

Crecimiento económico y gasto público: una interpretación de las experiencias internacionales y del caso colombiano (1982-1999)*

Carlos Esteban Posada**

José Fernando Escobar***

Resumen

En este documento se presentan los resultados de la estimación econométrica del modelo de gasto público y crecimiento económico de Barro (1990). La estimación fue de tipo panel utilizando datos de frecuencia anual de 83 países (con poblaciones mayores a 2 millones en 1980) a lo largo del periodo 1982-1999. Cuando se juzgan los crecimientos del gasto público y del producto tanto de Colombia como de otros países de ingreso medio a la luz de las estimaciones del modelo surge una conclusión: el gasto público colombiano se volvió excesivo durante la segunda mitad de los años 90 y, por tanto, contribuyó a la reducción de la tasa de crecimiento de la economía.

Abstract

This paper presents a panel estimation of the Barros's (1990) model on economic growth and government expenditure. The sample consists of annual data that spans from 1982 up to 1999, for 83 countries. The results of the estimation are satisfactory. In terms of growth of both government expenditure and output for some middle-income countries, including Colombia, the model suggests that the Colombian government expenditure became excessive in the second half of the 90's, and it could help to explain the reduction of economic growth rate during the same period.

Palabras claves: crecimiento económico, gasto público, elasticidad-capital del producto, estimación panel.

Keywords: economic growth, government expenditure, capital elasticity of product, panel data estimation.

Clasificación JEL: C33, H50, O11, O41

* Borrador para comentarios. Este documento fue elaborado bajo la responsabilidad exclusiva de sus autores y no compromete, por tanto, a las directivas del Banco de la República. Los autores agradecen la colaboración de Wilman Gómez, Luis Fernando Melo e Hisashi Tanizaki, y los comentarios de Luis Eduardo Arango, Martha Misas, Hernando Vargas, Diego Vásquez y de los asistentes al seminario interno del Banco de la República en el cual se presentó una versión anterior. Los errores e insuficiencias que subsistan, a pesar de los comentarios a pesar de los comentarios y colaboraciones, siguen siendo responsabilidad única de los autores.

Correspondencia: cposadpo@banrep.gov.co

** Investigador, Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República.

*** Investigador asistente, Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República

I. Introducción

Un tema importante de análisis de la economía colombiana es el de los efectos del gasto público sobre la tasa de crecimiento del producto. De un lado, la tasa media de crecimiento anual del PIB real *per cápita* del período 1975-2000, 3.5% (con varianza de 5.7), fue inferior a la del período 1950-1975, 5.1% (con varianza de 3.1), y las tasas observadas entre los años 2000 y 2002 (2.9%, 1.4%, y 1.5%) son bastante inferiores a la media ya mencionada del último cuarto del siglo XX. De otro lado, el gasto público tuvo un crecimiento veloz durante el pasado decenio: la tasa media anual de aumento del ejecutado por el sector público no financiero, sin contar intereses, fue 9.1%, y su nivel asciende en la actualidad a 33.4% del PIB real, aproximadamente¹, un porcentaje que parece bastante alto, al menos si se lo compara con el de muchos otros países en desarrollo, como se verá posteriormente. Más aún, existen motivos para pensar que un elemento que pudo haber contribuido a la reducción del ritmo de crecimiento de la economía colombiana durante los últimos 6 años fue el rápido aumento del gasto público².

El objetivo de este trabajo es re-examinar la hipótesis mencionada al final del párrafo anterior. Para ello adoptamos como punto de partida el modelo teórico de Barro (presentado en Barro 1990, Barro y Sala-i-Martin 1995, y Sala-i-Martin 2000). Este modelo supone que el gasto público es productivo y puede contribuir de manera positiva a la tasa de crecimiento de la economía pero implica que si supera un cierto nivel su contribución se torna negativa. Este punto de partida parece más razonable para el propósito de juzgar el caso colombiano que suponer que el gasto público carece de efectos positivos sobre la producción.

Este documento tiene seis secciones principales, una de las cuales es esta introducción. La sección II presenta el modelo teórico y sus implicaciones; la sección III describe la base estadística que utilizamos; la sección IV resume el trabajo econométrico realizado para poner a prueba el modelo teórico y estimar sus parámetros, y presenta los resultados

¹ Este porcentaje es una estimación para 2001 que no incluye servicio de la deuda pública. La estimación es de Posada y Gómez (2002, Tabla 3).

² En varios números del “Informe de la Junta Directiva (del Banco de la República) al Congreso de la República” (por ejemplo, los de marzo de 2000 y julio de 2002) se considera que una de las causas de la desaceleración del crecimiento económico (con posterioridad a 1997) fue el crecimiento del gasto público. En Ospina (1997), Uribe (1997), Comisión de Racionalización del Gasto y de las Finanzas Públicas (1997), Posada y Arango (2000) y Lozano (2001) se encuentran hipótesis sobre la inconveniencia, desde el punto de vista de la estabilidad macroeconómica, de un crecimiento excesivo del gasto público y expresiones relativas a la alta probabilidad de que el gasto público colombiano estuviese alcanzando ya niveles excesivos.

principales; la sección V revisa el caso colombiano y lo juzga a la luz del modelo teórico y de las estimaciones econométricas de éste; la última sección incluye un breve resumen y las conclusiones más importantes. En el anexo A se presentan los resultados intermedios de la estimación, incluyendo las pruebas de especificación realizadas, y en el anexo B se presenta una propuesta metodológica para la estimación del modelo.

II. El modelo teórico

En esta sección presentamos el modelo teórico cuyo origen se debe a Barro. Nuestra presentación se hace en tiempo discreto y en términos estocásticos. El punto de partida es una descripción de la producción de la economía en términos reales. Se supone que la función de producción agregada es del tipo Cobb-Douglas:

$$(1) \quad Y_t = A_t K_t^\alpha (g_t L_t)^{1-\alpha}$$

Siendo Y el nivel de producción, A el parámetro de escala, K el capital físico, g el gasto público real *per cápita* (un bien rival y excluible medido en términos del producto Y), L la cantidad de trabajo utilizada, y α la elasticidad del producto al capital. La producción está sujeta a rendimientos de escala constantes y marginales decrecientes ($0 < \alpha < 1$).

La función 1 supone que el gasto público se traduce en un flujo de servicios productivos no acumulable que eleva la capacidad productiva de los trabajadores.

Dividiendo a ambos lados por L , se tiene:

$$(2) \quad y_t = A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha}$$

Siendo k el capital por trabajador.

Supondremos, además, que el parámetro de escala tiene un comportamiento temporal estacionario en torno a un valor medio constante y que el efecto de los choques aleatorios sobre aquel se eliminan lentamente (a través de varios períodos); es decir, supondremos que tal parámetro sigue un proceso estacionario auto-regresivo con “deriva”:

$$(3.a) \quad A_t = \bar{\omega} + \psi A_{t-1} + u_t; \quad \bar{\omega} > 0; \quad 0 < \psi < 1;$$

$$(3.b) \quad u_t \sim N(0, \sigma_u)$$

De otra parte, se considera que la sociedad está adecuadamente representada por un agente que busca maximizar una función de bienestar. Éste se mide por el valor presente de una serie de utilidades que se extiende hasta el infinito. La utilidad de cada período depende de manera positiva del consumo *per cápita*.

El problema del agente representativo es, por tanto, el siguiente:

$$(4.a) \quad \text{Maximizar } W_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_i); \quad 0 < \beta \leq 1$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} = (1 - \tau_t) A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t + [1 - (\delta + n)] k_t$$

Siendo β la tasa de descuento de la utilidad futura, n la tasa de crecimiento poblacional, c el consumo *per cápita*, δ la tasa de depreciación del capital, y τ la tasa (media) impuestos/ingreso.

Es útil despejar el consumo de la restricción, e introducirlo en la función objetivo:

$$(5) \quad c_t = (1 - \tau_t) A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - k_{t+1} + [1 - (\delta + n)] k_t$$

Por tanto:

$$(4.b) \quad W_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u((1 - \tau_t) A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - k_{t+1} + [1 - (\delta + n)] k_t)$$

De este modo el problema se reduce a maximizar la ecuación (4.b) teniendo a k_{t+1} como variable de control; esto implica derivar la ecuación con respecto a k_{t+1} e igualar a cero. De allí resulta la siguiente condición de primer orden:

$$(6) \quad \beta E_t \left\{ \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} + [1 - (\delta + n)]] \right\} = 1$$

Pero, al descomponer la esperanza del producto se obtiene que:

$$\beta \left\{ E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] [E_t [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha}] + [1 - (\delta + n)]] \right\}$$

$$+ \beta \text{Cov} \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, \alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} \right\} = 1$$

$$\text{Sea: } \text{Cov} \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, \alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} \right\} = V$$

En lo que sigue supondremos que V es constante³. Suponer que

$$\text{Cov} \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, \alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} \right\} \text{ es constante implica que para todo } t$$

$$E_t \left\{ \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} - E_t \left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right) \right] [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} - E_t (\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha})] \right\} \text{ posee el}$$

³ Este supuesto es usual; véase, por ejemplo, Obstfeld y Rogoff (1996, p. 86).

mismo valor, es decir, la esperanza del producto de los errores de predicción sobre la tasa marginal de sustitución del consumo y la productividad marginal del capital ajustada por impuestos deberá ser invariable en el tiempo.

La expresión 6 se convierte en:

$$\beta \left\{ E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] \left[E_t [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha}] + [1 - (\delta + n)] \right] \right\} + \beta V = 1$$

$$\text{Por ende: } \frac{\beta}{1 - \beta V} \{ E_t [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha}] + [1 - (\delta + n)] \} = E_t \left[\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} \right]$$

Nótese que si la covarianza tendiese a cero, es decir, si la tasa marginal de sustitución del consumo y la productividad marginal del capital no estuviesen correlacionadas la expresión

$$\text{se transformaría en el factor de descuento: } V \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\beta}{1 - \beta V} \rightarrow \beta.$$

A continuación daremos una forma específica a la función de utilidad periódica, $u(c_t)$.

Una de uso común, y que sirve a nuestros propósitos de obtener una expresión para la tasa de crecimiento, es la logarítmica ($u(c) = \log c$). En tal caso:

$$\frac{E_t(c_{t+1})}{c_t} = \frac{\beta}{1 - \beta V} \{ E_t [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha}] + [1 - (\delta + n)] \}$$

Para una mayor simplificación llamaremos $\frac{(c_{t+1})}{c_t} \equiv \gamma_{t+1}$ a la tasa bruta de crecimiento, es

decir, uno más la tasa de crecimiento de la economía, considerando sólo las situaciones en las cuales el consumo crece a la misma tasa que el producto. En consecuencia:

$$(7.a) \quad E_t[\gamma_{t+1}] = \frac{\beta}{1 - \beta V} \{ E_t [\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha}] + [1 - (\delta + n)] \}$$

Puesto que hay un agente representativo y el horizonte se extiende hasta el infinito cualquier supuesto que se hiciese sobre la financiación del gasto público mediante deuda tendría efectos irrelevantes (Romer 1996, cap. 2). Por esto se supone que en cada período el gasto público se financia con impuestos: $g_t = \tau_t y_t$. Así, la ecuación (7.a) se transforma en:

$$E_t[\gamma_{t+1}] = \frac{\beta}{1 - \beta V} \left\{ E_t \left[\alpha(1 - \tau_{t+1}) A_{t+1}^{\frac{1}{\alpha}} \tau_{t+1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right] + [1 - (\delta + n)] \right\}$$

Es decir:

$$(7.b) \quad \gamma_{t+1} = \frac{\beta}{1-\beta V} \left\{ E_t \left[\alpha(1-\tau_{t+1}) A_{t+1}^{\frac{1}{\alpha}} \tau_{t+1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right] + [1 - (\delta + n)] \right\} + e_t$$

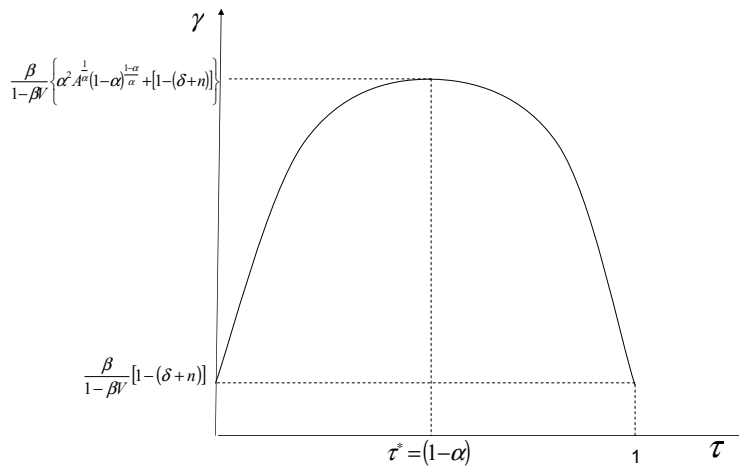
Siendo e_t un error del tipo “ruido blanco” (RB) cuyo valor esperado es 0 ($e_t \sim RB$).

La ecuación (7.b) predice, entre otras cosas, que la tasa de crecimiento del producto *per cápita* es estable si los parámetros de la función de producción, la tasa de tributación (o proporción gasto público/producto), la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento poblacional son estables. Por tanto, este modelo hace parte de los llamados de “crecimiento endógeno”.

En vista de que nuestra atención se centra en la relación que existe entre el gasto público y el crecimiento económico, conviene realizar un análisis adicional de la ecuación 7.b. Caractericémosla por los signos de su primera derivada y veamos la representación gráfica de su contraparte determinística (figura 1).

$$\frac{d\gamma}{d\tau} > 0 \Leftrightarrow \tau < 1 - \alpha; \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \tau = 1 - \alpha; \quad \frac{d\gamma}{d\tau} < 0 \Leftrightarrow \tau > 1 - \alpha$$

Figura 1. El gasto óptimo



De la primera derivada y la gráfica de la versión determinística de la ecuación 7.b se desprenden algunas observaciones sobre la relación sugerida por el modelo, así: el nivel

más bajo que puede alcanzar el crecimiento económico es $\frac{\beta}{\beta - \beta V} [1 - (\delta + n)] - 1$ (valor que

es evidentemente negativo) cuando la relación gasto público/PIB alcanza sus valores extremos (0 ó 1). El nivel óptimo de la razón gasto público/PIB es igual a la elasticidad del producto *per cápita* con respecto al gasto *per cápita*, identificada por $1 - \alpha$. Todo nivel de

gasto público/PIB que se ubique por encima o por debajo de su óptimo origina tasas de crecimiento económico menores al máximo teórico; sin embargo, por debajo del óptimo los aumentos poseen efectos positivos sobre el crecimiento, mientras que por encima del óptimo todo aumento deprime el crecimiento.

III. Datos

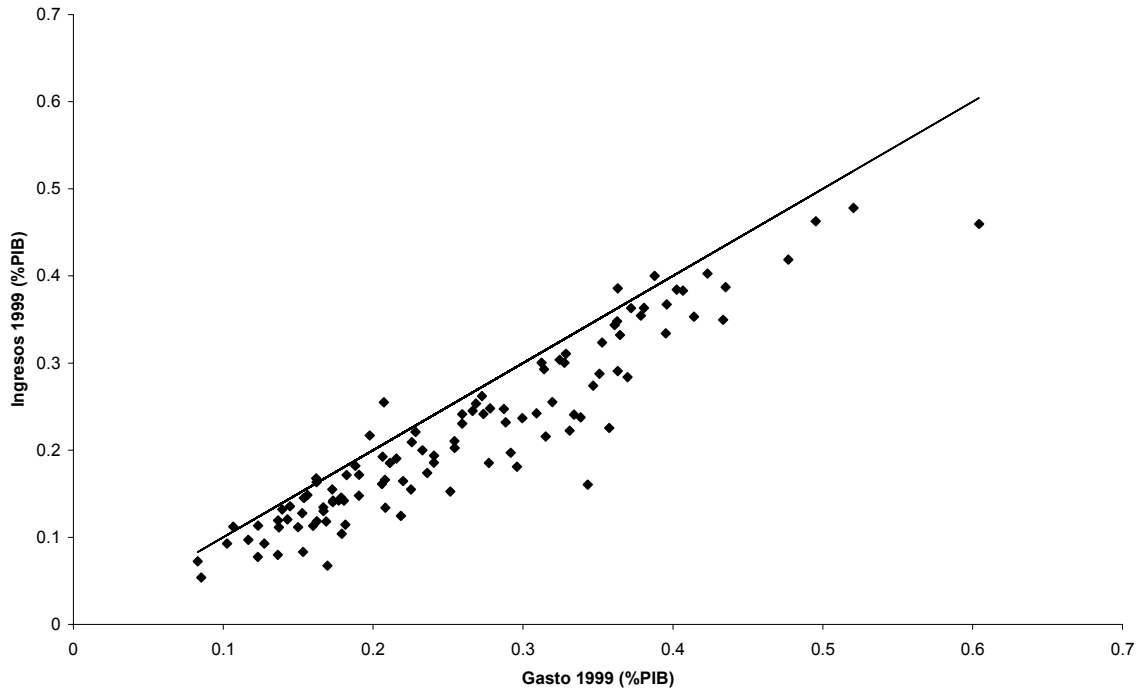
Como se mencionó en la introducción nuestro objetivo central fue realizar una evaluación econométrica del modelo anterior a fin de interpretar la experiencia colombiana. Para ello utilizamos la base de datos denominada *World Development Indicators* del Banco Mundial. A partir de esta base conformamos una muestra representativa de países con las siguientes características: a) población mayor o igual a 2 millones en 1980; b) series completas de crecimiento del PIB *per cápita* y gasto público como proporción del PIB (frecuencia anual). Aquellos países con alguna información perteneciente a esa base de datos pero que no cumplieran con alguna de esas dos condiciones no fueron tomados en consideración; fue así como quedaron 83 países en nuestra muestra (véanse los cuadros 1, 2 y 3 presentados en la siguiente sección). Con el fin de que todos los datos fuesen comparables entre países la variable que indica (de manera aproximada) el gasto público es el ejecutado por el gobierno central excluyendo el pago de intereses; y la tributación se refiere, también, a la del gobierno central (este último dato sólo fue empleado en la elaboración del gráfico 1).

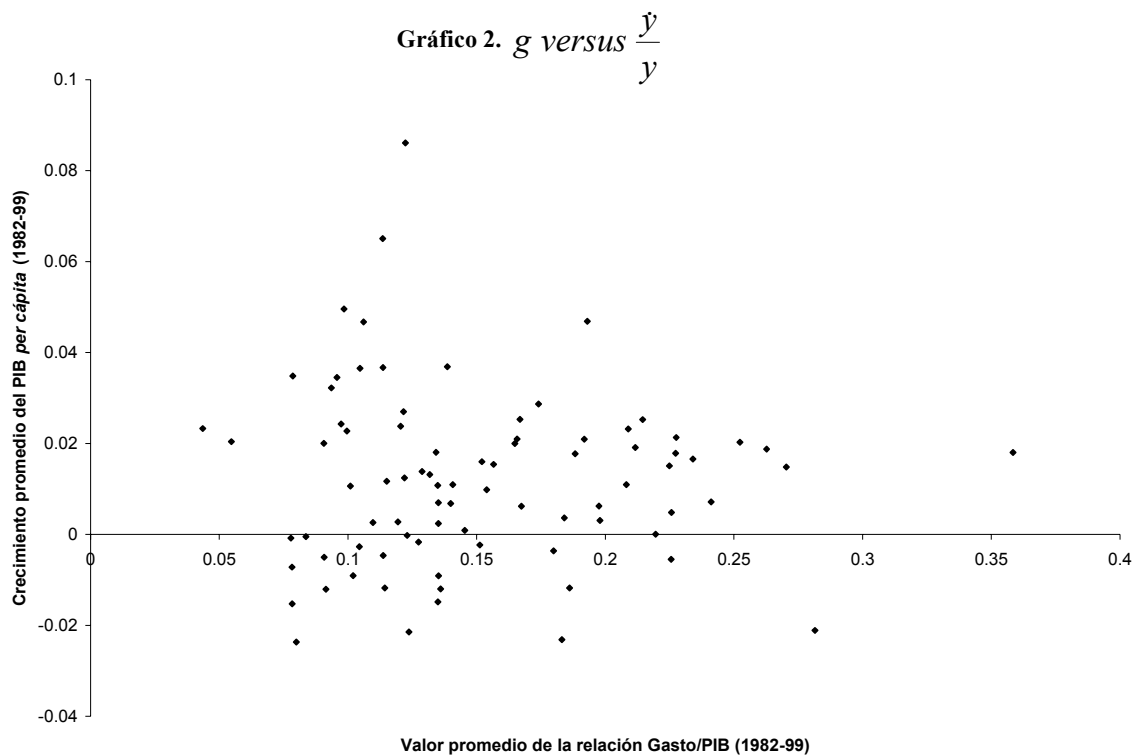
Una limitación que deberá mantener presente el lector se deriva de nuestro indicador de gasto público. En efecto, pueden existir casos de países en los cuales el gobierno central es el gran ejecutor del gasto público, siendo casi nulo el de los gobiernos locales, en tanto que puede ocurrir lo contrario en muchos otros casos. Si esta limitación no fuese excesivamente gravosa sería porque es pertinente la siguiente hipótesis: en general los movimientos temporales y las magnitudes relativas del gasto del gobierno central de un país “van de la mano” con los correspondientes al de su gasto público consolidado.

Los gráficos 1 y 2 presentan dos nubes de puntos. El primero corresponde a las 83 parejas (una por país) recaudos tributarios - gastos de gobierno central (proporciones medias del producto en el período 1982-1999); a simple vista se observa que el supuesto de una igualdad entre ingresos tributarios y gasto público, representado por la línea de 45° que acompaña a los datos, es claramente violada en muchos casos. El segundo gráfico corresponde a otras 83 parejas: tasas de crecimiento de la economía - proporciones gasto

público/PIB (promedios 1982-1999); la observación de este segundo gráfico no deja la impresión de una curva nítida, como la relación hipotética representada en la Figura 1, pero esto puede estar originado por la gran heterogeneidad entre las naciones de la muestra.

Gráfico 1. τ versus g





Conviene agregar que 60 de las 83 economías de la muestra tuvieron crecimiento anual medio positivo de su PIB *per cápita*, y de estas 45 redujeron la proporción gasto público/PIB a lo largo del período de estudio. Adicionalmente, de las 10 economías que más crecieron en el período (China, Corea del Sur, Tailandia, Irlanda, Singapur, Malasia, India, Chile, Hong Kong e Indonesia) sólo India no redujo la relación gasto público/PIB.

IV. La estimación del modelo y los resultados generales

El modelo a estimar es la ecuación de la tasa de crecimiento del producto *per cápita* (ecuación 7.b). Puesto que disponemos de series de tiempo (frecuencia anual) para 83 países el método más indicado es el de *panel*.

La estructura de *panel* contempla originalmente la mayor cantidad posible heterogeneidades entre las economías y en el tiempo; para ver tal presentación general remitimos al lector al anexo A. El modelo aquí presentado corresponde a la especificación hallada bajo pruebas estadísticas. Presentamos, entonces, la ecuación 7.b de la forma:

$$\gamma_{it} = \beta'_i \left\{ \alpha_i A_{it}^{\frac{1}{\alpha_i}} (1 - \tau_{it}) \tau_{it}^{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} + [1 - (\delta + n)]_i \right\} + e_{it}; \quad \beta'_i \equiv \frac{\beta_i}{1 - \beta_i V_i}$$

Bajo los siguientes supuestos:

$$A_{it} = \bar{\omega}_i + \psi_i A_{it-1} + u_{it}$$

$$u_{it} \sim N(0, \sigma_{u_i})$$

$$e_{it} \sim N(0, \sigma_{e_i});$$

$$E(u_{it} e_{js}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, 83; t = 1982, 1983, \dots, 1999$$

$\alpha_i, \beta'_i, \psi_i, \bar{\omega}_i$: "efectos fijos"

$[1 - (\delta + n)]_i$: "efectos aleatorios"

En vista que no existen los datos para generar una serie de $[1 - (\delta + n)]_i$, consideraremos esta magnitud como un coeficiente más en la regresión.

La estimación del modelo y las pruebas estadísticas a las que fue sometido no condujeron a rechazar las hipótesis previamente mencionadas, a saber: "relación no lineal entre la tasa de crecimiento económico y la tasa de gasto público semejante a la derivada del modelo teórico, normalidad de los componentes estocásticos, predominancia de "efectos fijos" y "efectos aleatorios" de la manera supuesta (excepto en el caso del coeficiente ψ , cuya magnitud estimada, como se verá, resultó común a todos los países), valores para los parámetros dentro de los rangos previstos, etc. Los resultados principales se presentan en varios cuadros y gráficos⁴.

La variabilidad de los parámetros entre países multiplica por 83 cada uno de los resultados; por tanto, pese a que la estimación se realizó con la totalidad de la muestra los resultados se dividieron en tres grupos para facilitar su lectura. En los cuadros 1, 2 y 3 se halla un resumen de las estadísticas de los países dividiéndolos de acuerdo con su producto *per cápita*: países pobres (PIB *per cápita* menor o igual a 1000 dólares de poder adquisitivo comparable de 1995); países medios (ingreso *per cápita* entre 1000 y 12100 dólares) y países ricos (más de 12100 dólares de ingreso *per cápita*). En estos cuadros se incluyen los valores medios de sus tasas de crecimiento económico y gasto público.

⁴ Todas las particularidades de esta estimación se pueden consultar en los anexos.

Cuadro 1. Países pobres			
País	Crecimiento promedio de PIB <i>per cápita</i>	Nivel promedio de la relación gasto/PIB	Variación promedio de la relación gasto/PIB
Bangladesh	0.0233	0.0436	0.0002
Benin	0.0028	0.1195	-0.0003
Bolivia	-0.0017	0.1274	-0.0033
Burkina Faso	0.0139	0.1288	-0.0015
Burundi	-0.0153	0.0784	0.0003
Camerún	-0.0118	0.1143	0.0021
China	0.0861	0.1224	-0.0002
Costa de Marfil	-0.0149	0.1350	-0.0026
Etiopía	0.0009	0.1455	0.0015
Ghana	0.0063	0.1975	-0.0012
Haití	-0.0237	0.0800	-0.0025
Honduras	-0.0027	0.1045	-0.0012
India	0.0367	0.1136	0.0010
Indonesia	0.0345	0.0957	-0.0031
Kenya	0.0000	0.2196	0.0076
Madagascar	-0.0120	0.0915	-0.0009
Malawi	0.0048	0.2257	-0.0042
Malí	-0.0002	0.1230	0.0034
Mozambique	0.0117	0.1151	-0.0033
Nepal	0.0201	0.0906	0.0006
Nicaragua	-0.0211	0.2815	-0.0044
Níger	-0.0214	0.1237	0.0019
Nigeria	-0.0023	0.1513	-0.0035
Pakistán	0.0238	0.1205	-0.0002
Rwanda	-0.0091	0.1352	0.0018
Senegal	0.0068	0.1399	-0.0018
Sri Lanka	0.0322	0.0935	0.0013
Togo	-0.0120	0.1360	-0.0038
Uganda	0.0243	0.0973	0.0005
Zambia	-0.0231	0.1831	-0.0080
Zimbabwe	0.0031	0.1979	-0.0045

Cuadro 2. Países medios			
País	Crecimiento promedio de PIB <i>per cápita</i>	Nivel promedio de la relación gasto/PIB	Variación promedio de la relación gasto/PIB
Argelia	-0.0036	0.1799	0.0039
Brasil	0.0071	0.2411	-0.0013
Bulgaria	0.0024	0.1352	-0.0024
Chile	0.0366	0.1047	-0.0034
Colombia	0.0109	0.1407	0.0044
Corea del Sur	0.0651	0.1135	-0.0035
Costa Rica	0.0181	0.1342	-0.0039
Ecuador	-0.0046	0.1137	-0.0045
Egipto	0.0270	0.1216	-0.0030

El Salvador	0.0124	0.1219	-0.0041
Filipinas	-0.0008	0.0779	0.0001
Guatemala	-0.0005	0.0837	0.0008
Hungría	0.0106	0.1010	0.0008
Irán	0.0131	0.1318	-0.0028
Jamaica	0.0036	0.1841	0.0025
Jordania	-0.0055	0.2256	0.0009
Malasia	0.0369	0.1386	-0.0031
Marruecos	0.0154	0.1566	0.0000
México	0.0026	0.1098	-0.0003
Papua-Nueva Guinea	0.0110	0.2082	-0.0043
Paraguay	-0.0072	0.0782	0.0017
Perú	-0.0050	0.0908	-0.0001
Republica Dominicana	0.0204	0.0547	0.0015
Siria	0.0062	0.1674	-0.0054
Sudáfrica	-0.0118	0.1861	0.0011
Tailandia	0.0496	0.0985	-0.0017
Túnez	0.0200	0.1648	-0.0009
Uruguay	0.0108	0.1349	-0.0002
Venezuela	-0.0090	0.1021	-0.0002

Cuadro 3. Países ricos			
País	Crecimiento promedio de PIB per cápita	Nivel promedio de la relación gasto/PIB	Variación promedio de la relación gasto/PIB
Australia	0.0210	0.1919	-0.0012
Austria	0.0191	0.2117	-0.0020
Bélgica	0.0179	0.2273	-0.0025
Canadá	0.0151	0.2248	-0.0033
Dinamarca	0.0188	0.2627	-0.0018
España	0.0253	0.1669	0.0016
Estados Unidos	0.0210	0.1657	-0.0026
Finlandia	0.0213	0.2276	-0.0011
Francia	0.0166	0.2340	0.0004
Grecia	0.0160	0.1520	-0.0004
Hong Kong	0.0348	0.0786	-0.0006
Irlanda	0.0469	0.1930	-0.0065
Israel	0.0180	0.3584	-0.0090
Italia	0.0178	0.1883	-0.0010
Japón	0.0227	0.0996	-0.0006
Noruega	0.0253	0.2145	-0.0013
Nueva Zelanda	0.0098	0.1539	-0.0003
Países Bajos	0.0203	0.2523	-0.0026
Portugal	0.0287	0.1741	0.0015
Reino Unido	0.0232	0.2089	-0.0034
Singapur	0.0468	0.1061	-0.0003
Suecia	0.0148	0.2703	-0.0021

Suiza	0.0070	0.1351	0.0007
-------	--------	--------	--------

Los cuadros 4, 5 y 6 presentan los resultados básicos de la estimación del modelo para todos los grupos y subgrupos.

Es importante aclarar uno de los resultados que se presentan en tales cuadros: la última línea, donde aparece la palabra “grupales”, consigna los estimadores para el grupo; estos no son un promedio aritmético sino un promedio ponderado por sus matrices de varianzas y covarianzas.

Cuadro 4. Resultados del modelo para los países pobres						
País	α_i	Estadístico asociado a α_i	β'_i	Estadístico asociado a β'_i	$[1 - (\rho + n)]_i^*$	ϖ_i^*
Bangladesh	0.9309	5.8012	0.9769	6.7612	0.9469	0.1244
Benin	0.9107	6.2271	0.9648	7.2199	0.9348	0.1400
Bolivia	0.9081	6.2518	0.9651	7.2464	0.9351	0.1386
Burkina Faso	0.9056	6.5477	0.9636	7.5651	0.9336	0.1557
Burundi	0.9267	6.6118	0.9755	7.6341	0.9455	0.0810
Camerún	0.9155	6.0264	0.9945	7.0037	0.9645	0.0331
China	0.9095	7.0342	0.9702	8.0890	0.9402	0.2393
Costa de Marfil	0.9011	5.9909	0.9853	6.9654	0.9553	0.0635
Etiopía	0.9022	6.0949	0.9688	7.0774	0.9388	0.1328
Ghana	0.8940	5.4292	0.9698	6.3605	0.9398	0.1534
Haití	0.9288	5.8394	0.9733	6.8023	0.9433	0.0762
Honduras	0.9112	5.4231	0.9809	6.3540	0.9509	0.0904
India	0.9113	5.5859	0.9589	6.5293	0.9289	0.2032
Indonesia	0.9166	6.5915	0.9730	7.6123	0.9430	0.1586
Kenia	0.8809	6.2180	0.9713	7.2100	0.9413	0.1392
Madagascar	0.9181	6.7664	0.9812	7.8006	0.9512	0.0745
Malawi	0.8830	6.0068	0.9746	6.9826	0.9446	0.1329
Mali	0.9095	6.2749	0.9709	7.2713	0.9409	0.1251
Mozambique	0.9076	5.8666	0.9582	6.8315	0.9282	0.1813
Nepal	0.9238	7.4337	0.9750	8.5192	0.9450	0.1276
Nicaragua	0.8788	6.8182	0.9637	7.8564	0.9337	0.1366
Níger	0.9169	6.3387	0.9701	7.3400	0.9401	0.0887
Nigeria	0.8934	5.7302	0.9627	6.6847	0.9327	0.1504
Pakistán	0.9217	6.0707	0.9701	7.0514	0.9401	0.1459
Rwanda	0.9079	6.4500	0.9714	7.4598	0.9414	0.1069
Senegal	0.9040	7.0776	0.9677	8.1357	0.9377	0.1296
Sri Lanka	0.9070	6.7815	0.9782	7.8168	0.9482	0.1438
Togo	0.9057	6.0297	0.9708	7.0073	0.9408	0.1092
Uganda	0.9268	6.3000	0.9776	7.2983	0.9476	0.1233
Zambia	0.8967	6.9996	0.9727	8.0517	0.9427	0.0921

Zimbabwe	0.8957	6.7264	0.9738	7.7575	0.9438	0.1260
Grupales	0.9081	6.1498	0.9719	7.1365	0.9419	0.1266

* Este valor corresponde a un parámetro cuyo comportamiento es estocástico con media $[1 - (\delta + n)] = 0.9410$ y una varianza de 0.0072; la prueba estadística se realiza sobre la varianza, a la que corresponde el estadístico $z = 68.571$ que rechaza la hipótesis de que sea igual a cero.

* Al estar estos parámetros asociados al comportamiento de A_{it} , que es una variable no observable, una prueba estándar de significancia no entrega información confiable, pese a los rechazos sistemáticos de la hipótesis nula.

Nota: El término ψ_i , que se supuso diferente entre países, debió tomarse idéntico en virtud de la evidencia estadística. Una prueba χ^2 con hipótesis nula de parámetros iguales, arroja un estadístico de 0.22564 que no rechaza la hipótesis, y a favor de un solo ψ con valor de 0.1368.

Cuadro 5. Resultados del modelo para los países medios						
País	α_i	Estadístico asociado a α_i	β'_i	Estadístico asociado a β'_i	$[1 - (\rho + n)]_i$	ϖ_i
Argelia	0.8997	6.7957	0.9672	7.8322	0.9372	0.1289
Brasil	0.8864	6.5347	0.9754	7.5511	0.9454	0.1365
Bulgaria	0.9119	7.1569	0.9724	8.2211	0.9424	0.1160
Chile	0.9146	5.1080	0.9561	6.0146	0.9261	0.2195
Colombia	0.9056	4.8185	0.9823	5.7028	0.9523	0.1059
Corea del Sur	0.9218	5.7220	0.9754	6.6759	0.9454	0.1870
Costa Rica	0.9116	7.0560	0.9824	8.1125	0.9524	0.1229
Ecuador	0.9076	5.9823	0.9753	6.9562	0.9453	0.1008
Egipto	0.9092	6.9851	0.9691	8.0361	0.9391	0.1572
El Salvador	0.9052	6.3813	0.9559	7.3859	0.9259	0.1893
Filipinas	0.9300	6.9507	0.9665	7.9990	0.9365	0.1180
Guatemala	0.9236	5.8299	0.9499	6.7920	0.9199	0.1711
Hungría	0.9090	6.9514	0.9742	7.9998	0.9442	0.1227
Irán	0.9152	6.9649	0.9775	8.0144	0.9475	0.1077
Jamaica	0.8958	6.3850	0.9868	7.3898	0.9568	0.0879
Jordania	0.8872	6.8257	0.9659	7.8645	0.9359	0.1382
Malasia	0.9029	7.1611	0.9689	8.2257	0.9389	0.1805
Marruecos	0.8944	5.9863	0.9680	6.9605	0.9380	0.1517
México	0.9160	6.2183	0.9857	7.2103	0.9557	0.0827
Nueva Guinea	0.8994	7.0208	0.9740	8.0746	0.9440	0.1386
Paraguay	0.9272	6.8817	0.9635	7.9247	0.9335	0.1247
Perú	0.9265	6.1249	0.9626	7.1098	0.9326	0.1273
Republica Dominicana	0.9357	7.3388	0.9730	8.4170	0.9430	0.1291
Siria	0.8962	6.4567	0.9632	7.4670	0.9332	0.1605
Sudáfrica	0.9006	5.9989	0.9658	6.9741	0.9358	0.1279
Tailandia	0.9188	6.2894	0.9697	7.2869	0.9397	0.1838
Túnez	0.8895	6.1261	0.9665	7.1110	0.9365	0.1784
Uruguay	0.9117	6.5117	0.9709	7.5263	0.9409	0.1432
Venezuela	0.9082	5.7026	0.9781	6.6550	0.9481	0.0891
Grupales	0.9090	7.3583	0.9704	8.4380	0.9404	0.1389

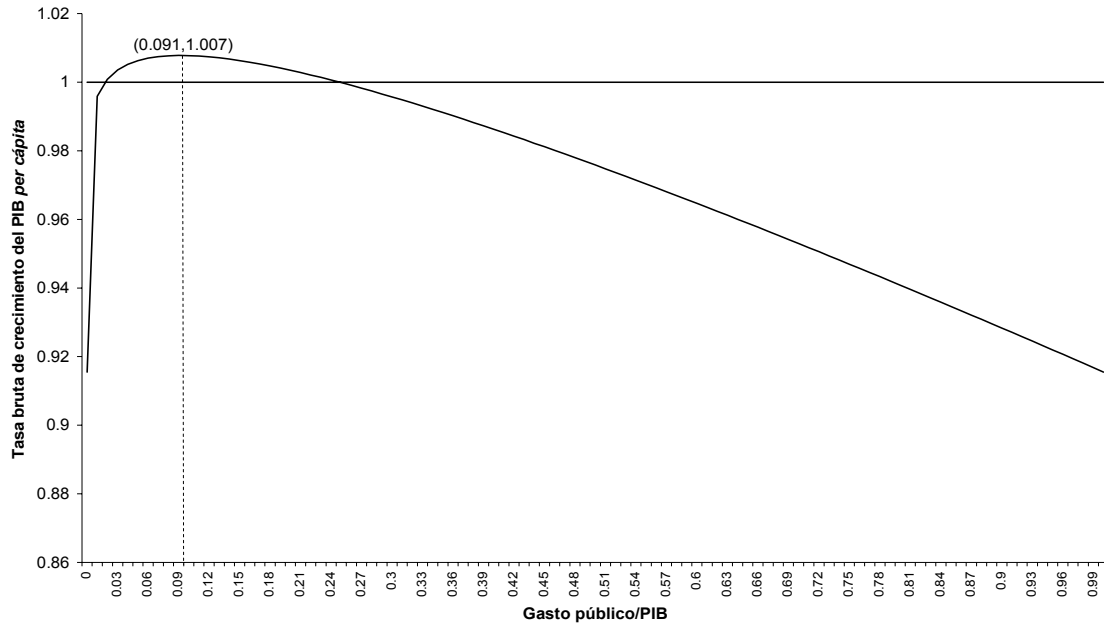
Cuadro 6. Resultados del modelo para los países ricos						
País	α_i	Estadístico asociado a α_i	β_i'	Estadístico asociado a β_i'	$[1 - (\rho + n)]_i$	ω_i
Australia	0.8963	6.1452	0.9579	7.1316	0.9279	0.2052
Austria	0.8930	6.6756	0.9717	7.7028	0.9417	0.1583
Bélgica	0.8827	6.6558	0.9759	7.6815	0.9459	0.1499
Canadá	0.8798	7.0462	0.9724	8.1020	0.9424	0.1638
Dinamarca	0.8807	6.9666	0.9798	8.0162	0.9498	0.1422
España	0.8989	5.4361	0.9654	6.3680	0.9354	0.1806
Estados Unidos	0.8988	5.4556	0.9743	6.3889	0.9443	0.1509
Finlandia	0.8843	6.3365	0.9729	7.3376	0.9429	0.1633
Francia	0.8780	6.4049	0.9551	7.4113	0.9251	0.2185
Grecia	0.9012	6.8487	0.9723	7.8892	0.9423	0.1447
Hong Kong	0.9296	6.3070	0.9717	7.3059	0.9417	0.1525
Irlanda	0.8914	5.9218	0.9596	6.8910	0.9296	0.2401
Israel	0.8776	6.4279	0.9675	7.4360	0.9375	0.2048
Italia	0.8996	7.5968	0.9656	8.6948	0.9356	0.1701
Japón	0.9107	6.5525	0.9959	7.5703	0.9659	0.0802
Noruega	0.8844	5.7070	0.9632	6.6597	0.9332	0.2019
Nueva Zelanda	0.9038	6.8975	0.9646	7.9418	0.9346	0.1552
Países Bajos	0.8788	6.1561	0.9858	7.1434	0.9558	0.1298
Portugal	0.9001	6.1867	0.9770	7.1763	0.9470	0.1508
Reino Unido	0.8934	6.7867	0.9582	7.8225	0.9282	0.2057
Singapur	0.9136	5.6431	0.9571	6.5909	0.9271	0.2200
Suiza	0.8973	5.7043	0.9778	6.6568	0.9478	0.1176
Suecia	0.8775	6.1610	0.9792	7.1486	0.9492	0.1417
Grupales	0.8935	6.1318	0.9705	7.1171	0.9405	0.1673

Los gráficos 3, 4 y 5 ilustran la relación que, en promedio y para todo el período 1982-1999, parecería predominar entre la tasa de crecimiento económico y la proporción gasto público/PIB en los diferentes países. En el caso de los países pobres, la tasa óptima de gasto, esto es, la que hace máxima su tasa de crecimiento económico, es 9,1% (recuérdese que nos estamos refiriendo a gasto de gobierno central excluyendo el pago de intereses), en tanto que la de los países “de clase media” (entre los cuales está Colombia) es 9%, y la de los países ricos 10,6%⁵. Otro resultado que se observa en estos gráficos es la estimación de la tasa máxima de crecimiento (promedio de grupo y para todo el período): ésta es menor

⁵ Este tipo de estimación no ha sido usual; lo usual ha sido estimar relaciones lineales entre crecimiento y gasto público. Así, una evaluación del modelo neoclásico de crecimiento (Solow-Swan sencillo y ampliado con capital humano y otros factores) para 98 países a lo largo del período 1960-1985 realizada por Knight *et al.* (1993) implicó que un aumento de 10% de la relación inversión pública en capital fijo/PIB generaba un aumento de 1% de la tasa de crecimiento del PIB por trabajador en países en desarrollo.

para países pobres (0,7% anual *per cápita*), que para países de ingreso medio (1,4%); y ésta, a su turno, es menor que la correspondiente a países ricos (2,7%)⁶.

Gráfico 3. Países pobres
 PIB *per cápita* menor o igual a 1.000 dólares 1995 en poder adquisitivo constante



⁶ Las tasas máximas de crecimiento se calcularon con los valores de A_{it} correspondientes al largo plazo. Estos valores, según se puede deducir fácilmente de la ecuación 3.a, son $\frac{\bar{\omega}_i}{1 - \psi_i}$.

Gáfico 4. Países de ingresos medios
 PIB per cápita mayor a 1.000 dólares y menor o igual a 12.100

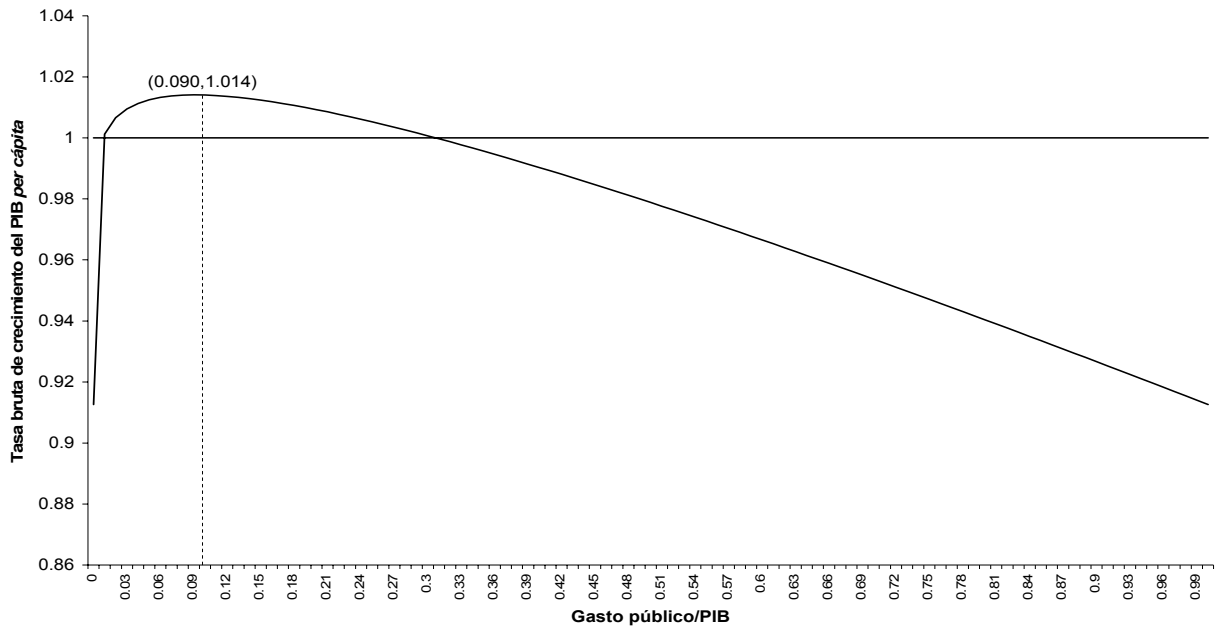
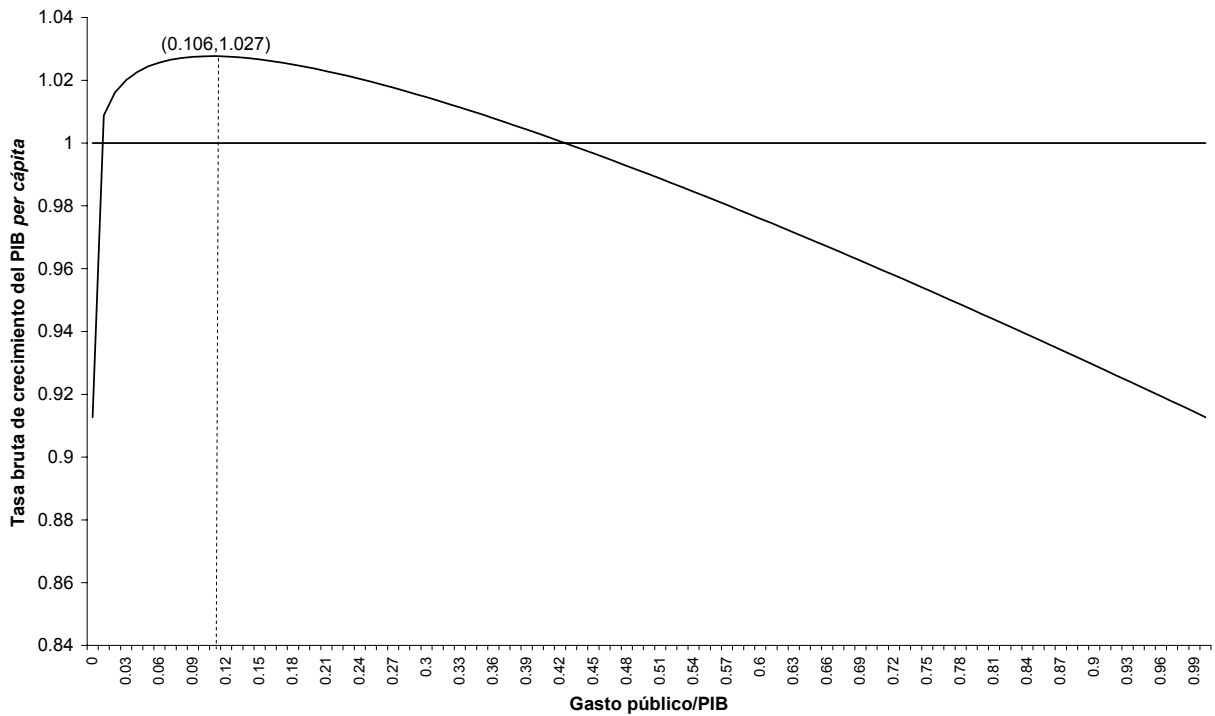


Gráfico 5. Países ricos
 PIB per cápita mayor a 12.100



Este último resultado es consistente con el modelo teórico, que no predice convergencia entre los productos *per cápita* de países pobres y ricos, y según el cual la tasa de crecimiento depende positivamente del parámetro de escala de la función de producción (véase de nuevo la ecuación 7.b).

Puesto que las tasas observadas de gasto (proporciones gasto público/PIB) y las de crecimiento económico tienen variaciones anuales, se puede deducir cuales son, en cada economía y en cada año, las brechas entre los valores observados de tales tasas y sus óptimos (en lo que sigue denominaremos tasas de crecimiento óptimas a las máximas: las correspondientes a los gráficos 3, 4 y 5). Esto es:

$$\text{Brecha del producto}_{it} = \gamma_{it}^{\text{Observado}} - \beta'_i \left\{ \alpha_i^2 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{1-\psi} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha_i} \right)} (1-\alpha_i)^{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} + [1-(\delta+n)]_i \right\}$$

$$\text{Brecha del gasto}_{it} = \left(\frac{g}{y} \right)_{it}^{\text{Observado}} - (1-\alpha_i)$$

Ambos óptimos teóricos son constantes en el tiempo; el óptimo del gasto lo es por la naturaleza de la estimación que correspondió al parámetro α , pero en el caso del óptimo del crecimiento fue necesario concebirlo como su valor de largo plazo, es decir, el máximo valor que la función permite tomar al crecimiento evaluada en el valor de largo plazo correspondiente al parámetro de escala $\bar{A}_i = \frac{\bar{\omega}_i}{1-\psi}$; por lo tanto las desviaciones del

producto con respecto a su óptimo teórico no sólo son responsabilidad de los desmanes del gasto público sino que también están explicados por *shocks* soportados por el factor de escala. De allí que el juicio más sensato del desempeño de una economía exija compararlo con el de sus pares.

Los siguientes dos gráficos (6 y 7) presentan, para cada uno de los tres grupos ya mencionados, las diferencias anuales entre los promedios de las tasas observadas de crecimiento y las óptimas obtenidas con los estimadores grupales.

Gráfico 6. Brecha del crecimiento
Brecha = observado menos óptimo de largo plazo

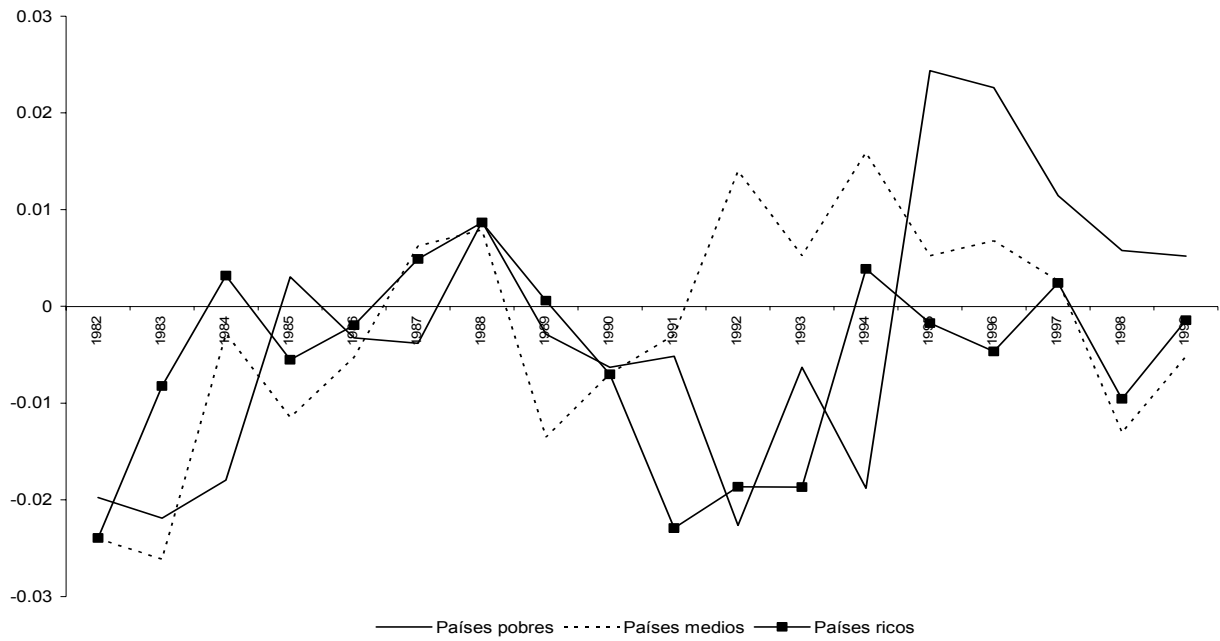
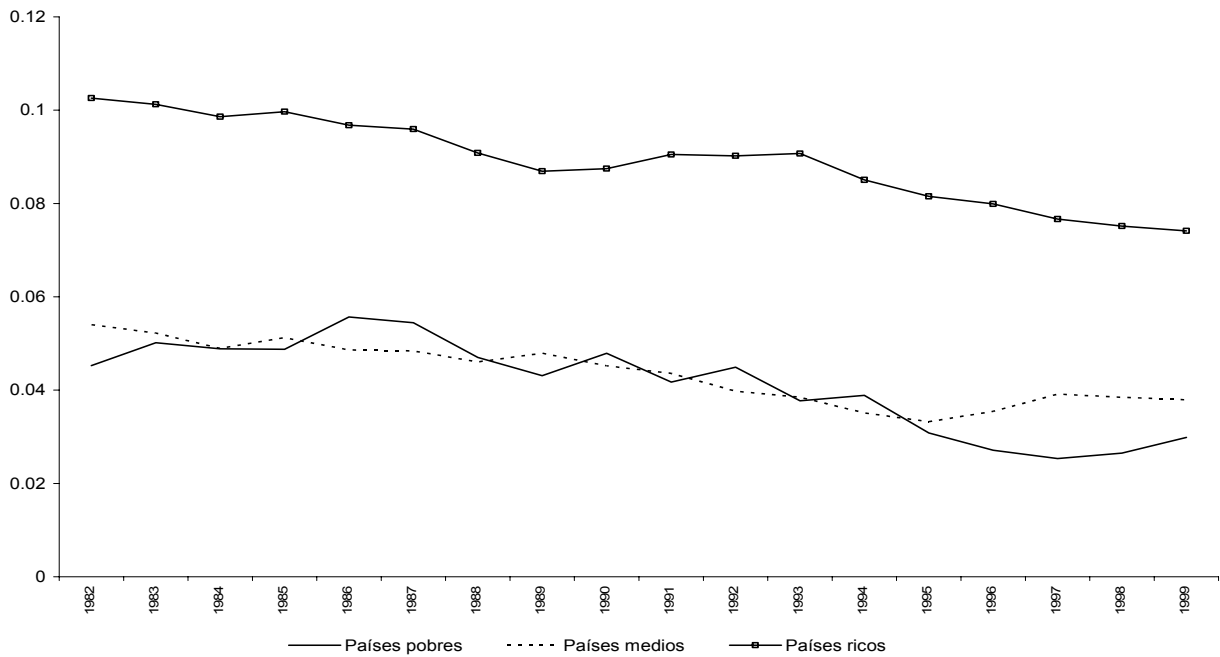


Gráfico 7. Brecha de gasto



V. El caso colombiano⁷

Aunque las cifras de gasto del gobierno central colombiano (sin intereses) incluidas en la base de datos de este trabajo no coinciden con las que se utilizan en Colombia (véase el gráfico 8) ambas series muestran, *grosso modo*, tendencias similares⁸. Por tanto podemos considerar válido el ejercicio de juzgar el caso colombiano con la misma métrica utilizada para interpretar las experiencias de los 82 países restantes de la muestra: un mismo modelo teórico, una misma base de datos elaborada con una metodología homogénea y un conjunto de estimaciones econométricas realizadas bajo un conjunto único de criterios.

⁷ Este análisis emplea los resultados del modelo *panel*, considerando los resultados de Colombia contra los de sus pares.

⁸ Las transformaciones ejecutadas sobre las series para permitir la comparación entre naciones pueden ser razones para tal disparidad.

Gráfico 8. Colombia: una comparación de los datos

Comparación de relaciones gasto/PIB:
Cifras Banco de la República *versus* Banco Mundial
(Gobierno central sin intereses)



El Gráfico 9 presenta las estimaciones para el caso colombiano. Según el modelo teórico, la mencionada base de datos y los resultados del ejercicio econométrico, a la economía colombiana le correspondería un nivel óptimo de gasto público (gobierno central) de 9,4% del PIB, y con tal gasto podría alcanzar la máxima tasa de crecimiento para su producto *per cápita*: 1,2% anual.

Gráfico 9. Relación entre gasto público y crecimiento económico: Colombia

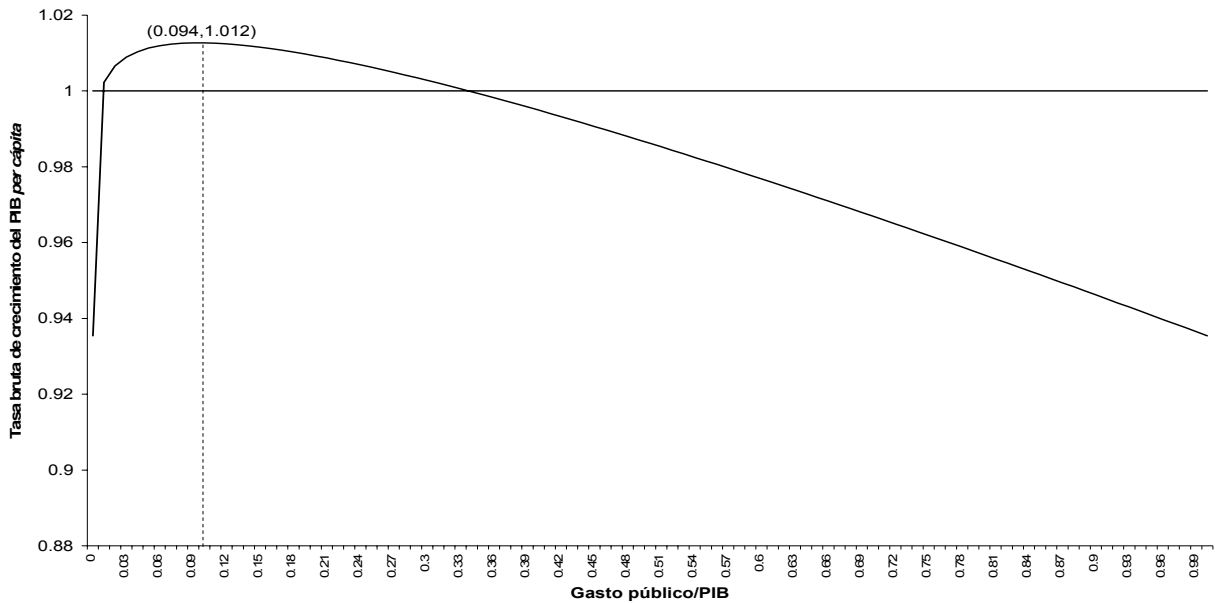
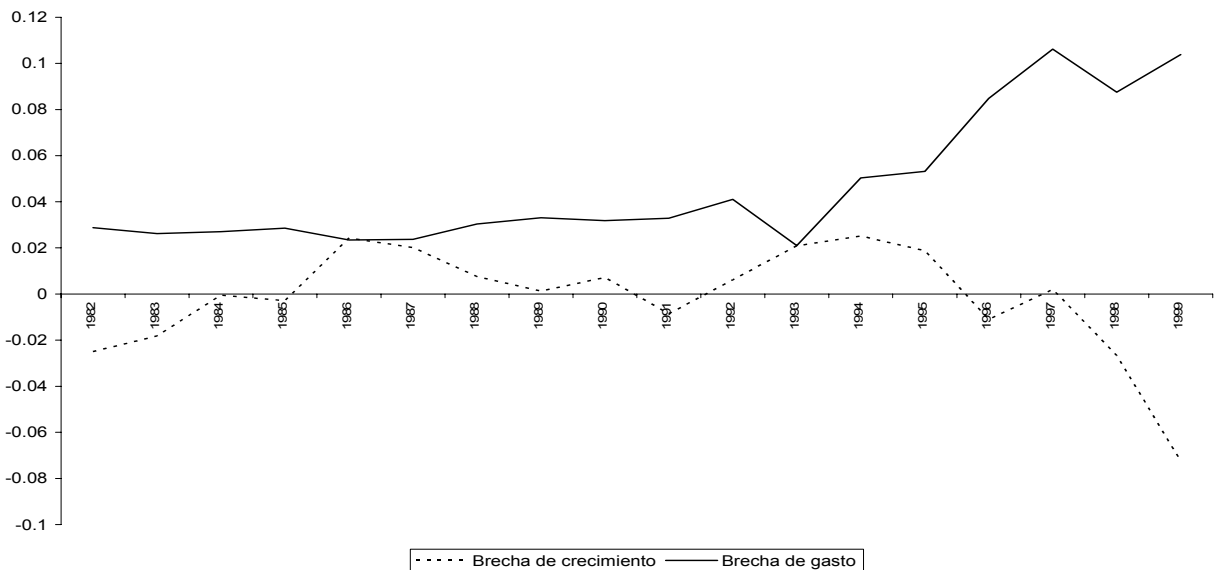


Gráfico 10. El caso colombiano
(Datos del Banco Mundial)
Brecha de gasto versus brecha de crecimiento



Al comparar las tasas observadas de crecimiento anual y de gasto con sus niveles óptimos encontramos lo siguiente: desde 1982, por lo menos, el gasto observado ha superado el nivel óptimo, y tal exceso se acentuó con posterioridad a 1993. De otra parte, la brecha de crecimiento (la diferencia entre la tasa observada y la correspondiente al nivel óptimo de

gasto) empezó a declinar un año después de aumentar la brecha de gasto, hasta volverse negativa a partir de 1997 (Gráfico 10).

El cuadro 7 muestra las magnitudes de las brechas de crecimiento económico y de gasto público tanto de Colombia como del grupo de países con los cuales podemos comparar a Colombia: el resto de países de ingreso medio. Como se observa allí, los excesos de gasto y las insuficiencias de crecimiento no han sido características exclusivas del caso colombiano; también han caracterizado el desempeño macroeconómico de sus pares. Por tanto, lo pertinente a la hora de juzgar el caso colombiano es examinar las diferencias entre las brechas de crecimiento y de gasto entre Colombia y el resto de los países de ingreso medio. Tales diferencias o “brechas relativas” son síntomas de que hubo algo específico al caso colombiano. En efecto, la brecha relativa de gasto público se tornó positiva en Colombia a partir de 1994, y la de crecimiento se hizo negativa desde 1996.

Cuadro 7. Brechas de crecimiento y gasto Colombia versus resto de países de ingreso medio						
Año	Colombia		Resto de países de ingreso medio		Diferencia entre Colombia y el resto de países de ingreso medio	
	Brecha de crecimiento	Brecha de gasto	Brecha de crecimiento	Brecha de gasto	Brecha de crecimiento	Brecha de gasto
1982	-0.0249645	0.02875031	-0.02401984	0.05492583	-0.00094466	-0.02617553
1983	-0.01822441	0.02621395	-0.02614095	0.05315465	0.00791653	-0.02694070
1984	-0.00052564	0.02706964	-0.00282846	0.04973519	0.00230281	-0.02266555
1985	-0.00292469	0.02863714	-0.01148485	0.05203203	0.00856016	-0.02339489
1986	0.02431977	0.02349163	-0.00525861	0.04951557	0.02957838	-0.02602393
1987	0.02013083	0.02370709	0.00625281	0.04928730	0.01387802	-0.02558020
1988	0.00751065	0.03039708	0.0079126	0.04659714	-0.00040195	-0.01620006
1989	0.00131474	0.03302105	-0.01352591	0.04843110	0.01484065	-0.01541004
1990	0.0071411	0.03181214	-0.00695916	0.04569961	0.01410027	-0.01388747
1991	-0.00861327	0.03292722	-0.00296265	0.04398371	-0.00565063	-0.01105649
1992	0.00613476	0.04108354	0.01399427	0.03973053	-0.00785951	0.00135301
1993	0.02085456	0.02101946	0.0052419	0.03911593	0.01561266	-0.01809647
1994	0.02519521	0.05037334	0.01591473	0.03457832	0.00928048	0.01579501
1995	0.01880538	0.05319989	0.00524686	0.03252720	0.01355853	0.02067269
1996	-0.01105209	0.08484101	0.00677376	0.03365872	-0.01782585	0.05118228
1997	0.00202489	0.10619753	0.00263514	0.03672739	-0.00061025	0.06947014
1998	-0.0267238	0.08757479	-0.01305076	0.03670768	-0.01367304	0.05086710
1999	-0.07253203	0.1038799	-0.00518982	0.03559939	-0.06734221	0.06828051

Fuente: Los datos reales se obtuvieron de la base de datos de Banco Mundial (*World Development Indicators*) y los valores teóricos con los que se realiza la comparación son cálculos de los autores a partir de estimaciones econométricas.

Gráfico 11. Brecha del crecimiento
Colombia versus el resto de países de ingreso medio

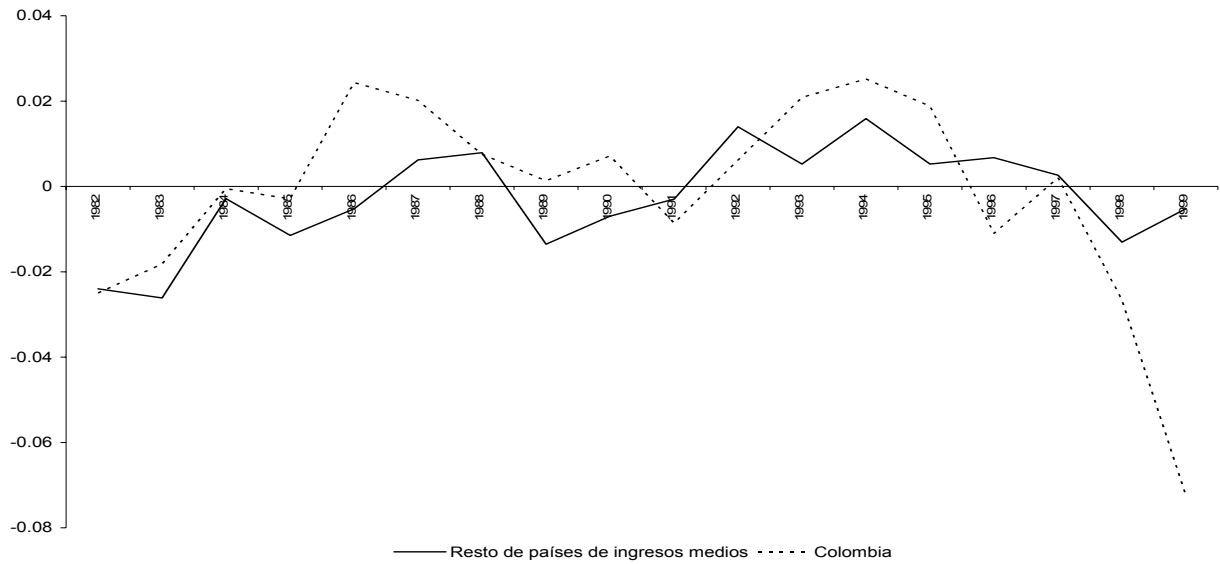
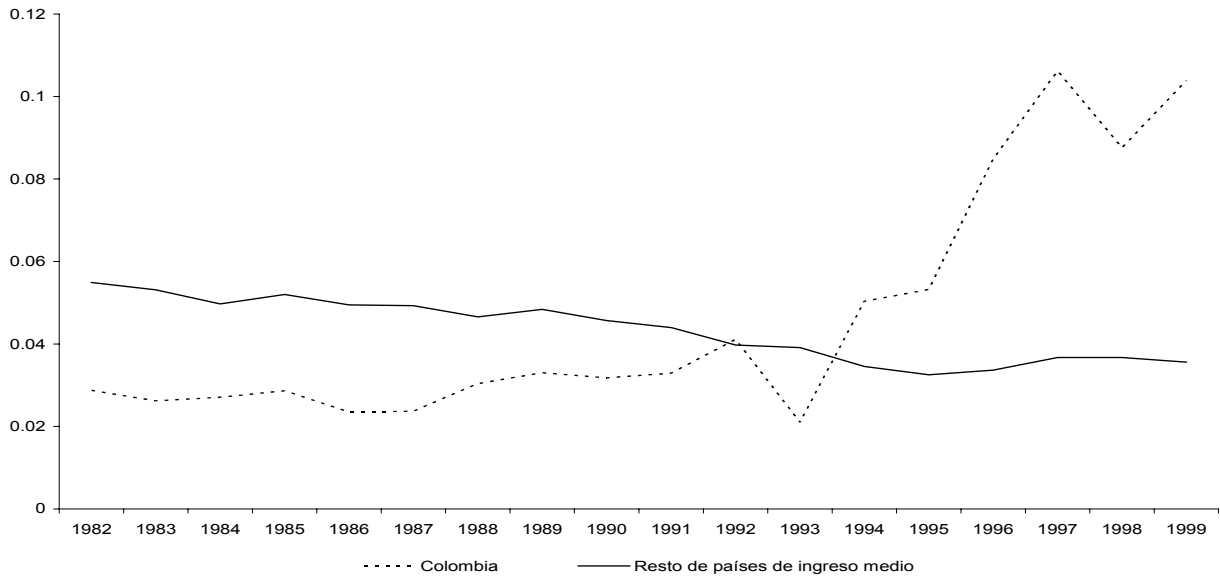


Gráfico 12. "Brecha de gasto"
Colombia versus el resto de países de ingreso medio

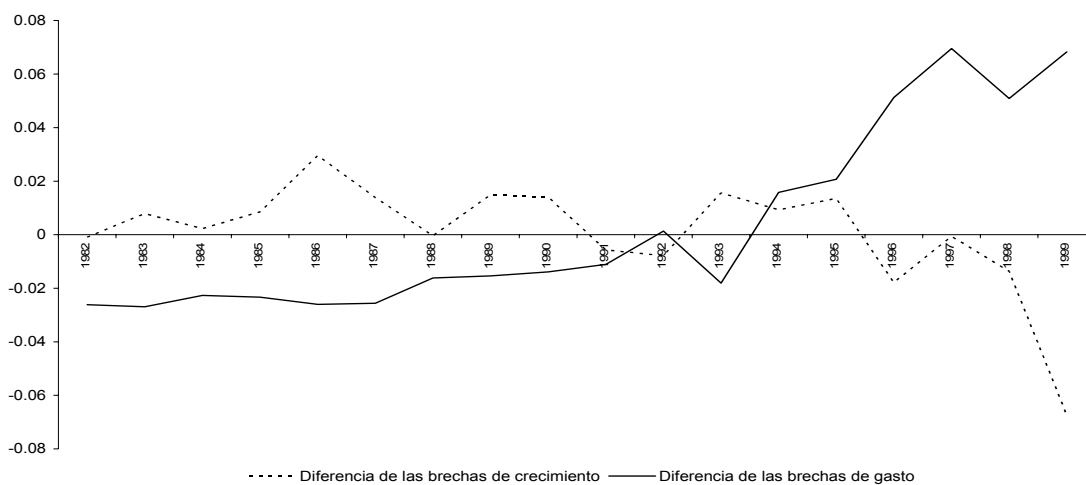


¿Fue el exceso de gasto público la causa de que la brecha de crecimiento se hubiese tornado negativa a partir de 1997? Al comparar los desempeños de Colombia y del resto de los países de ingreso medio, juzgándolos con el mismo patrón de medida (Cuadro 7 y gráficos

11, 12 y 13), podemos afirmar que: a) en Colombia se impuso, a partir de 1993, una tendencia de aumento del gasto público que no sólo lo hizo aún más excesivo sino en contravía del movimiento observado por el gasto de los demás países de ingreso medio, y b) a partir de 1995 la brecha de crecimiento colombiano se deterioró según se deduce de su comparación con la de los otros países de ingreso medio.

Teniendo en cuenta estos comportamientos disímiles de Colombia y de sus pares, parece posible afirmar que el aumento del gasto público colombiano fue, probablemente, una de las causas de la caída de la tasa de crecimiento de la economía colombiana durante la segunda mitad de los años 90⁹.

Gráfico 13. ¿Cómo juzgar a Colombia?
Brecha de gasto Colombia menos brecha de gasto resto de países de ingreso medio
versus
brecha de crecimiento Colombia menos brecha de crecimiento resto de países de ingreso medio



La afirmación anterior es refrendada por el análisis de la elasticidad del crecimiento con respecto al gasto, teniendo en cuenta el valor de largo plazo del factor de escala.

⁹ Los mecanismos mediante los cuales una expansión del gasto público reduce la tasa de crecimiento de la economía pueden ser múltiples en una economía abierta, y adicionales al contemplado por el modelo teórico (que es de economía cerrada). Por ejemplo, la expansión rápida del gasto público colombiano probablemente se juzgó inadecuada e insostenible y condujo a salidas netas de capitales, ataques a la “banda cambiaria” a mediados de 1998, en junio y en septiembre de 1999 (Colombia tuvo hasta septiembre de 1999 un sistema de techo y piso para una tasa nominal de cambio que podía fluctuar en su interior) y contracciones monetarias endógenas dadas la existencia de la banda y una tasa de cambio pegada a su techo. Sobre estos sucesos y su origen parcial en la expansión del gasto público véase el “Informe de la Junta Directiva (del Banco de la República) al Congreso de la República” de marzo de 2000.

La elasticidad es:

$$\frac{\partial \gamma_{it}}{\partial \left(\frac{g}{y}\right)_{it}} \cdot \frac{\left(\frac{g}{y}\right)_{it}}{\gamma_{it}} = \left[\beta_i' \left(\frac{\varpi_i}{1-\psi} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} \right] \left[\frac{\left(\frac{g}{y}\right)_{it}^{\frac{1}{\alpha_i}}}{\gamma_{it}} \right] \left[\frac{(1-\alpha_i)}{\left(\frac{g}{y}\right)_{it}} - 1 \right]$$

$$= \left[\beta_i' \left(\frac{\varpi_i}{1-\psi} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} \right] \left[\frac{\left(\frac{g}{y}\right)_{it}^{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}}}{\gamma_{it}} \right] \left[(1-\alpha_i) - \left(\frac{g}{y}\right)_{it} \right]$$

En el cuadro 8 presentamos los valores promedio para los años noventa.

Cuadro 8. Elasticidades medias del crecimiento al gasto público 1990-99	
Individuo	Elasticidad
Países Pobres	-0.00213073
Países de ingreso medio	-0.00271204
Países ricos	-0.00608496
Colombia	-0.00865205

VI. Resumen y conclusiones

La teoría económica indica que el gasto público puede ser productivo pero que más allá de un cierto nivel es un freno a la producción¹⁰. El modelo teórico de Barro expresa de una forma específica esta tesis al establecer una curva para la tasa de crecimiento del producto *per cápita* en función de la proporción gasto público/producto: si el gasto público es inferior o superior a una cierta magnitud la tasa de crecimiento de la economía será inferior a la máxima, y si el gasto público es tal magnitud se alcanza la tasa máxima de crecimiento. En las páginas anteriores se resumió un trabajo de evaluación econométrica de tal modelo. La estimación fue de tipo *panel* utilizando datos de frecuencia anual de 83 países (con

¹⁰ Con respecto a esto la teoría económica es más general: “The appropriate comparison, as public finance economists have known since Pigou (1928), is between the benefits that would flow from the increased spending and the cost of financing that spending, including the deadweight losses associated with raising that revenue and with the particular form of spending.” (Feldstein, 1996, p. 3).

poblaciones mayores a 2 millones en 1980) a lo largo del período 1982-1999. Los resultados de la estimación permiten considerar verosímil el modelo.

Cuando se juzgan los crecimientos del gasto público y del producto tanto de Colombia como de otros países de ingreso medio a la luz de las estimaciones surge una conclusión: el gasto público colombiano, que desde los años 80 ya era excesivo con respecto a lo requerido para hacer máxima la tasa de crecimiento del producto, se hizo aún más excesivo durante la segunda mitad de los años 90, exhibiendo un comportamiento alcista contrario al del conjunto de los países de ingreso medio, y, por tanto, según el modelo, contribuyó a la reducción de la tasa de crecimiento de la economía observada con posterioridad a 1997.

Referencias

- Barro, Robert (1990); "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part II.
- Barro, Robert, y Xavier Sala-i-Martin (1995); *Economic Growth*, McGraw-Hill.
- Bilmes, Jeff e International Computer Science Institute (1998); *A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models*, International Computer Science Institute; disponible en: <http://www.cs.ucsb.edu/~cs281b/papers/em.pdf>.
- Breitung, Jörg y Michael Lechner (1997); "Alternative GMM methods for nonlinear panel data models", *Research Projects- Econometric Methods for Nonlinear Panel Data Models*; disponible en: [http://www.siaw.unisg.ch/org/siaw/web.nsf/SysWebRessources/ML_1995_L_03/\\$FILE/95103.pdf](http://www.siaw.unisg.ch/org/siaw/web.nsf/SysWebRessources/ML_1995_L_03/$FILE/95103.pdf)
- Comisión de Racionalización del Gasto y de las Finanzas Públicas (1997); *Informe final. Tema I. Diagnóstico y principales recomendaciones*, República de Colombia, Ministerio de Hacienda y Crédito Público.
- Feldstein, Martin (1996); "How Big Should Government Be?", *NBER Working Paper 5868* (diciembre).
- Gelfand, Alan E., y Adrian F. M. Smith (1990), "Sampling-based approaches to calculating marginal densities", *Journal of the American Statistician Association*, Vol. 85, No. 410.

- Gilbert, Scott (2001); "Testing the distribution of error components in panel data models", *Discussion Paper Series-Southern Illinois University*; disponible en: http://www.siu.edu/~econ/wp_series/wp2001/gilbert0113.pdf
- Greene, William (2001); "Fixed and random effects in nonlinear models"; disponible en: <http://www.stern.nyu.edu/~wgreene/panel.pdf>
- Hamilton, James (1990); "Analysis of time series subject to changes in regime", *Journal of Econometrics*, Vol. 45, No. 1-2.
- Hansen, Henrik, y Jurgen A. Doornik (1994); "An omnibus test for univariate and multivariate normality", *Economics Papers Series (Nuffield College, University of Oxford)*; disponible en: <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik/papers/normal2.pdf>
- Honoré, Bo E. (2002); "Non-linear models with panel data", *cemmap working paper*; disponible en: <http://cemmap.ifs.org.uk/docs/cwp1302.pdf>.
- Hsiao, Cheng (1990); *Analysis of panel data*, Cambridge University Press.
- Knight, Malcolm; Norman Loayza, y Delano Villanueva (1993); "Testing the Neoclassical Theory of Economic Growth: A Panel Data Approach", *IMF Staff Papers*, Vol. 40, No. 3.
- Lechner, Michael (1995); "Some specification test for probit models estimated on panel data", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 13, No. 4.
- Leuchtman, Ulrich (1998); "Rutina [NORMTEST.SRC](#) para WinRats", disponible en: http://www.estima.com/procs_tests.shtml.
- Lozano, Ignacio (2001); "Colombia's Public Finance in the 1990s: A Decade of Reforms, Fiscal Imbalance, and Debt", *Borradores de Economía (B. de la R.)*, No. 174.
- Nielsen, Soren Feodor (2000); "On simulated EM algorithms", *Journal of Econometrics*, Vol. 96, No. 2.
- Obstfeld, Maurice, y Kenneth Rogoff (1996); *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press.
- Ospina, Pedro Nel (1997); "Ajuste fiscal: ¿cuando y como?", *Debates de Coyuntura Económica (Fedesarrollo)*, No. 42.
- Posada, Carlos Esteban y Luis Eduardo Arango (2000); "¿Podremos sostener la deuda pública?", *Borradores de Economía (B. de la R.)*, No. 165.

- Posada, Carlos Esteban, y Wilman Gómez (2002); “Crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano”, *Borradores de Economía* (B. de la R.), No. 218.
- Romer, David (1996); *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.
- Sala-i-Martin, Xavier (2000); *Apuntes de crecimiento económico* (segunda edición), Antoni Bosch.
- Tahmiscioglu, A. Kamil (2001); “Intertemporal variation in financial constraints on investment: A time-varying parameter approach using panel data”, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 19, No. 2.
- Tanizaki, Hisashi (2000); “The time-varying parameter model revisited”, *Kobe University Economic Review*, Vol. 45; disponible en: <http://ht.econ.kobe-u.ac.jp/~tanizaki/cv/working/tvpm.pdf>.
- Tanizaki, Hisashi y John Geweke (2002); “Bayesian estimation of state space models using the metropolis-hastings algorithm within Gibbs sampling”, versión facilitada por H. Tanizaki.
- Uribe, José Darío (1997); “Hacia un ajuste fiscal sostenible”, *Debates de Coyuntura Económica* (Fedesarrollo), No. 42.

Anexo A. La secuencia de pasos para la estimación¹¹

El problema de estimación que se plantea es complejo; por tal razón se optó por escribir un segundo anexo (Anexo B) que describe el desarrollo de la estimación máximo-verosímil con el uso de algoritmos auxiliares¹². Por ello, en el presente anexo se narra la secuencia de pasos seguidos al estimar el modelo sin ahondar en la metodología econométrica. En primer lugar se presentan los resultados de las pruebas de raíz unitaria sobre las variables empleadas. La prueba ejecutada fue diseñada para *panel*: la prueba Im-Pesaran-Shin (IPS), cuya idea es la siguiente:

$$\Delta y_{i,t} = \sum_{l=1}^k \rho_{i,l} y_{i,t-l} + \alpha_i + \varepsilon_{i,t}; \quad H_0 : \rho_i = 0, \forall i, l,$$

¹¹ José Fernando Escobar es el autor de los anexos A y B de este documento.

¹² Las estimaciones se hicieron con la herramienta *OPTIMUN* de *MATLAB*.

Para la cual $H_0 : \rho_{i,l} = 0$ es equivalente a la existencia de una raíz unitaria. El rezago máximo escogido fue de 4.

	Estadístico de prueba	P - Valor
Crecimiento del PIB per cápita	-19.968	0.000
La relación gasto/PIB	-111.904	0.000

La estimación se inicia con lo que denominaremos el modelo de mayor generalidad, el cual se define como:

$$\gamma_{it} = \beta'_{it} \left\{ \alpha_{it} A_{it}^{\frac{1}{\alpha_{it}}} (1 - \tau_{it}) \tau_{it}^{\frac{1-\alpha_{it}}{\alpha_{it}}} + [1 - (\delta + n)]_{it} \right\} + e_{it};$$

con:

$$A_{it} = \bar{\omega}_{Ai} + \omega_{At} + \psi_{Ai} A_{it-1} + u_{Ait}$$

$$\beta'_{it} = \bar{\omega}_{\beta i} + \omega_{\beta t} + \psi_{\beta i} \beta'_{it-1} + u_{\beta it}$$

$$\alpha_{it} = \bar{\omega}_{\alpha i} + \omega_{\alpha t} + \psi_{\alpha i} \alpha_{it-1} + u_{\alpha it}$$

$$\phi_{it} = \bar{\omega}_{\phi i} + \omega_{\phi t} + \psi_{\phi i} \phi_{it-1} + u_{\phi it}, \text{ con } \phi = [1 - (\delta + n)]$$

Bajo esta formulación es posible probar directamente la mejor especificación del modelo, pues con la obtención de la matriz de varianzas y covarianzas para u_{kit} se pueden generar pruebas del tipo de razón de la verosimilitud estándares¹³ sobre la significancia y igualdad entre individuos para los coeficientes; la ausencia de mayor desarrollo teórico tras estas pruebas nos inclinó a realizar un ejercicio de Monte Carlo para la potencia de la misma conservando el tamaño de muestra y con un número total de 5000 replicaciones; la potencia obtenida fue de 0.972. A continuación, se presentan tablas resumen con los resultados de las pruebas realizadas para obtener la especificación final del modelo.

Especificación de A_{it}		
Prueba	Estadístico de prueba	Valor P
$H_0 : \bar{\omega}_{Ai} = \bar{\omega}_{Aj}, \forall i, j$	28.977	0.000
$H_0 : \bar{\omega}_{Ai} = 0, \forall i$	77.186	0.000
$H_0 : \omega_{At} = \omega_{At'}, \forall t, t'$	1.005	0.189

¹³ Es decir, estimado el modelo bajo la hipótesis nula como restricción y bajo la ausencia de tal restricción.

$H_0 : \psi_{Ai} = \psi_{Aj}, \forall i, j$	0.158	1.000
$H_0 : \psi_{Ai} = 0$	45.698	0.000

Especificación de β'_u		
Prueba	Estadístico de prueba	Valor P
$H_0 : \bar{\omega}_{\beta i} = \bar{\omega}_{\beta j}, \forall i, j$	63.558	0.000
$H_0 : \bar{\omega}_{\beta i} = 0, \forall i$	69.874	0.000
$H_0 : \omega_{\beta t} = \omega_{\beta t'}, \forall t, t'$	0.075	1.00
$H_0 : \psi_{\beta i} = \psi_{\beta j}, \forall i, j$	0.258	0.665
$H_0 : \psi_{\beta i} = 0$	0.114	0.756

Especificación de α_{it}		
Prueba	Estadístico de prueba	Valor P
$H_0 : \bar{\omega}_{\alpha i} = \bar{\omega}_{\alpha j}, \forall i, j$	59.221	0.000
$H_0 : \bar{\omega}_{\alpha i} = 0, \forall i$	82.357	0.000
$H_0 : \omega_{\alpha t} = \omega_{\alpha t'}, \forall t, t'$	0.489	0.576
$H_0 : \psi_{\alpha i} = \psi_{\alpha j}, \forall i, j$	0.744	0.456
$H_0 : \psi_{\alpha i} = 0$	0.651	0.487

Especificación de ϕ_{it}		
Prueba	Estadístico de prueba	Valor P
$H_0 : \bar{\omega}_{\phi i} = \bar{\omega}_{\phi j}, \forall i, j$	77.886	0.000
$H_0 : \bar{\omega}_{\phi i} = 0, \forall i$	97.548	0.000
$H_0 : \omega_{\phi t} = \omega_{\phi t'}, \forall t, t'$	0.513	0.523
$H_0 : \psi_{\phi i} = \psi_{\phi j}, \forall i, j$	0.844	0.387
$H_0 : \psi_{\phi i} = 0$	0.726	0.415

De las pruebas anteriores se desprende que la siguiente especificación del modelo es la óptima:

$$\gamma_{it} = \beta'_i \left\{ \alpha_i A_{it}^{\frac{1}{\alpha_i}} (1 - \tau_{it}) \tau_{it}^{\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}} + [1 - (\delta + n)]_i \right\} + e_{it};$$

Con:

$$A_{it} = \varpi_i + \psi A_{it-1} + u_{it}$$

Pero aún queda la pregunta de la clasificación de α_i , β'_i y $[1 - (\delta + n)]_i$. Para determinar si corresponde a efectos fijos o aleatorios se obtienen las correlaciones con las variables explicativas, y dependiendo de si son o no estadísticamente iguales a cero se opta por efectos fijos o aleatorios respectivamente; esto en virtud de que la diferenciación teórica realizada sobre estos dos tipos de efectos implica una correlación diferente de cero para los efectos fijos; veamos:

Correlaciones con $\left(\frac{g}{y}\right)_{it}$	
Parámetro	Correlación
α_i	0.896 (efectos fijos)
β'_i	0.746 (efectos fijos)
$[1 - (\delta + n)]_i$	0.001 (efectos aleatorios)

Dada la caracterización completa de la función que se obtiene, al determinar la clasificación de los efectos asociados a los parámetros restantes del modelo se realiza la estimación cuyos resultados se presentan en el cuerpo principal del trabajo. Para encontrar la especificación del modelo se supuso en todo momento normalidad en los errores; la evidencia permite considerar plausible esta hipótesis. Veamos, primero, las pruebas de raíz unitaria (IPS) para los errores y, luego, dos pruebas de normalidad sobre estos.

	Estadístico de prueba	P - Valor
Los residuales del modelo $\hat{e}_{i,t}$	-50.496	0.000
Los residuales del cambio técnico $\hat{u}_{i,t}$	-28.860	0.000

Las pruebas de normalidad que se presentan toman dos diferentes enfoques. El primero tiene en cuenta la naturaleza *panel* de los errores, y corresponde al desarrollo de Gilbert (2001). El segundo enfoque es el de la prueba *Omnibus* de normalidad multivariada,

propuesta por Hansen y Doornik (1994)¹⁴, para la cual se ha de considerar el vector de los errores generados por cada individuo como una serie independiente. Ambos enfoques se concentran en la comparación de las “kurtosis” (“apuntamiento”) y asimetrías observadas con los valores teóricos que se desprenden de una distribución normal.

Prueba de Gilbert para $\hat{e}_{i,t}$	
Prueba	Estadístico de prueba
H_0 : Desviación es igual a cero	1.369 *
H_0 : Kurtosis es igual a tres	1.557 *
* El valor de rechazo al 1% es de 2.658	

Prueba Omnibus para $\hat{e}_{i,t}$	
Prueba	Estadístico de prueba
H_0 : Normalidad	2.489 *
* El valor de rechazo al 5% es de 1.958	

Prueba de Gilbert para $\hat{u}_{i,t}$	
Prueba	Estadístico de prueba
H_0 : Desviación es igual a cero	1.874 *
H_0 : Kurtosis es igual a tres	2.569 *
* El valor de rechazo al 1% es de 2.658	

Prueba Omnibus para $\hat{u}_{i,t}$	
Prueba	Estadístico de prueba
H_0 : Normalidad	1.965 *
* El valor de rechazo al 5% es de 1.958	

Pese a que las pruebas estadísticas y la intuición económica corroboran la presencia de un componente dinámico en la estimación de *panel*, específicamente en el coeficiente de cambio técnico, se realizó la estimación de un modelo alternativo de especificación más sencilla que ignorase tal componente. Este modelo alternativo concibe todos los

¹⁴ Se empleó la rutina de *RATS* generada por Ulrich Leuchtmann (1998).

coeficientes como determinados por un efecto fijo y conserva solamente el término de error en el cambio técnico. Los resultados de tal especificación no resultaron satisfactorios en términos de la significancia de los parámetros ni del buen comportamiento de los errores.

Anexo B. Una metodología para *panel* no lineal con combinación de parámetros

El presente anexo propone un método que emplea resultados de uso común en las series de tiempo, pero cuya validez no resulte comprometida al pasar al análisis *panel*. Con el objetivo de introducir mayor generalidad se incluyen nuevas fuentes de posible heterogeneidad en los parámetros y una función objetivo no lineal.

La función a estimar describe una relación no lineal genérica entre los parámetros y las variables pero sugiere que el término de error que afecta directamente la función es separable de la misma:

$$(1) \quad y_{it} = h(x_{it}, \lambda_{it}) + e_{it}$$

Siendo x_{it} un vector de k variables explicativas, y_{it} la variable independiente, λ_{it} el vector de p coeficientes de la función y e_{it} el término de error.

Para poder realizar una estimación de la ecuación (1) es necesario suponer alguna regla de comportamiento de los parámetros procurando perder la menor generalidad posible; la regla de comportamiento supuesta es una combinación de las más comúnmente empleadas:

$$(2) \quad \lambda_{it} = \psi_i \lambda_{it-1} + u_t + v_i + \mu_{it}$$

Siendo μ_{it} un término de error; es común en la literatura tanto de series de tiempo como de *panel* considerarlo como no correlacionado con el término de error del modelo, es decir, $Cov(\mu_{it}, e_{js}) = 0 \forall s, t, i, j$; u_t y v_i son efectos (fijos o aleatorios, tal como los supone el modelo propuesto por Hsiao (1990), y ψ_i es una matriz diagonal $p \times p$.

La complicación adicional más importante de nuestro modelo a estimar es la identificación de diferentes fuentes de heterogeneidad de los coeficientes. Por esta razón es deseable un método que permita solucionar de forma independiente dos problemas: la no linealidad de la función objetivo y los múltiples orígenes de la heterogeneidad de los coeficientes. A continuación se explicará el método a seguir.

Un resultado de uso común en el análisis de series de tiempo, al cual recurre Tahmiscioglu (2001) para su ejercicio de *panel*, es el siguiente: la probabilidad conjunta de un variable observable y de una no observable, siendo ésta última el conjunto de los coeficientes (que

recogen una heterogeneidad no observable), es igual a la probabilidad de la variable no observable multiplicada por la probabilidad de la variable observable condicionada a la no observable. La proposición anterior puede ser escrita de la siguiente manera:

$$(3) \quad P(Y_{NT}, \Lambda_{NT}) = P(Y_{NT} | \Lambda_{NT}) P(\Lambda_{NT} | u_t, v_i)$$

Siendo N y T el número de individuos y de observaciones en el tiempo, respectivamente, y

$$\Lambda_{NT} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NT} \end{bmatrix}, \quad Y_{NT} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N1} & \cdots & y_{NT} \end{bmatrix}$$

A su vez:

$$(4) \quad P(\Lambda_{NT} | u_t, v_i) = \left\{ \prod_{i=1}^N P_\lambda(\lambda_{i0}) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^T \prod_{i=1}^N P_\lambda(\lambda_{it} | \lambda_{i,t-1}, u_t, v_i) \right\}$$

$$(5) \quad P(Y_{NT} | \Lambda_{NT}) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N P_y(y_{it} | \lambda_{it})$$

La ecuación (5) corresponde a un problema ya antes resuelto, a saber, la obtención de lo que matemáticamente sería equivalente a una función de verosimilitud muestral para la función no lineal (1)¹⁵; la (4) supone un ejercicio de mayor complejidad.

Para obtener un valor específico de $P_y(y_{it} | \lambda_{it})$ se necesita realizar algún supuesto sobre la distribución de los errores e_{it} y μ_{it} ; el supuesto es el tracional: los errores son normales.

Por tanto:

$$(6) \quad P(Y_{NT} | \Lambda_{NT}) = \prod_{i=1}^T \prod_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{e_{it}}^2}} \right] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sigma_{e_{it}}^2} (y_{it} - h(x_{it}, \lambda_{it}))^2 \right] \right\}$$

$$(7) \quad P(\Lambda_{NT} | u_t, v_i) \\ = \prod_{i=1}^N P_\lambda(\lambda_{i0}) \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi|\mathbf{Q}_i|}} \right] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v})' \mathbf{Q}_i^{-1} (\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v}) \right] \right\}$$

Siendo $\bar{u} = E(u_t)$, $\bar{v} = E(v_i)$ y \mathbf{Q}_i la matriz de varianzas-covarianzas de los términos $(u_t - \bar{u}) + (v_i - \bar{v}) + \mu_{it}$ correspondientes a cada individuo; por necesidad de simplificación del cómputo se supondrá que tal matriz es diagonal.

Por lo anterior se puede re-escribir la ecuación (3) así:

¹⁵ En Greene (2001) se pueden encontrar soluciones a este tipo de problemas. Los ejercicios realizados por Greene son más complicados pues introducen el término de error en la función no lineal.

$$\begin{aligned}
(3.a) \quad & P(Y_{NT}, \Lambda_{NT}) \\
&= \left\{ \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{e_{it}}^2}} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sigma_{e_{it}}^2} (y_{it} - h(x_{it}, \lambda_{it}))^2 \right] \right] \right\} \\
&\bullet \left\{ \prod_{i=1}^N P_{\lambda}(\lambda_{i0}) \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi|\mathbf{Q}_i|}} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v})' \mathbf{Q}_i^{-1} (\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v}) \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

O, luego de aplicar logaritmo natural:

$$\begin{aligned}
(3.b) \quad \ln[P(\Lambda_{NT}, Y_{NT})] &= -NT \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^N P_{\lambda}(\lambda_{i0}) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N |\mathbf{Q}_i| \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left[(\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v})' \mathbf{Q}_i^{-1} (\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{i,t-1} - \bar{u} - \bar{v}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sigma_{e_{it}}^2 \right\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_{e_{it}}^2} (y_{it} - h(x_{it}, \lambda_{it}))^2 \right]
\end{aligned}$$

Sin embargo, una maximización directa de (3.b) es imposible, por el hecho de que λ_{it} es un vector variables no observables, razón por la cual es necesario hacer algunas consideraciones adicionales sobre el comportamiento de λ_{it} ; en especial suponer algo acerca de $P(\lambda_{it} | \Lambda_{it-1}, \Lambda_{it+1}^*, Y_{NT})$, siendo Λ_{it-1} y Λ_{it+1}^* el pasado y el futuro del conjunto de la variable, es decir, $\Lambda_{it-1} = \{\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_{it}\}$ y $\Lambda_{it+1}^* = \{\lambda_{it+1}, \lambda_{it+2}, \dots, \lambda_{iT}\}$, con el objeto de determinar el modo en que se realizarán las extracciones aleatorias bajo muestreo de Gibbs. Es posible demostrar que de los supuestos anteriores [Tanizaki (2002)] se desprende que:

$$P(\lambda_{it} | \Lambda_{it-1}, \Lambda_{it+1}^*, Y_{NT}) \propto \begin{cases} P_{\lambda}(\lambda_{it} | \lambda_{i0}, u_0, v_i) & \text{si } t = 0 \text{ (primer valor)} \\ P_y(y_{it} | \lambda_{it}) P_{\lambda}(\lambda_{it} | \lambda_{i,t-1}, u_t, v_i) P_{\lambda}(\lambda_{it+1} | \lambda_{it}, u_t, v_i) & \text{si } t = 1, 2, \dots, T-1 \\ P_y(y_{iT} | \lambda_{iT}) P_{\lambda}(\lambda_{iT} | \lambda_{i,T-1}, u_T, v_i) & \text{si } t = T \text{ (último valor)} \end{cases}$$

A partir de lo cual se puede decir que $\lambda_{it} | \Lambda_{it-1}, \Lambda_{it+1}^*, Y_{NT}$ distribuye normal entre individuos con media y varianza cambiantes en el tiempo, determinadas por la formulación arriba descrita, lo cual es útil para obtener valores aleatorios de λ_{it} compatibles con su distribución; estos valores se aproximan asintóticamente a los reales dados los resultados de Gelfant y Smith (1990) y los más recientes de Nielsen (2000) para el muestreo de Gibbs¹⁶ asumiendo como especificación previa la distribución uniforme de los parámetros en el origen. Para observar si estas especificaciones determinaban fuertemente los resultados se tomaron 100 alternativas posibles; en ninguno de los casos los resultados fueron significativamente diferentes.

Persiste el problema de maximizar una función de verosimilitud que depende también de valores no observados; por tanto la maximización de la misma debe hacerse a través de su expectativa condicionada a las variables observadas, pues pese a que el muestreo de Gibbs permite extraer unos valores factibles estos deben hacer máxima la función de verosimilitud, en otras palabras. El proceso restante se lleva a cabo mediante el algoritmo EM (“expectations maximization”), bajo el cual el problema se convierte en:

$$Max_{\sigma_{eit}^2, Q_i} E(\ln[P(\Lambda_{NT}, Y_{NT}) | Y_{NT}])$$

Obteniéndose que:

$$(8) \quad \sigma_{eit}^2 = E[(y_{it} - h(x_{it}, \lambda_{it}))^2 | Y_T]$$

$$(9) \quad Q_i = E[(\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{it-1} - \bar{u} - \bar{v})(\lambda_{it} - \psi_i \lambda_{it-1} - \bar{u} - \bar{v})' | Y_T]$$

$$(10) \quad \psi_i = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(\lambda_{it} \lambda'_{it-1} | Y_T) \right] \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(\lambda_{it-1} \lambda'_{it-1} | Y_T) \right]^{-1}$$

Los resultados (8), (9) y (10) exigirían cálculos de dimensiones titánicas, defecto típico al usar máxima verosimilitud¹⁷. Para obviar lo anterior se hizo el siguiente supuesto:

- σ_{eit}^2 es la misma en el tiempo.

Desde luego, debe tenerse al menos alguna intuición acerca de la ventaja del supuesto arriba mencionado, es decir, su aporte a una mayor facilidad en los procedimientos de cómputo sin una pérdida demasiado grande de generalidad. El supuesto utilizado es

¹⁶ Este método podría describirse de modo sintético como un muestreo recursivo basado en las distribuciones teóricas que se puedan obtener.

¹⁷ Para un análisis de estas dificultades véase Breitung y Lechner (1997), Lechner (1995) y Honoré (2002).

frecuente en la literatura de análisis de *panel*¹⁸, pues no es tan restrictivo como suponer que tal varianza es igual entre individuos, y permite una ganancia considerable en la ecuación 8 en términos de disminución del número de las ecuaciones que ésta describe. Con tal supuesto, la ecuación 8 se re-escibe así:

$$(8.a) \quad \sigma_{\epsilon_i}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[(y_{it} - h(x_{it}, \lambda_{it}))^2 | Y_T]$$

El proceso sigue entonces una estructura recursiva: obtiene valores para los parámetros con las distribuciones teóricas empleadas bajo muestreo de Gibbs y, las extracciones aleatorias son evaluadas en las ecuaciones que designan el máximo de la función de la verosimilitud muestral obtenidas con el algoritmo EM generando con estas el valor de la función de verosimilitud; tal proceso se repite hasta que la función de verosimilitud converja.

*El algoritmo EM (Expectation-Maximization): algunas consideraciones finales*¹⁹.

Sea nuestra muestra observada X ; tal muestra proviene de una distribución teórica; por tanto X corresponde sólo a una fracción de los datos. Sea $Z = (X, Y)$ la totalidad de los datos; a ésta se asocia la siguiente distribución de probabilidades:

$$p(z|\Theta) = p(x, y|\Theta) = p(y|x, \Theta)p(x|\Theta)$$

Tal que $z \in Z, x \in X \wedge y \in Y$, y siendo Θ el conjunto de parámetros de la función.

Se emplea esta distribución para obtener la verosimilitud de la muestra completa, o verosimilitud de datos completos.

$$L(\Theta|Z) = L(\Theta|X, Y) = p(\Theta|X, Y)$$

Con esta función de verosimilitud se puede realizar el primer paso del algoritmo (el paso E): computar la esperanza de esta función de verosimilitud, dado que Y es no observado:

$$Q(\Theta, \Theta^{(i-1)}) = E[\log p(X, Y|\Theta) | X, \Theta^{(i-1)}]$$

Siendo $\Theta^{(i-1)}$ el conjunto inicial de los parámetros empleados para evaluar la esperanza y Θ el de los nuevos parámetros que se obtendrán al mejorar la esperanza de la verosimilitud.

Ahora se puede realizar la maximización (el paso M).

$$\Theta^{(i)} = \underset{\Theta}{\text{Arg max}} Q(\Theta, \Theta^{(i-1)})$$

¹⁸ Véanse Hsiao (1990) y Greene (2001).

¹⁹ Esta sección utiliza la notación de Bilmes *et al.* (1998).

Se habla de un EM generalizado (GEM) si se encuentra algún $\Theta^{(i)}$ tal que $Q(\Theta^{(i)}, \Theta^{(i-1)}) > Q(\Theta, \Theta^{(i-1)})$.