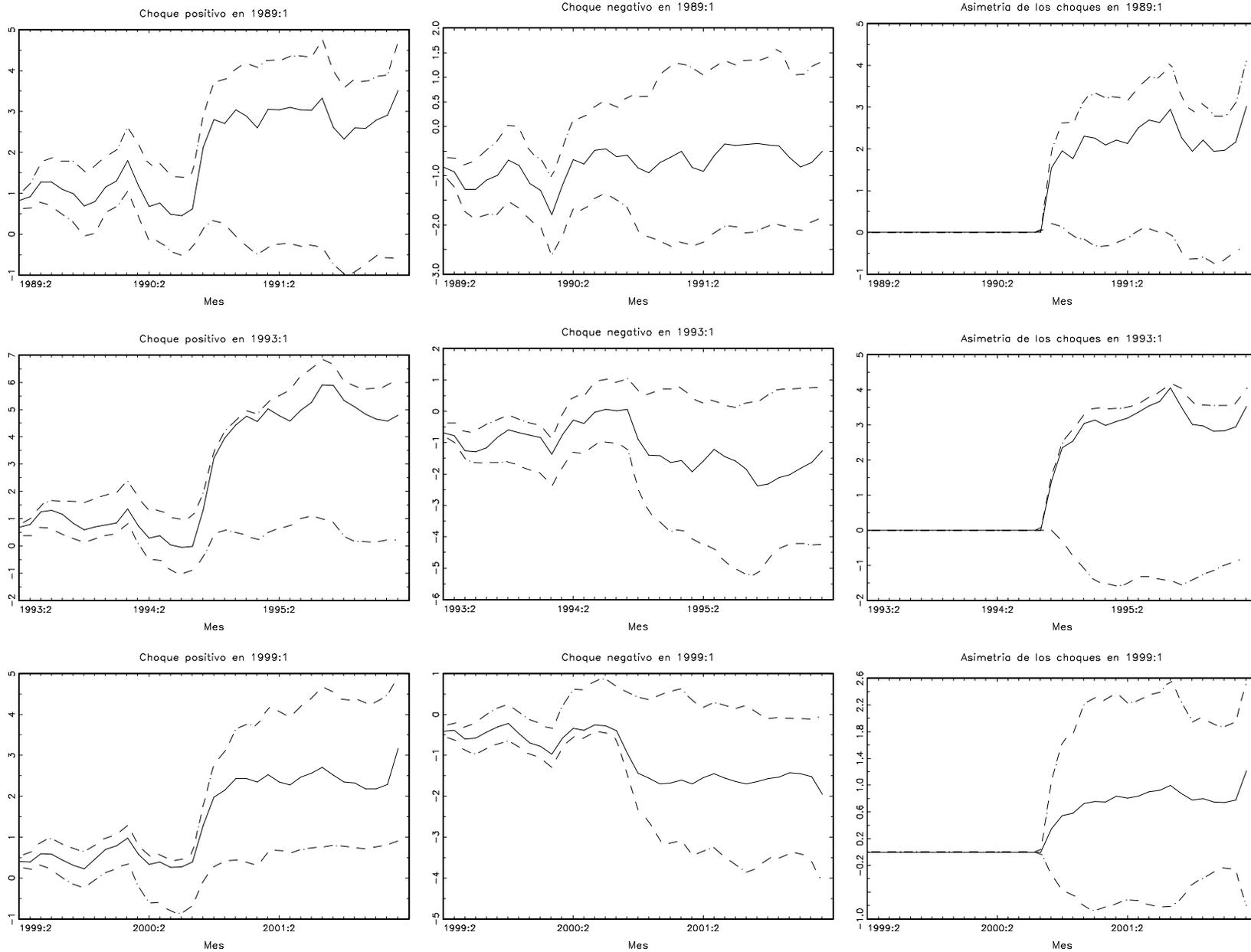


Gráfico 7. Respuesta de la inflación ante choques del 5% en Inflación
Intervalos de confianza del 95%



Referencias

- Arango, L. y A. González (1998). Some Evidence of Smooth Transition Nonlinearity in Colombian Inflation. *Borradores de Economía* No. 105, Banco de la República.
- Ball, L and Mankiw, N. G. (1994), "A Sticky Price Manifesto", *NBER Working Paper*, no. 4677.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A. (1991) *Time Series : Theory and Methods*. Springer - Verlag. Second edition.
- Caner, M. and B. Hansen (1998). Threshold Autoregression with a Near Unit Root. University of Wisconsin.
- Carlton, D. (1986), "The Rigidity of Prices", *American Economic Review*, 76, 637-658.
- Chatfield, C. (1989) *The Analysis of Time Series, An Introduction*. Fourth edition, Chapman & Hall.
- Eitrheim, O and T. Teräsvirta (1996). Testing the Adequacy of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of Econometrics*, 74, 59-75.
- Enders, W and J. Ludlow (1999). "Non-linear Decay: Tests for an Attractor Using a Fourier Approximation", Iowa State University.
- Franses, P. H. (1998). *Time series models for business and economic forecasting*. Cambridge University Press.
- Jalil, M. C. Tobón, (1999), Inflation Uncertainty in Colombia: A GARCH model, Working Paper, Banco de la República.
- Jaramillo, C.F. and D. Cerquera. (1999), "Price behavior in an Inflationary environment: Evidence from Supermarket Data", Mimeo.
- Koop, G., Pesaran M. and S. Potter (1996). Impulse response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics* 74, 119-147.

- Mankiw, N. (1985), "Small Menu Costs and Large Business Cycles", *Quarterly Journal of Economics*, Vol 100, 529-37.
- Melo, L.F., M. Misas, (1998), Análisis del comportamiento de la inflación trimestral en Colombia bajo cambios de régimen: una evidencia a través del modelo 'switching' de Hamilton, *Borradores de Economía*, No. 86, Banco de la República.
- Potter, S., (1995). A nonlinear approach to US GNP, *Journal of Applied Econometrics* 10, 109-125.
- Skalin J, and T. Teräsvirta, (1999). Another look at Swedish business cycles, 1861-1988. *Journal of Applied Econometrics* 14-4, 359-378.
- Stigler, G and J. Kindhal, (1970), "The Behavior of Industrial Prices, *National Bureau of Economic Research*, General Series, no. 90.
- Teräsvirta, T.(1994). Specification, Estimation and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 208-218
- Teräsvirta, T. (1998). Modelling economic relationships with smooth transition regressions. in A. Ullah and D. E. A. Giles (eds) . *Handbook of Applied Economic Statistics*. Dekker, New York, pp. 507-552.
- Tong, H (1990). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*, Oxford: Oxford University Press.

ANEXO 1

Pruebas de Raíz Unitaria de Enders y Ludlow (1999)

Para el desarrollo de esta prueba inicialmente se considera un modelo de la siguiente forma:

$$Y_t = \mathbf{a}(t)Y_{t-1} + \mathbf{e}_t \quad (\text{a.1.1})$$

donde la serie $\{\mathbf{e}_t\}$ corresponde a un proceso ruido blanco con varianza σ^2 y $\mathbf{a}(t)$ es una función en el tiempo que puede ser no lineal.

Realizando j reemplazamientos hacia atrás con este mismo modelo se tiene:

$$Y_t = \mathbf{e}_t + \mathbf{a}(t)\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{a}(t)\mathbf{a}(t-1)\mathbf{e}_{t-2} + \dots + \mathbf{a}(t)\mathbf{a}(t-1)\dots\mathbf{a}(t-j)Y_{t-j-1} \quad (\text{a.1.2})$$

si se continua iterando, el decaimiento de la secuencia $\{Y_t\}$ implica la siguiente condición:

$$p \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N \mathbf{a}(t-i) = 0 \quad (\text{a.1.3})$$

El punto central de la prueba de Enders y Ludlow consiste en representar $\mathbf{a}(t)$ mediante una aproximación Fourier²² considerando una sola frecuencia k :

$$\mathbf{a}(t) = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{2pk}{T}t\right) + b_1 \cos\left(\frac{2pk}{T}t\right) \quad (\text{a.1.4})$$

donde T corresponde al número total de observaciones y k es un número entero entre 1 y $T/2$.

Esta aproximación tiene la ventaja de que no se requiere especificar el proceso de ajuste no lineal, solo se deben encontrar valores apropiados para a_0 , a_1 , b_1 , y k .

Para encontrar las condiciones de estacionariedad, la ecuación (a.1.4) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}(t) = a_0 + r \cos(q(t)) \quad (\text{a.1.5})$$

donde:

$$r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \quad q(t) = \left(\frac{2pk}{T}t + d\right); \quad d = -\arcsen\left(\frac{a_1}{r}\right) \quad (\text{a.1.6})$$

²² En el anexo 3 se encuentra una breve introducción al análisis espectral de series de tiempo, el cual utiliza transformaciones de Fourier.

realizando operaciones algebraicas se obtiene que la condición para que la secuencia de $\{Y_t\}$ converja es:

$$p \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N [a_0 + r \cos(q(t-i))] = 0 \quad (\text{a.1.7})$$

por lo tanto la condición de decaimiento depende de a_0 y r y no de la frecuencia k o el desplazamiento d .

Analizando la dinámica de un proceso caracterizado por estos modelos, los autores encuentran que las condiciones necesarias y suficientes para el decaimiento de la secuencia $\{Y_t\}$ son las siguientes:

$$|a_0| < 1 + \frac{r^2}{4} \quad y \quad r < 2 \quad (\text{a.1.8})$$

bajo esta metodología se tiene la ventaja que se permiten varios tipos de decaimiento, particulares en las dinámicas no lineales. Es así como los autores encuentran cuatro tipos de decaimiento, dependiendo los valores de a_0 y r ²³:

- $a_0 > r$ y $a_0 + r < 1$, decaimiento directo donde la velocidad del ajuste cambia en el tiempo.
- $a_0 > r$ y $a_0 + r > 1$, en este caso aunque existe decaimiento la secuencia $\{Y_t\}$ puede tener algunos periodos de comportamiento explosivo.
- $a_0 < r$ y $a_0 + r < 1$, decaimiento oscilatorio.
- Finalmente, para $a_0 < r$ y $a_0 + r > 1$ se tiene decaimiento oscilatorio con periodos de comportamiento explosivo.

Para considerar dinámicas más generales el modelo básico especificado en (a.1.1) puede ser aumentado con diferencias rezagadas de la serie:

$$Y_t = a(t)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p g_i \Delta Y_{t-i} + e_t \quad (\text{a.1.9})$$

²³ Los cuatro tipos de decaimiento corresponden a una partición del espacio definido por la región $|a_0| < 1 + \frac{r^2}{4}$ y $r < 2$

donde el número de rezagos especificado por p puede ser encontrado mediante los procedimientos tradicionales como la estadística Ljung-Box utilizada para el diagnóstico de los residuales, criterios de información, etc.

Para encontrar los valores más apropiados para a_0 , a_1 , b_1 , y k en (a.1.4) los autores recomiendan estimar el siguiente modelo para cada uno de los valores de k entre 1 y $T/2$:

$$\Delta Y_t = \left[c + a_1 \sin\left(\frac{2pk}{T}t\right) + b_1 \cos\left(\frac{2pk}{T}t\right) \right] Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p g_j \Delta Y_{t-j} + e_t \quad (\text{a.1.10})$$

donde $c = a_0 - 1$.

Los valores de c , a_1 , b_1 , y k son seleccionados como los resultantes de la menor suma de residuos cuadráticos de (a.1.10).

Una vez especificado el modelo (a.1.10) para una frecuencia k , se desarrollan las siguientes pruebas de hipótesis:

- F_all: $H_0: c = a_1 = b_1 = 0$
- F_trig: $H_0: a_1 = b_1 = 0$
- C: $H_0: c = 0$
- CR: $H_0: c = r^2/4$, donde $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

Las estadísticas asociadas a estas pruebas de hipótesis son calculadas de la forma usual mediante las formulas F ó t^2 .

Si el proceso que genera la serie tiene una raíz unitaria, se aceptaría la hipótesis nula asociada a las estadísticas F_all, F_trig y C. En caso contrario, es decir, cuando no existe una raíz unitaria las estadísticas F_trig y C servirían para especificar si se tienen decaimientos lineales ($a_1 = b_1 = 0$) o no lineales ($a_1 \neq 0$ ó $b_1 \neq 0$). La aceptación de la hipótesis nula asociada a la estadística CR indicaría que el proceso que genera la serie no cumple la condición (a.1.8)²⁵.

Enders y Ludlow reportan los valores críticos de estas cuatro estadísticas para diferentes niveles de significancia y tamaños de muestra. Adicionalmente, estos valores son tabulados para dos tipos

²⁴ Es importante anotar que el estadístico de la prueba CR se calcula de la forma tradicional pero teniendo en cuenta que esta restricción no es lineal.

de modelación determinística; uno considerando intercepto y el otro incluyendo una tendencia determinística²⁶.

Enders y Ludlow utilizando este tipo de técnicas también proponen una nueva prueba de cointegración, esta prueba se puede considerar como una modificación a la metodología de dos etapas de Engle y Granger (E-G). La primera etapa se realiza de la misma forma propuesta originalmente²⁷ y en la segunda se desarrolla la metodología expuesta para la ecuación (a.1.10) pero sobre el residuo $\{e_t\}$ de la primera etapa de la prueba de E-G, es decir:

$$\Delta e_t = \left[c + a_1 \sin\left(\frac{2pk}{T}t\right) + b_1 \cos\left(\frac{2pk}{T}t\right) \right] e_{t-1} + \sum_{j=1}^p g_j \Delta e_{t-j} + e_t \quad (\text{a.1.11})$$

como en los casos anteriores, si $|a_0| < 1 + r^2/4$ y $r < 2$ se puede concluir que la secuencia $\{e_t\}$ converge a cero de tal forma que las series en análisis estarían cointegradas. Al igual que para las pruebas anteriores, Enders y Ludlow presentan las tablas de los valores críticos de esta prueba de cointegración para las cuatro estadísticas F_all , F_trig , c y cr .

²⁵ Es de anotar que al igual que en la prueba de raíz unitaria de Dickey y Fuller, la hipótesis alterna asociada a las estadísticas F_all , F_trig , C y CR indica convergencia.

²⁶ Para la consideración de la parte determinística se regresa la serie en niveles contra un intercepto o un intercepto y tendencia, conservando la serie de residuales. Posteriormente, el resto de la metodología, incluyendo la estimación del modelo de (a.1.10), es desarrollada utilizando como serie de análisis a estos residuales.

²⁷ Por ejemplo para dos series X_t y Y_t , en la primera etapa se estima la siguiente regresión:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t^*$$

ANEXO 2

Intervalos de confianza de la función de impulso respuesta basados en técnicas Bootstrap

La idea principal del uso de estas técnicas es obtener una estimación de la distribución en muestras pequeñas de los parámetros involucrados en la función de impulso respuesta y asimetría, sin suponer ningún tipo de distribución sobre los errores del modelo. Esta técnica se puede implementar de la siguiente forma:

En la etapa inicial se estima el modelo STAR:

$$Y_t = \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{t-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{t-i} \right) F(Y_{t-d}) + \mathbf{e}_t \quad (\text{a.2.1})$$

y se obtiene la serie de los residuales $\{\hat{\mathbf{e}}_t\}$ para $t=1, \dots, T$.

Posteriormente se implementa un proceso iterativo, donde para la iteración j se realizan los siguientes pasos:

- i) Se genera una muestra aleatoria, $\{\mathbf{e}_t^{*(j)}\}$, de tamaño T de los residuales del modelo (a.2.1) utilizando técnicas con reemplazamiento, donde todos los residuales tienen igual probabilidad de ser seleccionados.
- ii) Dados estos nuevos residuales, los valores de la serie son reconstruidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_1^{(j)} &= \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{1-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{1-i} \right) F(Y_{1-d}) + \mathbf{e}_1^{*(j)} \\ Y_2^{(j)} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 Y_1^{(j)} + \sum_{i>1} \mathbf{a}_i Y_{2-i} + \left(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 Y_1^{(j)} + \sum_{i>1} \mathbf{b}_i Y_{2-i} \right) F(Y_{2-d}) + \mathbf{e}_2^{*(j)} \\ &\vdots \\ Y_T^{(j)} &= \mathbf{a}_0 + \sum_i \mathbf{a}_i Y_{T-i}^{(j)} + \left(\mathbf{b}_0 + \sum_i \mathbf{b}_i Y_{T-i}^{(j)} \right) F(Y_{T-d}^{(j)}) + \mathbf{e}_T^{*(j)} \end{aligned}$$

- iii) Una vez obtenida la nueva serie $\{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, \dots, Y_T^{(j)}\}$ en el paso anterior, se estiman de nuevo los parámetros del modelo STAR y su correspondiente función de impulso respuesta y medidas de asimetría.

Este proceso iterativo descrito en i,ii y iii se repite N veces y el intervalo de confianza, por ejemplo del 90%, para la respuesta obtenida k periodos²⁸ después del choque inicial se construye a partir de los percentiles 5 y 95 de las distribuciones de frecuencia de las N simulaciones.

²⁸ En este documento se evaluó la función de impulso respuesta para una longitud de 3 años, es decir $k=1, \dots, 36$. Adicionalmente, se utilizaron 10.000 replicaciones ($j=1, \dots, 10.000$).

ANEXO 3

ANÁLISIS ESPECTRAL

El análisis espectral se centra en el estudio de los componentes cíclicos de una serie de tiempo y trata de determinar cuales frecuencias cíclicas son importantes para explicar la varianza de la serie de tiempo.

Este análisis es esencialmente una modificación del análisis de Fourier, en el cual adicionalmente se permite trabajar con procesos estocásticos en lugar de funciones determinísticas de una serie de tiempo. La idea básica del análisis de Fourier es el aproximar una función en el tiempo a una suma de términos de senos y cosenos, este resultado se conoce como representación de Fourier de una serie.

Para entender la notación matemática de un modelo de series de tiempo bajo este enfoque primero se puede observar que un movimiento cíclico a una frecuencia determinada puede ser notado como $A \cos(\omega t + p)$ donde A es la amplitud del ciclo, ω la frecuencia (en radianes por unidad de tiempo) y p la fase. Si se supone que una serie de tiempo puede expresarse como una suma de varios ciclos cada uno evaluado en diferentes frecuencias, se obtiene la siguiente representación:

$$y_t = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + p_i) + \mathbf{e}_t \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{a.3.1})$$

donde $\{\mathbf{e}_t\}$ es un proceso ruido blanco.

Una forma tentativa para determinar la importancia de cada frecuencia (ω_i) es la comparación de las amplitudes del ciclo (A_i) asociado a cada de ellas. Es decir, una gráfica de ω_i versus A_i . Los A_i son relevantes debido a que además de determinar la amplitud, determinan la varianza de las observaciones generadas por el ciclo asociado a la frecuencia ω_i .

Si se supone que los ciclos generados por cada frecuencia en el rango $(0, \Pi)$ contribuyen a explicar la serie $\{Y_t\}$, de tal forma que Y_t puede ser expresada como una suma de un número infinito de ciclos, se puede demostrar que la función de autocovarianza de Y_t ²⁹, $\gamma(k)$, puede ser descrita como :

$$\mathbf{g}(k) = \int_0^{\Pi} \cos(\omega k) f(\omega) d\omega \quad (\text{a.3.2})$$

²⁹ Para una serie estacionaria Y_t la función de autocovarianza de orden k , $\gamma(k)$, corresponde a la covarianza entre Y_t y Y_{t-k} .

Debido a que la varianza de Y_t es $\gamma(0)$, utilizando (a.3.2) esta puede verse como :

$$V(Y) = \int_0^P f(w) dw \quad (\text{a.3.3})$$

$f(w) dw$ puede interpretarse como la contribución de las frecuencias entre el rango $(w, w+dw)$ a la varianza de los ciclos. Debido a la analogía entre $f(w)$ con una función de densidad, cuando se normaliza $f(w)$ es usualmente referida como función de densidad espectral y cuando se gráfica contra w se denomina espectro. Si la gráfica de $f(w)$ es completamente plana indica que no existen elementos cíclicos o regularidades sugiriendo que la serie Y_t es ruido blanco. El espectro típico³⁰ de una variable macro es alto a frecuencias bajas, decrece rápidamente, se mantiene bajo a altas frecuencias y presenta picos en frecuencias estacionales.

La estimación de la función espectral se conoce como periodograma³¹, pero aunque esta es asintóticamente insesgada, no es consistente. Este problema es superado al considerar suavizamientos³² del periodograma.

Una mayor discusión sobre este tipo de análisis se puede encontrar entre otros en Chatfield (1989) o Brockwell (1991).

³⁰ Interpretación del espectro:

La función de densidad espectral estimada usualmente es graficada para frecuencias w_i entre 0 y Π . Pero para una mejor interpretación, se pueden analizar los periodos correspondientes a cada frecuencia, donde el periodo es definido como $2\Pi/w_i$ e indica la longitud del ciclo de la serie asociado con la frecuencia w_i .

Por ejemplo, si una serie presenta un espectro con un pico en la frecuencia $\Pi/10$, indica que la serie puede presentar ciclos cada 20 periodos en el tiempo (el periodo es 20). En particular, un espectro dominado por frecuencias altas (cercanas a Π) indica que la serie presenta ciclos o movimientos periódicos cortos, es decir que los movimientos de corto plazo predominan en la serie.

³¹ La estimación de la función de densidad espectral, periodograma, se puede basar en la comparación de la función de autocovarianzas de un modelo de series de tiempo, como el descrito en (a.3.1), con la ecuación (a.3.2).

³² El suavizamiento consiste en tomar para cada frecuencia un promedio ponderado de varios valores del periodograma.

ANEXO 4

Pruebas de especificación adicionales realizadas al modelo final.

Test sobre existencia de ARCH y GARCH		
	Estadística	P-value
McleodLI (GARCH)	14.895	0.247
No ARCH	1.381	0.181

Test LM de Autocorrelación de los Errores		
Rezago	F-stat	P-value
1	1.278	0.261
2	1.542	0.218
3	1.034	0.380
4	0.771	0.546
5	0.815	0.541
6	0.682	0.664
7	0.630	0.731
8	0.722	0.672
9	0.651	0.751
10	0.588	0.821
11	0.776	0.663
12	0.709	0.740
13	0.651	0.805
14	0.690	0.780
15	0.689	0.790
16	0.749	0.738
17	0.699	0.797
18	0.754	0.747
19	0.707	0.803
20	0.672	0.844
21	0.636	0.882
22	0.620	0.900
23	0.741	0.791
24	0.708	0.831

Test de Constancia de Parámetros				
Ho: Todos los parámetros de la parte lineal del modelo excepto la constante son constantes				
	F-Stat	DFnum	DFden	P-value
LM3	0.937	66	50	0.601
LM2	1.341	44	72	0.133
LM1	1.627	22	94	0.056
Ho: Todos los parámetros de la parte no lineal del modelo excepto el intercepto no lineal son constantes				
	F-Stat	DFnum	DFden	P-value
LM3	0.599	78	38	0.971
LM2	0.673	52	64	0.929
LM1	0.882	26	90	0.630

También se llevaron a cabo pruebas sobre no linealidad remanente por parte de alguna de las variables pero en todos los casos esta hipótesis fue rechazada.