



**Tendencias estocásticas comunes y fluctuaciones en la economía colombiana:  
1950-2002.**

**Por:**

**Martha Misas Arango\***  
**Enrique López Enciso**  
**Diego Vásquez Escobar**

**Noviembre de 2003**

---

\* Agradecemos los comentarios de Luis F. Melo, Luis E. Arango, Juana Téllez, Hernando Vargas y Carlos E. Posada a una versión previa de este trabajo. Nuestro reconocimiento muy especial a Hugo Oliveros quien nos aportó valiosos comentarios y puntos de vista en las discusiones y sesiones de estudio que precedieron a la elaboración de este documento. Los posibles errores e imprecisiones son de nuestra entera responsabilidad.

**Tendencias estocásticas comunes y fluctuaciones  
en la economía colombiana  
(1950-2002):**

**1. Introducción**

En este documento se describe como un sistema VAR (vectorial autoregressions) sujeto a restricciones de cointegración, puede ser utilizado para el análisis de las fuentes de las fluctuaciones macroeconómicas para el caso de Colombia. Se estudian para ello, dentro de un período de estudio comprendido entre 1950 y 2002, las principales variables macroeconómicas: términos de intercambio, producto real doméstico, consumo real e inversión real per capita. La elección de las variables está basada en la versión para una economía abierta del modelo de crecimiento neoclásico, y en el cual las variables reales se mueven como respuesta no solo a *shocks* domésticos, sino también a *shocks* internacionales, representados en este caso por un *shock* a los términos de intercambio.

Este trabajo sigue de cerca el de Mellander et al. (1992), en el cual se muestra como la estimación de un modelo VAR restringido permite separar, a través de las restricciones de neutralidad de largo plazo<sup>1</sup>, el conjunto de *shocks* entre permanentes y transitorios para de esta forma construir las tendencias estocásticas comunes (*common trends*) del sistema de variables. En el caso particular estudiado acá es posible imponer de restricciones de carácter económico fundamentadas en el modelo de crecimiento neoclásico para una economía abierta. Esta aproximación resulta interesante para una economía como la colombiana que puede caracterizarse como pequeña y abierta, aunque en este tipo de modelos la teoría recientemente ha avanzado muchísimo con relación al enfoque que se observaba a comienzos de los años noventa.

El trabajo tiene dos objetivos. En primer lugar, se quiere presentar el enfoque de tendencias estocásticas comunes (*common-trends*). Por esta razón, en el documento se explican en detalle los desarrollos teóricos subyacentes al ejercicio empírico. En ese sentido, el trabajo puede definirse como “piloto”, en el sentido de iniciar un fecundo programa de investigación. En segundo lugar, se formula y estima un modelo de *common-trends* con el fin de analizar el impacto de diversos *shocks* sobre las principales macro-variables en Colombia. Se busca diferenciar entre los impactos de diferentes tipos de *shocks* : permanentes versus transitorios y domésticos versus externos.

---

<sup>1</sup> Esta característica permite asociar el modelo de *common trends* con el modelo VEC estructural.

El documento consta de cinco partes incluida esta introducción. En la segunda, se muestra el contexto en que se utiliza en este trabajo el enfoque de tendencias comunes y se derivan las restricciones de cointegración empleadas en el trabajo y que provienen del modelo teórico. En la sección siguiente se explica el modelo de tendencias estocásticas comunes y la forma como fue utilizado en esta investigación. En la quinta sección se presentan los principales resultados. Las conclusiones se recogen en la última parte del trabajo.

## **2. La representación de tendencias estocásticas comunes (*common trends*) en el contexto de los modelos RBC.**

La representación de *common trends* (CT) es un concepto dual al análisis de cointegración. Una de sus principales aplicaciones se lleva a cabo en el contexto de modelos de ciclos de negocios (enfoque *Real Business Cycle*, RBC) que tienen como base el modelo de crecimiento neoclásico, Jacobson et al. (2001), Dhar et al. (2000). En la presentación de la técnica que hace Warne (1993), se muestra como en los modelos de crecimiento estocástico, tipo ciclo de negocios, los *shocks* al crecimiento influyen las fluctuaciones de corto plazo. Esos *shocks* se dan sobre las variables fundamentales como la política económica, las preferencias y la tecnología. Los *shocks* se propagan a toda la economía, con el resultado de que se generan unos patrones sistemáticos de persistencia y comovimientos entre los agregados macroeconómicos. Resulta de interés, en consecuencia, un análisis de series de tiempo que haga posible examinar las conexiones entre los *shocks* al crecimiento y las fluctuaciones que se generan.

El primer trabajo en esa dirección lo llevaron a cabo King et al (1991) quienes pusieron juntas importantes ideas que provenían de los modelos de ciclo real de negocios, de una parte, y de los modelos de vectores autoregresivos, de otra. Posteriormente, el trabajo de Mellander et al. (1992), seguido de cerca en esta investigación, va a extender ese enfoque a un modelo RBC para una economía abierta.

En el enfoque de ciclos de negocios las fluctuaciones económicas aparecen como resultado de la respuesta óptima de los agentes a los *shocks*, en especial los tecnológicos, que enfrenta una economía y no corresponden a una situación irregular de ésta como si es el caso en la teoría de los ciclos convencional. Si la tecnología se supone estocástica, los ciclos pueden ser una mezcla de fluctuaciones puramente transitorias y fluctuaciones en la tendencia<sup>2</sup>. La aplicación empírica de los primeros

---

<sup>2</sup> Si bien para Lucas los ciclos económicos tienen su origen en los shocks monetarios y no en los factores de oferta, trabajos posteriores, tales como el de Kidland y Prescott (1982), cuestionan el origen monetario de los ciclos. Estos autores encuentran que los shocks monetarios no generan efectos

modelos de ciclo de negocios se observa en el trabajo de Kydland y Prescott (1982), dichos autores recurren a la calibración de parámetros como estrategia empírica<sup>3</sup>. Una versión calibrada de este modelo se utiliza para derivar “hechos estilizados teóricos”.

La calibración surge en ese momento como práctica común, dado que el desarrollo de la teoría económica iba en una dirección diferente a la que llevaba la econometría, (Maddala, 2000). La razón por la cual se utilizan las técnicas de calibración<sup>4</sup>, está en el deseo de permanecer cerca de los modelos teóricos particulares, una diferencia de fondo con los modelos econométricos convencionales. Con las técnicas disponibles hasta ese momento era difícil o, en algunos casos, imposible, estimar ese nuevo tipo de modelos macroeconómicos (Dawkins et al., 2001).

Desde la econometría también surge un enfoque alternativo para investigar las fuentes de los ciclos de negocios que se suma a las críticas a los modelos macro econométricos convencionales. El artículo de Sims<sup>5</sup> (1980) expresa insatisfacción acerca de la imposición de fuertes restricciones de sobre-identificación provenientes de una teoría económica de dudoso estatus empírico. Sims sugiere que una forma de superar el problema de sobre-identificación es que el papel de la teoría se limite únicamente a proveer un (o varios) conjunto(s) de supuestos para identificar los residuos de las autoregresiones vectoriales con shocks de alguna clase de modelo estructural.

Como lo afirman Englund et al. (1994) estos dos enfoques de la investigación macroeconómica son casi ortogonales en la visión que tienen acerca del papel de la teoría económica y de los métodos econométricos. Comparten, en todo caso, la visión

---

suficientemente persistentes para generar fluctuaciones características de la actividad económica. Se considera, sin embargo, que estos modelos de ciclo real de negocios (RBC) son construidos en el espíritu de Lucas, en la medida en que son modelos de equilibrio en los cuales un tipo de shock singular – innovaciones en tecnología- es la fuente de las fluctuaciones macroeconómicas.

<sup>3</sup> La calibración de parámetros es un enfoque que, en un contexto diferente, había sido utilizada anteriormente por Shoven y Whalley (1972), quienes intentaron refinar un ejercicio realizado por Harberger en 1962, en el cual se calculaba el costo en bienestar de un tratamiento diferencial de impuesto al ingreso del capital. La elección del método de calibración de parámetros por parte de Kydland y Prescott, se debe al poco satisfactorio estado del arte en el área de los modelos macro econométricos para ese momento, y al deseo de contar con modelos que fueran consistentes con las covariaciones observadas entre producto, consumo e inversión, un elemento clave para esos autores. Al encontrar muy poco en la literatura convencional que sirva a ese propósito se decidieron a desarrollar una nueva aproximación al problema.

<sup>4</sup> La práctica, que se vuelve común a partir de los primeros trabajos, es la aplicación de estándares de parametrización que no se utilizaban en la literatura econométrica, tales como la consistencia con un caso básico particular, una solución para la economía como un todo en el marco de un modelo de equilibrio general o, en el largo plazo, una senda de equilibrio estable para una economía dinámica.

<sup>5</sup> Como es conocido, Sims propuso como solución evitar la sobre identificación y limitar el papel de la teoría a proveer uno o varios conjuntos de supuestos necesarios para identificar los residuos de las autoregresiones vectoriales por medio de *shocks* a una clase de modelos estructurales, los modelos autoregresivos vectoriales o VAR. La difusión de este enfoque fue muy rápida por su facilidad de manejo y porque los resultados daban representaciones pedagógicas, tales como las descomposiciones de varianza y las funciones de impulso respuesta.

sobre el patrón de serie de tiempo de las variables macroeconómicas. Estas son el resultado de la interacción de las perturbaciones estocásticas (los impulsos) y un modelo más o menos elaborado (el mecanismo de propagación). Una diferencia es que los modelos de ciclo real de negocios intentan mantener un número bajo de impulsos, mientras que los modelos VAR, por construcción, tienen el mismo número de impulsos que de variables.

De otro lado, una idea importante de los modelos RBC es que el crecimiento de largo plazo y las fluctuaciones transitorias pueden explicarse por el impulso a la tecnología. Los ciclos de negocios, como ya se mencionó, son vistos como el resultado de *shocks* permanentes del lado de la oferta de la economía más que de *shocks* transitorios y de demanda (monetarios). Los modelos VAR, por su parte, no permiten *shocks* permanentes. Se supone que todos los *shocks* son transitorios y, por ejemplo, los cambios permanentes en la tecnología son capturados en las tendencias determinísticas.

La síntesis de las dos aproximaciones realizada por King et al. (1991) parte de un modelo de crecimiento de tipo Solow para una economía cerrada. En el modelo la tecnología sigue una tendencia estocástica, específicamente un paseo aleatorio con deriva. Ese modelo básico había sido utilizado anteriormente, con las técnicas tradicionales de calibración, para mostrar que con *shocks* tecnológicos persistentes replica los hechos estilizados de las fluctuaciones económicas (King et al., 1988).

El modelo teórico implica una serie de restricciones de largo plazo que pueden ser impuestas al modelo VAR de consumo, inversión y GDP, considerado en ese trabajo. Estas variables, específicamente, siguen una tendencia común, la cual está dada por el proceso que define el comportamiento de la tecnología. Los métodos VAR son utilizados para investigar el impacto de los *shocks* tecnológicos permanentes y el conjunto de *shocks* transitorios no especificados. King et al. (1988) definen su enfoque de la siguiente manera<sup>6</sup>: “Los procedimientos econométricos desarrollados acá, hacen uso de las implicaciones de los modelos de crecimiento equilibrado de largo plazo con el fin de aislar los *shocks* permanentes en productividad y mostrar los efectos de corto plazo de dichos *shocks*” (p.820).

Mellander et al (1992) muestran como la utilización del enfoque de *common trends* para el estudio de los ciclos económicos captura tres importantes características que estos últimos tienen. En primer lugar, se basa en la idea de Frisch (1933) y Slutsky (1937) según la cual los ciclos de negocios son el resultado de la interacción entre un conjunto de impulsos estocásticos y ciertos mecanismos de

---

<sup>6</sup> Traducción nuestra.

propagación. Este enfoque contrasta con la propuesta de los ciclos endógenos, la cual solo considera los mecanismos de propagación pero no los impulsos. En segundo lugar, trata las tendencias seculares como procesos estocásticos. Tercero, los autores consideran que el número de tendencias es bajo con relación al número de variables macroeconómicas relevantes.

## **2.1 Derivación teórica de los vectores de cointegración.**

La idea básica detrás de la representación de tendencias comunes es que si existe un sistema de variables no estacionarias, donde existen una o varias relaciones de cointegración, éste puede ser descompuesto en dos componentes una de carácter permanente y otra de carácter transitorio. En este caso se dice que el sistema admite una representación de tendencias comunes. El primer componente captura únicamente el efecto de *shocks* de carácter permanente y los acumula.

De manera todavía muy general es posible utilizar los conceptos de series de tiempo para entender que la representación de tendencias comunes parte de una representación VAR no restringida, escrita en niveles y que puede expresarse también en una forma de corrección de errores (VECM). Si existen las relaciones de cointegración es posible pasar a un VAR cointegrado. Este último puede ser invertido para obtener una representación de Wold estacionaria.

En el caso particular de este trabajo la deducción teórica de dos relaciones de cointegración entre las variables del sistema permite reconocer la existencia de tendencias estocásticas comunes. Así, con base en un modelo teórico con micro fundamentos es posible definir tales relaciones de largo plazo entre las variables de interés. Los vectores de cointegración se derivan a partir de la solución de estado estable para un modelo de ciclos reales.

El punto de partida de Mellander et al. (1992) y, por consiguiente, del presente documento es el trabajo teórico de Lundvik (1991), en el que se plantea un modelo de ciclo real de generaciones superpuestas para una economía pequeña y abierta. En esta economía existen dos bienes y acceso al mercado internacional de capitales. Los términos de intercambio y la tasa de interés son variables que se suponen exógenas y explican, junto con la productividad total de los factores, una gran parte de las fluctuaciones de las principales variables macroeconómicas.

Lundvik desarrolla su enfoque en dos etapas. En primer lugar, transforma su modelo de crecimiento de *steady state* en estacionario. Para poder encontrar una

solución numérica, dado que no hay una solución analítica, debe hacerse una aproximación, en este caso de tipo lineal (*linear regulator approximation*). Dicha aproximación consiste en calcular la solución de estado estable para un hogar individual en la cual no hay ningún tipo de perturbación estocástica. Luego, se sustituye la restricción presupuestal no lineal en la función de utilidad del período respectivo, mediante una aproximación de Taylor lineal de orden dos, alrededor de los valores del estado estable. La segunda etapa consiste en resolver el caso estocástico del problema lineal planteado, para lo cual existe una solución analítica explícita.

Para Mellander et al. (1992) una propiedad muy importante del modelo de Lundvik es que de él pueden derivarse dos relaciones de largo plazo entre las variables del sistema. Para esto toman la solución de estado estable bajo certidumbre del modelo de Lundvik y con base en ésta derivan dos relaciones log-lineales entre el producto, la inversión y el consumo reales per capita así como también con los términos de intercambio. La primera de estas dos relaciones es la inversión como proporción del producto (inversión/producto) y la segunda es aquella que involucra al producto, al consumo y a los términos de intercambio. Los autores hacen dos supuestos que permiten representar tales relaciones a partir de dos vectores de cointegración. En primer lugar, suponen que las variables macroeconómicas examinadas pueden ser descompuestas en una tendencia estocástica no estacionaria y en un componente estacionario (de esa forma los logaritmos de esas variables pueden ser descompuestos aditivamente). En segundo lugar, se supone que la solución de estado estable puede interpretarse como un sistema cuyas perturbaciones estacionarias son iguales a su valor esperado de cero.

Con el fin de diferenciar entre las variables que hacen parte de la solución de estado estable de las correspondientes variables macroeconómicas observadas, las primeras se notan con minúsculas mientras que las segundas aparecen en mayúsculas.

## **2.2 Derivación de la relación de equilibrio estable entre el producto y la inversión.**

En el modelo para una economía abierta con dos bienes, un tipo de bien es producido internamente y en el resto del mundo, mientras que el segundo bien es producido únicamente afuera. El bien doméstico se produce con una tecnología de tipo Cobb-Douglas. Existen tres factores de producción en esta función de producción: trabajo  $l$  y dos tipos de bienes que corresponden a su vez al capital doméstico  $k_h$  y al capital producido únicamente en el exterior  $k_f$ . La función de

producción de tipo Cobb-Douglas se normaliza por el factor trabajo quedando especificada de la siguiente manera:

$$y = Af(k_h, k_f, l) = ak_h^{\theta_h} k_f^{\theta_f} \quad (1)$$

donde  $a$  es una constante, el subíndice  $h$  indica que el bien se produce en la economía doméstica y en el exterior, el subíndice  $f$  que el bien se produce en el exterior.

Adicionalmente, hay que tener en cuenta que el precio del bien  $f$  es el numerario<sup>7</sup>. El problema de maximización del plan de producción dado en la ecuación (1) sujeto a una restricción de costos es:

$$\text{Argmax}_{k_h, k_f} ak_h^{\theta_h} k_f^{\theta_f} \quad \text{s. a} \quad k_h + pk_f \leq s \quad (2)$$

donde  $p$  son los términos de intercambio. El lagrangiano queda definido como:

$$\ell(k_h, k_f, \lambda) = ak_h^{\theta_h} k_f^{\theta_f} + \lambda(s - pk_h - k_f) \quad (3)$$

y las condiciones de primer orden:

$$\theta_h \frac{ak_f^{\theta_f}}{k_h^{1-\theta_h}} = \lambda p \quad \text{y} \quad \theta_f \frac{ak_h^{\theta_h}}{k_f^{1-\theta_f}} = \lambda$$

Con base en las condiciones de primer orden puede derivarse:

$$\frac{\theta_h}{\theta_f} \frac{k_f}{k_h} = p \quad \Rightarrow \quad k_f = p \left( \frac{\theta_f}{\theta_h} \right) k_h \quad (4)$$

De acuerdo con Lundvick, puede definirse el capital doméstico de la siguiente forma:

$$k_h = \kappa l A^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (5)$$

Esta relación muestra que para un hogar nacido en un período determinado el capital en el estado estable es igual al producto de la variable empleo,  $l$ , multiplicada por la productividad total de los factores tomada como valor constante,  $A$ , elevada a una razón que incorpora en el denominador a la suma de las participaciones factoriales ( $\theta = \theta_h + \theta_f$ ), definidas en la función de producción, ese

<sup>7</sup> En el trabajo de Mellander et al (1991) el numerario es precio del bien  $h$ . Formalmente, los resultados son equivalentes.

producto a su vez se encuentra multiplicado por  $K$ . Este último término definido de la siguiente forma:

$$K = \left[ \frac{\theta_h \left( \frac{\theta_f}{p^*} \right)^{\theta_f}}{[(1+2h(g+\delta))][(1+r_h)/(\pi-1+\delta)]-h(g+\delta)^2} \right]^{1/1-\theta} = \left( \frac{\theta_h \left( \frac{\theta_f}{p^*} \right)^{\theta_f}}{\Delta} \right)^{1/1-\theta} \quad (6)$$

donde  $g$  es la tasa de crecimiento de la productividad determinística,  $r_h$  es la tasa de interés real para el bien doméstico,  $\delta$  es la tasa de depreciación,  $\pi$  es la probabilidad constante que tiene cada agente para sobrevivir hasta el próximo período y que es igual para todos<sup>8</sup>,  $h$  los costos de instalación de la inversión. Adicionalmente:

$$p^* = \frac{p_f}{p_h} = \frac{1}{p} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la normalización por el factor trabajo, la ecuación (5) puede expresarse como:

$$k_h = A^{1/1-\theta} \left( \frac{\theta_h \left( \frac{\theta_f}{p} \right)^{\theta_f}}{\Delta} \right)^{1/1-\theta} \quad (5)'$$

De manera equivalente:

$$k_h = A^{1/1-\theta} \left( \frac{\theta_h \left( \frac{\theta_f}{p} \right)^{\theta_f}}{\Delta} \right)^{1/1-\theta} \left[ \left( \frac{1}{p} \right)^{\theta_f} \right]^{1/1-\theta} \quad (5)''$$

Con lo cual se obtiene:

$$k_h = v \left( A p^{\theta_f} \right)^{1/1-\theta_f-\theta_h} \quad (5)'''$$

siendo  $v$  una constante.

Lundvik define la inversión sectorial para el momento  $s$  como:

$$i_h^s = (g + \delta)k_h^s \quad y \quad i_f^s = (g + \delta)k_f^s$$

<sup>8</sup> Este parámetro proviene del planteo que se hace en el modelo acerca de que los hogares independientes tienen la misma probabilidad (constante) de sobrevivir en el período siguiente. El parámetro entra en el cálculo de la esperanza de vida para todos los hogares y en el cálculo de la talla de la población. Si los hogares no pueden tener bonos al nacer y los juegos Ponzi no se permiten se debe garantizar una forma para que los bonos pasen de una generación a otra. Esto se hace por medio de una compañía de seguros. En virtud de este arreglo la tasa de interés puede verse afectada al considerar la probabilidad de supervivencia.

de tal forma, que modificando ligeramente estas definiciones se obtiene:

$$i_h = (g + \delta)k_h \quad (8)$$

$$i_f = (g + \delta) \frac{k_f}{p} \quad (9)$$

agregando estos dos componentes se obtiene la inversión:

$$i = i_h + \frac{i_f}{p} \Rightarrow i = (g + \delta)k_h + (g + \delta) \frac{k_f}{p} \quad (10)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (4) y (5) en (1) y en (10) se tiene:

$$y = A \left[ v(Ap^{\theta_f})^{\frac{1}{1-\theta}} \right]^{\theta_h} \left[ p \left( \frac{\theta_f}{\theta_h} \right) v(ap^{\theta_f})^{\frac{1}{1-\theta}} \right]^{\theta_f} \quad (11)$$

que es equivalente a:

$$y = A \left[ v(a^* Ap^{\theta_f})^{\frac{1}{1-\theta}} \right]^{\theta_h + \theta_f} \left[ p \left( \frac{\theta_f}{\theta_h} \right) \right]^{\theta_f} \quad (11)'$$

En la definición de inversión es posible reemplazar las de capital doméstico y foráneo para obtener:

$$i = (g + \delta) \left[ v(ap^{\theta_f})^{\frac{1}{1-\theta}} \right] \left( 1 + \frac{\theta_f}{\theta_h} \right) \quad (12)$$

Si se divide (11)' por (12), se llega a la relación producto e inversión,  $y/i$ :

$$\frac{y}{i} = \frac{A}{g + \delta} \left[ v(ap^{\theta_f})^{\frac{1}{1-\theta}} \right]^{\theta_h + \theta_f - 1} \left[ p \left( \frac{\theta_f}{\theta_h} \right) \right]^{\theta_f} \left[ 1 + \frac{\theta_f}{\theta_h} \right]^{-1} \quad (13)$$

que puede expresarse:

$$\frac{y}{i} = v^* \Rightarrow \ln(y) - \ln(i) = v^* \quad (14)$$

donde  $v^*$  es una constante.

De esta expresión se puede deducir que si las variables  $Y$  e  $I$  observadas siguen un proceso con tendencias estocásticas, la relación inversión/producto es estacionaria.

### 2.3 Deducción de la relación de equilibrio estable entre el producto, el consumo y los términos de intercambio.

Del problema de optimización para un agente, véase el anexo 1, se pueden obtener las condiciones de primer orden y resolver para los valores de las variables en el estado estable y en certidumbre. Se puede encontrar, en particular, el valor de estado estable para el bien compuesto,  $p^c c$  :

$$p^c c = Af(k_h, k_f, l) - (g + \delta)[1 + h(g + \delta)](k_h + p^* k_f) + \left[ \frac{1+r_h}{\pi} - 1 - g \right] b_h \quad (15)$$

donde  $p^c$  corresponde al precio del bien compuesto y  $C$  es el consumo del bien compuesto que contiene al bien doméstico y al extranjero. El acervo de bonos denominados en términos de bien doméstico se representa con  $b_h$  y la tasa real de interés doméstica con  $r_h$ . El parámetro  $h$  corresponde al costo de instalación de la inversión.

Si se define la tasa de interés de estado estable como  $q$  y se calcula:

$$q = \left[ \frac{1+r}{\pi} - 1 \right] \quad (16)$$

utilizando este último resultado, la definición  $\kappa^* = h$  y las ecuaciones (1), (7) y (10) se obtiene:

$$p^c c = y - [1 + \kappa^* (g + \delta)] i + [q - g] b_h \quad (17)$$

Se supone además que en el estado estable, el acervo de bonos crece a la misma tasa de crecimiento del producto:  $\Delta b/b = g = q$ . Esto constituye una condición fuerte de no-Ponzi, consistente con el requerimiento de que el acervo de bonos crezca a la misma tasa que el producto.

Mellander et al. utilizan una función Cobb-Douglas linealmente homogénea para agregar el consumo del bien compuesto, a diferencia de Lundvik que utiliza una

función CES. De esta forma, el valor del consumo del bien compuesto, utilizando el bien h como numerario, queda definido por:

$$p^c c = \left( \frac{p_h}{p_h} c_h \right)^\beta \left( \frac{p_f}{p_h} c_f \right)^{1-\beta} \quad (18)$$

sustituyendo la definición de términos de intercambio (7) en (18) y dividiendo por c se tiene:

$$p^c c = \frac{(c_h)^\beta p^{\beta-1} (c_f)^{1-\beta}}{c^\beta c^{1-\beta}} = \left( \frac{c_h}{c} \right)^\beta p^{\beta-1} \left( \frac{c_f}{c} \right)^{1-\beta} \quad (19)$$

Ahora, debido a la forma como se agrega el consumo del bien compuesto es posible derivar la una relación entre la participación del consumo doméstico y la del consumo foráneo en el consumo total:

$$\begin{aligned} c &= c_h^\beta c_f^{1-\beta} \Rightarrow c_f^{1-\beta} = \frac{c^\beta c^{1-\beta}}{c_h^\beta} \\ \Rightarrow \left( \frac{c_f}{c} \right)^{1-\beta} &= \left( \frac{c_h}{c} \right)^{-\beta} = \beta^{-\beta} \end{aligned} \quad (20)$$

con lo cual, si se tiene en cuenta que  $\beta$  es la participación del consumo del bien doméstico en el consumo total, puede construirse la relación que se presenta a continuación:

$$\left( \frac{c_h}{c} \right)^\beta = (1 - \beta)^{\beta-1} \quad (21)$$

Sustituyendo (20) y (21) en (19) se tiene:

$$p^c c = (\beta)^{-\beta} p^{\beta-1} (1 - \beta)^{\beta-1} \quad (22)$$

Utilizando  $q=g$ , es decir, la igualdad entre la tasa de interés real de estado estable y la tasa de crecimiento del producto y las ecuaciones (14), (17) y (22) se tiene que:

$$p^c c = y + (q + \delta)b - \psi i \quad (23)$$

donde  $\psi = [ 1 + \kappa (g + \delta) ]$

Dividiendo por  $i$  a ambos lados de (23) se obtiene  $i = \frac{p^c c}{\bar{c}}$ . Donde  $\bar{c}$ :

$$\bar{c} = \frac{y + (q + \delta)b}{i} - \psi \quad (24)$$

sustituyendo (24) en (14) y utilizando la definición de  $i$  se obtiene:

$$\ln(y) - \ln\left[(\beta)^{-\beta} p^{\beta-1} (1 - \beta)^{\beta-1}\right] - \ln(c) = v^* - \ln(\bar{c}) \quad (25)$$

o, de manera equivalente:

$$\ln(y) - \ln(c) + (1 - \beta)\ln(p) = w \quad (26)$$

La constante  $w$  corresponde a:

$$w = v^* - \ln(\bar{c}) + (\beta - 1)\ln(1 - \beta) - \beta \ln(\beta) \quad (27)$$

Mellander et al. señalan que la combinación lineal descrita en la ecuación (26) debe ser estacionaria, en virtud de que en este caso es posible utilizar argumentos similares a los esgrimidos para la relación inversión/producto.

Dado que las variables se encuentran ordenadas de acuerdo con  $(\ln P, \ln Y, \ln C, \ln I)$  y que son todas no estacionarias, la matriz teórica  $\alpha$  construida con base en las ecuaciones (14) y (26) puede escribirse:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 - \beta & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Teniendo en cuenta que la derivación de la relación expresada en (26) ha sido derivada como condicional a (14), solo dos pruebas estadísticas son relevantes desde el punto de vista teórico:

- i) Estacionariedad en  $(\ln Y_t - \ln I_t)$ , y
- ii) Si la hipótesis descrita para i) no es rechazada probar que la relación inversión/producto y que la combinación lineal  $\ln(Y_t) - \ln(C_t) + (1 - \beta)\ln(P_t)$  son estacionarias.

### 3. Tendencias estocásticas, cointegración y restricciones estructurales

De acuerdo con Wickens (1996), en algunas ocasiones es difícil dar una interpretación económica satisfactoria a los vectores de cointegración estimados por máxima verosimilitud sobre un modelo de vectores autorregresivos. Hecho que puede asociarse a la falta de información que permita alcanzar una completa identificación. Por consiguiente, el modelo de tendencias estocásticas, derivado de tal estimación VAR bajo cointegración, presenta el mismo problema. Así, tanto el modelo de cointegración como su dual, el modelo de tendencias estocásticas comunes, en algunas ocasiones requieren de restricciones estructurales que permitan su identificación e interpretación.

Un modelo de tendencias estocásticas comunes está conformado por un vector de tendencias y un vector de variables estacionarias, no observados como factores individuales.

Es decir, si consideramos  $\{x_t\}$  un vector de series de tiempo  $n$  – dimensional, con  $k$  tendencias estocásticas comunes, éste puede representarse mediante la suma de un componente permanente y uno transitorio:

$$x_t = x_t^p + x_t^s \quad (29)$$

donde  $x_t^p$  vector de tendencias y  $x_t^s$  residuales estacionarios. Las restricciones de cointegración determinan el número de tendencias comunes y la forma como el vector  $\{x_t\}$  está relacionado con ellas. Si  $\alpha$  es el vector o la matriz de vectores de cointegración se tiene que:

$$\alpha x_t^p = 0 \quad (30)$$

Sin embargo, esta restricción no especifica si una cierta tendencia está relacionada o no con un *shock* particular. Tal interpretación requiere de supuestos de identificación adicionales.

### 3.1 Modelo de Tendencias Estocásticas Comunes

El modelo estimado en este artículo sigue la metodología desarrollada por Warne (1993) y el trabajo de Mellander et al. (1992), ya mencionado.

Sea  $\{x_t\}$  un vector  $n$ -dimensional con  $k$  tendencias estocásticas comunes,  $k < n$ , el cual puede representarse por (31).

$$x_t = x_o + \mathfrak{I}\tau_t + \Phi(L)v_t \quad (31)$$

donde:

$E[v_t] = 0$ ,  $E[v_t v_t'] = I_n$ ;  $E[v_s v_j'] = 0 \forall s \neq j$ ;  $\Phi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j L^j$  dentro del círculo unitario.

$x_o$  estacionario;  $\Phi(L)v_t$  conjuntamente estacionario

$\mathfrak{I}\tau_t$  componente de tendencia y  $\mathfrak{I}(n \times k)$  ponderantes

$$\tau_t = \mu + \tau_{t-1} + \varphi_t \quad ; \quad E[\varphi_t] = 0; E[\varphi_t \varphi_t'] = I_k$$

Así, las componentes del modelo (29) pueden ser reescritas de tal forma que:

$$x_t^p = \mathfrak{I}[\mu + \tau_{t-1} + \varphi_t] = \mathfrak{I}\left[\tau_0 + t\mu + \sum_{i=1}^t \varphi_i\right] \quad (32)$$

$$x_t^s = x_o + \Phi(L)v_t \quad (33)$$

Dado que el número de tendencias comunes es  $k < n$  existen  $r = n - k$  vectores cointegrantes linealmente independientes, los cuales son ortogonales a las columnas de la matriz  $\mathfrak{I}$ . Es decir,

$$\exists \alpha_{(n \times r)} / \alpha' \mathfrak{I} = 0 \quad \text{y} \quad z_t = \alpha' x_t \text{ estacionaria} \quad (33)'$$

Las tendencias incluyen elementos estocásticos que son consistentes con la idea de que algunos *shocks* en la economía son de carácter permanente. El modelo general también considera, a través de  $x_t^s$ , *shocks* de carácter transitorio.

Como se muestra en el Recuadro 1 el modelo de tendencias comunes parte del supuesto que  $\{x_t\}$  sigue un proceso generador VAR(p)<sup>9</sup>, es decir:

$$A(L)x_t = \rho + \varepsilon_t \quad (34)$$

donde  $\{\varepsilon_t\}$  ruido blanco;  $E[\varepsilon_t] = 0$ ,  $E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma$ ;  $E[\varepsilon_s \varepsilon_j'] = 0 \quad \forall s \neq j$  y

$$A(L) = I_n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j L^j$$

Si las series que conforman a  $\{x_t\}$  en (26) están cointegradas de orden uno,  $\{x_t\} \sim CI(1,1)$ , con  $r$  vectores de cointegración, el Teorema de Representación de Granger establece: (i)  $\text{rango}(A(1)) = r$ , (ii)  $A(1) = \gamma \alpha'$  y (iii) la ecuación (34) puede ser reescrita como un vector de corrección de errores:

$$A^*(L)\Delta x_t = \rho - \gamma z_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \quad z_t = \alpha' x_t \quad (35)$$

donde:

$$A^*(L) = I_n - \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* L^i \quad , \quad A_i^* = \sum_{j=i+1}^p A_j$$

La existencia de los  $r$  vectores de cointegración implica: (i) la estacionariedad conjunta del proceso  $\{z_t\}$   $r$ -dimensional y (ii) si los  $r$  vectores de cointegración describen el estado estacionario,  $\gamma z_{t-1}$  representa la corrección del cambio en  $x_t$  debida a los desequilibrios del largo plazo.

De acuerdo con el Teorema de Wald, existe para la representación (35) una representación de media móvil asociada:

$$\Delta x_t = \delta + C(L)\varepsilon_t \quad (36)$$

donde se tiene:

(i)  $\{\Delta x_t\}$  es conjuntamente estacionaria

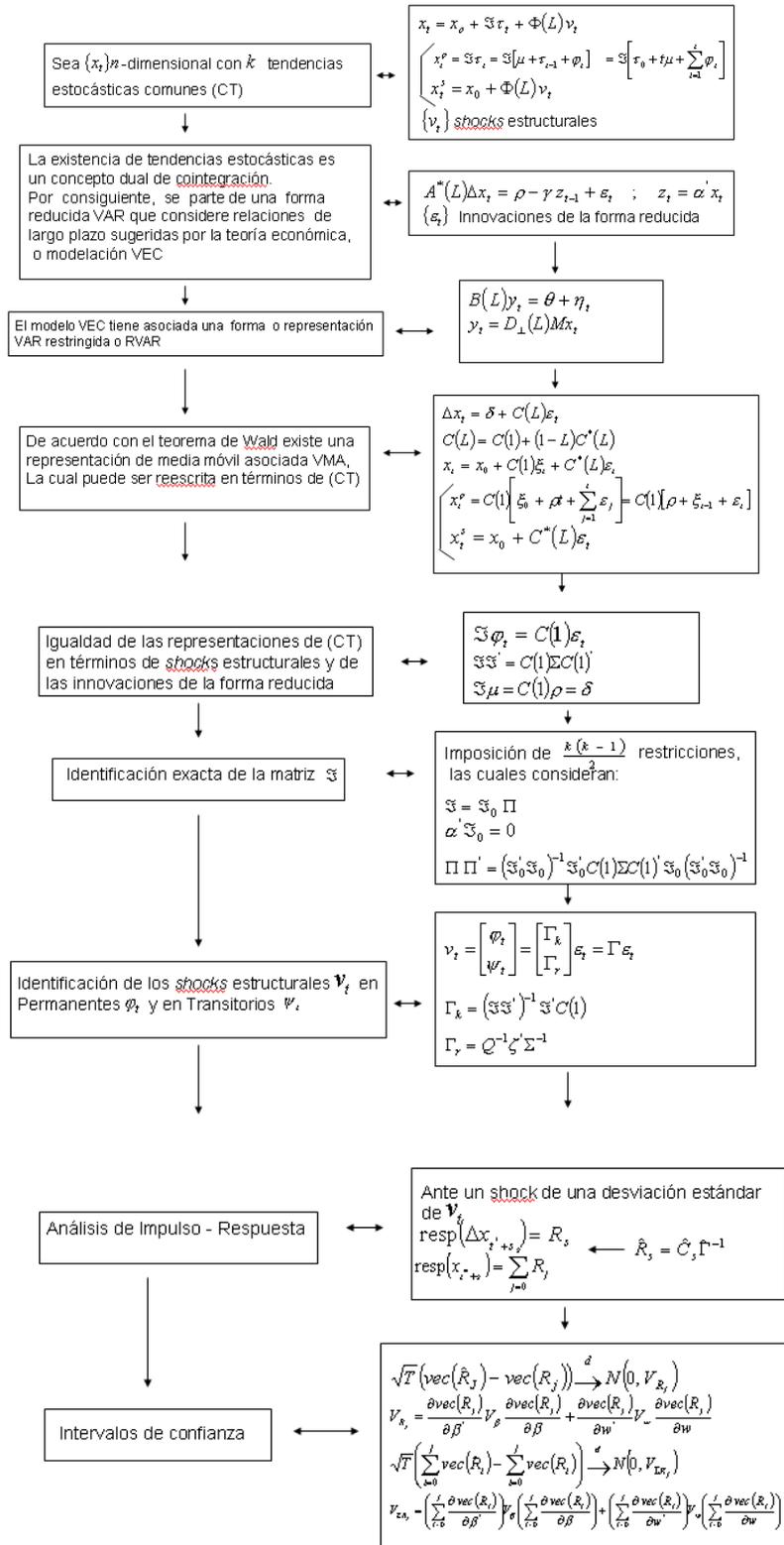
(ii)  $C(\lambda) = I_n + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \lambda^j$

(iii) si  $C(1) \neq 0 \Rightarrow \{x_t\}$  no estacionaria

---

<sup>9</sup> La generalidad no se pierde al considerar en la Ec (34) otras variables determinísticas como dummies estacionales o dummies que referencian valores atípicos.

## Recuadro 1 Metodología: Tendencias Estocásticas Comunes



(iv) si  $\{x_t\} \sim CI(1,1) \Rightarrow \text{rank}(C(1)) = k = n - r$ , es decir, al número de tendencias comunes y (v)  $\alpha' C(1) = 0$ . Dado que el polinomio  $C(\lambda)$  puede ser expresado como  $C(\lambda) = C(1) + (1 - \lambda)C^*(\lambda)$ , la ecuación (36) puede ser re escrita en términos de un modelo de tendencias comunes:

$$x_t = x_0 + C(1)\xi_t + C^*(L)\varepsilon_t \quad (37)$$

donde  $\xi_t$  sigue una caminata aleatoria con deriva:  $\xi_t = \rho + \xi_{t-1} + \varepsilon_t$  de tal forma que considerando recursividad se tiene  $\xi_t = \xi_0 + \rho t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$ , donde  $\delta = C(1)\rho$ . En términos de la descomposición presentada en las ecuaciones (31) - (33) se tiene que las componentes permanente y transitoria pueden ser reformuladas como sigue:

$$x_t^p = C(1) \left[ \xi_0 + \rho t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \right] = C(1) [\rho + \xi_{t-1} + \varepsilon_t] \quad (38)$$

$$x_t^s = x_0 + C^*(L)\varepsilon_t \quad (39)$$

Al considerar el supuesto de cointegración:  $C(1)$  tiene rango reducido. Solo  $k = n - r$  elementos de  $C(1)\xi_t$  tienen un efecto permanente sobre  $x_t$ . De las ecuaciones (32) y (38) se derivan las ecuaciones relacionales de las perturbaciones estructurales y de las innovaciones asociadas a la forma reducida<sup>10</sup>.

$$\mathfrak{I}\varphi_t = C(1)\varepsilon_t ; \quad \mathfrak{I}\mathfrak{I}' = C(1)\Sigma C(1)'; \quad \mathfrak{I}\mu = C(1)\rho = \delta \quad (40)$$

La estimación de la matriz  $\mathfrak{I}$  de la representación de tendencias comunes, Ec (31), requiere de información acerca de la matriz  $\Sigma$  del modelo VEC, Ec.35, y de la matriz  $C(1)$  de la representación VEC de media móvil, Ec.36. Con tal propósito, se hace necesaria la inversión del modelo VEC original. Sin embargo, dado que  $A(1)$  es singular, las técnicas tradicionales que permiten invertir el modelo no pueden ser utilizadas para derivar la representación MA de Wold. En este trabajo se lleva a cabo

<sup>10</sup> Ecuaciones similares se tienen en modelación VAR Estructural, Amisano y Giannini (1997) y algunas aplicaciones para Colombia, Misas y López (2001, 1998) y Melo y Hamann (1998).

la inversión del modelo VEC a través de la generalización de Warne (1992) sobre la representación VAR restringida propuesta por Campbell y Shiller (1988).

La representación VAR restringida parte de la determinación de un nuevo sistema de información basado en transformaciones que consideran el sistema de información inicial y la existencia de cointegración. Es decir, la representación VEC, Ec. (35), puede ser transformada a una representación VAR restringida, RVAR:

$$B(L)y_t = \theta + \eta_t \quad (41)$$

donde:

$$y_t = D_{\perp}(L)Mx_t,$$

$$M = \begin{bmatrix} S'_k & \alpha \end{bmatrix}, S_k = \begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix}, D(L) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & (1-L)I_r \end{bmatrix}, D_{\perp}(L) = \begin{bmatrix} (1-L)I_k & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$$

$$\theta = M\rho, \eta_t = M\varepsilon_t$$

Así, los primeros  $k$  elementos de  $y_t$  corresponden a la primera diferencia de los primeros  $k$  elementos de  $x_t$ , en tanto que, los  $r$  elementos finales de  $y_t$  corresponden a las relaciones de cointegración. Es decir, la nueva representación es estacionaria y por consiguiente, tiene una representación MA invertible.

La inversión del RVAR se lleva a cabo utilizando el hecho de que todo modelo VAR de orden mayor que uno puede ser reformulado como un VAR(1), Ec. (42) y Ec. (43), Lutkepohl (1993). Así, partiendo del 'stack' del RVAR, Ec. (41), se llega a un VAR(1) como el presentado en Ec. (42).

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{p-1} & B_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

En forma matricial compacta:

$$Y_t = \Theta + BY_{t-1} + N_t \quad (43)$$

$$\Omega = E[N_t N_t']$$

Con base en distintos teoremas propuestos por Warne (1993) se demuestra que las matrices de coeficientes de la representación MA, Ec. (36), pueden ser estimadas a través de la Ec. (44):

$$C_j = M^{-1} J_p B^j J_p' M - M^{-1} D J_p B^{j-1} J_p' M \quad J = 1, 2, \dots \quad (44)$$

donde  $J_p = [I_n \quad 0 \quad \dots \quad 0]$  de orden  $(n \times np)$ ,  $C_0 = I_n$  y  $D = [0 \quad P_r]$  de orden  $(n \times n)$  con  $P_r = [0 \quad I_r]$  de orden  $(n \times r)$ .

### 3.2 Estimación de los parámetros del modelo de tendencias comunes

La estimación de los parámetros del modelo de tendencias comunes requiere de las matrices  $C(1)$  y  $\Sigma$ , las cuales pueden ser derivadas de la representación RVAR. Así,

$$C(1) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \quad \text{y} \quad M' \Omega M = \Sigma. \quad (45)$$

Si  $\{x_t\}$  exhibe  $k$  tendencias estocásticas comunes, la matriz  $\mathfrak{Z}$  puede ser escrita como el producto de dos matrices:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 \Pi \quad (46)$$

donde  $\mathfrak{Z}_0$   $(n \times k)$  matriz de parámetros conocidos, seleccionada de tal forma que (i)  $\alpha' \mathfrak{Z}_0 = 0$  y (ii) las innovaciones a las tendencias tengan interpretación económica. Los parámetros libres de  $\mathfrak{Z}$  son considerados en una matriz  $\Pi$   $(k \times k)$ , la cual puede encontrarse a través de la descomposición de Choleski considerando que  $\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}' = C(1) \Sigma C(1)'$  y la ecuación (46), de donde se tiene:

$$\Pi \Pi' = (\mathfrak{Z}_0' \mathfrak{Z}_0)^{-1} \mathfrak{Z}_0' C(1) \Sigma C(1)' \mathfrak{Z}_0 (\mathfrak{Z}_0' \mathfrak{Z}_0)^{-1} \quad (47)$$

el lado derecho de la ecuación (47) es una matriz simétrica y definida positiva con  $\frac{k(k+1)}{2}$  parámetros. De la misma manera que en la metodología VAR estructural, la

resolución del sistema para  $\Pi$  requiere de la consideración de supuestos adicionales. Para identificar los  $nk$  parámetros de  $\mathfrak{S}$  se parte de las  $rk$  restricciones dadas por la nulidad del producto  $\alpha' \mathfrak{S} = 0$ , las cuales disminuyen los parámetros por estimar tan solo a  $nk - rk = k^2$ . De estas se solucionan  $\frac{k(k+1)}{2}$  a través de Choleski. Finalmente,  $k^2 - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$  restricciones deben ser impuestas para alcanzar la identificación exacta de la matriz  $\mathfrak{S}$ . Estas restricciones deben ser completamente motivadas por la teoría económica ya que ellas, como lo presenta Warne (1993), no pueden ser probadas. Es de señalar que, aunque la descomposición de Choleski sobre  $\Pi$  indica una estructura recursiva de impacto de  $\tau_i$  a  $x_i$ , la estructura real que determina dicho impacto está dada por la selección de  $\mathfrak{S}_0$ . Así,  $\mathfrak{S}$  no necesariamente representa recursividad en el modelo de tendencias comunes.

### 3.3 Identificación de las innovaciones permanentes y transitorias

En este documento, el propósito de la identificación de las innovaciones permanentes y transitorias está asociado al análisis de impulso respuesta. Dicho proceso de identificación requiere de algunas definiciones preliminares:

- Dada una matriz  $\Gamma (nxn)$  no singular que cumple con la propiedad de que el producto  $\Gamma \Sigma \Gamma'$  da como resultado una matriz diagonal. La matriz  $R(1) = C(1)\Gamma^{-1}$  se define como la matriz de impacto total.
- La matriz  $\Gamma (nxn)$  identifica el modelo de tendencias comunes si: (i) es determinada de forma única a partir de los parámetros del modelo presentado en Ec. (35), (ii) la matriz de covarianza de  $\Gamma \varepsilon_t$  es diagonal y con elementos en la diagonal diferentes de cero y (iii) la matriz de impacto total  $R(1) = [\mathfrak{S} \ 0]$ .
- La innovación  $v_{it}$  se define como permanente o transitoria si la  $i$ -ésima columna de la matriz de impacto total  $R(1)$  es diferente de cero o igual a cero, respectivamente.

De acuerdo con las definiciones anteriores, si una matriz  $\Gamma (nxn)$  identifica el modelo de tendencias comunes, entonces se tiene: (i) las innovaciones

permanentes,  $\{\varphi_t\}$ , están asociadas a las tendencias comunes, (ii) las innovaciones permanentes y las innovaciones transitorias,  $\{\psi_t\}$ , son independientes, (iii) las innovaciones transitorias son mutuamente independientes y (iv) la representación de media móvil Ec. (36) puede ser reformulada como:

$$\Delta x_t = \delta + C(L)\varepsilon_t = \delta + R(L)v_t \quad (48)$$

donde

$$R(L) = C(L)\Gamma^{-1}$$

$$v_t = \Gamma \varepsilon_t$$

$$E[v_t v_t'] = I_n$$

$R(L)v_t$  función de impulso respuesta de  $\Delta x_t$ .

las innovaciones  $v_t$  pueden ser separadas en permanentes y transitorias, es decir:

$$v_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_k \\ \Gamma_r \end{bmatrix} \varepsilon_t = \Gamma \varepsilon_t \quad (49)$$

donde las matrices  $\Gamma_k$  y  $\Gamma_r$  son matrices de ordenes  $(k \times n)$  y  $(r \times n)$ , respectivamente.

La matriz  $\Gamma_k$  puede ser determinada a partir de lo planteado por la ecuación (49), donde  $\mathfrak{Z}\varphi_t = C(1)\varepsilon_t$ , con  $\mathfrak{Z}$  y  $C(1)$  matrices de rango  $k$ , de tal forma que por ser las innovaciones permanentes iguales a:

$$\varphi_t = (\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}')^{-1} \mathfrak{Z}' C(1) \varepsilon_t \quad (50)$$

de lo cual se deriva que:

$$\Gamma_k = (\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}')^{-1} \mathfrak{Z}' C(1) \quad (51)$$

La determinación de la matriz  $\Gamma_r$  debe satisfacer la condición de independencia entre  $\varphi_t$  y  $\psi_t$  y el comportamiento mutuamente independiente de  $\psi_t$ . Así, (i) la condición de independencia entre los “shocks” o innovaciones permanentes y las transitorias requiere que su matriz de varianza-covarianza sea igual a cero,  $E[\varphi_t \psi_t'] = (\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z})^{-1} \mathfrak{Z}' C(1) \Sigma \Gamma_r' = 0$ . Para que esta matriz sea cero,  $\Gamma_r$  debe incluir  $\Sigma^{-1}$  que permita enfocarse en  $C(1)$  dado su rango reducido. Del álgebra lineal se tiene que existen exactamente  $r$  vectores linealmente independientes que

son ortogonales con las filas de  $C(1)$ . Es decir, se define una matriz  $H_r$  tal que  $\Gamma_r = H_r \Sigma^{-1}$  donde  $C(1)H_r' = 0$ . La matriz  $H_r$  se determina como  $H_r = Q^{-1}\zeta'$  con  $\zeta = \gamma(U\gamma)^{-1}$ ,  $Q$   $r \times r$  y  $U$   $r \times n$  seleccionada tal que  $U\gamma$  sea invertible y (ii) la condición de "shocks" transitorios mutuamente independientes exige que la matriz  $Q$  sea diagonalizable de tal manera que  $\zeta'\Sigma^{-1}\zeta$  sea diagonalizable. Una selección conveniente es la normalización de las innovaciones transitorias, es decir,  $E[\psi_t \psi_t'] = I_r$ . Por consiguiente, las innovaciones transitorias son determinadas por :

$$\psi_t = Q^{-1}\zeta'\Sigma^{-1}\varepsilon_t \quad (52)$$

de lo cual puede derivarse que:

$$\Gamma_r = Q^{-1}\zeta'\Sigma^{-1} \quad (53)$$

De las ecuaciones (51) y (53) se deriva la conformación de la matriz  $\Gamma$ , es decir:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z})^{-1}\mathfrak{Z}'C(1) \\ Q^{-1}\xi'\Sigma^{-1} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Finalmente, si  $\{x_t\}$   $n$  - dimensional exhibe relaciones de cointegración entre sus componentes entonces la matriz  $\Gamma$  de la Ec. (54) identifica el modelo de tendencias comunes y se tiene que:

$$\bullet \quad R(1) = C(1)\Gamma^{-1} = [\mathfrak{Z} \quad 0] \quad (55)$$

$$\text{donde } \Gamma\Sigma\Gamma' = I_n \text{ y } \Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_k^+ & \Gamma_r^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma C(1)'\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z})^{-1} & \xi Q^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad C(1)\varepsilon_t = R(1) \left[ \Gamma\varepsilon_0 + \Gamma\rho t + \sum_{j=1}^t v_j \right] = \Gamma\tau_t \quad (56)$$

$$\text{donde } \mu = \Gamma\rho, \quad C^*(L)\varepsilon_t = C(L)\Gamma^{-1}v_t \text{ y } \Phi(L) = C^*(L)\Gamma^{-1}$$

### 3.4 Análisis de Impulso Respuesta

El análisis de Impulso respuesta aquí presentado sigue los desarrollos teóricos de Warne (1993). Supóngase un 'shock' de una desviación estándar de  $v_t$  sobre  $\Delta x_t$  en el momento  $t = t^*$ , la respuesta dinámica en  $\Delta x_{t^*+s}$  está dada por:

$$\text{resp}(\Delta x_{t^*+s}) = R_s \quad (57)$$

donde  $\text{resp}(\Delta x_{\text{inf}}) = \lim_{s \rightarrow \infty} (\text{resp}(\Delta x_{t^*+s})) = 0$ .

Adicionalmente, la respuesta en niveles,  $x_{t^*+s}$ , está dada por:

$$\text{resp}(x_{t^*+s}) = \sum_{j=0}^s R_j \quad (58)$$

con  $\text{resp}(x_{\text{inf}}) = \lim_{s \rightarrow \infty} (\text{resp}(x_{t^*+s})) = R(1) = [\tilde{\alpha} \ 0]$ .

En la estimación de estos impulsos-respuesta se reemplaza  $R_s$  por  $\hat{R}_s = \hat{C}_s \hat{\Gamma}^{-1}$ . La construcción de los intervalos de confianza descansa en el siguiente teorema:

Si se cumple que:

(i) el orden de rezago de la ecuación (41) tiene una cota superior finita

(ii)  $\{x_t\}$  está cointegrado  $CI(1,1)$

(iii) el vector de cointegración satisface  $\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{p} 0$

(iv)  $\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{w} - w \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_\beta & 0 \\ 0 & V_w \end{bmatrix} \right)$  donde  $\beta = \text{vec}(J_p B)$  y  $w = \text{vech}(\Omega)$

(v) la matriz  $\Gamma$  está dada por la ecuación (53) con  $\Pi$  y  $Q$  matrices triangulares inferiores entonces se tiene que:

$$\sqrt{T}(\text{vec}(\hat{R}_j) - \text{vec}(R_j)) \xrightarrow{d} N(0, V_{R_j}) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (59)$$

$$\text{donde } V_{R_j} = \frac{\partial \text{vec}(R_j)}{\partial \beta'} V_\beta \frac{\partial \text{vec}(R_j)}{\partial \beta} + \frac{\partial \text{vec}(R_j)}{\partial w'} V_w \frac{\partial \text{vec}(R_j)}{\partial w}.$$

La distribución asintótica de las funciones de respuesta acumulada están dadas por:

$$\sqrt{T} \left( \sum_{i=0}^j \text{vec}(\hat{R}_i) - \sum_{i=0}^j \text{vec}(R_i) \right) \xrightarrow{d} N(0, V_{\Sigma R_j}) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (60)$$

donde

$$V_{\Sigma R_j} = \left( \sum_{i=0}^j \frac{\partial \text{vec}(R_i)}{\partial \beta'} \right) V_\beta \left( \sum_{i=0}^j \frac{\partial \text{vec}(R_i)}{\partial \beta} \right) + \left( \sum_{i=0}^j \frac{\partial \text{vec}(R_i)}{\partial w'} \right) V_w \left( \sum_{i=0}^j \frac{\partial \text{vec}(R_i)}{\partial w} \right).$$

#### 4. Resultados

Como se presentó en la sección 3, el concepto de tendencias estocásticas comunes puede ser entendido como el concepto dual de la cointegración. Así, la implementación del modelo<sup>11</sup> de tendencias comunes requiere de la estimación de los vectores de cointegración.

El análisis de cointegración se lleva a cabo considerando el sistema de información  $x_t = \{LP_t, LY_t, LC_t, LI_t\}$  de dimensión cuatro, donde  $LP_t$  son términos de intercambio,  $LY_t$  producto interno bruto,  $LC_t$  consumo y  $LI_t$  inversión, todas ellas, con excepción de los términos de intercambio, medidas en términos reales y per capita y transformadas mediante la función logaritmo, para el período comprendido entre 1950 y 2002<sup>12</sup>. La elección de este sistema se hace con base en el modelo teórico y los vectores de cointegración que pueden derivarse de éste.

El gráfico 1 presenta la evolución de las variables dentro del período de estudio<sup>13</sup>. Un punto importante se refiere a la volatilidad de las series escogidas. En las discusiones macroeconómicas se ha señalado, y el gráfico lo muestra, que las series más volátiles son los términos de intercambio y la inversión, mientras que las menos volátiles son el producto y el consumo, siendo este último el componente más importante del primero, razón por la cual estas dos series presentan una desviación estándar muy similar. Desde la década de los noventa, sin embargo, se observa una mayor volatilidad en las series de cuentas nacionales. En todo caso, el movimiento la serie de inversión es mucho más acentuado que en las otras dos no solamente al final del siglo sino durante todo el período comprendido en los datos.

Todas las series provenientes de las cuentas nacionales, adicionalmente, presentan un importante quiebre estructural, como consecuencia de la recesión que se dio en la economía colombiana a partir de 1999. La consecuencia es que los puntos extremos se encuentran al final de la muestra.

---

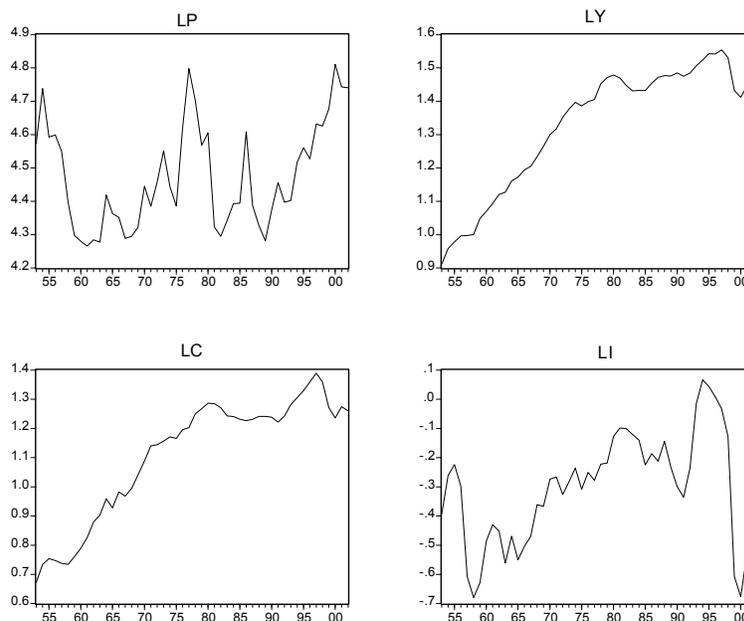
<sup>11</sup> Los resultados son obtenidos a través de un programa escrito en código SAS, módulo IML.

<sup>12</sup> Las fuentes de las series de población, consumo, inversión y producto son el Banco de la República y el DANE. La serie de términos de intercambio fue calculada por la sección de estadística del Banco de la República.

<sup>13</sup> Es de señalar que, los gráficos se presentan desde 1953 para ser compatible el período con el resultante después de llevar a cabo el análisis de cointegración.

Gráfico 1

Variables en el sistema utilizado (eje vertical en escala logarítmica)



Fuente: DANE y Banco de la República

El análisis de cointegración se realiza considerando de uno a cuatro rezagos y los modelos: (i) drift (D) el cual considera una tendencia lineal determinística en los niveles de las variables y (ii) cidrift (C) el cual reconoce la existencia de tendencia lineal en el vector de cointegración. La selección de estos modelos se basa en el hecho de que algunas de las variables exhiben tendencia lineal en sus niveles y en consecuencia se hace necesario dirimir entre los dos modelos citados, es decir, la selección de componentes determinísticos propuesta por Johansen (1994).

Una vez que se determina la existencia de dos vectores de cointegración<sup>14</sup>, se imponen y se evalúan estadísticamente las restricciones sobre  $\alpha$ , coherentes con la teoría económica, presentadas en la sección 2. La especificación del modelo en términos de sus componentes determinísticos se lleva a cabo a través de pruebas de exclusión, Johansen (1995). El siguiente paso se centra en la evaluación del comportamiento de los residuales, los cuales se definen como adecuados si presentan un comportamiento ruido blanco y siguen una distribución normal multivariada, Lütkepohl (1993).

<sup>14</sup> Es de señalar que, en el análisis de cointegración se consideran variables “dummies” estacionales centradas.

CUADRO 1

CUADRO 1  Sistema / Modelo Longitud del rezago	Prueba de cointegración		Vectores de cointegración <sup>15</sup>  $\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \alpha_4^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \end{bmatrix}$	Ajustes  $\gamma' = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_2^1 & \gamma_3^1 & \gamma_4^1 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \end{bmatrix}$ "t-student"
	Traza*	V. Crítico 90%		
$\{LP_t, LY_t, LC_t, LI_t\}$ Modelo: Drift Rezago: 4 Dummies de intervención <sup>16</sup>	44.49 26.76 11.78 4.52	43.84 26.69 13.31 2.71	0.123 1.0 -0.616 -0.338 0.135 1.0 -1.121 -0.110	$\begin{bmatrix} -0.25 & -0.18 \\ -0.96 & -0.74 \\ -0.00 & 0.15 \\ -0.02 & 3.97 \\ 0.04 & 0.17 \\ 0.68 & 2.94 \\ 0.76 & 0.31 \\ 4.00 & 1.74 \end{bmatrix}$
Vectores de cointegración bajo restricciones				
$\{LP_t, LY_t, LC_t, LI_t\}$ Modelo: Drift Rezago: 4 Dummies de intervención <sup>17</sup> Test LR de compatibilidad: Chisq(3) = 4.37 P-value = 0.22		0.0 1.0 0.0 -1.0 0.126 1.0 -1.0 0.0		$\begin{bmatrix} -0.05 & -1.08 \\ -0.47 & -1.80 \\ 0.01 & 0.22 \\ 0.37 & 2.20 \\ 0.02 & 0.37 \\ 0.84 & 2.72 \\ 0.29 & 0.75 \\ 4.24 & 1.75 \end{bmatrix}$
Detección de autocorrelación: L -B(12) = Chisq(168) = 188.8 P-value: 0.13 LM(1) = Chisq(16) = 22.13 P-value: 0.14 LM(4) = Chisq(16) = 7.24 P-value: 0.97 Normalidad: Chisq(8) = 16.19, P-value=0.04				

\*Corrección por tamaño de muestra, Cheung and Lai (1993)

Como se observa en el cuadro 1, el resultado de la prueba de la traza<sup>18</sup> señala la existencia de dos vectores de cointegración<sup>19</sup>, consistentes con el modelo teórico económico donde: (i) la diferencia entre el producto y la inversión,  $(LY_t - LI_t)$  y (ii) la combinación entre la diferencia del producto y el consumo y los términos de intercambio,  $(LY_t - LC_t + (1 - \beta)LP_t)$  deben ser estacionarias. Este resultado se verifica mediante el test estadístico LR de compatibilidad. Con base en los resultados de las pruebas sobre autocorrelación y normalidad multivariada de los residuales se puede concluir que éstos exhiben un comportamiento adecuado.

<sup>15</sup>  $\alpha_i^j, \gamma_i^j$ : i=variable asociada (i=1,...,4) y j vector de cointegración (j=1,2)

<sup>16</sup> Las variables de intervención consideradas son (i) du1 (1953=1) y du2 (1999=1) .

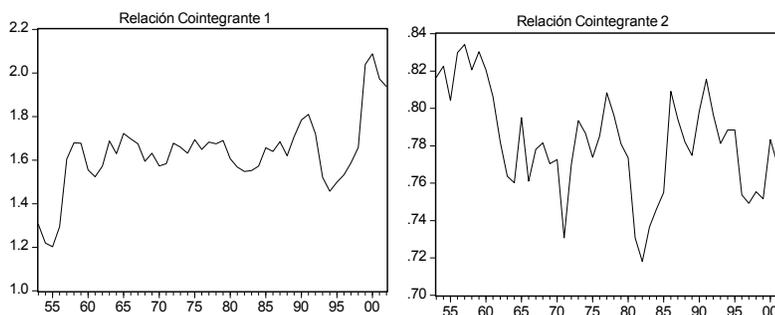
<sup>17</sup> Las variables de intervención consideradas son (i) du1 (1953=1) y du2 (1999=1) .

<sup>18</sup> Ajustada por tamaño de muestra de acuerdo a Cheung - Lai (1993).

<sup>19</sup> Es importante señalar que con el propósito de determinar el orden de integración de las series, que conforman el sistema de análisis, se llevan a cabo varias pruebas estadísticas sobre existencia de raíz unitaria (DF, KPSS y Multivariado), las cuales no permiten obtener una respuesta única a un mismo nivel de significancia. Por tanto, se decide considerarlas integradas de orden uno, I(1).

El gráfico 2 presenta el patrón de comportamiento de las relaciones de cointegración a través del tiempo. El gráfico de la izquierda muestra la estimación de la relación de largo plazo entre el producto y la inversión. Si la cointegración existe, quiere decir que se acepta la hipótesis de que la razón entre esas dos variables es estacionaria. Hay que recordar que la segunda relación de largo plazo fue derivada de manera condicional a la existencia de la primera y lleva a un consumo constante si los términos de intercambio pueden ser normalizados a uno. Solo si existe una relación de largo plazo entre el producto y la inversión se puede probar la existencia de una relación de largo plazo entre el producto, el consumo y los términos de intercambio. Para los datos colombianos la hipótesis nula de la existencia de esa relación no puede ser rechazada.

Gráfico 2  
Relaciones de cointegración



Fuente: Cálculos propios.

Debido a que el número de tendencias estocásticas comunes es igual al número de variables en el sistema,  $n = 4$ , menos el número de vectores de cointegración,  $r = 2$ , se tienen, en este caso, dos tendencias estocásticas comunes entre las variables del sistema. Dadas las matrices  $\alpha$  y la matriz de varianza – covarianza de largo plazo para  $x_t$ ,  $C(1)\Sigma C(1)'$ , las condiciones asociadas a la Ec. (45) proveen siete restricciones que pueden ser utilizadas para identificar los ocho parámetros de la matriz  $\mathfrak{S}$ . Así, la identificación exacta de las tendencias requiere de la imposición de una restricción adicional. Siguiendo a Mellander et al. (1992), las tendencias pueden ser clasificadas en dos categorías: externa ( $\tau_E$ ) y doméstica ( $\tau_D$ ) de tal forma que, es posible suponer que los *shocks* que afectan a la tendencia doméstica no tienen efectos de largo plazo sobre los términos de intercambio. Por consiguiente, al considerar el sistema  $x_t$  y el vector de tendencias comunes ( $\tau_E \quad \tau_D$ ), el supuesto de identificación implica que el elemento de intersección entre

la primera fila y la segunda columna de la matriz  $\mathfrak{S}$  sea igual a cero. Es decir, se tiene:

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (1-\beta) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ (1-\beta)\pi_{11} + \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \quad (61)$$

En el Anexo 2 pueden consultarse las matrices  $\mathfrak{S}_0$  y  $\Pi$ , así como la condición  $\alpha' \mathfrak{S}_0 = 0$ . Es importante resaltar algunas implicaciones de la matriz  $\mathfrak{S}$ . Si las innovaciones a la tendencia externa tienen un impacto positivo de largo plazo sobre el producto y la inversión, ejemplo ( $\pi_{21} > 0$ ), la respuesta del consumo a tales *shocks* es siempre mayor que la del producto y la inversión. Así, una vez estimada la matriz  $\mathfrak{S}$ , la representación de tendencias comunes es:

$$\begin{bmatrix} LP_t \\ LY_t \\ LC_t \\ LI_t \end{bmatrix} = x_0 + \begin{bmatrix} 0.0798424 & 0 \\ 0.0020154 & 0.0244855 \\ 0.0120918 & 0.0244855 \\ 0.0020154 & 0.0244855 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{E,t} \\ \hat{\tau}_{D,t} \end{bmatrix} + \hat{\Phi}(L)[\hat{v}_t + \hat{\Psi}D_t]$$

donde la matriz  $\Psi$  está conformada por las variables determinísticas o variables *dummy* de hechos atípicos. La estimación de los parámetros en la matriz muestra que las tendencias externa y doméstica tienen efectos positivos de largo plazo sobre todas y cada una de las variables. La excepción es la restricción de cero que recoge el supuesto de que la tendencia doméstica no afecta los términos de intercambio.

Los gráficos 3 y 4 presentan las evoluciones de las tendencias estocásticas externa y doméstica conjuntamente con las variables del sistema. La línea continua hace referencia a la tendencia estocástica común específica y la línea punteada a la variable de referencia.

Gráfico 3

Tendencia estocástica común: Externa ( $\tau_E$ )

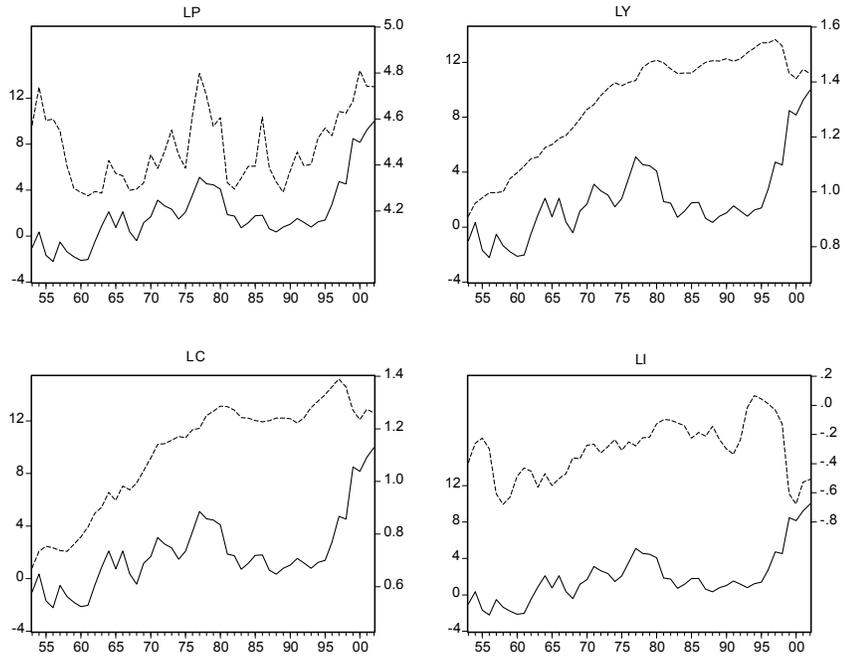
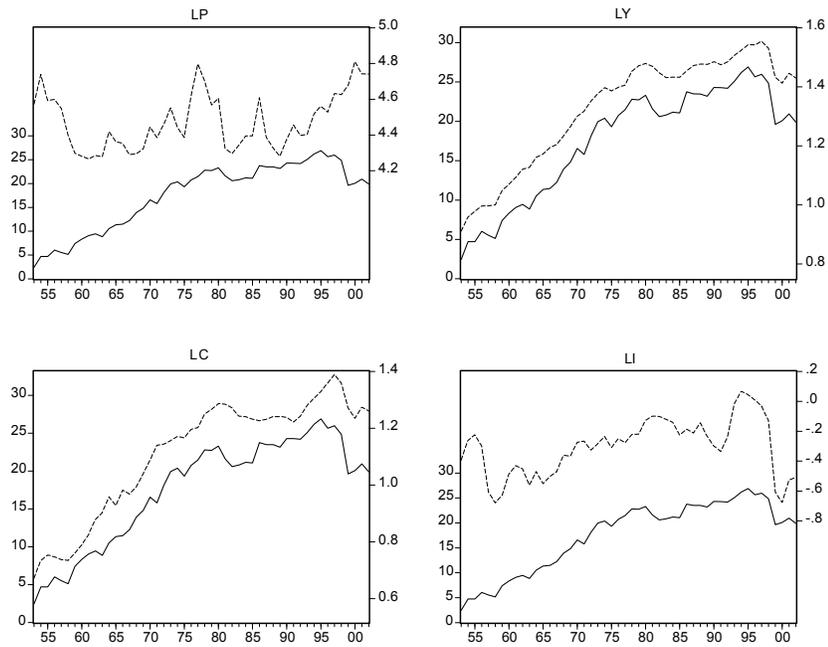


Gráfico 4

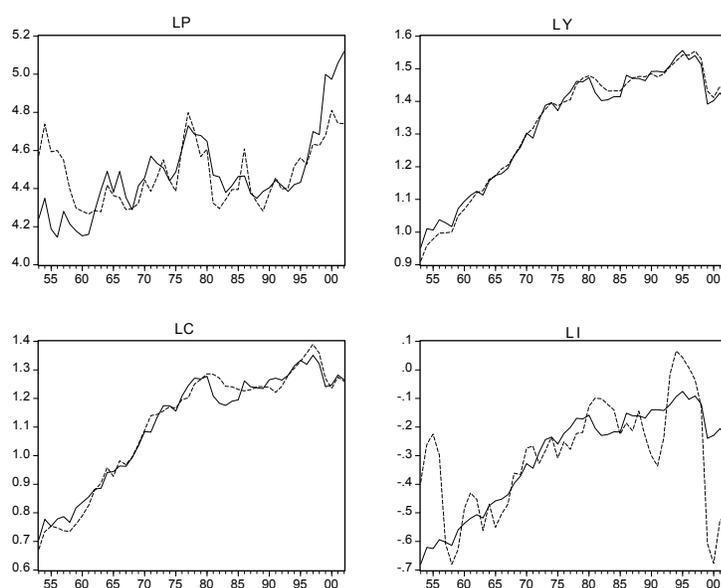
Tendencia estocástica común: Doméstica ( $\tau_D$ )



Gráficamente se observa que la tendencia externa parece tener una relación estrecha con los términos de intercambio. Para el caso de la tendencia común doméstica la relación parece encontrarse entre ésta con el producto y el consumo agregado.

Es de esperar que las innovaciones a las tendencias estocásticas doméstica y externa conformen, conjuntamente, los *shocks* permanentes que pueden ser estimados con el modelo de tendencias comunes. El gráfico 5 presenta las variables del sistema y sus componentes permanentes estimadas<sup>20</sup>. En el gráfico la línea punteada representa la serie original y la continua el componente permanente.

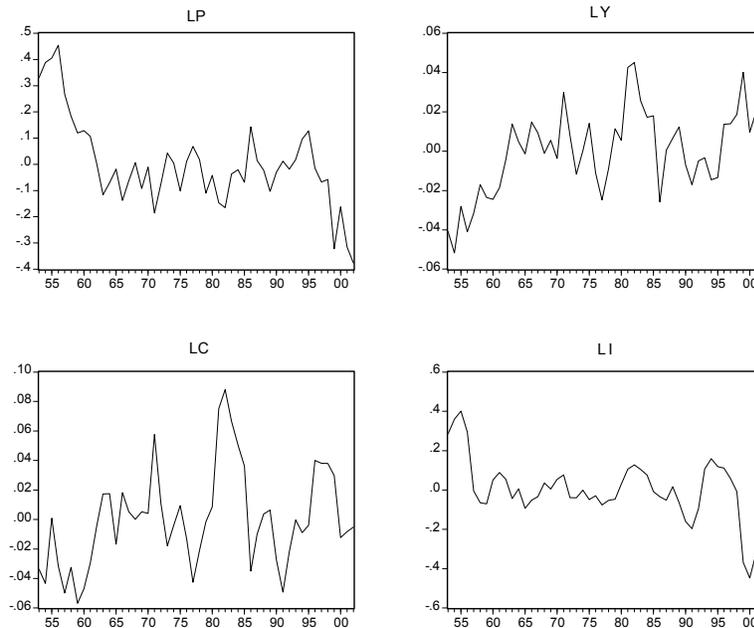
Gráfico 5  
Componentes permanentes



El gráfico 6 presenta la componente transitoria de cada una de las variables del sistema. Dicha componente es la diferencia entre la variable observada y su componente permanente. Ninguna de estas estimaciones es invariante con relación a su identificación y están basadas en la selección del orden de rezagos y los vectores de integración. Nótese también que este modelo permite cambios en las medias para los componentes como consecuencia de cambios determinísticos o cambios en el crecimiento. Por esas razones los componentes transitorios no “deben” aparecer como estacionarios en los gráficos.

<sup>20</sup> Nótese que en este contexto teórico no se puede hablar de producto potencial. Este es un concepto que no se considera en el marco RBC.

Gráfico 6  
Componentes Transitorios



El análisis de impulso – respuesta se lleva a cabo a través de la metodología presentada en la sección 3. Los gráficos 7 y 8 presentan la respuesta del sistema ante un *shock* de una desviación estándar a la tendencia común externa ( $\tau_E$ ) y a la tendencia común doméstica ( $\tau_D$ ), respectivamente. Igualmente se presentan los correspondientes intervalos de confianza a un nivel de significancia de 10%.

Se sabe por la estimación de la matriz  $\mathfrak{J}$  que el efecto de largo plazo es positivo sobre los términos de intercambio, el producto, el consumo y la inversión. De la gráfica 7 es posible concluir que los patrones dinámicos son diferentes para cada variable dentro del sistema pero que todas las funciones alcanzan su nivel de largo plazo alrededor de diez años después del *shock*. El efecto sobre el producto es positivo, aunque no muy grande, y muy rápido al comenzar el período y después decrece. Por el contrario sobre la inversión es negativo al comienzo del período<sup>21</sup>, al llegar a los seis años es positivo pero cercano a cero y se mantiene muy cerca de ese

<sup>21</sup> No debe perderse de vista que el signo de las tendencias puede ser positivo o negativo con lo cual este resultado es posible.

nivel de ahí en adelante. Una interpretación de este comportamiento se encuentra en que un *shock* externo se difunde rápidamente en la producción interna pero toma tiempo en alcanzar al consumo y la inversión.

Gráfico 7

Análisis de Impulso – Respuesta ante un *shock* a la tendencia externa

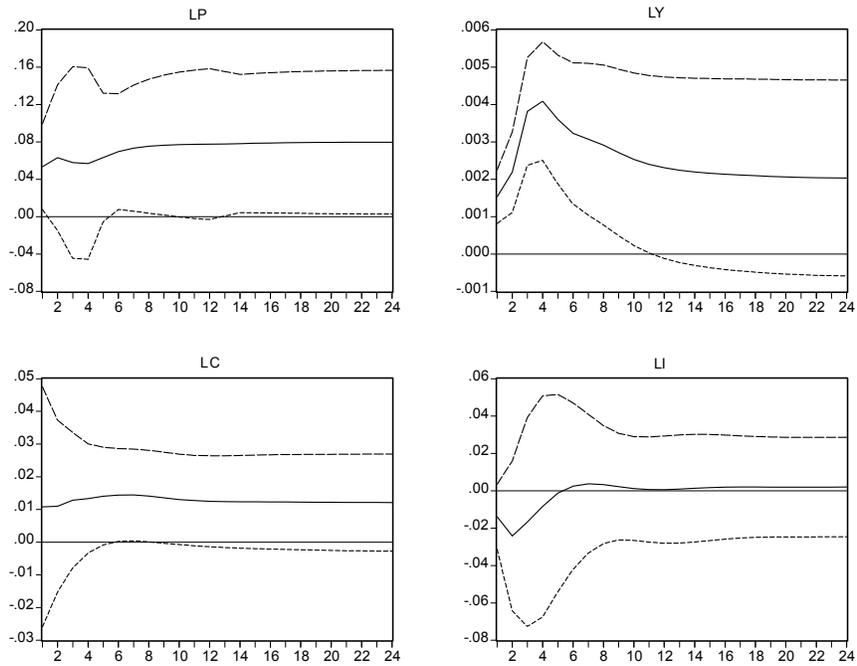
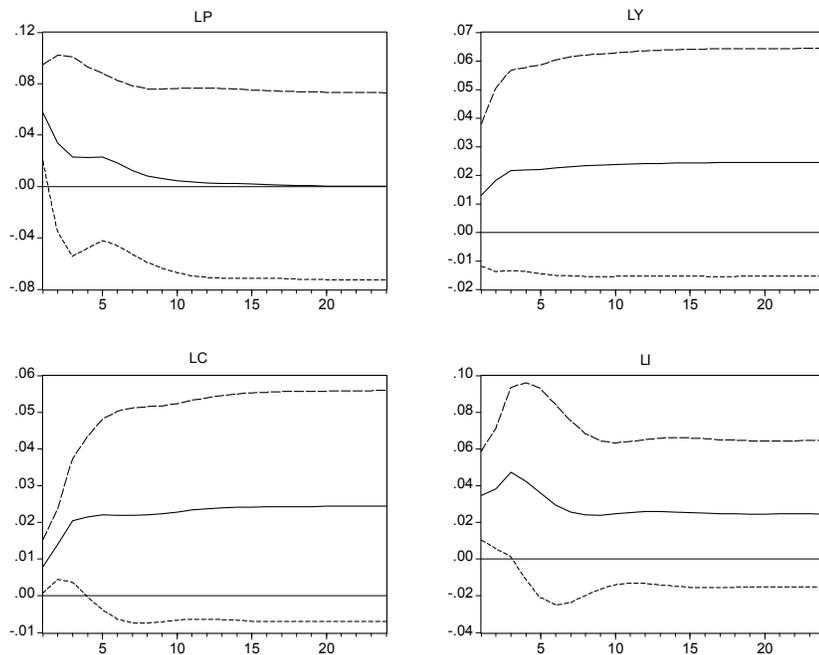


Gráfico 8

Análisis de Impulso – Respuesta ante un *shock* a la tendencia doméstica



Los efectos dinámicos de un *shock* positivo a la tendencia doméstica son al parecer más complejos. En este caso el efecto pleno se da en menor tiempo, alrededor de unos ocho años. Se sabe que el efecto es positivo sobre todas las variables y es el resultado que se genera en este ejercicio. Los términos de intercambio son afectados solo en el corto plazo y el efecto se disipa posteriormente. La inversión y el consumo también reaccionan rápidamente. Sin embargo, el consumo se queda arriba en su nivel de largo plazo, mientras que la inversión se devuelve aunque no a su nivel original sino a un nivel de largo plazo inferior al que se presenta en los primeros años.

El efecto sobre el producto recoge estos movimientos, en especial el del consumo, dada la importancia que esta variable tiene sobre la demanda agregada. La consecuencia es un efecto positivo permanente sobre el producto y que en una década alcanza su nivel de largo plazo. Es, al parecer, un efecto mayor al observado en el ejercicio con la tendencia externa.

## **5. Conclusiones**

En este documento se ha mostrado como los vectores autoregresivos restringidos pueden ser usados para examinar las fuentes de las fluctuaciones macroeconómicas. En este caso particular, se trata de sistemas VAR con restricciones de cointegración que pueden ser empleadas para diferenciar los efectos de *shocks* permanentes o transitorios, los primeros definidos como innovaciones a las tendencias estocásticas que muchas variables macroeconómicas tienen en común.

En el ejercicio realizado para el caso colombiano se parte de un modelo de crecimiento neoclásico y a partir de él se derivan las relaciones de largo plazo entre las principales variables macroeconómicas. En este caso, utilizando la técnica de Johansen se prueba la existencia de dos relaciones de cointegración para el sistema de cuatro variables. Con ese resultado es posible establecer que además de los dos vectores de cointegración existen dos tendencias comunes, una externa y otra interna.

Los resultados empíricos muestran que los dos tipos de tendencias estocásticas consideradas son importantes en la determinación de los ciclos económicos en la economía colombiana. En otras palabras, los *shocks* permanentes son un importante factor detrás de las fluctuaciones en Colombia.

La principal enseñanza que deja el ejercicio es la posibilidad que existe para construir modelos VAR con restricciones de cointegración, hecho que a su vez

permite tener en cuenta diferentes tendencias estocásticas y diferentes tipos de impulsos, con ello se tiene un instrumento muy potente para juzgar la relevancia empírica del modelo de equilibrio general.

Sin embargo, los resultados obtenidos en este trabajo deben tomarse con cautela. Una interpretación del principal resultado del trabajo indicaría que la recesión de final de siglo en Colombia fue, en buena medida, de carácter permanente. Esta interpretación surge de observar la forma como evolucionó el producto y su componente permanente. El componente transitorio de esta serie habría compensado ese movimiento a la baja. Este resultado fuerte y controversial puede deberse a la lógica interna del modelo, en tanto su estructura teórica no considera elementos muy importantes de lo acaecido a final del siglo como los fenómenos de flujos de capital y parada súbita de éstos que afectaron a las economías emergentes.

Esto no debe invalidar, sin embargo, el potencial del enfoque. Dadas las posibilidades de la metodología, recientemente se ha dado una explosión de trabajos aplicados que utilizan este enfoque para abordar diferentes tipos de problemas en que se requiere que las series de tiempo económicas sean descompuesta en sus componentes transitorios y permanentes, para el caso en que existen relaciones de largo plazo entre las variables. En particular, se han realizado trabajos de interés para los Bancos Centrales: cálculo de inflación “core”, del PIB potencial y la brecha de producto, modelos de mecanismos de transmisión, entre otros.

## Bibliografía

Cheung, Y. W. and K. S. Lai (1993), "Finite-Sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, No. 55 Vol.3.

Dhar, S., D. Pain and R. Thomas (2000), "A small structural empirical model of the UK monetary transmission mechanism", Bank of England, Working Papers.

Dawkins C., T.N. Srinivasan y J. Whalley (2001) "Calibration" en J. Heckman y E. Leamer (Eds.) *Handbook of Econometrics* Vol. 5 Amsterdam: Elsevier.

Englund P., A. Vredin y A. Warne (1994), "Macroeconomic shocks in an open economy: a common-trends representation of swedish data,1871-1990". En V.Bergström y A. Vredin (Eds), *Measuring and interpreting business cycles*, Oxford: Oxford University Press.

Frisch, R. (1933) "Propagation problems and impulse problems in dynamic economies" en *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel*, J. Akerman, (ed.), George Allen, London, pp.171-205.

Harberger, A.C. (1962) "The incidence of the corporation income tax" *Journal of Political Economy* 70: 215-240.

Johansen, S. (1988), "Statistical analysis of cointegration vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 12, pages 231-54.

----- (1994), "The role of the constant and linear terms in cointegration analysis of non-stationary variables", *Econometric Reviews*, No. 13, pages 205-29.

----- (1995), *Likelihood Based Inference in Cointegrated Vector Auto-regressive Models*, *Advanced Text in Econometrics*, Oxford University Press.

Jacobson, T., P. Jansson, A. Vredin and A. Warne (2002), "Identifying the Effects of Monetary Policy Shocks in an Open Economy", *Sveriges Riskbank Working Paper Series*, No. 134.

King R., Ch. Plosser, J. J. Stock y M. Watson (1991), "Stochastic trends and economic fluctuations" *American Economic Review* 81: 819-814.

King R. Ch. Plosser y S. Rebelo (1988) "Production, growth and business cycles. I. The basic neoclassical model" *Journal of Monetary Economics* 21: 195-232.

Kydland, F.E. y E.C. Prescott (1991) "The econometrics of the general equilibrium approach to business cycles" *Scandinavian Journal of Economics*, 93:161-178.

Kydland, F.E. y E.C. Prescott (1982) "Time to build and aggregate fluctuations", *Econometrica* 50(6):1345-1370.

Lucas R. (1977) "Understanding business cycles" en K. Brunner y A. Meltzes (eds.), *Stabilization of the Domestic and International Economy* (Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 5, Amsterdam: North Holland), 7-29.

Lundvik, P. (1991) "Business cycles in a small open economy: Sweden 1871-1987". Unpublished manuscript, Institute for International Economic Studies, Stockholm University, Sweden.

Lütkepohl, H. (1993), *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Second Edition.

Maddala, G. S. (2000) "Econometrics in the 21<sup>st</sup> Century", *Statistics for the 21<sup>st</sup> Century*, N.Y., Dekker, in C.R. Rao and G. Székely (eds).

Mellander E., A. Vredin y A. Warne (1992) "Stochastic trends and economic fluctuations in a small open economy" *Journal of Applied Econometrics*, Volume 7, Issue 4, 369-394.

SAS/IML Software, SAS System Version 8e.

Shoven, J.B. y J. Whalley (1972) "A general equilibrium calculation of the effects of differential taxation of income from capital in the U.S.", *Journal of Public Economics* 1: 281-322.

Slutzky, E. (1937) "The summation of random causes as the source of cyclic processes", *Econometrica*, 5, 105-146.

J. H. Stock and M. Watson (1988) "Testing for Common Trends", *Journal of the American Statistical Association*, Vol 83, No. 404, Theory and Methods.

Warne A. (1993) "A common trend model : Identification, estimation and asymptotics", Seminar paper 555. Institute for international economic studies. University of Stockholm

Wickens, M. (1996) "Interpreting cointegration vectors and common stochastic trends", *Journal of Econometrics*, 74, pag. 255 – 271.

## Anexo 1

### Modelo para una pequeña economía abierta de Lundvik (1991).

Notación utilizada:

$C_{ht}$  es el consumo del bien doméstico.

$C_{ft}$  es el consumo del bien externo.

$C_t$  es el consumo del bien compuesto que contiene los dos tipos de bienes.

$l_t$  es el empleo.

$K_{ht}$  es el acervo de capital del bien doméstico.

$K_{ft}$  es el acervo de capital del bien externo.

$I_{ht}$  es la inversión de bienes domésticos.

$I_{ft}$  es la inversión del bien externo.

$B_{ht}$  es el acervo de bonos expresado en términos del bien doméstico.

$A_t$  es el factor de productividad.

$p_t$  es el precio del bien externo en unidades del bien doméstico.

$p_t^c$  es el precio del bien compuesto en unidades del bien doméstico.

$r_{ht}$  es la tasa real de interés para el bien doméstico del período  $t-1$  a  $t$ .

$X_t$  es el nivel de productividad, el cual crece a una tasa constante.

$hI_{ht}^2 / K_{ht}$  y  $hI_{ft}^2 / K_{ft}$  es el costo de instalación de la inversión.

$Af(K_{ht}, K_{ft}, X_t, l_t)$  es la función de producción.

Un superíndice  $s$  indica una variable para un hogar nacido en el período  $s$ .

El modelo de ciclo real de negocios para una pequeña economía abierta es de dos bienes y de generaciones translapadas. El primer tipo de bien se produce domésticamente y en el resto del mundo. El segundo bien se produce únicamente afuera. Los precios de los bienes no pueden ser influenciados por la pequeña economía. Los hogares consumen los dos tipos de bienes y ofrecen su trabajo. Los bienes son también factores de producción.

El problema de optimización para un hogar nacido en el período  $s$  es el siguiente:

$$\max E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\pi\beta)^j U(C_{ht+j}^s, C_{ft+j}^s, l_{t+j}^s) \right\}$$

(1a)

$$s.t. \quad C_{ht}^s + p_t C_{ft}^s + B_{ht+1}^s + I_{ht}^s \left[ 1 + h \frac{I_{ht}^s}{K_{ht}^s} \right] + p_t I_{ft}^s \left[ 1 + h \frac{I_{ft}^s}{K_{ft}^s} \right]$$

$$\leq A_t f(K_{ht}^s, K_{ft}^s, X_t, l_t^s) \frac{1}{\pi} (1 + r_{ht}) B_{ht}^s$$

(b)

$$K_{ht+1}^s = I_{ht}^s + (1 - \delta) K_{ht}^s$$

(c)

$$K_{jt+1}^s = I_{jt}^s + (1-\delta)K_{jt}^s$$

(d)

Se conocen  $K_{ht}^s$ ,  $K_{jt}^s$ ,  $B_{ht}^s$ ,  $p_t$ ,  $A_t$  y  $r_{ht}$  pero no sus valores posteriores.

$C_{jt}^s$ ,  $C_{ht}^s$ ,  $l_t^s$ ,  $I_{ht}^s$ ,  $I_{jt}^s$ ,  $B_{ht+1}^s$  se deciden en el período  $t$ .

Los procesos estocásticos que determinan a  $A_t$ ,  $p_t$  y  $r_{ht}$  son estacionarios. Los procesos autoregresivos de estas variables son:

$$\ln(A_{t+1}/A_t) = \rho_A \ln(A_t/A) + \mu_{At+1}$$

(2a)

$$\ln(p_{t+1}/p_t) = \rho_p \ln(p_t/p) + \mu_{pt+1}$$

(b)

$$r_{ht+1} - r_h = \rho_r (r_{ht} - r_h) + \mu_{ht+1}$$

(c)

La forma funcional de la función de producción:

$$A_t f(K_{ht}, K_{jt}, X_t l_t) = A_t K_{ht}^{\theta_h} K_{jt}^{\theta_j} (X_t l_t)^{1-\theta_h-\theta_j}$$

(3)

donde la productividad determinística  $X_t$  crece a una tasa  $g$  de acuerdo con esta relación:  $X_{t+1} = (1+g)X_t$

La forma funcional de la función de utilidad sigue una forma CES:

$$U(C_t, l_t) = \frac{1}{1-\gamma} [C_t - X_t G(l_t)]^{1-\gamma}$$

(4a)

donde

$$G(l_t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} l_t^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{y}$$

(b)

$$C_t = \left[ C_{ht}^{1-1/\varepsilon} + (\lambda C_{jt})^{1-1/\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-1/\varepsilon}}$$

(c)

Para esta especificación  $\alpha$  es la elasticidad al salario de la oferta de trabajo,  $\gamma^{-1}$  es la elasticidad de sustitución intertemporal entre dos bienes y  $\lambda$  es una constante que determina la ponderación del bien externo con relación al

doméstico. La utilidad del ocio se incrementa a la misma tasa de la productividad.

Con la elección de las formas funcionales para la producción y la utilidad existe, bajo ciertas condiciones, una solución de estado estable para la senda óptima de los hogares individuales. El procedimiento que sigue Lundvik para solucionar el modelo es el siguiente: i) Transforma el modelo con crecimiento de estado estable en estacionario, dividiendo las variables por un factor constante de crecimiento ( $X_t$ ). ii) Se busca una solución numérica para ello se usa la aproximación de regulador lineal, la cual consiste en a) calcular la solución de estado estable para un hogar individual en ausencia de perturbaciones no estocásticas. b) se sustituye la restricción presupuestal no lineal en la función de utilidad y c) se hace una aproximación de Taylor de segundo orden alrededor de los valores de estado estable.

## Anexo 2

En este anexo se presentan algunas de las matrices estimadas, mencionadas en la sección 3.

Matriz  $\alpha$

$$\begin{vmatrix} 0.1262039 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\alpha_{\perp}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.1262039 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz M

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.1262039 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.1262039 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\mathfrak{S}$

$$\begin{vmatrix} 0.0798424 & 0 \\ 0.0020154 & 0.0244855 \\ 0.0120918 & 0.0244855 \\ 0.0020154 & 0.0244855 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\mathfrak{S}_0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.1262039 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\Pi$

$$\begin{vmatrix} 0.0798424 & 0 \\ 0.0020154 & 0.0244855 \end{vmatrix}$$

Matriz C(1)

$$\begin{vmatrix} 0.5302619 & -2.846868 & 4.1572318 & -0.782219 \\ 0.1204175 & 1.6112664 & -0.584282 & 0.0419657 \\ 0.1873387 & 1.2519805 & -0.059624 & -0.056753 \\ 0.1204175 & 1.6112664 & -0.584282 & 0.0419657 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\alpha' \mathfrak{S}_0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\Omega$

$$\begin{vmatrix} 0.0081921 & 0.0005081 & 0.0006082 & 0.0014728 \\ 0.0005081 & 0.0002275 & 0.0002248 & 0.0005547 \\ 0.0006082 & 0.0002248 & 0.0004244 & 0.0007457 \\ 0.0014728 & 0.0005547 & 0.0007457 & 0.0043603 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\Gamma_k$

$$\begin{vmatrix} 6.6413589 & -35.65611 & 52.067984 & -9.797046 \\ 4.3712758 & 68.739698 & -28.14799 & 2.520276 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\Gamma_r$

$$\begin{vmatrix} -8.863537 & 40.143932 & 29.080231 & -7.085942 \\ -1.079562 & -52.66568 & 31.110937 & 14.247994 \end{vmatrix}$$

Matriz  $\xi$

$$\begin{vmatrix} -4.205681 & 0.9529701 \\ 0.6769348 & -0.097265 \\ 1 & 5.16E-17 \\ -3.17E-17 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz  $Q$

$$\begin{vmatrix} 93.532259 & 0 \\ -19.43724 & 18.341753 \end{vmatrix}$$

Matriz  $R(1)$

$$\begin{vmatrix} 0.0798424 & -8.86E-19 & -2.25E-18 & -7.48E-18 \\ 0.0020154 & 0.0244855 & 1.97E-18 & 1.05E-18 \\ 0.0120918 & 0.0244855 & 2.14E-18 & -1.12E-18 \\ 0.0020154 & 0.0244855 & 8.79E-19 & -1.89E-18 \end{vmatrix}$$

