

# Mecanismo de cobertura para el riesgo de tasa de interés real de los bancos hipotecarios colombianos

Diego M. Vasquez\*dvasques@banrep.gov.co

Enero 29 de 2003

## Abstract

Se presenta el diseño de un mecanismo de cobertura para el riesgo de tasa de interés real que afrontan en Colombia los Bancos especializados en crédito hipotecario, es decir el riesgo de que la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés nominal de captación a corto plazo (DTF) y la variación de la UVR menos el equivalente de largo plazo de dicha diferencia sea mayor que cero. Por medio de dos metodologías diferentes se llega a una estimación de la tasa de interés real de largo plazo a partir de la cual se construyen tres alternativas de funcionamiento del mecanismo. La primera es una operación tipo *SWAP* en la que se anula el valor de los aportes de los participantes, la segunda alternativa contempla la distribución de una parte de los ingresos iniciales del mecanismo entre las entidades y la tercera constituye un sistema de franjas de tasa de interés real. Finalmente, se presentan los resultados de la evaluación del desempeño de las tres alternativas utilizando datos de tasa de interés real observados entre enero de 1984 y agosto de 2002.

---

\*Funcionario del Banco de la República. Este documento fue elaborado con la colaboración de Camilo Zea y Sebastián Nieto Banco de la República y Ministerio de Hacienda respectivamente. Las opiniones de este trabajo no comprometen ni representan la posición oficial del Banco de la República ni de su Junta Directiva. Los errores y omisiones son propios. Se Agradecen los comentarios y colaboración de Andrés Carvajal, Luis F. Melo y Juan P. Zárate.

## 1. Introducción

Este trabajo recoge las ideas presentadas en los documentos técnicos elaborados por Galindo y Vásquez (1999), Mejía y Vásquez (2000) y Vásquez y Zea (2001), los cuales sirvieron de base para la definición de las condiciones de funcionamiento del FRECH, contempladas en el Decreto 2670 de 2000 del Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Se presentan las diferentes alternativas de funcionamiento del FRECH y se describe, en detalle, el proceso de determinación y estimación de los parámetros del mecanismo de cobertura y las metodologías que se utilizan en dichas estimación.

Según establece el artículo 49 de la Ley 546 de 1999, el Banco de la República debe administrar un fondo, creado en el artículo 48 de la misma Ley, cuyos recursos están destinados al cubrimiento del riesgo de tasa de interés real que enfrentan los bancos especializados en crédito hipotecario (BECH). Dicho fondo, denominado Fondo para la Reestructuración y Estabilización de la cartera hipotecaria (FRECH) se constituye como un mecanismo de cobertura cuyo funcionamiento es similar a una operación tipo SWAP entre la tasa de interés nominal (DTF) y el crecimiento de la UVR. El monto máximo de la cobertura está limitado por el saldo de cartera hipotecaria a diciembre 31 de 2000. El capital inicial del FRECH está constituido por los recursos provenientes de un impuesto de 50% a la remuneración mensual de los encajes, ciento cincuenta mil millones de pesos provenientes de las utilidades del Banco de la República, correspondientes al ejercicio de 1999, y los rendimientos de los recursos del fondo.

La idea central de la operación de cobertura consiste en sustituir un flujo denominado en UVR por otro en DTF con el fin de evitar fluctuaciones dispares entre la remuneración del activo y del pasivo de los BECH. Dicho objetivo plantea la necesidad de establecer una relación de largo plazo entre la tasa de interés nominal (efectiva mensual) y la tasa de crecimiento mensual de la UVR. A partir de esta relación se determina una tasa de interés de referencia,  $\bar{r}^m$ , que permita determinar el momento y la cantidad de la cobertura. Así, cuando la diferencia entre la tasa de interés nominal y el crecimiento de la UVR excede su equivalente de largo plazo, el pasivo de los BECH tiene una remuneración superior a la del activo y por lo tanto el mecanismo compensa a dichas entidades aportando tal diferencia. En caso contrario, los BECH aportan al FRECH el exceso en ingresos resultante. En principio, se considera un mecanismo tipo SWAP, que asegure una cobertura neutral garantizando que la suma de los pagos sea compensada por la suma de los ingresos derivados de la operación para cada parte, de esta forma los

recursos iniciales del FRECH se mantienen intactos al momento de finalizar la operación.

Con el ánimo de promover la entrada de las entidades al FRECH, en una situación de tasa de interés real bajo la cual los BECH entrarían aportando al mecanismo, se considera una segunda alternativa de funcionamiento que consiste en deducir un equivalente de largo plazo o tasa de referencia  $\overline{r^{m*}}$ , inferior a  $\overline{r^m}$ , que garantice la distribución de una parte de los recursos asignados por la Ley al FRECH entre las entidades que ingresen a la operación de cobertura. Teniendo en cuenta que esta última tasa puede resultar muy similar a la de la primera alternativa sin lograr un estímulo suficiente para promover la entrada de las entidades al FRECH se considera una tercera alternativa en la que se establece un sistema de franjas de tasas de interés a partir del cual el mecanismo entra a cubrir situaciones extremas de disparidad entre la tasa de interés real y su equivalente de largo plazo. Así, cuando dicha relación entre DTF y crecimiento de UVR supere el techo de la franja  $\overline{T}$ , el FRECH compensa a los BECH y cuando tal diferencia esté por debajo del piso de la franja  $\overline{P}$  los BECH aportan al FRECH. El diseño de esta última alternativa tiene en cuenta la determinación de un piso que garantice la distribución de los recursos iniciales del FRECH entre las entidades.

El documento se divide en ocho partes, la primera de las cuales es la introducción, en la segunda se determina la duración del FRECH a partir de la estimación del ciclo de la tasa de interés real, en la tercera parte se presenta la determinación de la tasa de interés de referencia o parámetro de corte que constituye la base para el mecanismo de franjas de tasa de interés, en la cuarta parte se describe el proceso de estimación de la tasa de interés de referencia por medio de dos métodos diferentes: i) el método de simulaciones tipo Monte Carlo de un modelo ARIMA con intervención para la tasa de interés real y ii) a partir de la estimación los parámetros de un modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck, entre los cuales se cuenta la tasa de interés real de equilibrio de largo plazo. En la quinta parte se presenta la segunda alternativa de funcionamiento del mecanismo de cobertura a partir de la determinación de la tasa de referencia no neutral, en la sexta parte se presenta la tercera alternativa de funcionamiento del mecanismo a partir de un sistema de franja de tasas de interés que se define con base en la tasa de interés de referencia no neutral, en la séptima parte se muestran los resultados de la evaluación retrospectiva de las tres alternativas del mecanismo de cobertura a partir de simulaciones al interior de muestra con datos observados entre enero de 1984 y agosto de 2002. Finalmente, en la octava parte se presentan algunas conclusiones.

## 2. Estimación del ciclo de la tasa de interés real

En esta sección se describe la metodología utilizada en la estimación del ciclo de la tasa de interés real, con base en técnicas de análisis espectral, siguiendo los fundamentos presentados por Chatfield (1989). Los resultados que se presentan sirven de base para fijar el período de duración del FRECH.

Una de las consideraciones más importantes para determinar la duración del mecanismo de cobertura consiste en garantizar la mayor neutralidad posible. Así, si la tasa de interés real presenta un comportamiento cíclico a través del tiempo, dicha neutralidad se ve comprometida si la duración del mecanismo de cobertura es diferente de un múltiplo entero de la duración del respectivo ciclo, lo cual genera que el período de pagos que afronta uno de los dos participantes sea menor que el otro. En estas condiciones, cualquiera de los dos (el FRECH o los BECH) percibiría ganancias extraordinarias generadas por dicho comportamiento cíclico. Para ilustrar este punto se define la tasa de interés real<sup>1</sup> de la siguiente forma:

$$r_t^a = \left( \frac{1 + i_t^a}{1 + \Delta UVR_t^a} \right) - 1 \quad (2.1)$$

En la ecuación (2.1),  $i_t^a$  corresponde a la  $t$ -ésima (mensual) observación de la tasa de interés DTF nominal efectiva anual y  $\Delta UVR_t^a$  constituye la  $t$ -ésima (mensual) observación del crecimiento anual de la UVR, la cual se calcula cada mes con base en la tasa de inflación mensual, rezagada un período ( $\pi_{t-1}^m$ ). Otra alternativa de medición de la tasa de interés real es a partir de la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés nominal efectiva mensual y la variación mensual de la UVR obtenida mediante

$$r_t^m = \left( \frac{1 + i_t^m}{1 + \Delta UVR_t^m} \right) - 1 \quad (2.2)$$

La figura (2.1) muestra la evolución de la tasa de interés real, efectiva mensual y efectiva anual y los promedios históricos de cada serie en el período enero de 1984 - agosto de 2002

---

<sup>1</sup>La tasa de interés real se subestima a medida que aumenta la inflación si se calcula con base en la diferencia aditiva entre la tasa de interés nominal y la inflación ( $r = i - \pi$ ). Dicha subestimación se puede evitar si se calcula con base en la diferencia multiplicativa entre estas dos variables ( $r = \frac{1+i}{1+\pi} - 1$ ). En efecto, con  $i$  constante  $\lim_{\pi \rightarrow \infty} (i - \pi) = -\infty$ , en tanto que  $\lim_{\pi \rightarrow \infty} \left( \frac{1+i}{1+\pi} - 1 \right) = -1$ . Este resultado indica que cuando  $\pi \rightarrow \infty$ , se tiene una pérdida real equivalente a la del activo.

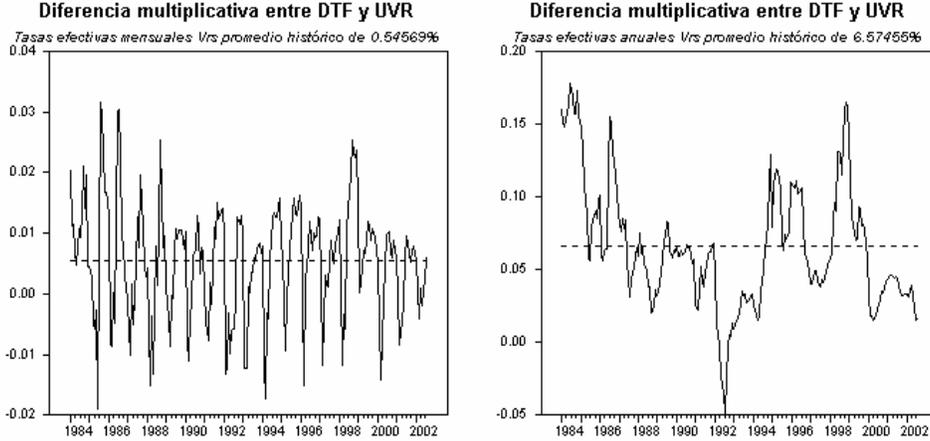


Figura 2.1 Tasa de interés real efectiva anual definida por la ecuación (2.1) y tasa de interés real efectiva mensual definida por la ecuación (2.2)

Como puede apreciarse, la dinámica de la tasa de interés real efectiva mensual ( $r_t^m$ ) esta fuertemente influenciada por variaciones estacionales, en tanto que en la tasa real efectiva anual ( $r_t^a$ ) no se observa dicho patrón estacional de forma evidente. Si se tiene en cuenta que la estimación del ciclo de la tasa de interés real por medio de técnicas de análisis espectral tiene como objetivo fundamental identificar la contribución de componentes sinusoidales de la variable a su respectiva varianza, la tasa real efectiva mensual no parece adecuada debido a que los resultados estarían influenciados por dicha estacionalidad. Cómo alternativa se lleva a cabo el análisis con base en la tasa real efectiva anual.

Si la tasa de interés real efectiva anual presenta un comportamiento cíclico, es decir, contiene un componente periódico sinusoidal con determinada longitud de onda, entonces la variabilidad de  $r_t^a$  puede ser causada por variaciones de dicho componente a diferentes frecuencias (mensual, trimestral, semestral etc.). Siguiendo a Hamilton (1994), en este contexto, es posible describir el valor que adopta la variable  $r^a$  en determinado momento  $t$  a partir de:

$$r_t^a = \sum_{j=1}^k R_j \cdot \cos(\omega_j t + \theta_j) + \varepsilon_t \quad (2.3)$$

dónde,  $\omega_j$  es la  $j$ -ésima frecuencia de la variación sinusoidal,  $R_j$  es la amplitud de dicha variabilidad a la frecuencia  $\omega_j$ ,  $\theta_j$  la respectiva fase y  $\varepsilon_t$  denota el valor

de la una variable aleatoria estacionaria. El ángulo  $(\omega_j t + \theta_j)$  se mide en radianes por tanto  $\omega_j$  constituye la frecuencia angular, definida cómo  $f = \omega_j/2\pi$ , que indica el número de ciclos por cada  $2\pi$  unidades de tiempo y cuya inversa ( $1/f = 2\pi/\omega_j$ ) constituye el período de un ciclo sinusoidal o longitud de onda. El caso más simple es cuando  $k = 1$ , es decir, la variación de  $r_t^a$  es causada por cambios en el componente sinusoidal a una sola frecuencia ( $\omega$ ). Así (2.3) puede reformularse de la siguiente forma

$$r_t^a = R \cdot \cos(\omega t + \theta) + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

A partir de (2.4), si se supone el caso determinístico en que  $VAR[\varepsilon_t] = 0$  y arbitrariamente se suponen unos valores de  $R = 2$ ,  $\omega = \pi/3$ ,  $\theta = \pi/6$  y , a manera de ejemplo, la dinámica que adopta la de la tasa de interés real ( $r_t^a$ ), definida en la ecuación (2.4) se puede expresar gráficamente así:

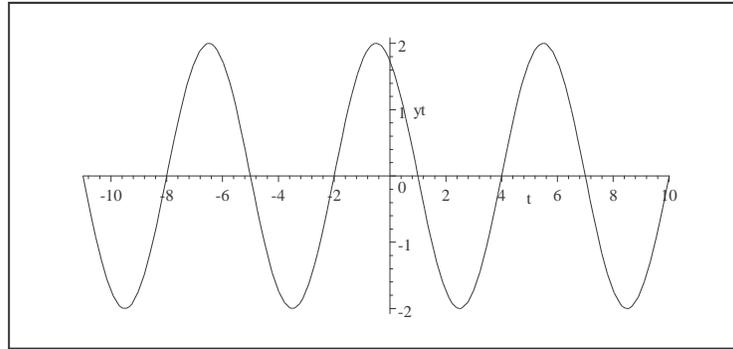


Figura 2.2 Ejemplo de evolución sinusoidal de  $r_t^a$  definida por la ecuación (2.4), con una frecuencia de  $\pi/3$  amplitud de 2 y fase de  $\pi/6$

Según los resultados del ejemplo (gráfico 2.2), el ciclo de  $r_t^a$  tendría una duración de seis períodos, es decir,  $r_t^a$  se tardaría seis meses en completar las dos fases correspondientes. De esta forma, si el mecanismo de cobertura comenzara en el período No 1 y finalizara en el período No 5, las entidades tendrían que hacer aportes al FRECH durante los dos períodos siguientes, en tanto que el FRECH solo haría aportes a las entidades durante un período, lo cual resulta en una asimetría evidente a favor del FRECH.

Si la dinámica de  $r_t^a$  es menos simple que la del ejemplo anterior y por lo tanto queda mejor representada por (2.3), entonces debido al desconocimiento de  $\omega$ ,  $R$  y  $\theta$ , y con propósitos de estimación es conveniente re expresar dicha ecuación de

la siguiente forma<sup>2</sup>

$$r_t^a = \sum_{j=1}^k [a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t] + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

dónde,  $a_j = R_j \cos \theta_j$  y  $b_j = -R_j \sin \theta_j$ . La frecuencia más alta posible para ajustar los datos es  $\omega = \pi$ , mientras que la más baja es la que completa un ciclo durante la longitud total de la serie observada, por tanto si se iguala la longitud del ciclo ( $2\pi/\omega$ ) a  $T$ , es decir al número total de observaciones de  $r_t^a$ , se tiene que la frecuencia más baja posible está dada por  $2\pi/T$ , con lo cual  $\omega$  adopta valores a partir de

$$\omega_j = 2\pi j/T \quad j = 1, 2, \dots, T/2 \quad (2.6)$$

Si se sustituye el valor de  $\omega_j$ , definido por (2.6), en la ecuación (2.5) y se adiciona un término de intercepto se tiene que  $r_t^a$  puede ser representada mediante

$$r_t^a = a_0 + \sum_{j=1}^{(T/2)} [a_j \cos (2\pi jt/T) + b_j \sin (2\pi jt/T)] + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

En contraste con (2.7), si se expresa a  $r_t^a$  a partir de una representación finita de series de Fourier<sup>3</sup> se tiene que

$$r_t^a = a_0 + \sum_{j=1}^{(T/2)-1} [a_j \cos (2\pi jt/T) + b_j \sin (2\pi jt/T)] + a_{T/2} \cos (\pi t) \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \overline{r^a} \\ a_{T/2} &= \sum_{t=1}^T (-1)^t r_t^a / T \\ a_j &= \frac{\left[ 2 \sum_{t=1}^T r_t^a \cos(2\pi jt/T) \right]}{T} \\ b_j &= \frac{\left[ 2 \sum_{t=1}^T r_t^a \sin(2\pi jt/T) \right]}{T} \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, (T/2) - 1 \quad (2.9)$$

<sup>2</sup>Se utiliza la propiedad de la función Coseno:  $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t) \cos(\theta) - \sin(\omega t) \sin(\theta)$

<sup>3</sup>Chatfield (1989) presenta, en forma resumida, algunos aspectos relacionados con representaciones finitas de Fourier, sin embargo señala que los detalles al respecto pueden consultarse en Priestley (1981).

Chatfield (1989) muestra que los coeficientes presentados en la ecuación (2.9) corresponden a los estimadores mínimo cuadráticos de los parámetros  $a_0$ ,  $a_j$  y  $b_j$  de la ecuación (2.7), obtenidos para cada valor de  $\omega_j$ , por lo tanto la ecuación (2.8) no contiene término de perturbación. El componente de  $r_t^a$  a la frecuencia  $\omega_j = 2\pi j/T$  (con  $j \neq T/2$ ), denominado *j-ésima* armónica de  $r_t^a$ , se puede expresar de la siguiente forma:

$$a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t = R_j \cos (\omega_j t + \phi_j) \quad (2.10)$$

dónde

$$R_j = \sqrt{(a_j^2 + b_j^2)} \quad (2.11)$$

constituye la amplitud de la *j-ésima* armónica, y

$$\phi_j = \tan^{-1} (-b_j/a_j) \quad (2.12)$$

es la fase de la *j-ésima* armónica.

Cómo señala Chatfield, por teorema de Parseval, es posible demostrar que el estimador de la varianza de  $r_t^a$  se puede expresar a partir de

$$\sum_{t=1}^T \frac{(r_t^a - \bar{r}^a)^2}{T} = \sum_{j=1}^{(T/2)-1} \frac{R_j^2}{2} + T a_{T/2}^2 \quad (2.13)$$

por lo tanto,  $R_j^2/2$  es la contribución de la *j-ésima* armónica a la varianza de  $r_t^a$ , cuya gráfica respecto a  $\omega_j = 2\pi j/T$  corresponde al espectro de línea de  $r_t^a$  el cual permite definir el periodograma ordinado  $I(\omega_j)$  en el rango  $(\omega_j \pm \pi/T)$  definido cómo

$$I(\omega_j) = \frac{TR_j^2}{4\pi} \quad (2.14)$$

Si  $j \neq T/2$ , la contribución a la varianza en el rango  $[\pi(T-1/T), \pi]$  corresponde a  $a_{T/2}^2$ . La gráfica de  $I(\omega_j)$  respecto a  $\omega_j$  se denomina periodograma<sup>4</sup>. La estimación del periodograma con base en las observaciones de  $r_t^a$  puede obtenerse a partir de:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{t=1}^T r_t^a \cos(2\pi jt/T)^2 + \sum_{t=1}^T r_t^a \sin(2\pi jt/T)^2 \right], \quad j = 1, \dots, \frac{T}{2} \quad (2.15)$$

<sup>4</sup>Aunque  $I(\omega_j)$  es función de las frecuencias es más conocido con este nombre que con el de espectrograma, sin embargo, Chatfield señala que autores como Anderson (1971) denominan la gráfica de  $R_j^2$  respecto al período  $T/j$  como periodograma y respecto a la frecuencia  $\omega_j$  como espectrograma.

Por medio de la ecuación (2.15), Chatfield demuestra que cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $E[I(\omega_j)] \rightarrow f(\omega_j)$ , es decir, tiende a la función de densidad espectral de  $r_t^a$ . Sin embargo,  $VAR[I(\omega_j)]$  no decrece cuando aumenta  $T$ . Lo anterior indica que (2.15) es un estimador insesgado de  $f(\omega_j)$  pero inconsistente. Como alternativa se sugiere un conjunto de técnicas de estimación dentro de las cuales se selecciona, en este trabajo, el método no paramétrico de “Transformación Rápida de Fourier”.

El algoritmo de Transformación Rápida de Fourier<sup>5</sup> (FFT), aplicado a los valores observados de  $r_t^a$ , tiene como objetivo calcular el valor de los parámetros de la ecuación (2.9), los cuales se definen en el campo de los números complejos cómo

$$a_j + ib_j = \frac{2}{T} \left[ \sum_{t=1}^T r_t^a \exp(2\pi ijt/T) \right], \quad j = 1, 2, \dots, (T/2) - 1 \quad (2.16)$$

Una vez estimada la ecuación (2.9) se obtiene el estimador del periodograma  $I(\omega_j)$ . El primer paso de la metodología consiste en determinar el número de ordinadas ( $N$ ) en función de  $T$  calculado a partir del entero más pequeño en

$$N = 2^m S \quad (2.17)$$

dónde  $S$  es el número de períodos por año (12 para el caso de  $r_t^a$ ) y  $m$  el factor primo que determina el número de ordinadas, el cual puede adoptar valores de 2, 3 o 5. El valor recomendado para que el algoritmo FFT sea más veloz es  $m = 5$ , al sustituir este valor en (2.17), el número total de ordinadas resultante es  $N = 384$ . La frecuencia ordenada se obtiene al sustituir  $T$  por  $N$  en (2.6) con lo cual

$$\omega_j = 2\pi j/N \quad j = 1, 2, \dots, (N/2) - 1 \quad (2.18)$$

Con base en la ecuación (2.18) se obtiene el período ordenado o número de meses que toma  $r_t^a$  para generar un ciclo

$$N/j = 2\pi/\omega_j \quad (2.19)$$

Si se tiene en cuenta que  $I(\omega_j)$  es un estimador de la función de densidad espectral  $f(\omega_j)$  de un proceso estocástico estacionario discreto, es necesario ver-

---

<sup>5</sup>Chatfield presenta una breve descripción de esta técnica y para una descripción más detallada recomienda ver, entre otros, a J. W. Cooley, W. Lewis. y Welch, P. D (1967).

ificar, como segundo paso, que  $r_t^a$  sea estacionaria <sup>6</sup>. El tercer paso consiste en llevar a cabo un proceso de preblanqueo<sup>7</sup> sobre  $r_t^a$  que consiste restar de cada una de las observaciones la media y eliminar posibles tendencias y variaciones estacionales, generando una nueva tasa real ( $r_t^{a*}$ ), con el fin de evitar que la varianza se concentre en componentes de baja frecuencia, de tal forma que se obtenga una estimación suavizada del periodograma. Los resultados<sup>8</sup> de la aplicación de la metodología descrita se presentan en la figura 2.3

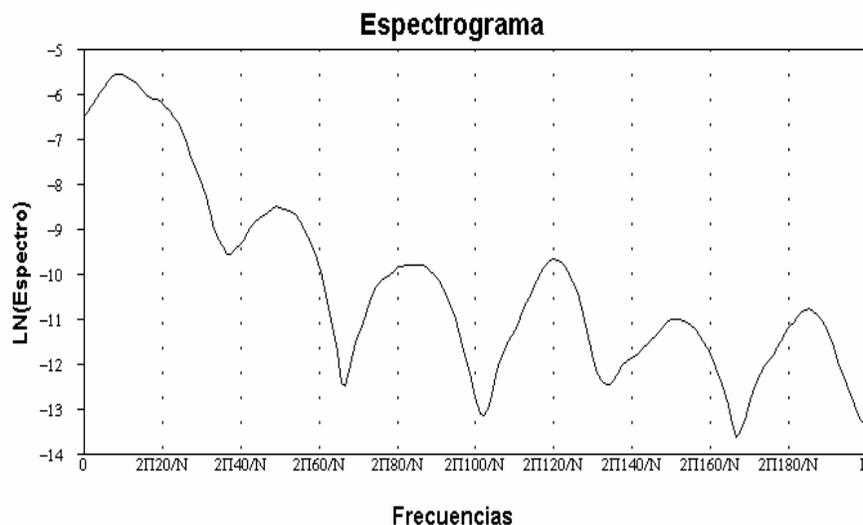


Figura 2.3.1 Espectrograma estimado para la tasa de interés real efectiva anual diferenciada estacionalmente.

<sup>6</sup>Para probar la hipótesis de que  $r_t^a$  es estacionaria, se llevó a cabo el contraste de estacionariedad KPSS (1992), bajo el modelo que no incluye tendencia lineal, el cual arrojó un valor de la estadística de prueba  $\eta_\mu$  de 0.42935 (con una selección del parámetro de truncamiento de  $l(8)$ ) y un valor crítico tabulado al 5% de 0.463, por lo tanto, no se rechazó la hipótesis nula de estacionariedad. A la misma conclusión se llegó al aplicar la prueba raíz unitaria de Franses y Hobijin (1997), la cual, bajo ninguna de las especificaciones propuestas, permite rechazar la hipótesis nula de que  $r_t^a$  es  $I(0)$  a frecuencias regular y estacional.

<sup>7</sup> Siguiendo la recomendación de Chatfield (1989) y Hamilton (1994), para remover variaciones estacionales se aplica el filtro de diferencia estacional  $(1 - L^{12})$  a la variable  $r_t^{a*}$ , donde  $r_t^{a*} = r_t^a - \overline{r^a}$  garantizando que dicha serie filtrada sea de media cero.

<sup>8</sup> Las estimaciones fueron realizadas mediante el uso del *Software RATS* (versión 5.02) utilizando el algoritmo FFT de Transformación Rápida de Fourier con datos de tasa de interés real efectiva anual entre enero de 1984 y agosto de 2002.

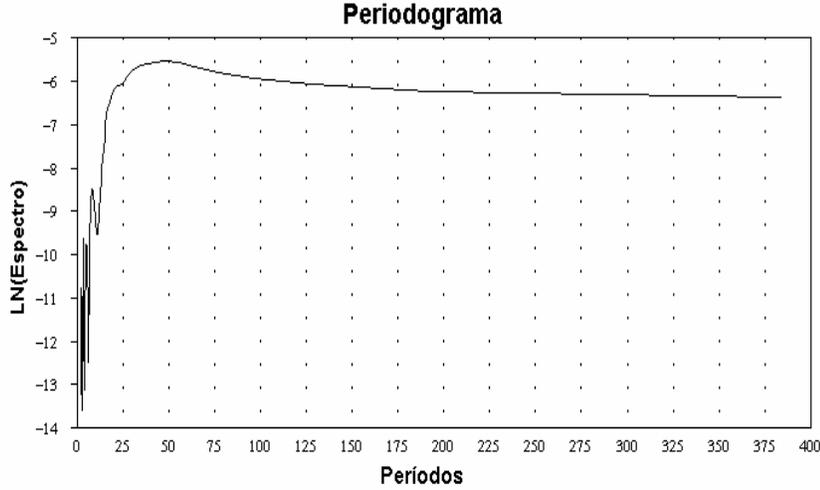


Figura 2.3.2 Periodograma estimado para la tasa de interés real efectiva anual diferenciada estacionalmente.

En las figura 2.3.1 y 2.3.2 el espectrograma corresponde a la gráfica del espectro de  $r_t^{a*}$ , descrito por la ecuación (2.14), con respecto a las frecuencias obtenidas a partir de la ecuación (2.18) utilizando datos mensuales entre enero de 1984 y agosto de 2003. El periodograma en la figura 2.3 corresponde a la gráfica de dicho espectro Vs. los períodos calculados con base en la ecuación (2.19).

Como puede apreciarse, el primer pico en el espectrograma se presenta a una frecuencia de  $[(2\pi 8) / 384] = 0.1309$  lo que indica que el número de ciclos observados cada  $2\pi = 6.2831853$  meses en la tasa de interés real efectiva anual diferenciada estacionalmente ( $r_t^{a*}$ ) es de 0.1309, por lo tanto se requieren 48 meses para observar un ciclo completo en dicha variable. Así, la principal contribución a la varianza de  $r_t^{a*}$  está dada por variaciones en su respectivo componente cíclico de periodicidad  $[2\pi / (0.1309)] = 48$  meses (cuatro años)<sup>9</sup>. Esta conclusión se confirma al observar el periodograma de  $r_t^{a*}$ , el cual muestra el punto más alto de  $I(\omega_j)$  en el período 48, es decir la longitud de tiempo que toma  $r_t^{a*}$  para completar un ciclo.

El resultado anterior indica que la operación de cobertura está libre de asimetrías, derivadas del comportamiento cíclico de la tasa de interés real, si se lleva a cabo

<sup>9</sup>Los picos restantes observados en el espectrograma, de menor magnitud e importancia, corresponden a períodos de aproximadamente 8, 5, 3 y 2 meses, los cuales pueden estar asociados a patrones estacionales y efectos calendario.

con una duración igual a un múltiplo entero de 48 meses por ejemplo 4 u 8 años, de lo contrario se genera un sesgo cuya magnitud depende de la fase del ciclo en que se inicie la operación<sup>10</sup>. En estos casos, bajo una operación tipo SWAP, la suma de los pagos no compensa la de los aportes.

Es de anotar que una variación en el régimen inflacionario puede generar algún cambio en la tasa de interés real de largo plazo<sup>11</sup>. Sin embargo, determinar la dirección y la magnitud de dicho cambio no es sencillo, por lo tanto, para evitar sus efectos sobre la operación de cobertura y teniendo en cuenta las consideraciones acerca del ciclo de la tasa de interés real, se sugiere que el FRECH opere en un período de mediano plazo (aproximado a 4 años) y si es del caso, renovable a otros períodos de igual duración.

### 3. Determinación de la tasa de interés de referencia $\overline{r^m}$

En esta sección se describe la deducción y estimación del parámetro de corte de la operación de cobertura. El objetivo es determinar una equivalencia de largo plazo entre la tasa de interés nominal y el crecimiento de la UVR de tal forma que si la operación se define como un mecanismo tipo SWAP, donde los pagos y cobros se compensan durante el funcionamiento del mismo, el equivalente de largo plazo es la tasa de interés de referencia que garantiza dicha neutralidad.

El riesgo de tasa de interés se genera cuando la diferencia entre la tasa de interés nominal (DTF), con base en la cual se remuneran las captaciones de los BECH, y el crecimiento de la UVR más su equivalente de largo plazo ( $\overline{r^m}$ ) es mayor que cero. Esta diferencia puede ser expresada, en forma multiplicativa a

---

<sup>10</sup>Estimaciones previas, presentadas en el documento técnico “Propuesta para el funcionamiento de la operación de cobertura prevista en el Artículo 49 de la Ley 546 de 1999” elaborado por Arturo Galindo y Diego Vásquez, señalan que el ciclo de dicha tasa tiene una duración, aproximadamente de 4.6 años.

<sup>11</sup>Respecto al impacto de cambios en la inflación sobre la tasa de interés real, puede consultarse: Espinosa-Vega y Russell(1998) “Can Higher Inflation Reduce Real Interest Rates in the Long Run?” Canadian Journal of Economics y Tanzi (1984) Taxation Inflation and Interest Rates. FMI. La literatura sugiere diversos tipos de efectos. Por una parte se puede prever que la tasa de interés real aumente al caer la inflación, si se presenta un efecto tipo Tobin en el cual los recursos se transfieran hacia la tenencia de saldos monetarios en vez de capital, aumentando así su productividad marginal y con ello la tasa de interés real. Alternativamente la caída en la inflación puede incrementar la eficiencia marginal del capital, y para un stock de capital constante, puede propiciar una reducción en su productividad marginal y con ello una caída en la tasa de interés real. Determinar cual es el efecto predominante se convierte en un problema empírico.

partir de

$$r_t^m = \left[ \frac{(1 + i_t^m)}{(1 + \Delta UVR_t^m)(1 + \overline{r^m})} \right] - 1 \quad (3.1)$$

$i_t^m$  y  $\Delta UVR_t^m$  son las mismas tasas que se definen para la ecuación (2.1) Con base en (3.1), la magnitud de los pagos ( $p_t$ ) del FRECH a los BECH y viceversa en cada momento del tiempo se define de acuerdo a

$$p_t = \delta C \times \left\{ \left[ \frac{1 + i_t^m}{(1 + \Delta UVR_t^m)(1 + \overline{r^m})} \right] - 1 \right\} \quad (3.2)$$

$\delta$  es el porcentaje de cartera inscrita y  $C$  es el monto total de cartera hipotecaria bruta a diciembre de 2000. Cuando  $p_t$  es positivo, se refiere a pagos del FRECH; en caso de ser negativo se refiere a pagos de los BECH. La definición de los pagos, ecuación (3.2), es equivalente al producto del monto de cartera asegurado y la diferencia multiplicativa entre  $r_{m_t}$  y su equivalente de largo plazo  $\overline{r^m}$ , es decir:

$$p_t = \delta C \times \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] \quad (3.3)$$

dónde,  $r_t^m$  representa la  $t$ -ésima observación de la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés DTF nominal, efectiva mensual ( $i_t^m$ ) y el crecimiento mensual de la UVR ( $\Delta UVR_t^m$ ). A partir de la ecuación (3.3) y suponiendo un funcionamiento del FRECH tipo SWAP, el objetivo es determinar  $\overline{r^m}$  tal que los ingresos al final de la operación de cobertura ( $I_T$ ) sean iguales a los recursos iniciales ( $I_0$ ) otorgados por la Ley. Si se supone por simplicidad que el FRECH no tiene ingresos derivados de la inversión de sus recursos líquidos, los ingresos en cada momento del tiempo se pueden definir a partir de

$$I_t = I_{t-1} - p_t \quad (3.4)$$

Aplicando sustitución recursiva en la ecuación (3.4) es posible obtener una expresión para los ingresos finales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 - p_1 \\ I_2 &= (I_0 - p_1) - p_2 \\ I_3 &= [(I_0 - p_1) - p_2] - p_3 \\ &\vdots \\ I_T &= I_0 - \sum_{t=1}^T p_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.5) la definición de los pagos descrita por (3.3) se tiene que

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] \quad (3.6)$$

Garantizar que  $I_T = I_0$  en (3.6) equivale a plantear:

$$\sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] = 0 \quad (3.7)$$

Resolviendo (3.7) para  $\overline{r^m}$  se tiene que

$$\frac{1}{1 + \overline{r^m}} \sum_{t=1}^T (1 + r_t^m) - T = 0$$

de la expresión anterior resulta que:

$$\overline{r^m} = \sum_{t=1}^T \frac{r_t^m}{T} \quad (3.8)$$

Según la ecuación (3.8), bajo un mecanismo de cobertura tipo SWAP con pagos y cobros que se compensan a través del tiempo, el equivalente de largo plazo de la diferencia entre la tasa de interés nominal y el crecimiento de la UVR es el promedio aritmético de la diferencia multiplicativa entre estas dos variables.

El promedio histórico respectivo en el período comprendido entre enero de 1984 y agosto de 2002 es de 6.75% (efectivo anual). Sin embargo, dado el desconocimiento de la dinámica futura de  $r_t^m$  y suponiendo que los datos observados de esta variable constituyen una muestra aleatoria entre muchas muestras posibles, establecer la tasa de referencia a partir de dicho promedio histórico podría ser arriesgado debido a que la historia de los choques aleatorios no se repite hacia el futuro.

Dado lo anterior, para estimar la tasa de referencia neutral  $\overline{r^m}$  y por tanto el valor promedio de la equivalencia de largo plazo entre  $i_t^m$  y  $\Delta UVR_t^m$  se utilizan dos estrategias diferentes. En la primera se aplican técnicas de simulación tipo Monte Carlo<sup>12</sup> a partir de un modelo con el cual se realizan proyecciones de la trayectoria futura de la variable en cuestión ( $r_t^m$ ). En la segunda estrategia se

---

<sup>12</sup>Este tipo de técnicas son sugeridas comúnmente en finanzas. Ejemplos y aplicaciones en este contexto se encuentran en Wilmott (1998) y en Campbell, Lo y MacKinlay (1997).

estima la tasa de interés real de largo plazo a partir de un modelo uniecuacional en el que se supone que la variación de la tasa de interés real sigue un movimiento browniano con determinada difusión y revertibilidad a la media. Este modelo es descrito por una ecuación estocástica en diferencias que corresponde a la solución del modelo de equilibrio general dinámico de precios de activos de Cox, Ingersoll y Ross (1985).

En la primera estrategia de estimación se utiliza un modelo ARIMA el cual supone que  $r_t^m$  constituye un proceso estocástico estacionario representable mediante un modelo autorregresivo y de promedios móviles ARMA. Una vez identificado, estimado y validado dicho modelo, se procede a la aplicación de técnicas de simulación de Monte Carlo que consiste en obtener, repetidas veces (replicaciones) una secuencia, de tamaño  $T$ , de choques aleatorios provenientes de una distribución normal con media cero y varianza correspondiente a la varianza muestral de los errores del modelo estimado. Cada secuencia de choques aleatorios sustituye a los errores del modelo para generar una serie diferente en cada replicación. El proceso se repite 10.000 veces obteniendo la misma cantidad de trayectorias posibles que permiten obtener una trayectoria promedio a partir de las 10.000 replicaciones de cada observación teniendo en cuenta que los residuales del modelo ARIMA estimado provienen de una distribución normal.

## 4. Estimación de la tasa de referencia ( $\overline{r^m}$ )

### 4.1. Simulaciones tipo Monte Carlo.

Siguiendo la metodología Box-Jenkins<sup>13</sup> se identifica un modelo ARIMA(p,d,q) para la tasa de interés real  $r_t^m$  y utilizando datos mensuales de esta variable desde enero de 1984 hasta agosto de 2002 se estima y se valida dicho modelo. El gráfico 3.1 muestra las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie observada que permiten la identificación del modelo.

---

<sup>13</sup>Detalles sobre metodología Box-Jenkins de identificación, estimación y diagnóstico de modelos ARIMA y ARIMA con Intervención pueden consultarse, entre otros, en Wei (1990), Hamilton (1994), y Enders (1995).

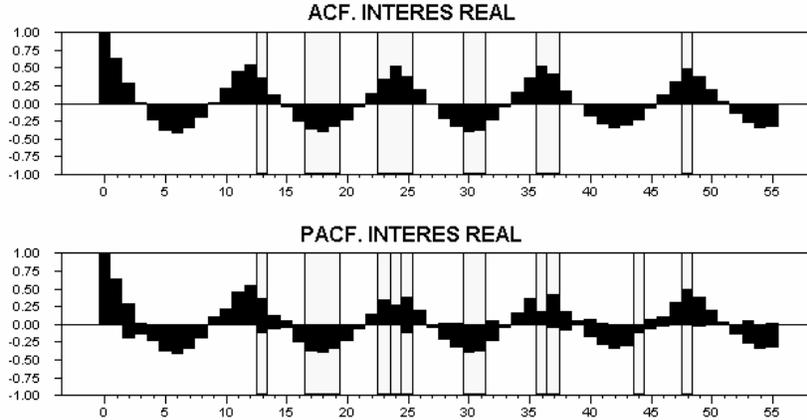


Figura 3.1 Funciones de autocorrelación simple y parcial de la tasa de interés real efectiva mensual para  $T/4$  de la serie.

Los resultados de la prueba aumentada de raíz unitaria de Dickey-Fuller (1976)<sup>14</sup> permiten concluir el carácter  $I(0)$  de  $r_t^m$ . así mismo, la prueba de estacionariedad KPSS (1992)<sup>15</sup> permite concluir el carácter estacionario  $r_t^m$ . Por lo tanto la serie no requiere la aplicación del operador de primeras diferencias. Sin embargo, teniendo en cuenta la dinámica estacional observada en la serie (gráfico 2.1) y en las funciones de autocorrelación (gráfico 3.1) y dada la necesidad de obtener residuales ruido blanco y normales, se aplica una diferencia estacional de orden 12<sup>16</sup>. Con la serie resultante se llega a una identificación y estimación de un modelo ARIMA(1,0,1)(0,1,0) con intervención, el cual tiene un parámetro autorregresivo

<sup>14</sup>El estadístico de prueba correspondiente al modelo con intercepto arroja un valor de  $-3.1270$  y el valor crítico correspondiente a un nivel de significancia de 0.05 es de  $-2.8755$ . Véase Fuller (1976) y MacKinnon (1991).

<sup>15</sup>Para probar la hipótesis de que  $r_t^m$  es estacionaria se lleva a cabo el contraste bajo el modelo que no incluye tendencia lineal. A partir de este modelo se obtiene un valor de la estadística de prueba  $\eta_\mu$  de 0.13036 (con una selección del parámetro de truncamiento de  $l(8)$ ) y un valor crítico tabulado al 5% de 0.463. Con este resultado se llega a la conclusión de no rechazar la hipótesis nula de estacionariedad.

<sup>16</sup>Al llevar a cabo la prueba de raíz unitaria estacional de Franses y Hobijin (1997), para datos mensuales bajo la especificación con dummies estacionales, se tiene a una decisión de borde para rechazar la hipótesis de nula de que  $r_t^m$  es  $I(1,1)$  a frecuencias regular y estacional a un nivel de significancia de 1%. En efecto, el estadístico de prueba es de  $-7.93$  y el valor crítico es de  $-6.97$ . Sin embargo, la no diferenciación estacional conduce a modelos con especificaciones menos parsimoniosas y de mayor varianza que el presentado en la ecuación (4.1).

en el primer rezago, uno de medias móviles en el rezago 12 y tres variables *dummies* de intervención que afectan a las primeras diferencias estacionales de variable y permiten recoger el efecto de valores extremos de la serie garantizando residuales ruido blanco y normales. El modelo estimado tiene la siguiente especificación en notación Box-Jenkins

$$(1 - L^{12})r_t^m = \frac{(1 + \theta_1 L^{12})}{(1 + \phi L)}\epsilon_t + \varphi_1 D_{1t} + \varphi_2 D_{2t} + \varphi_3 D_{3t} \quad (4.1)$$

Las variables dummy que permiten capturar las observaciones extremas del período de mayor volatilidad de la serie se definen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D_{1t} &= \begin{cases} 1, & \text{si } t = 08/85, 07/86, 02/95 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}, \\ D_{2t} &= \begin{cases} 1, & \text{si } t = 06/85, 02/86, 06/87, 03/88, 07/88 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}, \\ D_{3t} &= \begin{cases} 1, & \text{si } t = 06/86 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En el cuadro 1 se presentan los valores estimados<sup>17</sup> de los parámetros del modelo descrito por la ecuación (4.1) y sus correspondientes errores estándar. En cuanto a la validación del modelo, en el cuadro 2 se muestran los resultados de la prueba de de residuales ruido blanco de Ljung-Box. Como puede apreciarse no hay evidencia de autocorrelación.

Cuadro 1.

Parámetros estimados del modelo  
ARIMA(1,0,1)(0,1,0) con intervención

Parámetro	Estimador	Error estándar
$\phi_1$	0.5787029	0.0551324
$\theta_1$	-0.6300501	0.0572389
$\varphi_1$	0.0133347	0.0022283
$\varphi_2$	-0.0136613	0.0018148
$\varphi_3$	0.0346877	0.0041484

Fuente: Banco de la República, cálculos: el autor.

<sup>17</sup>La estimación del modelo ARIMA con intervención se hizo por medio del método de de Mínimos Cuadrados no Lineales utilizando el software RATS, versión 4.31

Cuadro 2

## Prueba de residuales ruido blanco

Rezagos	Estadística de Ljung-Box	Nivel de significancia
$Q(6)$	2.3610	0.8837
$Q(12)$	4.2384	0.9787
$Q(18)$	7.1852	0.9885
$Q(24)$	12.0014	0.9799
$Q(30)$	30.5284	0.4388
$Q(36)$	34.6008	0.5351
$Q(42)$	38.4113	0.6293
$Q(48)$	51.1335	0.6293

Fuente: Banco de la República, cálculos: el autor.

Bajo la hipótesis nula de que los residuales del modelo estimado siguen una distribución normal con media cero y desviación estándar de 0.005, la estadística de prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov<sup>18</sup> adopta un valor 0.062, con un valor crítico de 0.071 tabulado para un tamaño de muestra de 201 observaciones a un nivel de significancia estadística de 0.01. Es decir, al 1% no existe evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad de los residuos. Un resultado similar se obtiene a través del contraste de normalidad de Doornik-Jansen (1994), por medio del cual no se rechaza la hipótesis nula de normalidad, teniendo en cuenta que el valor de la estadística de prueba es 2.24 y el nivel de significancia marginal es 0.33.

Una vez verificado el cumplimiento de los supuestos fundamentales de los métodos de modelación ARIMA se procede a implementar la técnica descrita de simulación de Monte Carlo. Utilizando las 10,000 replicas de  $r_t^m$ , con horizonte de 120 meses<sup>19</sup>, se obtiene una serie promedio simulada ( $r_{s,t}^m$ ) y su valor medio que constituye, según la ecuación (3.8), el equivalente de largo plazo o tasa de interés de referencia ( $\overline{r_s^m}$ ), la cual adopta un valor de 0.55% efectiva mensual, calculada a partir de

<sup>18</sup>Detalles sobre la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov pueden consultarse en Massey, F. J. (1951), Lilliefors, Hubert W. (1967), Judge, et al (1988) y Deshpande, J.V., et al (1995).

<sup>19</sup>Se elige un tamaño de muestra  $T = 120$  meses debido a que el objetivo es estimar una tasa de interés real de largo plazo, diez años como mínimo, que permita cubrir más de el doble de tiempo que se toma la variable para generar un ciclo de 48 meses, de tal manera que se disponga de un número suficiente de observaciones para un mecanismo de cobertura renovable después de 4 años de funcionamiento.

$$\overline{r_s^m} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{s,t}^m = 0.55\% \quad (4.3)$$

el equivalente efectivo anual corresponde a

$$\overline{r_s^a} = [(1 + \overline{r_s^m})^{12}] - 1 = 6.81\% \quad (4.4)$$

A partir del resultado expresado en la ecuación (4.3) y bajo un mecanismo de cobertura tipo SWAP, cuando  $i_t^m$  exceda a  $\Delta UVR_t^m$  más 0.55%, el FRECH compensa a los BECH dicha diferencia desembolsando el pago respectivo descrito por la ecuación (3.3). En caso contrario los BECH desembolsan al FRECH el pago correspondiente.

Teniendo en cuenta que el resultado expresado en las ecuaciones (4.3) y (4.4) corresponde a una estimación del equivalente de largo plazo de la tasa de interés real y por lo tanto es el elemento clave para la fijación de las condiciones de funcionamiento de la operación de cobertura, se considera conveniente comparar este resultado con el que arroja la estimación del parámetro de tasa de interés real de equilibrio de largo plazo de un modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck para la tasa de interés real.

## 4.2. Modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck.

El punto de partida en esta estrategia de estimación de la tasa de referencia o parámetro de corte es suponer que la tasa de interés real sigue un proceso de difusión estacionario descrito por

$$dr^m = -\lambda(r - \overline{r_s^m})dt + \sigma dW \quad (4.5)$$

dónde,  $\lambda \geq 0$  es la velocidad de convergencia o revertibilidad a la media,  $r^m(0) = r_0^m$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $dr$  es el crecimiento de la diferencia entre  $DTF$  y  $\Delta UVR$ ,  $\sigma$  es la volatilidad del crecimiento de  $r^m$ ,  $dW$  un proceso estocástico  $iid \sim N(0, 1)$  y  $\overline{r_s^m}$  el parámetro que representa la tasa de interés real promedio de largo plazo. La ecuación estocástica en diferencias (4.5), que corresponde a la versión continua de un proceso estacionario AR(1) Gaussiano<sup>20</sup>, describe el

---

<sup>20</sup>Campbell, Lo y McKinlay (1997) señalan que un proceso estocástico con estas características se denomina Ornstein-Uhlenbeck y a su vez corresponde a una categoría de modelos tipo movimiento Browniano. Otra ilustración acerca de los modelos de Movimiento Browniano tipo Ornstein-Uhlenbeck se encuentra en Avinash Dixit (1983).

crecimiento de la tasa de interés real como un proceso estocástico estacionario de media cero. La ecuación (4.5) es la misma ecuación 17 del modelo de equilibrio general intertemporal de precios de activos de Cox, Ingersoll y Ross (1985), a partir de la cual se describe la dinámica de la tasa de interés real como un proceso de difusión con drift  $-\lambda(r - \overline{r_s^m})$  y varianza  $\sigma^2$ .

El modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) constituye una descripción intertemporal (en tiempo continuo) de una economía competitiva. Las características principales que gobiernan la determinación de la tasa de interés real de equilibrio son: Hay un único bien y todos los valores están medidos en unidades de dicho bien. Se tiene un conjunto de oportunidades de producción compuesto por  $n$  actividades lineales, un vector  $\alpha$  de tasas de retorno esperadas sobre estas actividades con matriz de varianza-covarianza  $GG'$ , los componentes de  $\alpha$  y  $G$  son funciones de un vector  $Y$  de dimensiones  $(k \times 1)$  el cual representa el estado de la tecnología que cambia aleatoriamente en el tiempo con vector de cambios esperados  $\mu$  y matriz de varianza-covarianza  $SS'$ . Se supone que la economía se compone de individuos idénticos, cada uno de los cuales busca maximizar una función objetivo de consumo de la forma

$$E \int_t^{t'} U(C(s), Y(s), s) ds \quad (4.6)$$

dónde,  $C(s)$  es el flujo de consumo en el momento  $s$  y  $U$  una función de utilidad tipo Von Neuman-Morgenstern y  $t'$  el tiempo terminal. Se define  $C^*$  como el consumo óptimo de cada individuo,  $a^*$  la proporción de la riqueza  $W$  a ser invertida en cada proceso productivo y  $b^*$  la proporción de la riqueza invertida en cada pasivo contingente, la riqueza restante es invertida en préstamos o deudas a una tasa de interés  $r$ . Se sigue una especificación de la función de utilidad con aversión al riesgo relativa constante

$$U(C(s), s) = e^{-\rho s} \left[ \frac{C(s)^\gamma - 1}{\gamma} \right] \quad (4.7)$$

con  $\rho$  un factor de descuento constante, la función de utilidad indirecta  $J$  determinada por la solución al problema de maximización es de la forma

$$J(W, Y, t) = f(Y, t)U(W, t) + g(Y, t) \quad (4.8)$$

que permite tener una expresión para  $a^*$  tal como:

$$a^* = (GG')^{-1} \alpha + \left( \frac{1 - 1'(GG')^{-1} \alpha}{1'(GG')^{-1} 1} \right) (GG')^{-1} 1 \quad (4.9)$$

con  $1'(GG')^{-1} \alpha > 1$ . Se supone que el desarrollo de la variable de estado  $Y$  es determinado por la ecuación estocástica diferencial

$$dY(t) = [\xi Y + \zeta] dt + v\sqrt{Y} dw(t) \quad (4.10)$$

dónde,  $\xi$  y  $\zeta$  son constantes,  $\zeta \geq 0$  y  $v$  es un vector en el que cada una de sus componentes es la constante  $v$ . Una vez especificadas las ecuaciones (4.5) a la (4.10), los autores incorporan la siguiente notación:  $\alpha \equiv \hat{\alpha}Y$ ,  $GG' \equiv \Omega Y$  y  $GS' \equiv \Sigma Y$ , los elementos de  $\hat{\alpha}$ ,  $\Omega$  y  $\Sigma$  son constantes. Con los supuestos anteriores, la tasa de interés real de equilibrio se puede expresar como

$$r(Y) = \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right) Y \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) se supone que la tasa de interés sigue un proceso de difusión con un drift dado por

$$\begin{aligned} \text{drift}(r) &= \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right) (\xi Y + \zeta) \equiv \kappa(\theta - r), \\ \text{var}(r) &= \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right)^2 v v' Y \equiv \sigma^2 r \end{aligned} \quad (4.12)$$

dónde,  $\kappa$ ,  $\theta$  y  $\sigma^2$  son constantes con  $\kappa\theta \geq 0$  y  $\sigma^2 > 0$ .

Según los autores, debido a que cada componente de  $w(t)$  es un proceso de Wiener entonces es posible especificar el siguiente proceso:

$$\sigma\sqrt{r}dz_1(t) \equiv v\sqrt{Y}dw(t) \quad (4.13)$$

A partir de (4.13) se define la dinámica de la tasa de interés real como

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r}dz_1 \quad (4.14)$$

Para  $\kappa$  y  $\theta > 0$  la ecuación (4.14) corresponde a un proceso autorregresivo continuo de primer orden y es equivalente a la ecuación (4.5) dónde  $r^m = r$ ,  $-\lambda = \kappa$ ,  $\bar{r}_s^m = \theta$  y  $\sigma dw = \sigma\sqrt{r}dz_1$ .

Así, el modelo Ornstein-Uhlenbeck (4.5) corresponde a una especificación de tasa de interés real de equilibrio revertible a la media cuyo comportamiento presenta las siguientes características: i) si la tasa llega a adoptar el valor de cero luego puede ser positiva, ii) la varianza absoluta de la tasa de interés aumenta cuando la tasa se incrementa y iii) existe una distribución de estado estable para la tasa de interés.

Según Ramamurtie y Ulman (1996), modelar la tasa de interés nominal a partir de una ecuación estocástica en diferencias tal como (4.14) presenta algunas dificultades tales como la imposibilidad de no garantizar la condición de nonegatividad de la variable dependiente. Para evitar este problema centran su atención en modelos denominados *Mean-Reverting Square Root (MRSR)* y *Mean-Reverting Logarithmic (MRSL)*. Adicionalmente señalan que, de un lado, este modelo no describe completamente un (*MRSR*) debido a que la misma ecuación estocástica en diferencias (*SDE*) genera dos o más funciones de densidad transicional con propiedades radicalmente diferentes y, de otro lado, un par de funciones de *drift* y *difusión* de una (*SDE*) no definen una única densidad transicional debido a que los parámetros infinitesimales asociados fallan en la determinación del comportamiento de la tasa de interés cuando es cercana a cero.

Teniendo en cuenta que estas dificultades generan graves problemas para la estimación por máxima verosimilitud por medio de métodos numéricos de optimización, los autores proponen un método alternativo que consiste en calcular el valor máximo de la función de verosimilitud a partir de las derivadas analíticas de dicha función que ellos mismos desarrollan.

Campbell, Lo y McKinlay (1997) ilustran la aplicación del Método Generalizado de los Momentos (GMM) como alternativa para llevar a cabo la estimación de los parámetros de la ecuación (4.14). Los autores presentan las condiciones de momentos necesarias desarrolladas por Hansen y Scheinkman (1995) y a partir de la solución a una ecuación diferencial lineal de primer orden llegan a una expresión de forma cerrada que permite la aplicación de dicho método. Estos autores analizan las propiedades del estimador GMM y concluyen que es el único consistente y computacionalmente factible.

Finalmente, para llevar a cabo la estimación de los parámetros de (4.14), en este trabajo se utiliza el método de los Momentos Simulados, propuesto por Lee e Ingram (1991), que corresponde a un caso particular de la metodología GMM propuesta por Hansen (1982) y tiene excelentes propiedades en modelos (*SDE*) en los que no se tiene una expresión de forma cerrada para las variables endógenas.

El método de los momentos simulados consiste en encontrar los parámetros

que garantizan la mayor similitud entre la contraparte de los momentos muestrales de la serie observada  $(x_t)$  y de los momentos de la serie simulada  $(y_j)_j$ , para lo cual se define un vector  $(s \times 1)$  de estadísticas o momentos calculados como un promedio temporal de una función de los datos observados  $H_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(x_t)$  y un vector  $(s \times 1)$  de estadísticas calculadas utilizando datos simulados a partir del modelo económico  $H_N(y_j(\beta)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(y_j(\beta))$ , donde  $\beta$  es el vector de parámetros que caracterizan a 4.14  $(\kappa, \theta$  y  $\sigma)$ . Se supone ergodicidad en los procesos  $x_t$  y  $y_j(\beta)$  permitiendo definir un estimador consistente y asintóticamente normal  $\widehat{\beta}_{TN}$  tal que minimice la suma ponderada de la diferencia cuadrática entre  $H_T(x)$  y  $H_N(y_j(\beta))$ . Así, dada una matriz  $(s \times s)$  simétrica aleatoria de ponderaciones  $W_T$ , el estimador  $\widehat{\beta}_{TN}$  se define a partir de

$$\arg \min_{\beta} [H_T(x) - H_N(y_j(\beta))] W_T [H_T(x) - H_N(y_j(\beta))] \quad (4.15)$$

También se definen el entero  $n = N/T > 1$  y las funciones  $g_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ h(x_t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(y_{k,t}(\beta)) \right]$  con  $k = 1, \dots, n$  y  $t = 1, \dots, T$ . Con estas funciones quedan indexadas las simulaciones de tal forma que  $y_{k,t}(\beta) = y_{n(t-1)+k}(\beta)$ . Bajo el supuesto de que  $n > 1$  se requiere que el tamaño de muestra de la serie simulada sea mayor que el de la serie observada. Los autores señalan que el valor de la matriz de varianza-covarianza asintótica de  $\widehat{\beta}_{TN}$  depende de la elección de la matriz de ponderaciones  $W$  y para obtener un estimador cuya matriz de varianza-covarianza sea lo más pequeña posible recomiendan una elección de  $W = [(1 + 1/n)\Omega]^{-1}$  para lo cual definen un estimador consistente de  $\Omega$  dado por:

$$\widehat{\Omega} = \left[ \sum_{i=-p+1}^{p-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1+i}^T u_{t+p} u'_{t+p-i} \right] \quad (4.16)$$

dónde  $u_{t-p} = h(x_{t+p}) - (1/T) \sum_{t=1}^T h(x_{t+p})$  y  $p$  es el número de autocovarianzas distintas de cero en  $h(x_t)$ .

Los momentos seleccionados para realizar la estimación de los parámetros de la ecuación (4.14) fueron la media y la varianza, tanto del nivel de la serie modelada como de su primera diferencia. En el proceso de estimación se utilizaron datos

observados de la diferencia multiplicativa entre DTF y crecimiento de UVR ( $r_t^m$ ) y se llevaron a cabo 5.000 réplicas del modelo descrito por (4.5). El cuadro 3 muestra los resultados de la estimación y de la estadística de prueba de bondad de ajuste propuesta por los autores cuya hipótesis nula se refiere a la igualdad entre los momentos observados y simulados y sigue una distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad.

Cuadro 3  
Parámetros estimados del modelo  
Ornstein-Uhlenbeck

Parámetro	Estimador	Error estándar
$k = -\lambda$	0.130980	0.039850
$\sigma\sqrt{r} = \sigma$	0.0006157	0.000409
$\theta = \overline{r_s^m}$	0.005512	0.000361
$\chi_1^2$	0.005363	Nivel de Signif: 0.9416

Como puede apreciarse, el valor estimado de la tasa de interés real promedio de equilibrio de largo plazo ( $\overline{r_s^m}$ ), a partir del modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck, es de 0.5512% equivalente a 6.82% en términos efectivos anuales, el cual resulta bastante similar al estimador obtenido por medio de simulaciones de Monte Carlo a partir del modelo ARIMA con intervención descrito por la ecuación (4.1). El parámetro estimado de revertibilidad a la media de 0.131660 y la desviación estándar o volatilidad es de 0.000625. El valor de la estadística  $\chi_1^2$  y el nivel de significancia marginal indican un buen ajuste.

El nuevo resultado de la tasa de interés de referencia  $\overline{r^m} = 0.5512\%$  indica que la selección del parámetro de corte de la operación de cobertura dada en las ecuaciones (4.3) y (4.4) podría ser una buena aproximación a la tasa de interés real promedio de equilibrio de largo plazo.

Teniendo en cuenta los aspectos contemplados en el punto 3, una vez estimado el parámetro de corte ( $\overline{r_s^m}$ ) el mecanismo de cobertura resulta sencillo, garantiza que los recursos iniciales del FRECH se mantengan intactos al final de la operación y asegura simetría entre los pagos y cobros del FRECH a los BECH. Sin embargo, si al momento de iniciar la operación de cobertura la tasa de interés real presenta alguna persistencia en ubicarse por debajo del equivalente real de largo plazo  $\overline{r_s^m}$  y además si los BECH tienen la percepción de que dicha persistencia puede prolongarse durante algunos meses, el inicio de la operación de cobertura se puede ver dilatado hasta que los niveles de la tasa de interés real garanticen que las entidades no ingresen haciendo aportes.

En estas circunstancias, una menor tasa de referencia disminuye los incentivos de las entidades para esperar que las condiciones de tasa de interés real sean más favorables para ingresar al FRECH. Así, si se utiliza una parte de los recursos asignados al FRECH de tal forma que se distribuya entre las entidades que ingresan al mecanismo, es posible determinar una nueva tasa de referencia  $\overline{r^{m*}}$ , menor que  $\overline{r_s^m}$ , la cual garantice la distribución de dicha parte de los ingresos iniciales del FRECH durante el período de operación.

## 5. Definición de la tasa de referencia $\overline{r^{m*}}$ no neutral.

En esta sección se describe la deducción de la nueva tasa de referencia  $\overline{r^{m*}}$  a partir del valor estimado de  $\overline{r_s^m}$ . Como se mencionó anteriormente, el objetivo es determinar un nuevo parámetro de corte de tal forma que el FRECH funcione cómo un mecanismo de cobertura con tasa de referencia no neutral, en el cual se distribuye una parte de los ingresos iniciales entre las entidades durante el período de operación.

Si la determinación de la nueva tasa de interés de referencia  $\overline{r^{m*}}$  se lleva a cabo con base en un horizonte de  $T = 120$  meses<sup>21</sup> y  $\overline{r^{m*}}$  garantiza que durante este período se distribuya la totalidad de los recursos iniciales del FRECH entre las entidades, entonces un mecanismo de cobertura definido con base en dicha tasa y una duración, por ejemplo de 96 meses (2 veces la del ciclo de  $r_t^{a*}$ ), distribuye efectivamente entre los BECH una proporción de los recursos iniciales.

El objetivo consiste en encontrar  $\overline{r^{m*}}$  sujeta a que  $I_T = 0$ , dados los ingresos iniciales ( $I_0$ ), la trayectoria de  $r_{s,t}^m$  y las definiciones presentadas en las ecuaciones (3.3) a la (3.6).

Retomando la ecuación (3.6) y sustituyendo  $\overline{r^m}$  por  $\overline{r^{m*}}$  y  $r_t^m$  por  $r_{s,t}^m$ , se tiene:

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^m}{1 + \overline{r^{m*}}} \right) - 1 \right] \quad (5.1)$$

---

<sup>21</sup>La determinación de  $\overline{r_s^{m*}}$  con base en un horizonte de  $T = 120$  períodos mantiene la consistencia con el concepto de largo plazo que se considera en este trabajo y además evita incurrir en sesgos de selección de muestra al tener que eliminar observaciones de la serie simulada  $r_{s,t}^m$  con el fin de asegurar, en dicha determinación, una duración del mecanismo igual a un múltiplo entero de 48 meses.

garantizar que  $I_T = 0$  en (5.1) equivale a plantear que

$$\sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^m}{1 + \overline{r^{m*}}} \right) - 1 \right] = I_0 \quad (5.2)$$

Resolviendo (5.2) para  $\overline{r^{m*}}$  se tiene que

$$\frac{1}{1 + \overline{r^{m*}}} \delta C \left[ \sum_{t=1}^T (1 + r_{s,t}^m) \right] - T \delta C = I_0 \quad (5.3)$$

o equivalentemente

$$\overline{r^{m*}} = \frac{\delta C \left( \sum_{t=1}^T r_{s,t}^m \right) - I_0}{T \delta C + I_0} \quad (5.4)$$

En la ecuación (5.4) se observa que la nueva tasa de interés de referencia, a diferencia de la inicial, es función del valor de la cartera inscrita en el mecanismo, por lo tanto, para cada monto resulta una tasa de interés de referencia diferente que distribuye los recursos iniciales otorgados por la Ley al FRECH. Teniendo en cuenta que los recursos iniciales se estiman en un valor aproximado de \$312.985 millones<sup>22</sup>, con un horizonte  $T$  de 120 períodos y un monto de cartera hipotecaria de \$12'838.956 billones<sup>23</sup>. En el cuadro 4 se presentan los valores de  $\overline{r^{m*}}$  calculados a partir de la ecuación (5.4) para cada porcentaje de cartera inscrito en el mecanismo, pero expresados en términos efectivos anuales  $\overline{r^{a*}}$ .

---

<sup>22</sup>El saldo estimado por el Departamento de Líneas Externas y Cartera del Banco de la República para febrero de 2003 es de \$362,985 millones aproximadamente. Sin embargo, se descuentan \$50,000 millones que posiblemente serán destinados a la operación SWAP de cobertura contra el riesgo de tasa de inflación.

<sup>23</sup>Corresponde al valor del saldo de cartera hipotecaria bruta a diciembre de 2000, obtenido con base en los Indicadores Gerenciales de la Superintendencia Bancaria de Colombia.

Cuadro 4

Tasas de interés de referencia  $\overline{r^{a*}}$  no neutrales

Porcentaje de cartera inscrito	Disminución en tasa de referencia	Nueva tasa de referencia
100%	0,26%	6,55%
80%	0,33%	6,48%
60%	0,43%	6,38%
50%	0,52%	6,29%
40%	0,65%	6,16%
20%	1,29%	5,52%
10%	2,57%	4,24%

Fuente: Banco de la República, cálculos: el autor.

Como puede apreciarse en el cuadro 4, con 100% de cartera inscrita, la nueva tasa de corte (6,55%), es muy similar a la propuesta inicialmente (6.81%). Sin embargo, la reducción marginal en la nueva tasa de corte es creciente a medida que el porcentaje de cartera inscrito disminuye, alcanzando un valor máximo de 2,57% para el caso de 10% de cartera inscrita. Si se supone que las entidades hipotecarias inscriben 40% del valor de la cartera hipotecaria a diciembre del 2000 (\$5'135.582 billones aproximadamente), la tasa de corte es 6.16% aproximadamente.

## 6. Determinación del sistema de franjas de tasa de interés real a partir de la tasa de referencia no neutral $\overline{r^{m*}}$

Otra alternativa de funcionamiento que puede facilitar aún más el ingreso de las entidades al mecanismo, en situaciones de tasa de interés real observada inferior a la de la tasa de referencia, consiste en que la operación de cobertura compense situaciones extremas de la diferencia entre  $i_t^m$  y la  $\Delta UVR_t^m$ . De esta forma se establece un régimen de franjas de tasa de interés real tal que el mecanismo compensa a los BECH si dicha diferencia se sitúa por encima del techo de la franja ( $r_{s,t}^m > \overline{T}$ ) y cuando  $r_{s,t}^m$  sea menor que el piso de la franja ( $r_{s,t}^m < \overline{P}$ ) las entidades aportan al FRECH. La metodología del sistema de franjas de tasa de interés considera la distribución de una proporción de los recursos iniciales del FRECH.

El mecanismo de cobertura, a partir de un régimen de franja de tasa de interés, establece un sistema de pagos de la siguiente forma

$$p_t = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^m}{1+\bar{T}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m > \bar{T} \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^m}{1+\bar{P}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m < \bar{P} \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (6.1)$$

El valor del pago en la ecuación (6.1) es cero cuando  $\bar{P} \leq r_{s,t}^m \leq \bar{T}$ , es decir, cuando en dicho intervalo se cumple que  $r_{s,t}^m = \bar{T}$  ó  $r_{s,t}^m = \bar{P}$ . De esta forma es posible re expresar (6.1) mediante:

$$p_t = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^{m,p}}{1+\bar{T}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m > \bar{T} \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^{m,a}}{1+\bar{P}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m < \bar{P} \end{cases} \quad (6.2)$$

dónde:

$$r_{s,t}^{m,p} = \begin{cases} r_{s,t}^m, & \text{si } r_{s,t}^m > \bar{T} \\ \bar{T}, & \text{si } r_{s,t}^m \leq \bar{T} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$r_{s,t}^{m,a} = \begin{cases} r_{s,t}^m, & \text{si } r_{s,t}^m < \bar{P} \\ \bar{P}, & \text{si } r_{s,t}^m \geq \bar{P} \end{cases} \quad (6.4)$$

Ahora, retomando la ecuación (3.6) y sustituyendo en ésta la definición de  $P_t$  dada en la ecuación (6.1), se tiene que los ingresos finales del mecanismo de cobertura para el sistema de franjas se pueden calcular de la siguiente forma:

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1+r_{s,t}^{m,p}}{1+\bar{T}} \right) - 1 \right] - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1+r_{s,t}^{m,a}}{1+\bar{P}} \right) - 1 \right] \quad (6.5)$$

El objetivo ahora consiste en determinar un piso( $\bar{P}$ ) tal que los ingresos finales del mecanismo  $I_T$  sean cero. Sustituyendo en (6.5)  $I_T$  por cero y resolviendo para  $\bar{P}$  se tiene

$$\bar{P} = \left\{ \left[ \left[ 2T + \frac{I_0}{\delta C} - \frac{\sum_{t=1}^T (1+r_{s,t}^{m,p})}{1+\bar{T}} \right]^{-1} \times \sum_{t=1}^T (1+r_{s,t}^{m,a}) \right\} - 1 \quad (6.6)$$

Si se fija el techo de la franja exógenamente adicionando unos puntos básicos a la tasa de referencia no neutral  $\bar{r}^{m*}$  se tiene que

$$\bar{T} = \bar{r}^{m*} + PBS \quad (6.7)$$

Sustituyendo el valor de  $\bar{T}$  obtenido a partir de (6.7) en la ecuación (6.3) es posible calcular  $r_{s,t}^{m,p}$ . Para determinar los valores de  $r_{s,t}^{m,a}$  según la ecuación (6.4) es necesario conocer  $\bar{P}$ , lo cual plantea un problema de simultaneidad entre  $\bar{P}$  y  $r_{s,t}^{m,a}$  en la ecuación (6.6). Sin embargo, es posible determinar el valor de  $\bar{P}$  por medio de un proceso de aproximación mediante el siguiente algoritmo.

En la primera iteración se determina exógenamente un piso provisional a partir de:

$$\bar{P} = \bar{r}^{m*} - PBS \quad (6.8)$$

Del valor resultante de  $\bar{P}$  en (6.8) se obtiene un valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$  por medio de (6.3) y un valor provisional de  $I_T$  por medio de (6.5), tal que si éste es mayor que cero, a partir del valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$ , se recalcula el valor de  $\bar{P}$  por medio de la ecuación (6.6). En la segunda iteración, con el nuevo valor  $\bar{P}$  se determina un nuevo valor de  $r_{s,t}^{m,a}$ , a partir del cual se obtiene un nuevo valor de  $I_T$ , tal que si es mayor que cero, a partir del valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$ , se vuelve a recalcular el valor de  $\bar{P}$ . Este proceso iterativo se repite hasta obtener un valor de convergencia de  $I_T$  tan cercano a cero como se quiera.

Si se tiene en cuenta que las ecuaciones (5.4) (6.5) y (6.6) definen la tasa de interés de referencia  $\bar{r}^{m*}$ , el Ingreso final  $I_T$  y el piso  $\bar{P}$  en función del porcentaje de cartera inscrita en el mecanismo, el techo y el piso de la franja, resultantes del algoritmo descrito, quedan igualmente definidas en función de dicho valor de cartera inscrita. Por lo tanto, para cada monto resulta una franja diferente que distribuye los recursos iniciales del FRECH.

Teniendo en cuenta el valor de los recursos iniciales del FRECH, el horizonte  $T$  del 20 períodos, el valor total de la cartera hipotecaria, los valores de  $\bar{r}^{m*}$  presentados en el cuadro 4 y los diferentes valores de  $PBS$  (expresados en términos efectivos anuales: 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350), en el cuadro 5 se presentan los resultados del sistema de franjas para cada porcentaje de cartera inscrita:

Cuadro 5  
Cobertura por medio de un sistema de franjas de tasa de interés real  
con cero ingresos totales al final de la operación

Porcentaje de Cartera inscrito	+0 PBS			+50 PBS			+100 PBS		
	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso
100%	6.55%	6.55%	6.55%	7.05%	6.50%	5.95%	7.55%	6.45%	5.35%
80%	6.48%	6.48%	6.48%	6.98%	6.43%	5.88%	7.48%	6.38%	5.28%
60%	6.38%	6.38%	6.38%	6.88%	6.33%	5.77%	7.38%	6.27%	5.15%
50%	6.29%	6.29%	6.29%	6.79%	6.23%	5.67%	7.29%	6.17%	5.05%
40%	6.16%	6.16%	6.16%	6.66%	6.10%	5.53%	7.16%	6.03%	4.90%
20%	5.52%	5.52%	5.52%	6.02%	5.43%	4.83%	6.52%	5.34%	4.15%
10%	4.24%	4.24%	4.24%	4.74%	4.09%	3.44%	5.24%	3.93%	2.62%
Porcentaje de Cartera inscrito	+150 PBS			+200 PBS			+250 PBS		
	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso
100%	8.05%	6.41%	4.76%	8.55%	6.36%	4.16%	9.05%	6.31%	3.56%
80%	7.98%	6.33%	4.68%	8.48%	6.28%	4.07%	8.98%	6.23%	3.47%
60%	7.88%	6.21%	4.54%	8.38%	6.16%	3.93%	8.88%	6.10%	3.31%
50%	7.79%	6.11%	4.43%	8.29%	6.05%	3.81%	8.79%	5.99%	3.19%
40%	7.66%	5.97%	4.27%	8.16%	5.90%	3.64%	8.66%	5.83%	3.00%
20%	7.02%	5.24%	3.45%	7.52%	5.14%	2.75%	8.02%	5.03%	2.04%
10%	5.74%	3.76%	1.78%	6.24%	3.58%	0.92%	6.74%	3.38%	0.03%
Porcentaje de Cartera inscrito	+300 PBS			+350 PBS			+400 PBS		
	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso	Techo	Punto medio	Piso
100%	9.55%	6.26%	2.96%	10.05%	6.21%	2.37%	10.55%	6.16%	1.77%
80%	9.48%	6.17%	2.86%	9.98%	6.12%	2.26%	10.48%	6.07%	1.66%
60%	9.38%	6.04%	2.70%	9.88%	5.98%	2.08%	10.38%	5.92%	1.46%
50%	9.29%	5.93%	2.56%	9.79%	5.86%	1.93%	10.29%	5.80%	1.30%
40%	9.16%	5.76%	2.36%	9.66%	5.69%	1.71%	10.16%	5.62%	1.07%
20%	8.52%	4.92%	1.32%	9.02%	4.80%	0.59%	9.52%	4.68%	-0.16%
10%	7.24%	3.17%	-0.90%	7.74%	2.94%	-1.86%	8.24%	2.68%	-2.88%

Como puede apreciarse en el cuadro 5, si se supone que las entidades hipotecarias inscriben el 40% del valor de la cartera y con una amplitud de franja de 150 puntos básicos por encima de  $\overline{r^{m*}}$ , el techo adopta un valor de 7.66%, en tanto que el piso que asegura cero ingresos al final es de 4.27%. Así, cuando  $r_{s,t}^m > 7.66\%$  se genera un pago del FRECH a los BECH compensando la respectiva diferencia y cuando  $r_{s,t}^m < 4.27\%$  los BECH aportan al FRECH.

El sistema de franjas de tasa de interés real presenta tres características principales: La primera consiste en que a medida que disminuye el porcentaje de cartera inscrita se observa una reducción del piso y del techo, la segunda característica se refiere al hecho de que la amplitud de la franja se incrementa marginalmente cuando se disminuye dicho porcentaje de cartera y la tercera característica consiste es la asimetría negativa observada con respecto a  $\overline{r^m}$  y a  $\overline{r^{m*}}$ , es decir, el punto medio de la franja se reduce en la medida en que aumenta la amplitud de la franja. Dicha asimetría es inducida por la determinación del piso que distribuye los recursos del FRECH.

La decisión acerca de la amplitud óptima de la franja depende de tres aspectos, fundamentales: El primero es el interés por incentivar la entrada de los BECH al mecanismo en condiciones de tasas de interés real históricamente bajas (con un piso lo suficientemente bajo para lograr dicho objetivo). El segundo consiste en que el FRECH cuente con recursos suficientes para que el mecanismo tenga una duración igual a la del ciclo de la tasa de interés real. El tercer aspecto está determinado por el porcentaje de riesgo que se desea cubrir.

Este último aspecto plantea la necesidad de calcular la estructura probabilística de la tasa de interés real respecto al sistema de franjas y de esta forma tener una aproximación al análisis de riesgo de tasa. Bajo el supuesto de que la tasa de interés real  $r_t^m$  sigue una distribución normal con media  $\bar{r}_s^m$  y desviación estándar<sup>24</sup>  $\sigma_{r_s^m}$  es posible estandarizar los techos y los pisos de las franjas y utilizar la función de distribución acumulativa de la distribución Normal Estándar para calcular las probabilidades de que la tasa se ubique por encima del techo, por debajo del piso y al interior de la franja. El cálculo se determina de la siguiente forma<sup>25</sup>.

$$\Pr(r_t^m < \bar{P}) = F_{\bar{P}}(\bar{P}; \bar{r}_s^m, \sigma_{r_s^m}) = \Pr(Z < \bar{P}^*) = F_Z(\bar{P}^*; 0, 1) \quad (6.9)$$

dónde  $F_{\bar{P}}(\bar{P}; \bar{r}_s^m, \sigma_{r_s^m})$  corresponde a la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria  $N \sim (\bar{r}_s^m, \sigma_{r_s^m})$ ,  $Z$  es una variable aleatoria  $N \sim (0, 1)$ ,  $\bar{P}^* = \frac{\bar{P} - \bar{r}_s^m}{\sigma_{r_s^m}}$  y  $F_Z(\bar{P}^*; 0, 1)$  la función de distribución acumulativa de  $Z$ .

Los valores de  $F_Z(\bar{P}^*; 0, 1)$  se obtienen a partir de los valores tabulados para la función de distribución acumulativa de la función de probabilidad normal estándar definida por

$$F_Z(\bar{P}^*; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{P}^*} \exp\left[\frac{-t^2}{2}\right] dt \quad (6.10)$$

---

<sup>24</sup>Con un valor de  $\bar{r}_s^m$  de 0.005504247 y de  $\sigma_{r_s^m} = 0.009494154$ , la estadística de prueba de Kolmogorov-Smirnov es de 0.068 y el valor crítico, para un tamaño de muestra de  $T = 224$ , a un nivel de significancia de 0.05 es de 0.091 por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula de que la serie  $r_t^m \sim N(\bar{r}_s^m, \sigma_{r_s^m})$

<sup>25</sup>Véase Canavos (1988) y Mood, Graybill y Boes (1974)

De forma análoga se tiene que

$$\Pr \left( r_t^m > \bar{T}^* \right) = 1 - F_Z \left( \bar{T}^*; 0, 1 \right) \quad (6.11)$$

$$\Pr \left( \bar{P}^* \leq r_t^m \leq \bar{T}^* \right) = F_Z \left( \bar{T}^*; 0, 1 \right) - F_Z \left( \bar{P}^*; 0, 1 \right) \quad (6.12)$$

dónde,  $\bar{T}^* = \frac{\bar{T} - \bar{r}_s^m}{\sigma_{r_s^m}}$

En el cuadro 6 se presentan los resultados de la estructura probabilística de la operación de cobertura mediante el sistema de franjas, teniendo en cuenta distintos porcentajes de cartera inscrita y diferentes amplitudes de franja

Cuadro 6  
Estructura probabilística de la operación de cobertura  
mediante un sistema de franjas  
(Distintos porcentajes de cartera inscrita y diversas amplitudes de banda)

Porcentaje de Cartera inscrito	+0 PBS			+50 PBS			+100 PBS		
	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo
100%	50.85%	0.00%	49.15%	49.21%	3.62%	47.17%	47.57%	7.24%	45.19%
80%	51.09%	0.00%	48.91%	49.42%	3.64%	46.94%	47.78%	7.28%	44.94%
60%	51.42%	0.00%	48.58%	49.78%	3.67%	46.55%	48.14%	7.34%	44.52%
50%	51.71%	0.00%	48.29%	50.06%	3.69%	46.24%	48.42%	7.39%	44.19%
40%	52.14%	0.00%	47.86%	50.49%	3.73%	45.78%	48.84%	7.46%	43.69%
20%	54.26%	0.00%	45.74%	52.62%	3.91%	43.47%	50.97%	7.83%	41.20%
10%	58.50%	0.00%	41.50%	56.85%	4.27%	38.88%	55.20%	8.58%	36.23%
Porcentaje de Cartera inscrito	+150 PBS			+200 PBS			+250 PBS		
	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo
100%	45.94%	10.85%	43.21%	44.33%	14.44%	41.24%	42.73%	18.00%	39.27%
80%	46.15%	10.91%	42.94%	44.53%	14.52%	40.95%	42.93%	18.10%	38.97%
60%	46.50%	11.00%	42.50%	44.88%	14.64%	40.47%	43.28%	18.26%	38.46%
50%	46.78%	11.07%	42.14%	45.16%	14.75%	40.09%	43.55%	18.39%	38.05%
40%	47.21%	11.19%	41.60%	45.58%	14.90%	39.52%	43.97%	18.59%	37.44%
20%	49.32%	11.76%	38.92%	47.68%	15.68%	36.64%	46.05%	19.58%	34.37%
10%	53.54%	12.90%	33.56%	51.88%	17.24%	30.88%	50.23%	21.58%	28.19%
Porcentaje de Cartera inscrito	+300 PBS			+350 PBS			+400 PBS		
	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo	Por encima	En franja	Por debajo
100%	41.15%	21.52%	37.33%	39.59%	25.00%	35.41%	38.05%	28.43%	33.52%
80%	41.35%	21.64%	37.01%	39.79%	25.14%	35.07%	38.25%	28.59%	33.16%
60%	41.69%	21.84%	36.47%	40.12%	25.38%	34.49%	38.58%	28.87%	32.55%
50%	41.96%	22.00%	36.03%	40.39%	25.57%	34.03%	38.84%	29.09%	32.06%
40%	42.37%	22.24%	35.38%	40.80%	25.86%	33.34%	39.24%	29.43%	31.33%
20%	44.43%	23.46%	32.11%	42.83%	27.31%	29.86%	41.25%	31.11%	27.64%
10%	48.58%	25.91%	25.50%	46.95%	30.23%	22.82%	45.32%	34.51%	20.16%

Como puede apreciarse, si se supone que las entidades hipotecarias inscriben el 40% del valor de la cartera y con una amplitud de franja de 150 puntos básicos por encima de  $\bar{r}^{m*}$ , la probabilidad de cubrimiento, es decir, de recibir aportes del

FRECH es de 47.21% y la probabilidad de hacer aportes al FRECH es de 41.60%, en tanto que con una probabilidad de 11.19% la cartera inscrita en el mecanismo queda descubierta frente al riesgo de tasa de interés real.

## 7. Evaluación retrospectiva de mecanismo de cobertura

En esta sección se presentan los resultados de la evaluación del desempeño del mecanismo de cobertura bajo las tres alternativas de funcionamiento: *i*) Tasa neutral  $\overline{r}_s^a = 6.81\%$ , *ii*) tasa no neutral  $\overline{r}^{a*} = 6.16\%$  con 40% de cartera inscrita y *iii*) franja de tasa de interés real  $\overline{T} = 7.66\%$  y  $\overline{P} = 4.27\%$  con 150 puntos básicos para la determinación del techo de la franja y 40% de cartera inscrita (\$5'135.582 millones aproximadamente)<sup>26</sup>. En los tres escenarios se suponen ingresos iniciales del mecanismo por valor de \$312.985 millones y una rentabilidad del portafolio del FRECH de DTF + 2%.

La evaluación del mecanismo de cobertura se lleva a cabo mediante un esquema de simulación contrafactual, es decir, utilizando los datos observados de tasa de interés real  $r_t^m$  desde enero de 1984 hasta agosto de 2002. Teniendo en cuenta una duración de 4 años de la operación, se simula 214 veces el funcionamiento del mecanismo. Así, la primera simulación se lleva a cabo entre enero de 1984 y diciembre de 1988, la segunda simulación corresponde al período febrero de 1984 - enero de 1988 y así sucesivamente hasta agosto de 2002-julio de 2006 para lo cual se utilizan los primeros 48 datos de la muestra garantizando que el número de veces que se utilizan en las simulaciones sea igual al del resto de observaciones.

Para las simulaciones se tienen en cuenta algunos parámetros adicionales a los considerados en la determinación de las tasas de referencia ( $\overline{r}^m$  y  $\overline{r}^{m*}$ ) y del sistema de franjas y algunas modificaciones en cuanto a liquidación de pagos que se ilustran enseguida.

La determinación y estimación de las tasas de interés de referencia, neutral  $\overline{r}^m$  y no neutral  $\overline{r}^{m*}$ , así como la determinación del sistema de franjas supone que la liquidación de los pagos del FRECH a los BECH y de los aportes de los BECH al FRECH se lleva a cabo mensualmente debido a que cada mes las entidades afrontan el riesgo de tasa de interés. Sin embargo, la liquidación mensual está asociada a dos inconvenientes fundamentales: El primero consiste en que algunos

---

<sup>26</sup>La selección de los valores del techo, piso de la franja, porcentaje de cartera inscrito y puntos básicos para la determinación del techo es la misma que se utiliza en el decreto que reglamenta al FRECH. Sin embargo, el programa elaborado en RATS para estas simulaciones puede ser modificado fácilmente para simular otras condiciones de funcionamiento.

pagos y cobros coinciden con períodos de altas tasas de interés real influenciados por estacionalidades, lo cual implica que dichos pagos o aportes pueden generar presiones adicionales al alza sobre dichas tasas. El segundo inconveniente corresponde a la generación de frecuentes movimientos de caja y por tanto incrementos en costos de transacción. Estos inconvenientes se pueden evitar si se ejecuta un único pago anual. Para calcular mensualmente dicho pago anual se plantean dos estrategias, la primera consiste en llevar a valor futuro (del mes de liquidación) las obligaciones de cada parte mediante:

$$p_{t,\tau}^f = p_{t,\tau} * \rho_{t,\tau}^a, \quad (7.1)$$

Con  $\tau = 1, \dots, 4$  el número de años y  $t = 1, \dots, 12$  el número de meses. Así  $p_{t,\tau}^f$  es el pago o aporte del  $t$ -ésimo mes en el  $\tau$ -ésimo año, el cual es llevado a valor futuro (al mes de liquidación) multiplicando el pago o aporte causado en cada mes  $p_{t,\tau}$  por la tasa de descuento  $\rho_{t,\tau}^a$  respectiva dada por:

$$\rho_{t,\tau}^a = \prod_{s=t+1}^{12} (1 + i_{s,\tau}) \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta que la idea central de la operación de cobertura es sustituir un flujo denominado en UVR por otro en DTF para evitar fluctuaciones dispares entre la remuneración del activo y del pasivo de los BECH, cuando  $p_{t,\tau}$  constituye un pago del FRECH a los BECH  $i_{s,\tau} = DTF_{s,\tau}$ , en tanto que cuando  $p_{t,\tau}$  representa un aporte de los BECH al FRECH  $i_{s,\tau}$  se determina de tres formas diferentes dependiendo de la realización de  $r_{t,\tau}^m$  respecto al techo y piso de la franja, de la siguiente forma

$$i_{s,\tau} = \begin{cases} \Delta UVR_{s,\tau}^m + \bar{T} & \text{si } r_{s,\tau}^m > \bar{T} \\ DTF_{s,\tau} & \text{si } \bar{P} \leq r_{s,\tau}^m \leq \bar{T} \\ \Delta UVR_{s,\tau}^m + \bar{P} & \text{si } r_{s,\tau}^m < \bar{P} \end{cases} \quad (7.3)$$

Con base en los valores de las obligaciones de cada parte, llevadas a valor futuro ( $p_{t,\tau}^f$ ), se calcula cada mes el valor acumulado de pagos y cobros para efectuar la liquidación anual al mes acordado. El valor de dichos acumulados depende de las condiciones sobre la fijación del mes de liquidación que puede darse de dos formas diferentes:

### 7.1. Mes de liquidación variable

Si la liquidación anual se fija a los 12 meses a partir del inicio del mecanismo y de ahí en adelante cada año hasta el último período, los pagos y los aportes acumulados anuales se calculan de la siguiente forma

$$p_{a,\tau}^f = \sum_{t=1}^{12} p_{t,\tau}^f \quad (7.4)$$

### 7.2. Mes de liquidación fijo

Si la liquidación anual se fija en un determinado mes el primer acumulado de pagos y cobros corresponde al acumulado entre el mes de inicio y dicho mes de liquidación, lo cual constituye un intervalo que puede ser menor o igual a 12 meses, en tanto que las siguientes liquidaciones (hasta la penúltima) tendrán una duración de un año. La última liquidación se efectúa en el mes correspondiente a la finalización de la operación de cobertura y por lo tanto, así como la primera liquidación consta de un acumulado menor o igual a 12 meses.

Para calcular los saldos acumulados de pagos y cobros del FRECH a los BECH se define el mes de liquidación  $t_l$  como un entero entre 1 y 12 y permaneciendo constantes las definiciones de  $i_{s,\tau}$  dadas en la ecuación (7.3) se define la tasa de descuento de la siguiente forma:

$$\rho_{t,\tau}^a = \prod_{s=t+1}^{12} (1 + i_{s,\tau}) \quad \forall t = 1, \dots, t_l \text{ y } \forall \tau = 1, \dots, 4 \quad (7.5)$$

$$\rho_{t,\tau}^a = \left( \prod_{s=t+1}^{12} (1 + i_{s,\tau}) \right) \left( \prod_{s=1}^{t_l} (1 + i_{s,\tau+1}) \right) \quad \forall t = t_l + 1, \dots, 12 \text{ y } \forall \tau = 1, \dots, 4 \quad (7.6)$$

$$\rho_{t,\tau}^a = \prod_{s=t+1}^{12} (1 + i_{s,4}) \quad \forall t = t_l + 1, \dots, 12 \quad (7.7)$$

Así, durante el primer período de funcionamiento de la operación de cobertura se calcula el primer saldo acumulado  $p_{a1}^f$ , entre el mes de inicio y el mes de

liquidación de la siguiente forma:

$$p_{a1}^f = \sum_{t=1}^{t_l} p_{t,1}^f \quad (7.8)$$

dónde  $p_{t,1}^f = p_{t,1} \times \rho_{t,1}^a$  y corresponde al pago o cobro mensual llevado a valor futuro al mes de liquidación ( $t_l$ ). Luego se calculan los tres siguientes saldos acumulados ( $p_{a\tau}^f$ ) cada doce meses desde el mes siguiente al de la primera liquidación así:

$$p_{a\tau}^f = \sum_{t=t_l+1}^{12} p_{t,\tau-1}^f + \sum_{t=1}^{t_l} p_{t,\tau}^f \quad \forall \tau = 2, \dots, 4 \quad (7.9)$$

por último, si el numero de meses entre el mes de inicio y el primer mes de liquidación es menor que 12 se requiere calcular el último acumulado entre el mes siguiente al de la penúltima liquidación y el último mes de funcionamiento del FRECH ( $t_{lf}$ ) así:

$$p_{a5}^f = \sum_{t=t_l+1}^{12} p_{t,4}^f \quad (7.10)$$

La segunda estrategia para calcular pagos anuales ( $p_\tau$ ) que resulta más sencilla que la anterior consiste en calcular la tasa de interés real  $r_\tau^a$ , a partir de la diferencia entre la tasa DTF nominal mensual acumulada cada doce meses ( $i_\tau^{a*}$ ) y la UVR anual (inflación anual observada en cada mes y rezagada un período), y compararla con los valores establecidos del techo y piso de la franja calculados en términos efectivos anuales ( $\overline{P^a}$  y  $\overline{T^a}$ ). Con base en los valores de  $r_\tau^a$  y de  $\overline{P^a}$  y  $\overline{T^a}$  se aplica la regla que determina los pagos anuales según la cual el mecanismo compensa a los BECH si  $r_\tau^a > \overline{T^a}$  y cuando  $r_\tau^a < \overline{P^a}$  las entidades aportan al FRECH. El cálculo de  $r_\tau^a$  se obtiene de la siguiente forma:

$$r_\tau^{a*} = \left[ \frac{(1 + i_\tau^{a*})}{(1 + \Delta UVR_t^a)} \right] - 1 \quad (7.11)$$

con

$$i_\tau^{a*} = \prod_{s=1}^{12} (1 + i_{s,\tau}^m) \quad (7.12)$$

dónde  $r_{s,\tau}^{a*}$  corresponde a la  $s$ -ésima (mensual) observación de  $r^m$  en el  $\tau$ -ésimo año de funcionamiento del mecanismo de cobertura, con  $\tau = 1, \dots, 4$ .

Por último, el cálculo de los pagos y cobros anuales se obtiene de manera similar a (6.2)

$$p_\tau = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_\tau^{a*}}{1+\overline{T}^{a*}} - 1 \right], & \text{si } r_\tau^{a*} > \overline{T}^a \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_\tau^{a*}}{1+\overline{P}^{a*}} - 1 \right], & \text{si } r_\tau^{a*} < \overline{P}^a \end{cases} \quad (7.13)$$

### 7.3. Resultados de las simulaciones con tasa de interés real acumulada cada doce meses

En los cuadros 7, 8 y 9 se presentan los resultados de la simulación de las tres alternativas de funcionamiento del FRECH suponiendo que la primera liquidación se lleva a cabo a los doce meses después de iniciada la operación de cobertura y de ahí en adelante cada doce meses, lo cual corresponde a mes de liquidación variable. Cada cuadro contiene los resultados anuales de los cuatro períodos más relevantes: *i*) el de mayores tasas de interés real entre enero de 1984 y diciembre de 1987, el cual permite determinar el alcance del mecanismo en términos de solvencia, *ii*) el período que representa los mayores aportes de los BECH al FRECH *iii*) el período de mayores aportes del FRECH a los BECH y *iv*) los resultados para el último cuatrienio observado, es decir, desde septiembre de 1998 hasta agosto de 2002. La comparación de *ii*) y *iii*) permite observar el nivel que pueden alcanzar los aportes de las entidades al FRECH y viceversa en los períodos más adversos, es decir en los que las realizaciones de la tasa de interés generan los mayores desembolsos para los participantes. Los resultados contenidos en *iv*) permiten ver el desempeño de cada alternativa de FRECH, en un período de tasas de interés inusualmente bajas, que en principio, podría haberse considerado cómo el más adverso para los BECH en cuanto al elevado nivel de desembolsos.

Las columnas de cada cuadro corresponden al saldo anterior, que indica el saldo con el que se inicia la operación del FRECH cada año suponiendo, una rentabilidad del portafolio de DTF + 2%, la cual se supuso de valor cero por simplicidad en los puntos 3, 5 y 6. La segunda columna es el pago neto que representa los pagos del FRECH a los BECH cuando adopta valores negativos, aportes de los BECH al FRECH cuando es de signo positivo y cero cuando la tasa de interés adopta un valor entre la franja. La tercera columna (saldo final) es la suma del saldo anterior y el pago neto y, por último, la columna saldo final sin cobertura corresponde al valor acumulado de los ingresos del FRECH en el caso

de no operación, en el cual los ingresos del FRECH perciben una rentabilidad de DTF + 2%. La diferencia entre el saldo final sin cobertura y el saldo final (ambos en el cuarto año) constituye la transferencia del FRECH a los BECH cuando es mayor que cero y viceversa. La transferencia relativa consiste en dividir el valor de la transferencia por el saldo final del FRECH sin cobertura en el último año.

**Cuadro 7**  
**Simulacionescontasadereferencianeutral\***  
**(6.81%)**

<b>Períododemayorestasasdeinterés (enerode1984-dicde1987)</b>				
Años	Saldoanterior	Pagoneto	Saldofinal	Saldofinals in cobertura
I	428,045	-431,647	-3,602	428,045
II	-4,943	-130,023	-134,966	587,457
III	-179,987	-147,764	-327,751	783,414
IV	-435,209	93,944	-341,265	1,040,267
Transferencianeta				1,381,532
Tranferencianetacomom%delportafoliodelFRECH				132.81%
<b>PeríododemayoresaportesdelosBECHalFRECH (sepde1990-agode1994)</b>				
Años	Saldoanterior	Pagoneto	Saldofinal	Saldofinals in cobertura
I	435,562	124,313	559,875	435,562
II	739,687	261,919	1,001,606	575,449
III	1,287,036	86,861	1,373,897	739,436
IV	1,764,447	181,410	1,945,857	949,631
Transferencianeta				-996,226
Tranferencianetacomom%delportafoliodelFRECH				-104.91%
<b>PeríododemayoresaportesdelFRECHalosBECH (enerode1998-dicde2001)</b>				
Años	Saldoanterior	Pagoneto	Saldofinal	Saldofinals in cobertura
I	421,003	-340,169	80,833	421,003
II	99,602	-179,601	-79,999	518,752
III	-91,313	180,424	89,110	592,120
IV	101,971	119,905	221,877	798,585
Transferencianeta				455,703
Tranferencianetacomom%delportafoliodelFRECH				67.25%
<b>Funcionamientodelmecanismo durante los últimos 4 años (sepde1998-agode2002)</b>				
Años	Saldoanterior	Pagoneto	Saldofinal	Saldofinals in cobertura
I	404,538	-488,675	-84,137	404,538
II	-97,264	137,756	40,493	467,655
III	46,542	111,753	158,294	595,182
IV	177,541	146,062	323,602	815,103
Transferencianeta				279,269
Tranferencianetacomom%delportafoliodelFRECH				46.32%

\*Resultados en millones de pesos

**Cuadro 8**  
**Simulaciones contadas de referencias neutral\***  
**(6.16%)**

<b>Período de mayores tasas de interés</b> <b>(enero de 1984-diciembre de 1987)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	428,045	-465,734	-37,689	428,045
II	-51,725	-162,263	-213,989	587,457
III	-285,369	-180,113	-465,482	783,414
IV	-618,097	63,075	-555,022	1,040,267
Transferencia neta				1,595,289
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				153.35%
<b>Período de mayores aportes de los BECH al FRECH</b> <b>(septiembre de 1990-agosto de 1994)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	435,562	93,630	529,192	435,562
II	699,150	232,078	931,228	575,449
III	1,196,602	55,949	1,252,551	739,436
IV	1,608,606	151,076	1,759,683	949,631
Transferencia neta				-810,051
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				-85.30%
<b>Período de mayores aportes de los FRECH a los BECH</b> <b>(enero de 1998-diciembre de 2001)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	421,003	-373,696	47,306	421,003
II	58,290	-212,144	-153,854	518,752
III	-175,614	150,084	-25,530	592,120
IV	-29,215	89,195	59,980	798,585
Transferencia neta				617,599
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				91.15%
<b>Funcionamiento del mecanismo durante los últimos 4 años</b> <b>(septiembre de 1998-agosto de 2002)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	404,538	-523,111	-118,573	404,538
II	-137,073	107,156	-29,918	467,655
III	-34,387	80,993	46,606	595,182
IV	52,272	115,512	167,784	815,103
Transferencia neta				435,087
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				72.17%

\*Resultados en millones de pesos

**Cuadro 9**  
**Simulaciones de tasas de referencias neutras sist emadefranja\***  
**de tasas de interés (T=7.66% y P=4.27%)**

<b>Período de mayores tasas de interés (enero de 1984-diciembre de 1987)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	428,045	-387,692	40,353	428,045
II	55,381	-88,450	-33,069	587,457
III	-44,100	-106,051	-150,151	783,414
IV	-199,380	0	-199,380	1,040,267
Transferencia neta				1,239,647
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				119.17%
<b>Período de mayores aportes de los BECH al FRECH (abril de 1992-marzo de 1996)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	399,952	168,015	567,967	399,952
II	724,642	107,388	832,030	510,280
III	1,110,548	-53,442	1,057,106	681,094
IV	1,417,720	-80,938	1,336,783	913,437
Transferencia neta				-423,345
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				-46.34%
<b>Período de mayores aportes del FRECH a los BECH (enero de 1998-diciembre de 2001)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	421,003	-296,937	124,066	421,003
II	152,872	-137,636	15,236	518,752
III	17,391	59,717	77,107	592,120
IV	88,236	0	88,236	798,585
Transferencia neta				589,344
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				86.98%
<b>Funcionamiento del mecanismo durante los últimos 4 años (septiembre de 1998-agosto de 2002)</b>				
Años	Saldo anterior	Pagoneo	Saldo final	Saldo final in cobertura
I	404,538	-444,270	-39,732	404,538
II	-45,931	16,010	-29,921	467,655
III	-34,390	0	-34,390	595,182
IV	-38,572	24,518	-14,054	815,103
Transferencia neta				616,925
Transferencia neta como % del portafolio del FRECH				115.12%

\*Resultados en millones de pesos

De la información contenida en los cuadros 7, 8 y 9 se puede concluir que en el período de mayores tasas de interés, la alternativa de funcionamiento más favorable para los BECH es la de tasa de referencia no neutral debido a que bajo éste esquema reciben la mayor transferencia neta. Sin embargo se observa que bajo

el sistema de franjas las entidades no tendrían que afrontar ningún pago. En el período de mayores aportes de los BECH al FRECH se observa que el sistema de franjas es el más favorable para éstos debido a que, la transferencia que hacen al FRECH es la menor. En cuanto al período de mayores pagos del FRECH a los BECH, el sistema de tasa de referencia no neutral es un poco más favorable para las entidades que el sistema de franjas si se tiene en cuenta que la transferencia neta como proporción del portafolio que reciben es superior en 4.175%. Sin embargo, bajo el sistema de franjas sólo hay un aporte de las entidades al FRECH de \$59.717 millones de pesos en tanto que bajo el segundo esquema se observan dos aportes de \$150.084 y \$89.195 millones. Durante los últimos cuatro años, los cuales se caracterizan por ser de bajas tasas de interés reales, el funcionamiento del FRECH por medio del sistema de franjas es más conveniente para los BECH que el de tasa de referencia gracias a que la transferencia que reciben es significativamente mayor.

Desde el punto de vista de la solvencia del mecanismo, bajo el sistema de franjas de tasa de interés y con los supuestos acerca del valor de los recursos iniciales y la rentabilidad de las inversiones del mecanismo etc., se observa que los recursos del FRECH no son suficientes para que el mecanismo funcione durante los cuatro años en los períodos de mayores y menores tasas de interés. Sin embargo, en los otros dos períodos el mecanismo tendría recursos para funcionar. Bajo el sistema de tasa de referencia, (neutral y no neutral) los recursos del mecanismo se agotan sólo en el período de altas tasas de interés.

Finalmente, se observa que la alternativa de franjas de tasas de interés tiene la ventaja de reducir el volumen que pueden adoptar los pagos, principalmente los que realizan las entidades al FRECH. En efecto, el máximo aporte de las entidades bajo este esquema es de \$168.015 millones mientras que bajo el sistema de tasa de referencia de 6.16% es de \$232.078 millones. El máximo desembolso del FRECH a los BECH en el sistema de franjas de tasa es de \$444.270 millones en tanto que con tasa de referencia no neutral es de \$523,111 millones.

## **8. Conclusiones.**

En este documento se presentó el diseño y evaluación retrospectiva (con datos observados) de tres alternativas de funcionamiento de un mecanismo de cobertura contra el riesgo de tasa de interés real que afrontan los bancos especializados en crédito hipotecario en Colombia.

El primer aspecto considerado fue la duración del mecanismo, determinada en función de la duración del ciclo de la tasa de interés real de tal forma que garan-

tizara la máxima neutralidad posible. Utilizando técnicas de análisis espectral, en particular el algoritmo de Transformación rápida de Fourier, se estimó el espectrograma y periodograma de la tasa de interés real, definida como la diferencia multiplicativa entre DTF y crecimiento de UVR. Las estimaciones señalan que el ciclo de la tasa de interés real tiene una duración de cuatro años y por tanto se sugiere que ésta sea la duración del mecanismo de cobertura (FRECH).

El segundo aspecto bajo consideración fue la determinación de la tasa de interés de referencia  $\bar{r}^m$  o equivalente de largo plazo de la diferencia entre la tasa de interés nominal DTF y el crecimiento de la UVR, a partir de la cual se definen los pagos del FRECH y los aportes de los BECH. La tasa de interés de referencia  $\bar{r}^m$  obtenida fue la tasa de interés real promedio, la cual garantiza el principio de neutralidad de la operación tipo SWAP. Debido al desconocimiento de los valores futuros de  $r^m$  y teniendo en cuenta que los choques aleatorios transitorios a esta variable no se repiten hacia el futuro se planteó la necesidad de estimar este parámetro de corte por medio del método de simulaciones de Monte Carlo de un modelo ARIMA con intervención cuyo resultado fue  $\bar{r}^m = 0.55\%$ ,  $6.81\%$  en términos efectivos anuales. Con el fin de tener una idea de la robustez de dicha estimación se confrontó con el resultado de la estimación del parámetro de tasa de interés real de equilibrio de largo plazo de un modelo de movimiento Browniano tipo Ornstein-Uhlenbeck cuyo valor fue  $\bar{r}^m = 0.5512\%$  equivalente a  $6.82\%$  en términos efectivos anuales.

La tasa de interés de referencia de  $6.81\%$  podría garantizar que los recursos iniciales del FRECH quedaran intactos al final de la operación de cobertura y asegurar la simetría entre los pagos y cobros del FRECH a los BECH. Sin embargo, debido a que durante los dos últimos años se ha observado una persistencia de la tasa de interés real a ubicarse por debajo del equivalente real de largo plazo ( $6.81\%$ ), el inicio de la operación de cobertura se ha visto dilatado debido a que en estas circunstancias las entidades entrarían haciendo aportes al FRECH, por lo tanto se consideró una segunda alternativa de funcionamiento con una tasa de referencia menor que la anterior. A partir de la tasa de referencia inicial se determinó la segunda tasa de referencia ( $\bar{r}^{m*}$ ) de tal forma que permitiera la distribución de una parte de los recursos asignados al FRECH entre las entidades. La tasa resultante quedó determinada en función del porcentaje de cartera inscrito por las entidades en el mecanismo, resultando un sistema de tasas de referencia de las cuales se seleccionó, para efectos de evaluación del mecanismo, la de  $6.16\%$  que corresponde a un  $40\%$  de cartera inscrita.

Teniendo en cuenta que las dos tasas de referencia estimadas no difieren lo suficiente como para incentivar una entrada temprana de los BECH al mecanismo,

se construye una tercera alternativa de funcionamiento del FRECH a partir de un sistema de franjas de tasa de interés que, de nuevo, resulta en función del porcentaje de cartera inscrito y garantiza la distribución de una parte de los recursos iniciales del mecanismo entre las entidades, pero a diferencia del anterior esquema depende de los puntos básicos que se adicionen a la nueva tasa de referencia  $\overline{r^{m*}}$  para determinar el techo de la franja. Se presentan los resultados de este sistema y una aproximación a la estructura probabilística de realizaciones de la tasa de interés real respecto a las franjas con el fin de tener una base o criterio de selección de la franja final. Para efectos de evaluación se seleccionó una franja con techo de 7.66% y piso de 4.27% que resulta de adicionar 150 puntos básicos a la tasa de referencia no neutral e inscribir un 40% de cartera. Esta franja de tasa de interés tiene la ventaja, para los BECH, de arrojar una probabilidad de recibir pagos del FRECH de 47.21%, más alta que la probabilidad de hacer aportes al FRECH cuyo valor fue de 41.60%. Además la probabilidad de riesgo descubierto de tasa de interés real, es decir de que su valor esté entre la franja resulta relativamente bajo (11.19%).

Con los datos observados de la diferencia multiplicativa entre DTF y crecimiento de UVR entre enero de 1984 y agosto de 2002 se llevó a cabo una evaluación de las tres alternativas de funcionamiento del FRECH. Se presentaron los resultados para cuatro períodos diferentes: i) el período de mayores tasas de interés, ii) el de mayores aportes de los BECH al FRECH, iii) el de mayores pagos del FRECH a las entidades y iv) el de funcionamiento del FRECH durante los últimos cuatro años.

Los resultados señalan que en condiciones de altas tasas de interés la alternativa de umbral de tasa no neutral es más conveniente para las entidades que el sistema de franjas. Sin embargo, ésta última alternativa tiene la ventaja de suavizar el volumen de los aportes, principalmente los que hacen las entidades al FRECH, al operar solamente en situaciones extremas en las que la diferencia entre DTF y crecimiento de UVR se ubica por fuera de la franja. Adicionalmente, en el período de mayores aportes de los BECH al FRECH el máximo pago que afrontan las entidades es menor bajo el esquema de franjas que bajo las otras dos alternativas de tasa de referencia. El mismo resultado se observa en el período de mayores aportes del FRECH a los BECH. El funcionamiento del mecanismo por medio del sistema de franjas, en condiciones de bajas tasas de interés reales tales como las observadas durante los últimos cuatro años, es más conveniente para los BECH que el sistema de umbral de tasa no neutral debido a que reciben la mayor transferencia del FRECH y permite que las entidades afronten un sólo pago, menor

que los observados bajo las otras dos alternativas. Finalmente, se observa que el FRECH podría resultar más solvente bajo la alternativa de umbral de tasas que a partir del sistema de franjas si se tiene en cuenta que los recursos se agotan solamente en el período de mayores tasas, en tanto que bajo la alternativa de franjas los recursos se agotan en este período y en el de menores tasas.

## 9. Referencias

Anderson, T. W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, New York. John Wiley & Sons.

Campbell, J. Y., A. W. Lo. and A. C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Canavos, G. C. (1988), *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos*. México McGraw-Hill.

Chatfield, C. (1989), *The Analysis of Time Series An Introduction*. 4 ed. London: Chapman y Hall.

Cooley, J. W., Lewis, P. A. W. and Welch, P. D. (1967), Historical Notes on the Fast Fourier Transform. *IEEE Trans.*, AU -15, no 76-9.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S. Ross (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-408.

Desphande, J.V., et al (1995), *Statistical Analysis of Nonnormal Data*, New York. John Wiley & Sons.

Dickey and Fuller (1976), Distribution of the Estimators for Time Series Regressions with a Unit Root. *J.A.S.A.*, 1979, pp 427-431.

Dixit, A. (1993). *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers.

Enders, W. (1995), *Applied Econometric Time series*. New York. John Wiley & Sons, INC.

Espinosa.Vega y Russell (1998), Can Higher Inflation Reduce Real Interest Rates in the Long Run?. *Canadian Journal of Economics*.

Franses, P.H. and B. Hobijin (1997), Critical Values for Unit Root Test in Seasonal Time Series, *Journal of Applied Statistics*, 24, 25-47.

Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, New York. John Wiley & Sons.

Galindo, A. y D. Vásquez (1999), *Propuesta Para el Funcionamiento de la Operación de Cobertura Prevista en el Artículo 49 de la Ley 546 de 1999*. Bogotá. Banco de la República. Mimeo.

- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*. Princeton University Press. New Jersey.
- Hansen, L. P. (1982), Large Sample Properties of Generalized Method of The Moments Estimators, *Econometrica*, 50, 1929-1954.
- Hansen, L. P., and J. Scheinkman (1995), Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes, *Econometrica*, 63, 767-804.
- Judge, et al (1988), *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. New York. John Wiley & Sons, p. 892.
- Kwiatkowski, D., P.C.Phillips., P. Schmidt., Y. Shin.(1992), Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?. *Journal of Econometrics*. 54. P. 159-78. North Holland.
- Lee, Bong-Soo, and Beth F. Ingram (1991), Simulation Estimation of Time-Series Models, *Journal of Econometrics*, 47, 197-205.
- Lilliefors, Hubert W. (1967), On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. *J. of the American Statistical Association*, 62, 318. 399-402.
- MacKinnon, Critical Values for Cointegration Tests, Long-Run Economic Relationships, R.F. Engle and C.W.J. Granger, eds, London, Oxford, 1991, p 267-76.
- Massey, F. J. (1951), The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit, *Journal of the American Statistical Association*, 46, 68-78.
- Mejía, L. F. y D. Vásquez (2000), Alternativas de funcionamiento de la operación de cobertura prevista en el Artículo 49 de la Ley 546 de 1999. Banco de la República. Mimeo.
- Mood, A. M., F. A. Graybill and D. C. Boes. (1974), *Introduction to the Theory of Statistics*. Singapore. McGraw-Hill Series in Probability and Statistics.
- Priestley, M. B. (1981) *Spectral Analysis and Time Series*, vols 1 y 2, London: Academic Press.
- RATS, User's Guide. Version 5. (2000), Estima.431-451. Evanston Illinois.
- Sailesh, R. and Ulman, S. (1996), MLE is Alive and Well in the Financial Markets. Working paper 96-17, Federal Reserve Bank of Atlanta, .
- Tanzi (1984) *Taxation Inflation and Interest Rates FMI*.
- Vásquez, D. y C. Zea (2001), Fondo de Reserva Para la Estabilización de la Cartera Hipotecaria (Ejercicios contrafactuales con tasa de interés real observada en el periodo 1990-2000). Banco de la República. Mimeo.
- Wei, W. (1990), *Time series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*.

Addison-Wesley.

Wilmott, C. (1998), Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering. New York. Wiley & Sons, INC.