



BANCO DE LA REPÚBLICA
SUBGERENCIA DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

La Demanda de Especies Monetarias en Colombia: Estructura y Pronóstico

Carlos A. Arango A., Martha A. Misas A. y Juan Nicolás Hernández^{††}

Agosto 26, 2004

Resumen

Las tesorerías de los Bancos Centrales enfrentan el problema de pronosticar las necesidades de especies monetarias requeridas por los agentes económicos para finalizar sus transacciones. Dichos pronósticos son utilizados para hacer sus planes a mediano plazo (2 a 3 años en el caso colombiano) de producción, e inventarios de materia prima y unidades terminadas por denominación. El objetivo de este trabajo es evaluar distintas técnicas de pronóstico que sean lo suficientemente flexibles como para incorporar las innovaciones recientes en los determinantes de la demanda y la estructura denominacional de las especies monetarias, y reconocer las posibles no-linealidades en la relación de aquellos con el uso del efectivo. La estrategia seguida se basa en la utilización de redes neuronales artificiales (ANN) y mínimos cuadrados flexibles (FLS), dos técnicas econométricas bastante robustas frente a cambios estructurales y que permiten incorporar elementos no-lineales en la modelación del efectivo.

[†] Los autores agradecen las innumerables y valiosas conversaciones con el Departamento de Tesorería del Banco de la República. Asimismo, se agradece a Lina Maria Montoya por su asistencia en la administración de los datos y programas de estimación de las redes neuronales, y en los cálculos con la metodología de métrica D. Igualmente, se agradece a Héctor Núñez por su colaboración en las estimaciones de mínimos cuadrados flexibles.

1 Introducción

Las tesorerías de los Bancos Centrales enfrentan el problema de pronosticar las necesidades de efectivo requeridas por los agentes económicos para finalizar sus transacciones. Dichos pronósticos son utilizados para hacer sus planes a mediano plazo (2 a 3 años en el caso colombiano) de producción, e inventarios de materia prima y unidades terminadas. Las necesidades de producción provienen, como en cualquier industria de bienes durables, de tres fuentes: la variación en el stock de unidades requerida por el público, la reposición del stock obsoleto o deteriorado y las necesidades de inventario para cubrir eventuales choques no esperados. En el caso de las especies monetarias, el problema es similar a una firma multiproducto de bienes durables sustitutos-cercanos donde las tres fuentes deben pronosticarse por denominación teniendo en cuenta las interrelaciones que hay entre unas y otras.

En economías relativamente estables y con un alto grado de desarrollo tecnológico en materia de medios de pago, sistemas de distribución del efectivo, y avanzados modelos de distribución de bienes y servicios (como grandes cadenas de almacenes, integración de las redes de pago electrónicas con el comercio), la dinámica futura de las necesidades de efectivo es mucho más predecible que en economías donde estos factores están en pleno desarrollo, como es el caso de Colombia donde en las últimas dos décadas se han dado importantes cambios con la aparición de las redes de pago de bajo valor (ACH), las redes de cajeros electrónicos (ATM), la profundización en el uso del cheque y la expansión de grandes cadenas de almacenes.

Más aún, durante la última década la economía colombiana ha experimentó importantes transformaciones durante la década de los 90 que han traído consigo una mayor volatilidad en las variables que determinan la función de demanda de dinero como el ingreso, la tasa de interés y la inflación. En particular, la reducción sustancial en la tasa de inflación que ha experimentado Colombia en los últimos años es de especial relevancia para este trabajo no solo por su efecto sobre la demanda agregada de efectivo sino porque tiene un impacto importante en la dinámica de la estructura denominacional. En regímenes de alta inflación la estructura pierde rápidamente su poder adquisitivo, induciendo entradas y salidas frecuentes de denominaciones lo cual ocurre de manera más lenta en regímenes de baja inflación.

Adicionalmente, hay evidencia de que estos cambios de régimen inflacionario inducen reacciones de naturaleza no-lineal en la demanda de efectivo¹. Como se verá más adelante hay razones teóricas para pensar también en efectos no-lineales asociados con el comportamiento de la estructura denominacional. Específicamente, el ciclo de vida de una denominación conformado por los diferentes estadios desde su introducción en el mercado,

¹ Ver Misas et. Al. (2004) para una revisión de la literatura al respecto.

pasando por diferentes posiciones en la estructura denominacional hasta finalmente dejar de ser utilizada transaccionalmente por su bajo poder adquisitivo, está relacionado en forma no-lineal con el régimen inflacionario vigente.

El objetivo de este trabajo es evaluar distintas técnicas de pronóstico que sean lo suficientemente flexibles como para incorporar las innovaciones recientes en los determinantes del efectivo, tanto a nivel agregado como por denominaciones, y reconocer las posibles no-linealidades en la relación de aquellos con el uso del efectivo. La estrategia seguida se basa en la utilización de redes neuronales artificiales (ANN) y mínimos cuadrados flexibles (FLS), dos técnicas econométricas bastante robustas frente a cambios estructurales y que permiten incorporar elementos no-lineales en la modelación del efectivo.

Como lo sugiere Frances (2000) la ventaja de ANN es su capacidad para aproximar cualquier función no-lineal. Aplicadas a series de tiempo caracterizadas por relaciones no-lineales, las redes neuronales proveen de pronósticos superiores a los obtenidos a través de modelos lineales. Por su parte, FLS incorporan la posibilidad de que los parámetros asociados a las variables que determinan el uso del efectivo cambien en el tiempo. Con la ventaja adicional que las dos técnicas incluyen la posibilidad de escoger especificaciones que minimicen el error de pronóstico.

En este documento se extiende la metodología ANN para modelar la estructura denominacional de las especies en circulación. En este caso, la modelación ANN deja de tener la naturaleza de series de tiempo y se acerca más a un modelo SUR (Seemingly Unrelated Regression) no-lineal de la curva promedio de participación de una denominación sobre el valor total en circulación en función del tiempo en circulación desde su inserción. La estimación de dicha curva se basa en el panel de las historias individuales de las distintas denominaciones en circulación.

El documento se organiza en ocho secciones incluida esta introducción. En la segunda sección se describen los elementos que deben tenerse en cuenta en el pronóstico de especies monetarias tanto a nivel agregado como por denominaciones. En la tercera sección se proponen varios modelos de estimación del agregado de especies monetarias (M0) para horizontes de corto y largo plazo. En la cuarta, quinta y sexta secciones se describen y aplican tres metodologías de pronóstico de la estructura por denominaciones. En la séptima sección se comparan las bondades de las tres metodologías y en la octava se dan conclusiones y sugerencias para futura investigación.

2 Definición del problema

Las tesorerías de los Bancos Centrales deben estimar las necesidades de efectivo por denominación a corto, mediano y largo plazo con el fin de elaborar sus planes de producción y hacer los ajustes del caso para que la disponibilidad de especies monetarias sea suficiente y oportuna.

La ecuación contable básica de la producción de una denominación, Q_t , durante el período t es:

$$Q_t = \Delta C_t + D_t + I_t^* - I_{t-1} \quad (1)$$

Donde ΔC_t es la variación del volumen de especies en circulación, D_t es el volumen de piezas deterioradas que requieren ser reemplazadas, I_t^* es el inventario de piezas deseado e I_{t-1} es el inventario inicial heredado del período anterior.

A partir de la ecuación (1) la tesorería debe proyectar las necesidades de producción con base en pronósticos de cada uno de los elementos que la componen. Cada componente responde a distintos factores que lo determinan y su modelación requiere de un análisis microeconómico y microestadístico cuidadoso.

Tanto el cambio en el volumen en circulación, como el deterioro de una denominación dependen no solo de factores macroeconómicos como el crecimiento de la economía, el régimen inflacionario o el cambio en el costo de oportunidad sobre las tenencias en efectivo sino también, de innumerables factores microeconómicos que determinan el comportamiento transaccional de los individuos y el uso que éstos dan al efectivo. Entre estos factores se destacan:

- La distribución transaccional de la economía: la cual depende del grado de desarrollo, y se ve transformada por la introducción de grandes cadenas de almacenes, el desarrollo del transporte y las comunicaciones, la introducción de dispensadores automatizados de bienes y servicios (vending machines), la oferta de medios de pago automatizados, y las costumbres alrededor de la fijación de precios como la “aproximación por debajo” (e.j. \$1.999) o ajustes de precios atados a la inflación, entre otros.
- Las preferencias de los individuos: las cuales pueden estar sesgadas hacia la tenencia de billetes haciendo que las monedas tengan una limitada circulación en la economía.

O alternativamente, pueden estar moldeadas por aspectos culturales y de formación de hábitos que generan un gusto específico por ciertas denominaciones frente a otras (esto es particularmente relevante en el caso de la introducción de nuevas denominaciones).

- Los costos relativos de producción y mantenimiento: los cuales dependen de la durabilidad de los materiales, las características de seguridad y la tecnología disponible para su producción. Al respecto, los bancos centrales se enfrentan a decisiones tales como cuando convertir un billete en moneda, como prevenir la falsificación, que innovaciones en términos de diseño y materiales pueden adoptarse con el fin de reducir el deterioro y cual es su impacto sobre el público.
- Los canales de distribución del efectivo: constituidos por el Banco central, la red bancaria, las transportadas de valores, las ATMs y los establecimientos de comercio. De estos depende el abastecimiento oportuno y suficiente de denominaciones, por ejemplo, en regiones relativamente aisladas, o en el comercio al detal, o para el uso de *vending machines* (vendedoras automáticas).
- El cambio tecnológico en los medios de pago sustitutos del efectivo: cheques, tarjetas debito-crédito, dinero electrónico, ACHs.
- La dinámica de la economía subterránea: en la cual se incluyen tanto comportamientos elusivos frente a la regulación de las actividades económicas (fiscal, laboral y comercial) como actividades ilícitas como el narcotráfico.
- La falsificación.

Obviamente, estos factores golpean la dinámica agregada de la demanda de efectivo, no obstante, desde el punto de vista de una tesorería, las mayores sorpresas se presentan por su efecto en la estructura denominacional definida por dos elementos: la secuencia de valores faciales de las distintas denominaciones en circulación y la participación de cada denominación en el total de piezas demandadas por la economía.

Este trabajo se centra en el pronóstico de uno de los elementos de la ecuación (1): el cambio en el stock en circulación tanto agregado como por denominación². Difícilmente, un modelo econométrico puede recoger la historia del efectivo y su estructura incorporando la variedad de

² No quiere decir que los otros dos componentes no sean relevantes. De hecho, una vez una economía se estabiliza en materia de inflación, el elemento crucial de plantación de la producción es el de reemplazo (Banco Central de Reservas del Perú, 2002). Por su parte, la política de inventarios requiere de un estudio cuidadoso no solo de la volatilidad en el comportamiento del deterioro y la variación en circulación sino también de las condiciones de distribución y circulación regionales de cada economía.

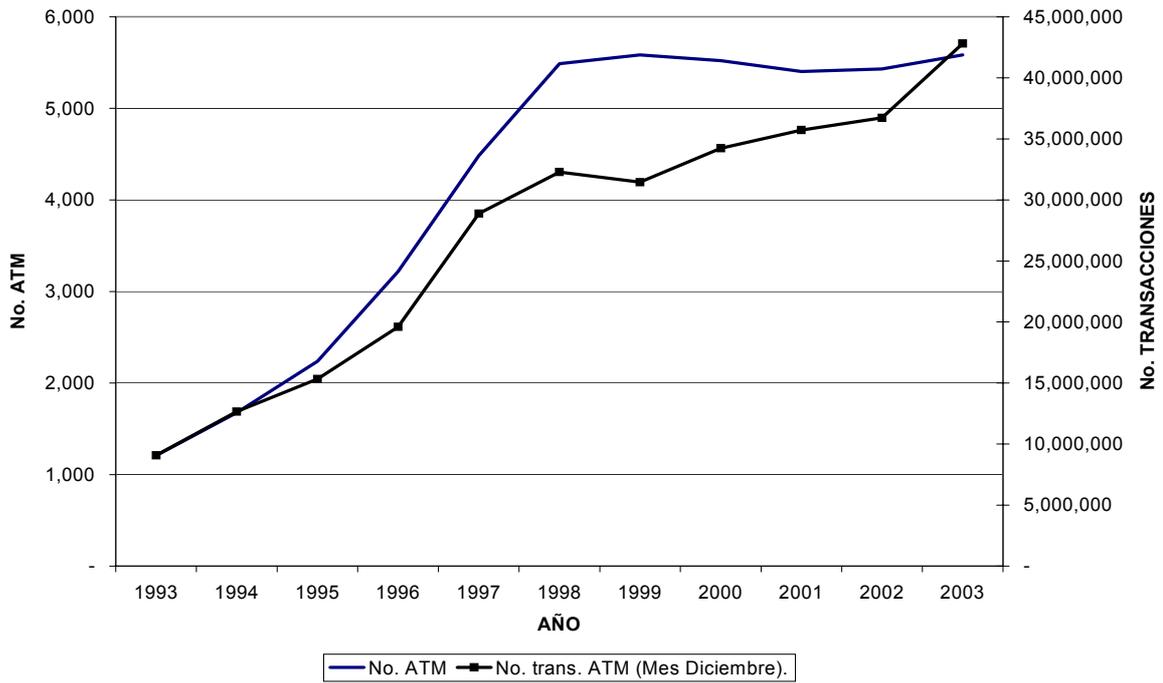
posibles choques sin incurrir en los riesgos derivados de una sobre identificación del proceso generador de datos subyacente. Menos aún, puede identificar el efecto que tendrán futuras innovaciones transaccionales y de pagos. En este sentido, la estrategia de pronóstico debe ser sensible al entorno macroeconómico, transaccional y de pagos que enfrenta el Banco Central.

En períodos de alta inestabilidad macroeconómica o evidencia de cambio estructural, los modelos de pronóstico deben ser flexibles y permitir dar un peso significativo a la historia más reciente. En períodos de relativa estabilidad económica y de lento avance tecnológico, los modelos clásicos de pronóstico pueden ser suficientes.

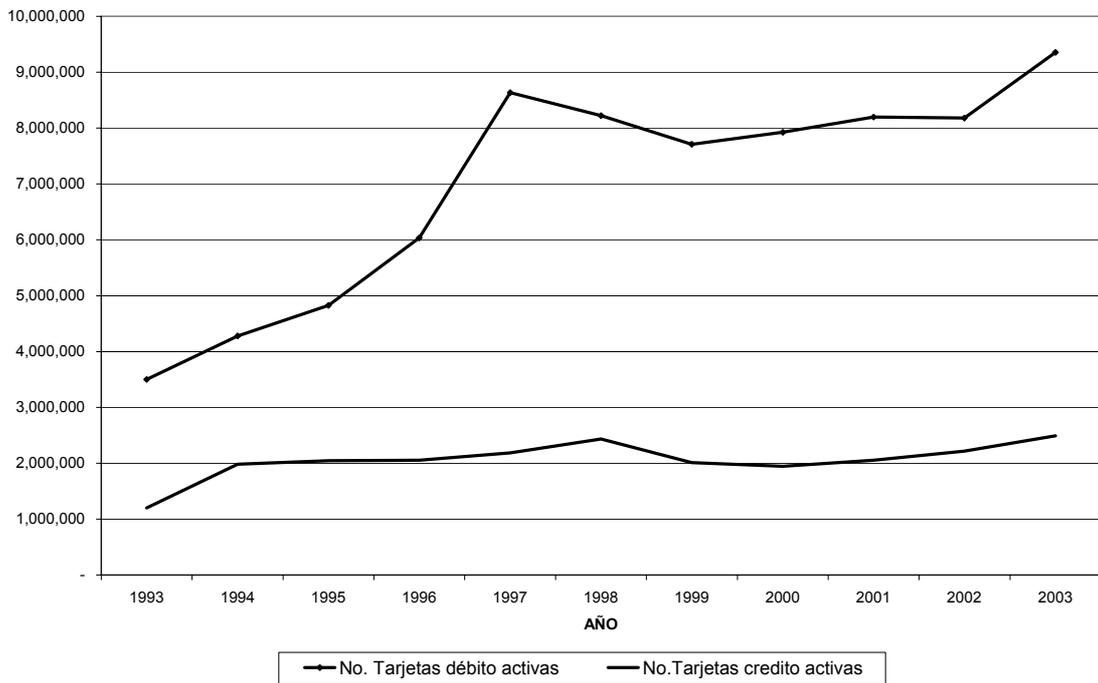
La tarea de pronosticar las necesidades de efectivo tanto agregado como por denominaciones resulta bastante difícil en el contexto colombiano, particularmente, durante los últimos 15 años que constituyen el período muestral 1987-2004. En este período la economía sufrió importantes cambios estructurales, estrechamente relacionados con el manejo del efectivo, inducidos por:

- Una disminución sustancial en los ritmos de inflación, la cual fue gradual hasta 1997 con un fuerte quiebre en la tendencia a finales de los 90.
- Una adopción considerable de tecnologías asociadas con el uso del efectivo: un crecimiento vertiginoso de ATMs (Grafica 1), una mayor bancarización con el consiguiente aumento en la utilización de cheques y tarjetas crédito-débito (Grafica 2) y la aparición de ACHs de bajo valor a finales de los 90 (CENIT y ACH Colombia).
- Introducción de un impuesto a las transacciones financieras del 2 por mil (\$2 por cada mil pesos transados) en noviembre de 1998, el cual ha sido incrementado en dos ocasiones, al 3 x mil en enero de 2001 y al 4 x mil en enero de 2004, y que graba no solo las transacciones operadas a través del sistema financiero sino también los debitos efectuados sobre cuentas de ahorro y corrientes para aprovisionamiento del efectivo por parte de los agentes.
- Un aumento exponencial en los índices de criminalidad así como también mayores índices de informalidad; actividades normalmente intensivas en el uso del efectivo.
- Crecimiento sustancial de los almacenes de cadena, los cuales modifican la distribución transaccional disminuyendo la frecuencia relativa de transacciones de bajo y mediano valor como resultado del “empaquetamiento” transaccional.
- Introducción de dinero electrónico (tarjetas de pago) en transacciones antes altamente intensivas en efectivo como el transporte público.

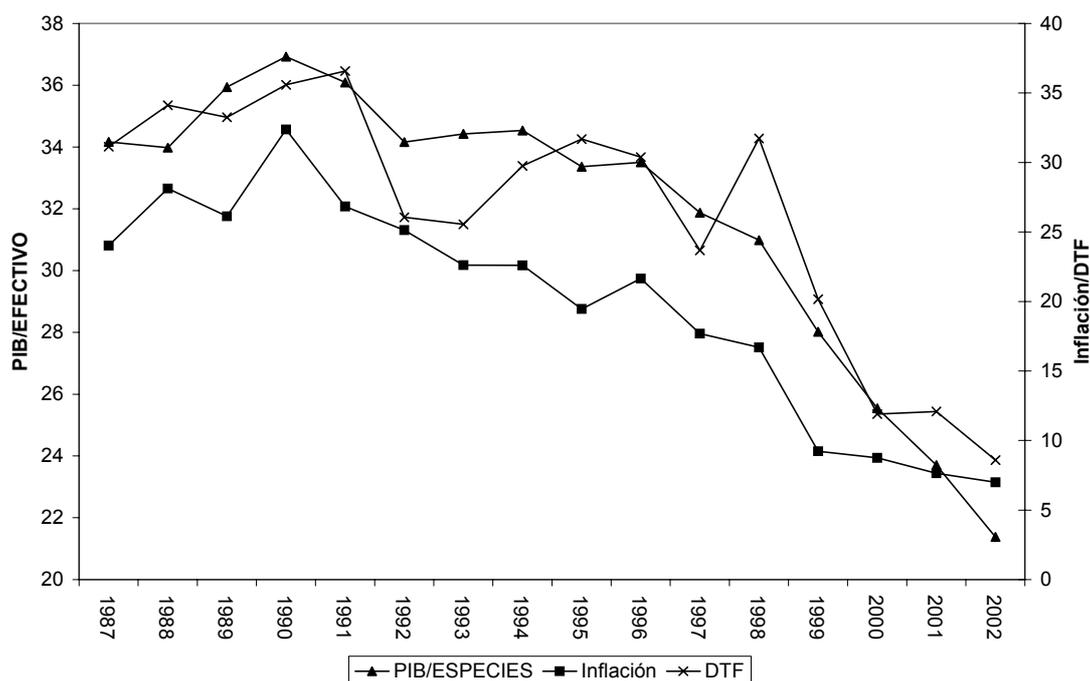
Gráfica 1: ATMS



Gráfica 2: Número de Tarjetas Débito y Crédito



Gráfica 3: Velocidad de M0 y Costo de Oportunidad



Como se aprecia en la grafica 3, la velocidad de circulación del agregado de especies monetarias (M0) ha sufrido cambios importantes con una tendencia decreciente durante la década de los noventa que se acentúa a finales de los 90 y que coincide con la introducción del impuesto a las transacciones financieras y la fuerte caída en la inflación y en la tasa de interés.

El estudio reciente más cercano al problema de pronosticar la demanda por especies monetarias en Colombia es el trabajo de Misas, Lopez, Arango y Hernandez (2004) en el cual se enfrenta el problema de pronosticar la demanda por efectivo en presencia de importantes y recientes cambios en el entorno macroeconómico³. En este trabajo se encuentra que los determinantes clásicos de la demanda de efectivo (efectivo real, tasa de interés, ingreso y tendencia como *proxy* de progreso técnico) están cointegrados y que, el modelo VEC pasa todas la pruebas de especificación y el vector de cointegración resulta estable para la última década. Sin embargo, en el mismo trabajo se compara la bondad de pronóstico del modelo VEC y modelos ARIMA frente a modelos no-lineales estimados con ANN evidenciándose claramente que los modelos lineales presentan mayores errores de pronóstico cuando se trata de replicar la dinámica más reciente del efectivo. Más aún, se encuentra evidencia de importantes no-linealidades en la dinámica del efectivo particularmente con respecto a la inflación.

El agregado de especies monetarias presenta básicamente los mismos problemas y retos que el efectivo ya que estos dos agregados se comportan de manera muy similar. En este sentido,

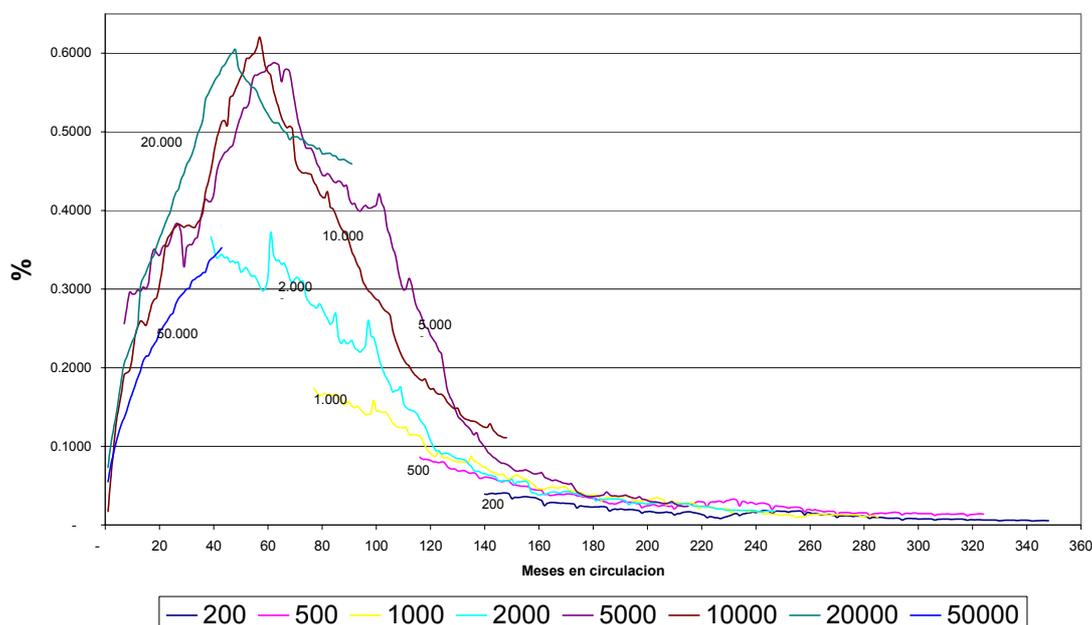
³ La diferencia entre el efectivo y el agregado de especies monetarias es que este ultimo incluye Efectivo en Caja de los Bancos.

la utilización de metodologías de pronóstico más flexibles que permitan un mejor ajuste a cambios estructurales recientes vuelve a ser de especial interés en el caso de las especies monetarias.

Ahora bien, el pronóstico de necesidades de especies por denominación es aún más intrincado ya que la historia de las series está fuertemente ligada a la estructura, a la entrada de nuevas denominaciones, a la transición de billete a moneda y al tiempo que lleva la denominación en circulación. La dinámica de la estructura es determinada en parte por el Banco Central pero también depende de los canales de distribución y de las innovaciones transaccionales ya mencionadas.

La estrecha relación en la dinámica de cada una de las denominaciones respecto a las otras en la estructura obliga a modelar el comportamiento de largo plazo de manera conjunta ,considerando la posición relativa de cada denominación en el total de las especies en circulación, el tiempo que ésta lleva en circulación y la dinámica conjunta que imprime la inflación y la actividad económica sobre la demanda relativa de cada denominación.

**Gráfica 4: Curva de Participaciones
Porcentaje del Valor total en circulación de M0**



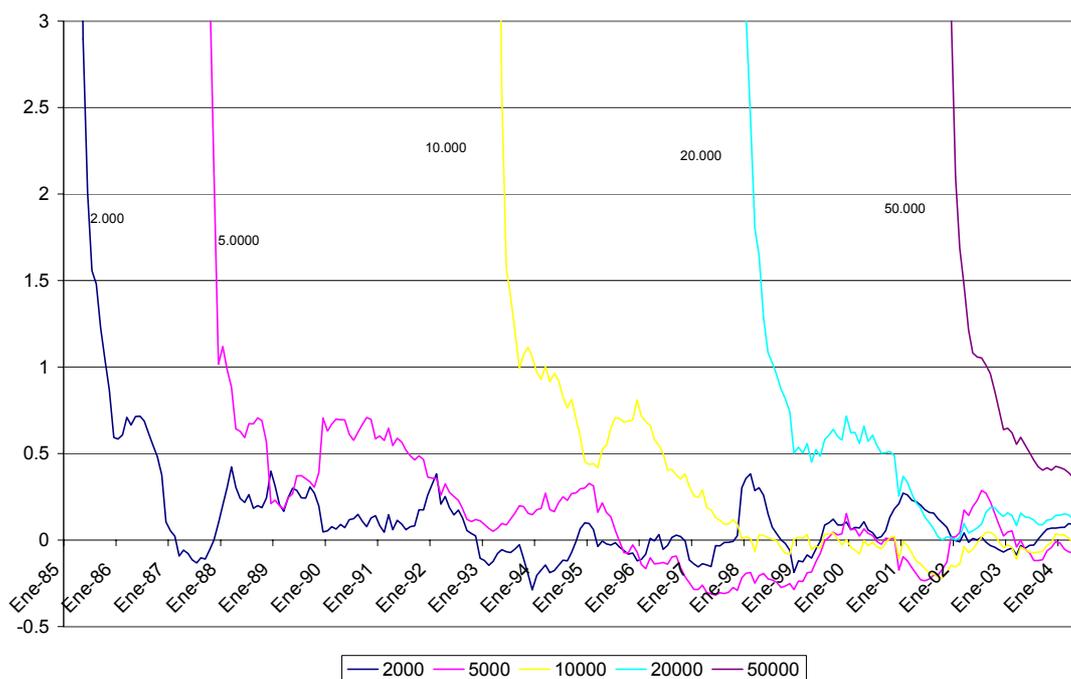
La grafica 4 muestra el comportamiento de la participación de cada una de las denominaciones actualmente en circulación, en el período 1987-2004. Para cada denominación se grafica en el eje horizontal el tiempo que lleva en circulación desde su inserción y en el eje vertical su participación en el valor total de M0. Como se puede observar, hay un patrón común a todas las denominaciones: estas aumentan rápidamente su participación una vez entran en

circulación hasta que llegan a un punto de maduración máximo, después del cual, al entrar una nueva denominación, empieza a caer su participación, a la vez que pasa a ocupar sucesivamente posiciones más bajas en la estructura.

Sin embargo, las historias difieren sustancialmente unas de otras en función del régimen inflacionario vigente, las políticas de la tesorería del banco respecto a la entrada de cada denominación, el momento de convertirla a moneda, la inserción de tecnologías como ATM y ACH y el efecto del ciclo económico sobre la demanda relativa en especial para el caso de las altas denominaciones. Por ejemplo, las diferencias en los tiempos en los cuales se alcanzan los puntos máximos de participación dependen del nivel de inflación, a mayor inflación más pronto es sustituida la mayor denominación por una nueva y por ende menor será el tiempo en el que se alcanza el máximo. La diferencia en las participaciones máximas, dependerá de la oportunidad con que van entrando las denominaciones. Una temprana entrada de una denominación truncará prematuramente el proceso de inserción de la mayor denominación existente quizás comprometiendo su plena maduración.

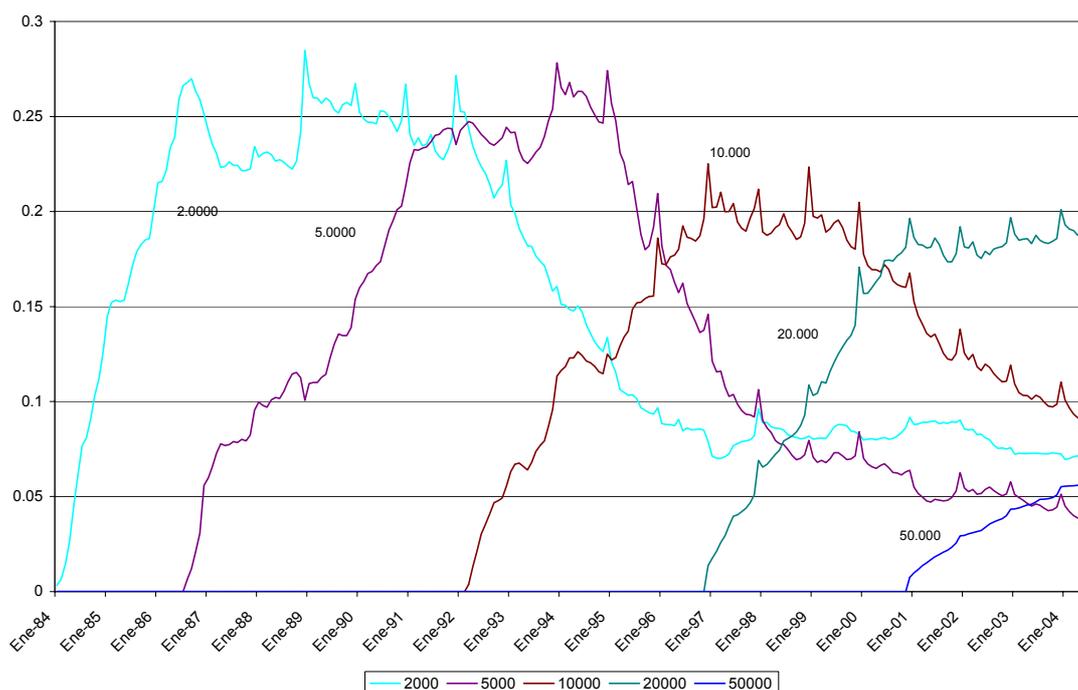
Por su parte, la gráfica 5 muestra como el crecimiento anual de las denominaciones durante sus primeros años en circulación presenta altas tasas seguidas de una caída sustancial y un repunte para luego seguir una senda descendente de crecimientos anuales. De nuevo, la fase descendente en las tasas refleja, en parte, el tiempo que les toma a los agentes la nueva denominación (por ejemplo, ajustes del software de cajeros para su distribución) pero también, la oportunidad con la que se introduce la nueva denominación.

Gráfica 5: Variaciones anuales piezas por denominación



El tiempo que tarda una nueva denominación en posicionarse transaccionalmente se hace más evidente si se observa la gráfica 6 donde se presentan las participaciones en piezas por denominación. En este caso los máximos no coinciden con la entrada de nuevas denominaciones y en algunas, una vez se alcanza un máximo este se mantiene por largos períodos de tiempo (mas de tres años) antes de ceder como en las denominaciones de \$2.000 y \$5.000.

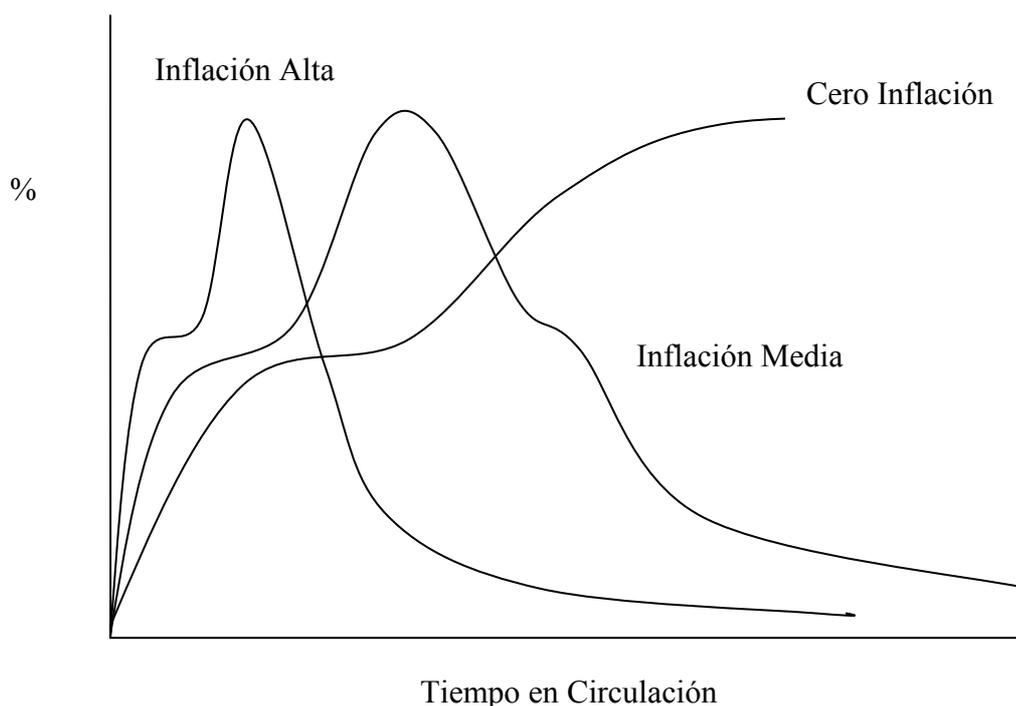
Gráfica 6: Participaciones sobre total de piezas (200-50000)



Idealmente, se buscaría un modelo econométrico que permita identificar la curva de participación promedio de una denominación en el mercado. Modelo que de alguna manera recogiese posibles desbalances en la estructura, cambios en el régimen inflacionario, innovaciones transaccionales y decisiones de introducción de nuevas denominaciones por parte del emisor, entre otros.

No obstante, difícilmente un modelo paramétrico podría capturar la relación altamente no-lineal de dicha curva con sus determinantes. Un ejemplo de esto es el efecto que tiene la inflación sobre esta. La figura 1 presenta una curva hipotética para distintos regímenes inflacionarios: en el caso de alta inflación, los distintos eventos de la curva son muy cortos con frecuentes entradas de nuevas denominaciones y salidas de aquellas que dejan de tener poder adquisitivo relevante en el mercado. A medida que la inflación va disminuyendo, la curva se va alargando con períodos más lentos de maduración y decadencia. En el caso extremo de cero inflación, la curva muestra un período de asenso para luego estabilizarse alrededor de una participación de largo plazo.

Figura 1: Curva Hipotética de Participaciones e Inflación



Más aún, en el caso de cero inflación, tanto en valor como en piezas en circulación, la estructura de participaciones tendería a ser constante en el largo plazo y solo sería afectada por innovaciones transaccionales o de tecnología de pagos.

Claramente, tanto el tiempo en circulación como la inflación alteran en forma no-lineal la curva de participaciones. Este punto es de especial interés en el caso Colombiano donde la inflación tuvo una reducción sustancial en los últimos 10 años y en particular entre 1998 y 2004. Es por ello que las ANN constituyen una herramienta muy valiosa para modelar la curva ya que éstas no solo son ideales para incorporar no-linealidades sino por que la estrategia de escogencia de la arquitectura permite darle una mayor ponderación a aquellas que mejor repliquen el comportamiento de la curva durante el cambio de régimen y el nuevo “estado estacionario”.

La utilización de ANN para develar la dinámica de la curva de participaciones es de especial relevancia dentro del contexto de pronósticos de especies monetarias en el mundo ya que muchas tesorerías continúan utilizando la métrica-D (Payne y Morgan, 1981) como herramienta de pronóstico, la cual es esencialmente de naturaleza lineal y depende de manera crítica de la estabilidad de la estructura en el tiempo⁴. Adicionalmente, como se explica mas adelante, el

⁴ En la métrica D se escoge un período relevante, usualmente el mas reciente, para calcular participaciones promedio de la estructura denominacional y se supone que dichas participaciones evolucionan en el tiempo de acuerdo a una constante de desplazamiento la cual depende de el ritmo de inflación de la economía.

uso de ANN para modelar la curva de participaciones es una extensión novedosa de esta metodología y constituir un aporte a la estimación de modelos SUR no-lineales.

Una segunda alternativa de pronóstico que se explora en este documento es la de estimar la circulación de especies por denominación, utilizando mínimos cuadrados flexibles (FLS), con el fin de complementar y validar los pronósticos que arrojan los métodos basados en proporciones. En esta metodología se supone que hay una relación lineal entre la variable dependiente y las variables explicativas pero que los parámetros de dicha relación cambian a lo largo del tiempo. Los FLS fueron escogidos ya que estos, además, permiten darle un peso mayor a la historia más reciente de cada una de las series, con el fin de capturar mejor no solo cambios, por ejemplo, de régimen inflacionario, sino también, su estado particular dentro de su historia en circulación.

En este trabajo se contrastan los resultados utilizando métrica-D vs. aquellos arrojados con la estimación mediante ANN y FLS de la estructura denominacional⁵.

La estrategia de pronóstico considera la siguiente secuencia:

- Pronóstico del agregado de especies a corto y largo plazo. El pronóstico a corto plazo se basa en la estimación de redes neuronales. El pronóstico a más largo plazo en un modelo VEC.
- Pronóstico desagregado por denominación:
 - Métodos de participación relativa para el pronóstico a mediano y largo plazo basados en Métrica D y ANN.
 - Métodos de pronóstico por denominación para horizontes de corto plazo con base en FLS.

3 Estimación del Agregado de Especies Monetarias

Aun cuando la variable objetivo de la tesorería es la cantidad de unidades en circulación, la definición de este agregado esta sujeta a una serie de problemas:

- Depende de que se entienda por unidades en circulación y por ende es sensible a las denominaciones bajas, las cuales, siendo monedas en la estructura más reciente, fueron alguna vez billetes, un importante saldo de ellos aún en poder del público numismático.

⁵ Se ha eludido en lo posible la separación del pronóstico entre monedas y billetes. Consideramos que el análisis por denominación es más adecuado para reconstruir la demanda total de monedas. La alternativa de tomar la participación de las monedas sobre el total para calcular la cantidad total de monedas es problemático ya que dicha proporción es poco estable en el tiempo y por ende difícil de utilizar para pronosticar el futuro.

- Es muy sensible a la introducción de nuevas denominaciones: una vez entra una nueva denominación la recomposición de la demanda hace que las cantidades caigan de manera importante sobre las denominaciones que le siguen de cerca en valor facial.
- Es sensible a choques exógenos en la distribución transaccional, a transiciones billete-moneda y a innovaciones tecnológicas.

En este orden de ideas, el agregado de especies en valores es mucho mas fácil de modelar dado que los factores antes descritos tienen un impacto menor en el sentido que los agentes, realmente, recomponen su portafolio de especies para un mismo valor transaccional.

3.1 Modelos lineales

Dentro del grupo de modelos lineales se consideran: (i) los univariados como: el modelo ARIMA con intervención y transferencia; (ii) los multivariados⁶ de series de tiempo VAR bajo existencia de relaciones de cointegración: $\Delta Y_t = \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{k-1} Y_{t-k+1} + \Pi Y_{t-1} + \mu + \Psi D_t + \varepsilon_t$; siendo Y_t el sistema de información, D_t el conjunto de elementos determinísticos y $\Pi = \alpha\beta'$ donde α representa las velocidades de ajuste y β los vectores de cointegración, y (iii) un primer intento por estimar el agregado a partir de los pronósticos de FLS denominación-por-denominación⁷.

3.1.1 Modelo ARIMA

El modelo ARIMA con intervención y transferencia para el logaritmo del agregado de especies reales en circulación (M0), que incorpora la tasa de interés de los CDT a 90 días como variable exógena, estimado con observaciones mensuales para el período comprendido entre febrero de 1987 y mayo de 2004 es el siguiente:

$$\left(1 + \underset{(0.023)}{0.16418L}\right) (1 - L^2) (1 - L) \text{Ln}(M0_t) = \left(1 - \underset{(0.0001)}{0.5257L^2}\right) e_t + \underset{(0.0001)}{0.054} (1 - L^2) SS_t - \underset{(0.022)}{0.04912} (1 - L) \text{Ln}(TCDT_t)$$

P - value : Ljung - Box(36): 0.993

⁶ Véase, Lutkepohl (1993).

⁷ Este agregado se construye con base en la suma de los estimativos de FLS por denominación que se describen mas adelante.

donde la intervención, SS_t , se refieren al efecto del mes en el cual se celebra la Semana Santa y la transferencia se recibe del logaritmo de la tasa de interés de los CDT a 90 días, $Ln(TCDT_t)$.

3.1.2 Modelo multivariado: VEC

El análisis de cointegración se realizó utilizando para ello la metodología de Johansen (1988). El ejercicio se lleva a cabo para el período comprendido entre febrero de 1987 y mayo de 2004 considerando el sistema de información conformado por el efectivo real, el índice de producción industrial, la tasa de interés de los CDT a 90 días y la inflación; variables transformadas mediante la función logaritmo, con información fin de período.

Para el análisis se consideran de uno a doce rezagos y los modelos: (i) “drift”, el cual considera una tendencia lineal determinística en los niveles de las variables y (ii) “cidrift”, el cual reconoce la existencia de tendencia lineal en el vector de cointegración, según la metodología de selección de componentes determinísticas propuesta por Johansen (1994, 1995).

Una vez que se prueba la existencia de cointegración⁸, es decir, que el vector de cointegración tiene interpretación económica, la selección de las componentes determinísticas se realiza a través de las pruebas de exclusión (Johansen, 1995). El siguiente paso se centra en la evaluación del comportamiento de los residuales. Dichos residuales se definen como adecuados si son ruido blanco y normales multivariados (Lütkepohl, 1993). Así, una vez definido como óptimo el comportamiento de los residuales, se llevan a cabo pruebas de exogeneidad débil, estacionariedad y exclusión del vector de cointegración. Es de señalar que, dado el propósito del ejercicio, se requiere que el logaritmo del efectivo real no sea exógeno débil y, adicionalmente, que ninguna de las variables del sistema esté excluida del vector de cointegración.

Los resultados obtenidos, a través del análisis anteriormente mencionado, permiten concluir que existe una relación lineal de largo plazo entre las especies reales, el índice de producción industrial, la tasa de interés de los CDT a 90 días y la inflación anual del índice de precios al consumidor total nacional.

⁸ Es de señalar que, en el análisis de cointegración se consideran variables “*dummies*” estacionales centradas, como también, de intervención. El uso de variables “*dummies*” de intervención puede verse en Hendry y Doornik (1994) y Arize (1999), entre otros.

El cuadro 1 presenta la prueba de cointegración de la traza, ajustada por el tamaño de muestra de acuerdo a Cheung y Lai (1993)⁹, la estimación del vector de cointegración normalizado, como también, el factor de ajuste. Como se observa, la prueba de la traza señala la existencia de un único vector de cointegración consistente con la teoría. El signo del coeficiente asociado a la desviación del efectivo real de su demanda de largo plazo, en la ecuación dinámica de corto plazo respectiva, es significativo y teóricamente coherente.

3.1.2.1.1 Cuadro 1

Sistema / Modelo Longitud del rezago	Prueba de cointegración		Vectores de cointegración	Velocidad de ajuste			
	Traza	V. Crítico (90%)	$\beta' = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4]$	$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]$ "t" Student			
$\{M0_t, LIPI_t, LTCDT_t, LINF_t\}$				$DM0_t$	$DLIPI_t$	$DLTCDT_t$	$DLINF_t$
Modelo: <i>Drift</i> Rezago: 3 Dummies: de intervención y estacionales	r=1 52.15 r=2 16.32 r=3 5.89 r=4 0.47	43.84 26.70 13.31 2.71	[1 -0.766 0.265 0.264]	-0.112 (-4.28)	-0.091 (-2.68)	-0.083 (-1.71)	-0.113 (-2.69)

El cuadro 2 presenta las pruebas de exclusión, estacionariedad y exogeneidad débil realizadas sobre las variables que conforman el vector de cointegración. Como se observa, dichas pruebas muestran que ninguna de las variables está excluida del vector y que todas son integradas de orden 1, I(1). Igualmente, existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de exogeneidad débil de las especies reales.

Cuadro 2

Exclusión	Estacionariedad	Exogeneidad Débil
$\chi^2_{0.05}(1) = 3.84$	$\chi^2_{0.05}(3) = 7.81$	$\chi^2_{0.05}(1) = 3.84$
$LER_t : 16.38$ $LIPI_t : 9.04$ $LTCDT_t : 13.68$ $LINF_t : 5.49$	$LER_t : 30.70$ $LIPI_t : 35.22$ $LTCDT_t : 23.60$ $LINF_t : 27.81$	$LER_t : 15.00$ $LIPI_t : 6.60$ $LTCDT_t : 2.51$ $LINF_t : 5.29$

Los P-values asociados a las pruebas multivariadas de diagnóstico sobre existencia de autocorrelación residual LM(1) , LM(4) son respectivamente 0.44 y 0.73. En tanto que el p-value asociado a la prueba de Ljung-Box es 0.01. Dichas pruebas permiten concluir que los

⁹ En la determinación del rango por el estadístico de la traza se tiene en cuenta que, de acuerdo a Cheung y Lai (1993), dicha prueba muestra más asimetría y exceso de curtosis que la de máximo valor propio, por lo cual se requiere una corrección por tamaño de muestra.

residuales tienen un comportamiento ruido blanco multivariado en los residuales. Este resultado es confirmado por un p-value de 0.20 asociado a la prueba de normalidad multivariada de Doornik y Hansen (1994). Es decir, las pruebas multivariadas de diagnóstico de residuales, Lutkepohl (1993), permiten concluir que éstos presentan un comportamiento óptimo.

Finalmente, las pruebas de estabilidad de Hansen y Johansen (1993) muestran, en general, que el vector de cointegración es estable durante los seis cinco años, Anexo A.

3.2 Modelos no-lineales: redes neuronales artificiales y selección de la mejor red.

En el contexto de análisis de series de tiempo, las ANN se clasifican como modelos no-lineales entrenados para (i) realizar conexiones entre los valores pasados y presentes de una serie de tiempo, aprendiendo de su error de pronóstico y (ii) extraer estructuras y relaciones escondidas que gobiernan el sistema de información (Azoff,1996). Su utilización está primordialmente motivada por la capacidad de aproximarse a cualquier función medible de Borel con un muy buen grado de exactitud (Rech, 2002) .

Este artículo se centra en ANN del tipo “*feedforward*” multicapa con una única superficie escondida o “*single hidden layer*”. Dicha arquitectura se selecciona con base en su bondad de pronóstico. En el caso de los modelos de redes neuronales artificiales, dicha función puede ser definida como en Granger y Terasvirta (1993):

$$y_t = \Phi_0 + X_t' \Phi + \sum_{j=1}^Q \beta_j G(Z_t' \gamma_j) + \varepsilon_t \quad (2)$$

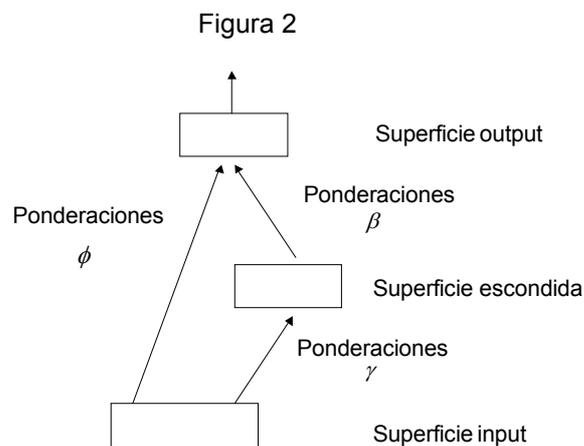
donde $Z_t \subseteq X_t$, $X_t = \{y_{t-1}, \dots, y_{t-l}, w_1, \dots, w_m\}$ con y_{t-j} , $j = 1, \dots, l$ rezagos de la variable dependiente, w_j , $j = 1, \dots, m$ variables exógenas y G la función logística, es decir:

$$G(w) = \frac{1}{1 + \exp(-w)} \quad (3)$$

El término $X_t' \Phi$ corresponde al componente lineal de la relación entre y_t y X_t , en tanto que, la componente logística caracteriza la parte no-lineal, siendo Q el número de unidades escondidas.

La figura 2 presenta la arquitectura correspondiente a este modelo. Como se observa, la red está constituida por tres superficies diferentes. La superficie base o superficie-*input* está conformada por las variables explicativas, las cuales pueden presentar una relación lineal

con y_t , como también, algunas de ellas, un comportamiento no-lineal, conformando los conjuntos X_t y Z_t , respectivamente. Dichos *inputs* son multiplicados por los valores de ponderación de los conectores, ϕ_i $i = 1, \dots, l + m$, en el caso de la relación lineal y $\{\gamma_{ij}, i = 1, \dots, k\} = \gamma_j$ $j = 1, \dots, Q$, en el caso de la relación no-lineal, para, posteriormente entrar a la superficie oculta¹⁰, donde existen unidades escondidas asociadas a funciones logísticas. En esta superficie se forman las combinaciones $Z_t' \gamma_j$ ($j=1, \dots, K$) que son transformadas a valores entre cero y uno mediante las funciones de activación $G(\cdot)$. Finalmente, éstas son multiplicadas por ponderaciones β_j para dar como resultado, al adicionar la componente lineal, el *output* y_t ¹¹ (Misas et al, 2002).



3.2.1 Modelación bajo redes neuronales artificiales

La determinación del modelo comprende las etapas de especificación, estimación de parámetros y evaluación de los modelos estimados.

En la primera etapa se seleccionan las variables que conforman los conjuntos X_t y Z_t , como también, el número de unidades escondidas, Q . En este trabajo se sigue el esquema de Swanson y White (1995, 1997a) para la determinación del conjunto de variables “*input*” el cual

¹⁰ No relacionada de manera directa con y_t .

¹¹ Swanson y White (1995) se refieren a los parámetros γ_{ij} como ponderaciones *input to hidden unit*, mientras que los parámetros β_j son ponderaciones *hidden unit to output*. A su vez, los parámetros Φ de la parte lineal en (2) se conocen como ponderaciones *input to output*.

parte de una estrategia *step-wise* en la componente lineal¹². Una vez definido el conjunto de variables *input* de la componente lineal, X_t ecuación (2), se conforma el conjunto Z_t , $Z_t \subseteq X_t$. En primera instancia, el conjunto Z_t incluye la primera variable del conjunto *input*, luego se adiciona a dicho conjunto la segunda variable *input* de tal forma que en el último paso $Z_t = X_t$. La estimación de la red se lleva a cabo considerando cada uno de estos conjuntos Z_t y diferente número de unidades ocultas, $(Q) (Q = 1, \dots, Q^*)$ ¹³.

De acuerdo con Gradojevic y Yang (2000), el número de unidades ocultas Q a elegir presenta una disyuntiva (*trade-off*). Demasiadas unidades pueden llevar a un sobre entrenamiento o sobre ajuste lo cual evita que la red aprenda una solución general; muy pocas unidades ocultas por otro lado, inhiben el aprendizaje del patrón entre el *input* y el *output*. De esta forma, se parte de un amplio número de modelos de redes neuronales, los cuales deben ser estimados y posteriormente evaluados, en lo concerniente a su desempeño muestral.

La segunda etapa o etapa de estimación se lleva a cabo a través de la metodología de mínimos cuadrados ordinarios no-lineales (NLS)¹⁴.

La modelación de M0 considera información mensual¹⁵ para el período comprendido entre febrero de 1987 y mayo de 2004. El período entre febrero de 1987 y noviembre de 2002 se establece como el período de entrenamiento y evaluación dentro de muestra, en tanto que, el período de evaluación fuera de muestra va de diciembre de 2002 a mayo de 2004.

La red neuronal estimada es de carácter autorregresivo, es decir, el conjunto X_t está conformado por el primer rezago y por los rezagos de orden 12 y 13 de la primera diferencia del logaritmo de M0 real reescalado¹⁶, $X_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*, \Delta LMOR_{t-12}^*, \Delta LMOR_{t-13}^*\}$ ¹⁷.

¹² Criterios tales como AIC y BIC.

¹³ Donde Q^* es el máximo número de unidades ocultas.

¹⁴ Como señala Franses y van Dijk (2000), la convergencia en el proceso de estimación no garantiza la obtención del mínimo global. Por consiguiente, se llevan a cabo múltiples estimaciones de cada una de las diferentes redes utilizando distintos valores iniciales del vector de parámetros $\Psi(\Phi, \gamma, \beta)$. En particular, cada arquitectura se estima para 30 valores iniciales diferentes del vector de parámetros.

¹⁵ Fin de período.

¹⁶ Las variables son reescaladas en el intervalo (0,1). Así, la notación "*" se utiliza para referirse a la transformación de la diferencia del logaritmo de cada serie, es decir:

$$x_t^* = \frac{x_t - \bar{x}_t}{\sigma(x_t)}; \text{ siendo } x_t = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1}).$$

¹⁷ Dado que ejercicios previos con la variable efectivo sugieren la pertinencia de incorporar en X_t la inflación rezagada, se estimó una segunda red o red ampliada que adiciona a su propia historia, el

Una vez definido el conjunto de variables *input* de la componente lineal, X_t , se realiza el proceso de estimación de la red neuronal mediante mínimos cuadrados no-lineales para las diferentes configuraciones del conjunto de información Z_t , $Z_t \subseteq X_t$, de la componente no-lineal y para un número de unidades ocultas o *hidden units* Q que varían desde uno hasta cuatro. Es de resaltar que, el conjunto X_t que conforma la componente lineal permanece invariante a través de las diferentes arquitecturas¹⁸. El cuadro 3 presenta el esquema de conformación de los conjuntos X_t y Z_t .

Cuadro 3

Modelo Red neuronal autorregresiva
Esquema <i>step-wise</i> : $X_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*, \Delta LMOR_{t-12}^*, \Delta LMOR_{t-13}^*\}$
$P = 1: Z_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*\} \subseteq X_t$ $Q = 1,2,3,4$
$P = 2: Z_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*, \Delta LMOR_{t-12}^*\} \subseteq X_t$ $Q = 1,2,3,4$
$P = 3: Z_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*, \Delta LMOR_{t-12}^*, \Delta LMOR_{t-13}^*\} \subseteq X_t$ $Q = 1,2,3,4$

Una vez estimado el vector de parámetros para cada una de las diferentes arquitecturas, se calculan las medidas de evaluación¹⁹ dentro y fuera de muestra, los cuales son reportados en los cuadros 4 y 5²⁰.

rezago de orden doce del cambio reescalado del logaritmo de la inflación anual, $X_t = \{\Delta LMOR_{t-1}^*, \Delta LINF_{t-12}^*, \Delta LMOR_{t-12}^*, \Delta LMOR_{t-13}^*\}$. Sin embargo, las evaluaciones tanto dentro como fuera de muestra no superan los criterios asociados a la red puramente autoregresiva por lo cual nos concentramos en el resultado de esta última.

¹⁸ En este contexto el término arquitectura se asocia al componente no lineal y se entiende como el número P de elementos en Z_t y el número de unidades escondidas Q (en una única superficie escondida) necesarios en su determinación.

¹⁹ Las medidas de evaluación consideradas son las siguientes: AIC, BIC, RMSE, RMSPE, MAE, MAPE y SR dentro de muestra y RMSE, RMSPE, MAE, MAPE, SR y U-THEIL fuera de muestra (ver anexo B para definiciones).

Cuadro 4. Evaluación dentro de muestra y selección de la mejor red para el agregado de especies monetarias.

P	Q	AIC	BIC	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	SR
1	1	23.79215	23.84619	144,210.66	0.03020	83,078.68	0.02262	75.42857
1	2	23.81489	23.92297	143,394.35	0.03007	82,421.90	0.02254	75.42857
1	3	23.85001	24.01214	143,468.44	0.02976	82,964.80	0.02246	74.85714
1	4	23.84031	24.05648	140,360.74	0.02993	80,020.19	0.02202	74.85714
2	1	23.77008	23.84214	141,820.00	0.02883	79,505.49	0.02204	77.14286
2	2	23.55397	23.69809	124,434.11	0.02501	71,980.43	0.01914	77.71429
2	3	23.55327	23.76944	121,595.33	0.02412	69,703.15	0.01825	78.28571
2	4	23.55053	23.83876	118,700.27	0.02373	64,969.40	0.01741	78.85714
3	1	23.77386	23.86393	141,282.83	0.02851	78,078.62	0.02187	74.28571
3	2	23.58291	23.76305	124,821.05	0.02494	72,396.43	0.01916	77.71429
3	3	23.36673	23.63694	108,894.93	0.02369	66,167.72	0.01806	74.85714
3	4	23.45682	23.81710	110,721.64	0.02284	61,391.32	0.01691	76.57143

Cuadro 5. Evaluación fuera de muestra y selección de la mejor red para el agregado de especies monetarias.

P	Q	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	SR	UTHEIL
1	1	918,475.68	0.07595	829,100.95	0.06912	70.58824	1.08355
1	2	1,011,225.52	0.08345	918,421.14	0.07646	70.58824	1.19057
1	3	998,834.81	0.08426	940,254.25	0.07913	70.58824	1.20220
1	4	497,628.65	0.04267	432,664.18	0.03664	70.58824	0.60881
2	1	406,972.54	0.03566	355,465.41	0.03059	70.58824	0.50875
2	2	352,371.24	0.02768	277,682.27	0.02248	64.70588	0.39495
2	3	490,278.28	0.03844	357,698.16	0.02867	64.70588	0.54847
2	4	393,539.30	0.03351	331,399.11	0.02813	64.70588	0.47808
3	1	524,407.09	0.04587	456,547.42	0.03953	64.70588	0.65436
3	2	347,006.54	0.02733	259,372.09	0.02109	64.70588	0.38987
3	3	689,569.17	0.05488	561,364.22	0.04587	64.70588	0.78296
3	4	599,144.30	0.04725	491,419.70	0.03976	82.35294	0.67416

Para el caso de la evaluación dentro de muestra las tres mejores redes son aquellas cuya arquitectura viene dada por las combinaciones p_q: 3_3, 3_4 y 2_4; en tanto que para la evaluación fuera de muestra los resultados sugieren que las mejores serían la 3_2, 2_2 y 2_4.

Llevando a cabo una elección entre la disyuntiva de desempeño dentro y fuera de muestra y teniendo en cuenta su presencia en el conjunto conformado por las tres mejores redes tanto dentro como fuera de muestra, se selecciona la red cuya arquitectura es $P = 2, Q = 4$.

²⁰ Es de resaltar que todas las medidas de evaluación de pronóstico se llevan a cabo sobre el nivel nominal de M0. Es decir, los pronósticos se realizan sobre $\Delta LMOR_t^*$ y posteriormente para efectos de la evaluación del mismo se aplica la transformación inversa obteniéndose los niveles nominales de M0. Es esta la variable que para efectos prácticos resulta de interés.

3.3 Comparación entre modelos lineales y no-lineales

Una vez estimados los modelos lineales, la red neuronal artificial, y el agregado de FLS se comparan sus desempeños en el pronóstico tanto dentro como fuera de muestra. Conforme sugiere el cuadro 6, FLS arroja la mejor evaluación de pronóstico dentro de muestra en tanto que la red se comporta de forma muy similar a los modelos restantes.

Cuadro 6. Medidas de ajuste dentro de muestra de los diferentes modelos para el agregado de especies monetarias.

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
RED 2_4	118,700.27	0.02373	64,969.44	0.01741
FLS	72,247.01	0.01485	40,438.15	0.01121
VEC	110,403.12	0.02119	60,385.51	0.01679
ARIMA	115,494.99	0.02340	62,655.27	0.01807

En lo referente a la evaluación fuera de muestra, tomando un horizonte a 3, 6, 9, 12, 15 y 18 períodos, la red neuronal se caracteriza en general por presentar un mejor desempeño en su pronóstico frente a los otros modelos (Ver cuadro 7).

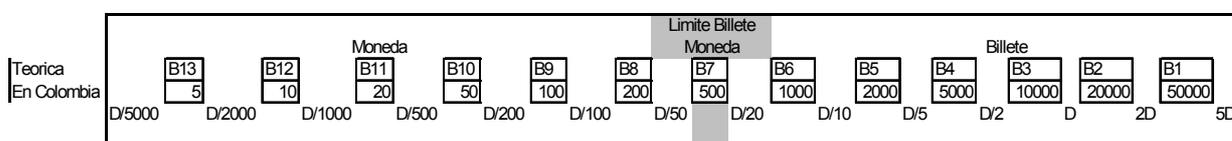
Cuadro 7: Medidas de ajuste fuera de muestra de los diferentes modelos para el agregado de especies monetarias a diversos horizontes.

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	UTHEIL
Horizonte 3					
RED 2_4	317,703.12	0.02615	236,430.33	0.01992	0.23080
FLS	290,238.96	0.02650	260,082.00	0.02332	0.23385
VEC IPC_VEC	762,422.17	0.06287	630,070.00	0.05343	0.55480
VEC IPC_OBS	736,929.83	0.06080	611,355.67	0.05187	0.53656
ARIMA	615,267.99	0.05158	556,550.33	0.04780	0.45523
Horizonte 6					
RED 2_4	381,131.27	0.03404	329,779.50	0.02960	0.42441
FLS	430,848.95	0.03989	394,650.83	0.03625	0.49744
VEC IPC_VEC	638,641.87	0.05463	548,448.33	0.04838	0.68122
VEC IPC_OBS	596,910.58	0.05077	503,174.67	0.04427	0.63305
ARIMA	547,959.53	0.04782	502,074.33	0.04469	0.59632
Horizonte 9					
RED 2_4	449,331.67	0.03986	406,023.00	0.03614	0.58994
FLS	461,789.27	0.04190	435,026.33	0.03932	0.62026
VEC IPC_VEC	670,523.71	0.05804	600,342.22	0.05293	0.85913
VEC IPC_OBS	626,011.39	0.05400	553,497.78	0.04872	0.79931
ARIMA	606,785.59	0.05319	571,230.33	0.05063	0.78727
Horizonte 12					
RED 2_4	424,890.36	0.03764	371,916.58	0.03298	0.62398
FLS	466,357.63	0.04186	439,791.58	0.03928	0.69392
VEC IPC_VEC	759,046.18	0.06536	694,463.00	0.06056	1.08352
VEC IPC_OBS	725,911.06	0.06230	656,166.08	0.05710	1.03284
ARIMA	588,471.49	0.05139	558,596.67	0.04912	0.85191
Horizonte 15					
RED 2_4	427,271.15	0.03642	380,687.87	0.03241	0.47556
FLS	442,063.35	0.03908	411,935.40	0.03594	0.51021
VEC IPC_VEC	875,484.69	0.07221	766,122.13	0.06452	0.94278
VEC IPC_OBS	853,286.23	0.07005	735,033.27	0.06173	0.91463
ARIMA	675,052.67	0.05477	621,286.53	0.05186	0.71503
Horizonte 18					
RED 2_4	393,539.13	0.03351	331,398.94	0.02813	0.47808
FLS	556,988.16	0.04675	499,105.39	0.04221	0.66702
VEC IPC_VEC	991,207.74	0.08045	877,609.44	0.07258	1.14776
VEC IPC_OBS	969,104.37	0.07840	847,524.00	0.06992	1.11849
ARIMA	701,740.01	0.05653	653,071.72	0.05386	0.80659

4 Métrica D, Estructura y Pronósticos

La métrica-D es una herramienta ampliamente usada para desagregar la circulación total de especies por denominación y para determinar cuando debe entrar una nueva denominación en circulación²¹. Esta metodología se basa en una regularidad empírica según la cual la estructura denominacional promedio para una muestra de países está asociada al valor de la transacción promedio diaria de la economía, D, estimado como el salario nominal promedio diario, según el esquema representado en la figura 3:

Figura 3: Estructura denominacional según métrica D y estructura en Colombia



Según Payne y Morgan (1981), la estructura promedio está atada a D, la cual define la secuencia de entre 10 y 12 denominaciones, dos de las cuales tienen valores faciales superiores a D (B1 y B2) y el resto inferiores en función de múltiplos de 1, 2 y 5. Una vez el valor de D cruza el umbral de B2 (la segunda denominación) el Banco Central introduciría una nueva denominación como primera (B1) actualizando el poder adquisitivo de la estructura.

La misma figura muestra la estructura actual de denominaciones en Colombia enmarcada sobre la métrica D, la cual indica que la transacción promedio diaria en Colombia debe estar entre las denominaciones de \$10.000 y \$20.000. Si se estima por los salarios promedio para dic de 2003 de la encuesta nacional de hogares dicho valor estaría por el orden de los \$18.604. Este ultimo estimativo de D señalaría que la estructura actual es válida pero además que D estaría muy cerca del umbral de los \$20.000 indicando que pronto debería introducirse en el mercado el billete de \$100.000, lo cual está lejos de suceder como se explicará más adelante²².

Adicionalmente, la metodología de métrica-D permite estimar la proporción de cada una de las denominaciones en el total de piezas en circulación (ver Correa, 1983). Ésta se puede resumir en los siguientes pasos:

- Se calcula el valor acumulado en cantidades según denominaciones para diferentes años.

²¹ De hecho el Banco de la República la ha seguido al momento de decidir la entrada de nuevas denominaciones. No obstante, el pronóstico de demanda por denominación se acerca al de curva de participaciones descrito en la sección 5.

²² Ver Mushin (1998) para una revisión crítica de esta metodología.

- Se deflactan dichos valores acumulados según un índice de poder adquisitivo. En particular, se utiliza un índice de la transacción promedio diaria estimada como el salario nominal promedio diario de la economía.
- Se escoge el período más relevante, normalmente el más reciente.
- Sobre la curva de valores acumulados deflactados se calcula un promedio de las participaciones por denominación sobre el total del volumen de piezas en circulación.
- Se proyecta esta curva de participaciones hacia delante en función del ritmo de inflación con base en la distancia del estimativo de transacción promedio diaria D^* con respecto a la menor denominación en el rango en el que se ubica dicho estimativo. Por ejemplo, si actualmente D^* está entre las denominaciones de \$10.000 y \$20.000 el factor de desplazamiento será:

$$\varphi = \frac{D^* - \$10.000}{\$20.000 - \$10.000},$$

con base en el cual aumenta la participación de la denominación más alta y caen las participaciones del resto de las denominaciones.

- Se aplica la estructura de participaciones pronosticada al agregado de especies en circulación que se proyecta²³.

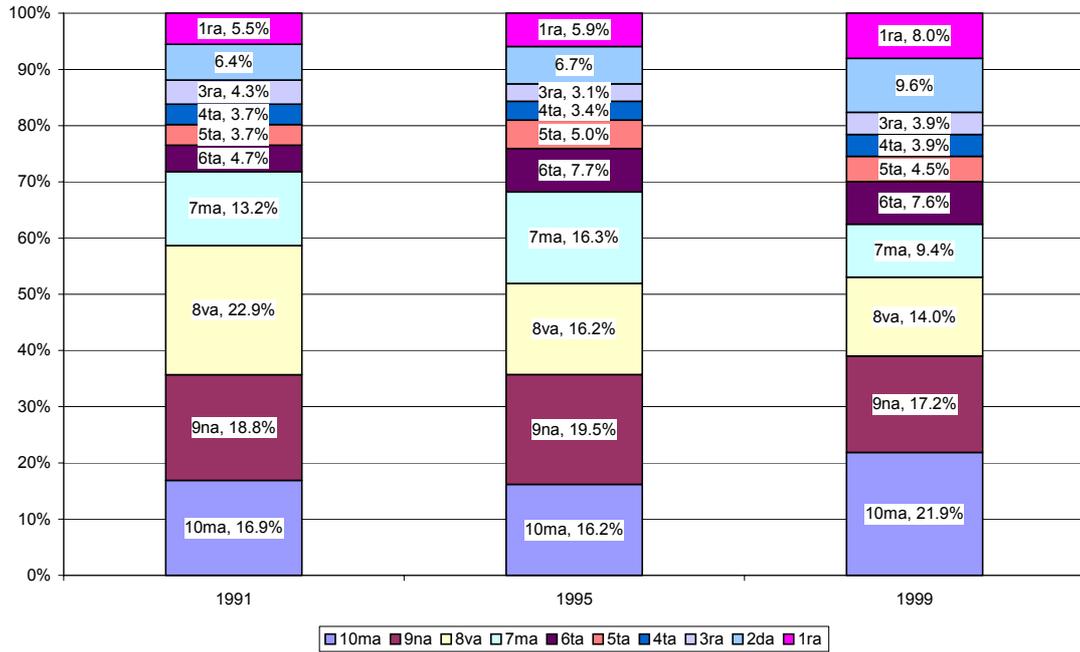
La grafica 7 presenta las participaciones según orden de mayor a menor denominación. Claramente, la estructura de participaciones no presenta un patrón estable. Nótese en particular un aumento considerable de la participación en unidades de las denominaciones más altas en la estructura, una caída en las denominaciones séptima y octava y un aumento de las denominaciones más bajas.²⁴ Esto en parte se debe al impacto de la actualización de la estructura de monedas en la segunda mitad de los 90 con la introducción casi simultanea de las monedas de \$100, \$200 y \$500 pero también puede estar reflejando un cambio en la distribución transaccional de la economía²⁵.

²³ Para una descripción mas detallada ver anexo C.

²⁴ La gráfica toma las estructuras un año antes del ingreso de nuevas denominaciones en circulación durante el período muestral.

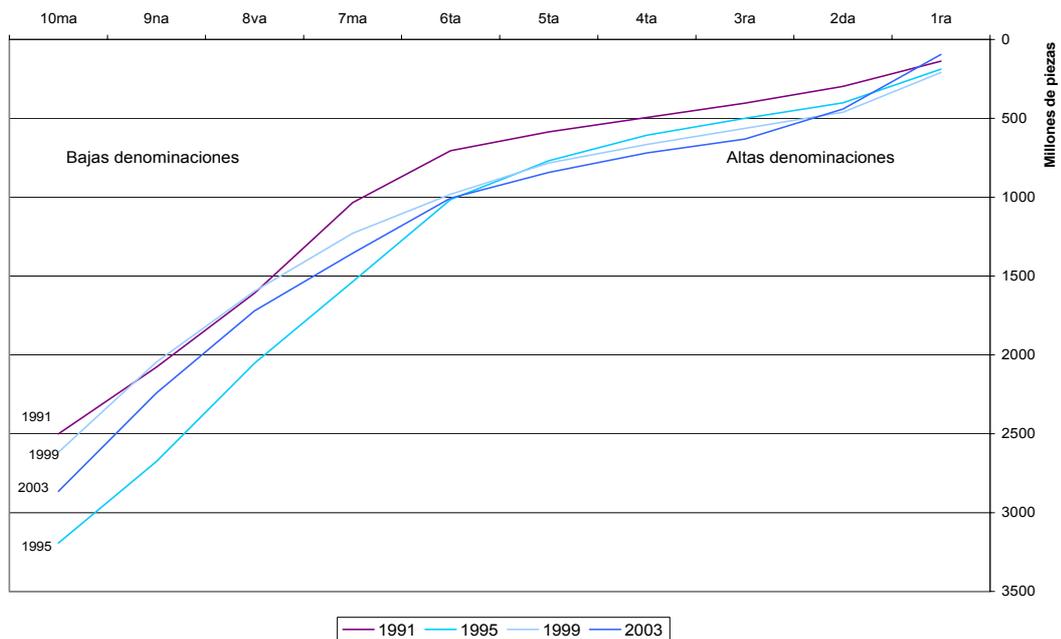
²⁵ El empaquetamiento transaccional hace que los pagos se efectúen con altas denominaciones y que el cambio obligue muchas veces a la necesidad de utilizar con más intensidad las denominaciones más bajas.

Gráfica 7: Participaciones por denominación sobre el volumen total de especies en circulación



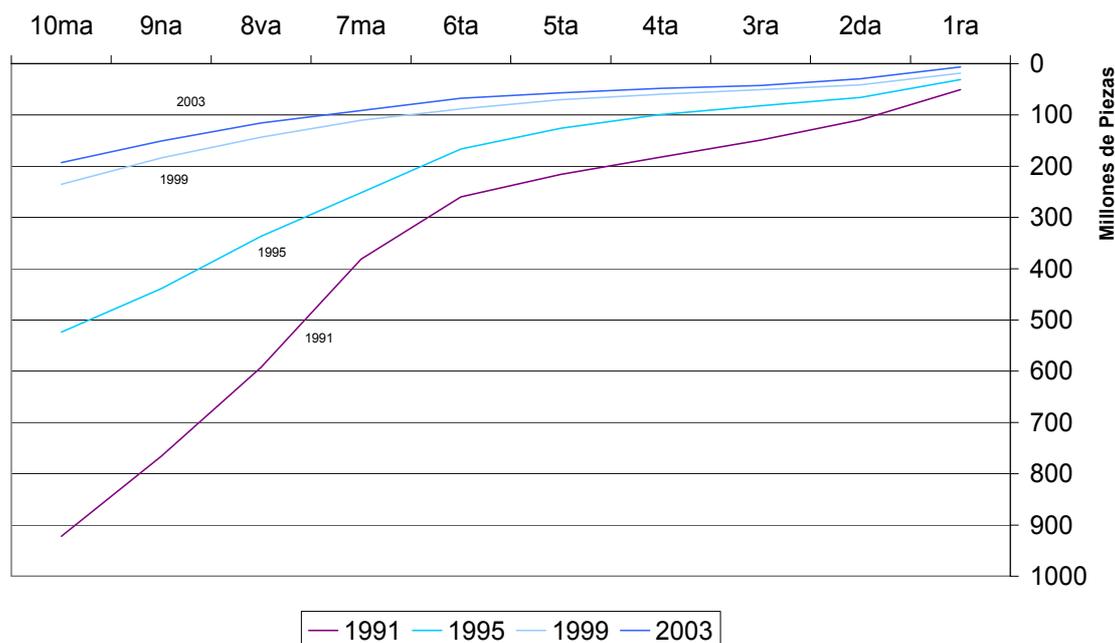
La grafica 8 muestra el volumen acumulado de piezas según denominaciones ordenadas de menor a mayor para los años 1991, 1995, y 1999. A nivel agregado la cantidad de piezas requeridas por la economía creció en 1.13% promedio anual. No obstante, el desplazamiento no es paralelo, mostrando cambios significativos en la estructura. En particular se ve un fuerte aumento en la demanda por especies entre la 1a y 3a denominación y un aumento, menos acentuado, hasta la 7a denominación.

Grafica 8: Volumen Acumulado



En la gráfica 9 el volumen de unidades se deflacta con el índice D*, que en nuestro caso se supuso igual al IPC, con el fin de que el volumen sea comparable a través de los años. Se destaca el hecho que, en unidades constantes, las necesidades de especies monetarias en Colombia en el año 2003 son un sexto de las unidades requeridas hace una década. Para poner esta cifra en contexto, suponga que el número de unidades, dada una estructura, simplemente crece proporcionalmente al crecimiento en los precios, si ésto fuera así, al deflactar, las líneas de la grafica 8 colapsarían a una sola curva.

Gráfica 9: Volumen acumulado Deflactado



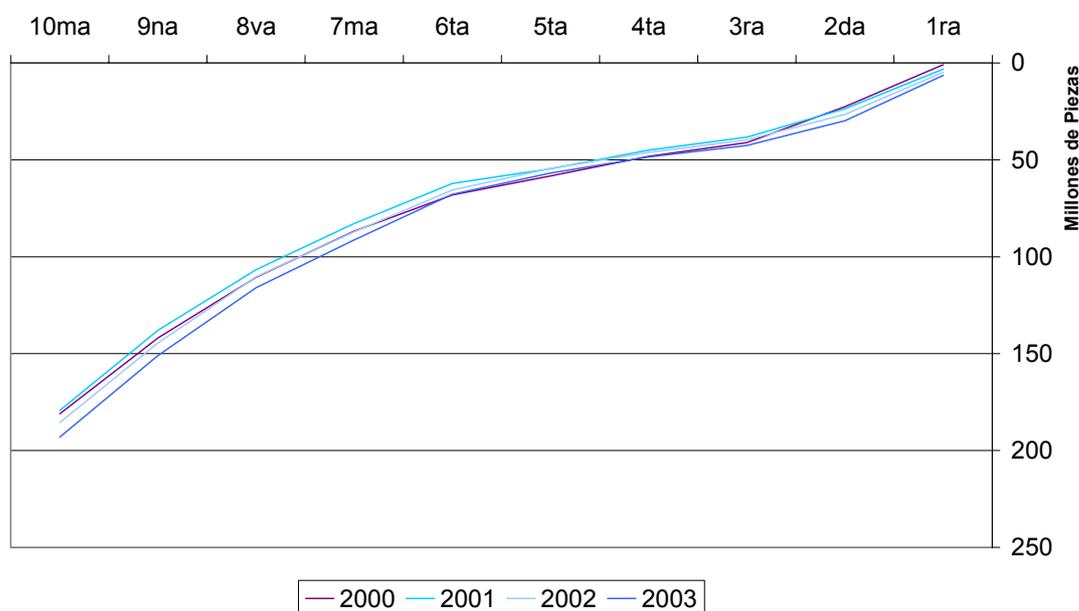
Claramente esto no ha sido así, confirmándose lo anotado anteriormente en el sentido que los cambios en la distribución transaccional de los agentes en la economía, debido a la propagación de los almacenes de cadena, los cambios introducidos al interior de la estructura denominacional y los nuevos canales de distribución del efectivo como las ATMs han inducido un ahorro sustancial en las necesidades de especies monetarias (en términos de piezas, lo cual no necesariamente implica una menor demanda real de efectivo en valores).

Hacia 1997 la estructura de denominaciones se tiende a estabilizar y tiene un comportamiento más o menos estable hasta la entrada del billete de \$50.000. En este orden de ideas, se tomó un promedio de la estructura de volúmenes acumulados a pesos constantes de los últimos tres años, los cuales incluyen los primeros años del billete de \$50.000 y capturan la estructura cuando el billete de 20.000 es primera denominación²⁶. La gráfica 10 presenta los volúmenes

²⁶ La cual fue la estructura vigente entre 1997 y 1999. Período de relativa estabilidad de la estructura después de cambios importantes al interior, con la introducción de nuevas monedas, y en el cual se presentó una desaceleración importante en el crecimiento de tarjetas débito y ya se había consolidado el desarrollo de las ATMs y las grandes cadenas de almacenes.

acumulados de cada denominación durante el período 2000-2003, mostrando un comportamiento bastante estable. Con base en esta curva se estimaron las proporciones de cada denominación en la estructura para obtener las participaciones por denominación promedio del período 2000-2003 (Gráfica 10).

Gráfica 10: Volumen acumulado Deflactado



Como ya se explicó, la métrica D responde a una mecánica en donde las proporciones relativas de las diferentes denominaciones se van desplazando de acuerdo al poder adquisitivo de la estructura. Una vez calculado el promedio de los últimos tres años, se calibró el factor de desplazamiento, φ , para que la proporción del billete de \$50.000 sobre el total de piezas en circulación a diciembre de 2003 fuera consistente con el volumen de piezas de \$50.000 en circulación a esa fecha.

Dicho factor sugiere que la transacción promedio diaria es bastante más baja que lo estimado con base en el salario promedio diario. La calibración indica que D^* debe estar por el orden de los \$10.700. Si se tomara los \$18.000 estimados con base en los salarios promedio de la Encuesta de Hogares, la metodología de métrica D sugeriría que el billete de \$50.000 ya estaría bien posicionado en el mercado acercándose al umbral de entrada de una nueva denominación (\$100.000). Claramente, la situación del billete de \$50.000 está lejos de indicar esto. En particular, su entrada ha sido lenta, el billete de \$20.000 continúa teniendo altos niveles de circulación y no se ve una tendencia a que éste pierda participación significativa en el total de especies en circulación. El valor de \$10.700, por el contrario, es consistente con un billete de \$50.000 cuya utilización apenas está ganando importancia y pasará mucho tiempo (aproximadamente unos 12 años a tasas de inflación del 3,5% anual) para que las participaciones actuales, 1,7% en volúmenes y 35,2% en valores, alcancen participaciones similares a las alcanzadas por el billete de \$20.000, de 8,8% y 60,4% respectivamente, cuando ocupaba el puesto de primera denominación.

5 Curva de participaciones Según Ciclo de Vida

Una de las principales limitaciones de la métrica-D es que supone que las participaciones responden a un factor constante y común que fundamentalmente depende de la inflación. No obstante, la dinámica del ciclo económico, las posibles distorsiones generadas por una entrada prematura en el mercado de nuevas denominaciones, los rezagos en la aceptación de una nueva denominación, la introducción de impuestos a las transacciones, la pérdida de poder adquisitivo, los avances tecnológicos en medios de pago y de distribución del efectivo generan efectos asimétricos y no-lineales sobre las participaciones relativas, lo cual hace que el supuesto de un desplazamiento lineal y uniforme en función del poder adquisitivo de la moneda sea limitado.

Como se desprende de la grafica 4, los ciclos de participación difieren sustancialmente entre denominaciones. Cualquier intento por promediar estos ciclos genera sesgos importantes a la hora de pronosticar cantidades por denominación. Un promedio de estas historias, el cual representaría el comportamiento de una denominación promedio desde su inserción, difícilmente podría ser confiable para pronosticar el comportamiento típico de ésta hacia el futuro, especialmente porque estas historias corresponden a episodios de distintos niveles inflacionarios. No obstante, dichas historias contienen información relevante sobre la forma en que el tiempo y el poder adquisitivo afectan los ciclos de las participaciones.

Los modelos econométricos estándar, sin embargo, carecen de la flexibilidad necesaria para incorporar la sensibilidad de la estructura de participaciones frente a cambios, por ejemplo, en el régimen inflacionario. Por tal motivo, de nuevo, se escogió la técnica de redes neuronales pues ésta es bastante flexible en el reconocimiento de estructuras complejas, no-lineales, sujetas a cambios estructurales. Adicionalmente, tiene la ventaja de que permite dar un énfasis mayor sobre la historia reciente ya que la selección de su arquitectura, como se explicó anteriormente, se basa en su bondad de ajuste tanto dentro como fuera de muestra.

5.1 Una Red Neuronal en Panel

De nuevo el ejercicio se centra en una ANN del tipo “feedforward” multicapa con una única superficie escondida o “single hidden layer”:

$$y_{jt} = \Phi_0 + X'_{jt} \Phi + \sum_{k=1}^Q \beta_j G(Z'_{jt} \gamma_k) + \varepsilon_{jt}$$

donde, $Z_{jt} \subseteq X_{jt}$, $X_t = \{y_{jt-1}, \dots, y_{jt-L}, w_{j1t}, \dots, w_{jMt}\}$ con y_{jt-l} , $l = 1, \dots, L$ rezagos de la variable dependiente, w_{jmt} , $m = 1, \dots, M$, variables exógenas y G la función logística. En este caso sin embargo, el modelo econométrico deja de tener la naturaleza de series de tiempo y se acerca más a un modelo SUR en su versión más simple en donde la participación de una denominación j sobre el valor total a los t meses de entrada en circulación, y_{jt} , tiene un componente $X'_{jt} \Phi$ lineal de la relación entre y_{jt} y X_{jt} , en tanto que, la componente logística caracteriza la parte no-lineal, de la relación entre y_{jt} y X_{jt} o un subconjunto de estas $Z_{jt} \subseteq X_{jt}$, siendo Q el número de componentes logísticas.

Como en la sección 4.2.2, la determinación del modelo comprende las etapas de especificación, estimación de parámetros y evaluación de los modelos estimados. No obstante, en esta oportunidad se modifica la estrategia marginalmente.

La determinación de los *inputs* de la red se hizo sin acudir a procedimientos de selección de variables tipo *step-wise* sino mediante consideraciones teóricas sobre los factores que inciden en el ciclo de participaciones de una denominación:

- El tiempo en circulación desde su inserción, tc_{jt} . Esta variable recoge los distintos estadios que experimenta una denominación desde su inserción y cuya relación con y_{jt} es claramente no-lineal, reflejando distintos eventos como la curva de aprendizaje del mercado cuando entra en circulación, la oportunidad con que entra, la transición de una denominación de ser primera (la mayor denominación) a segunda y así sucesivamente.
- El nivel de inflación, dp_t , y su interrelación con el tiempo en circulación, $dp_t \cdot tc_{jt}$. La inflación tiene al menos dos efectos sobre la curva de participaciones promedio: modifica el ritmo de entrada de nuevas denominaciones y modifica la elasticidad de las participaciones respecto al tiempo en circulación ya que su efecto es alargar la curva.
- la brecha del producto, g_t . Esta variable capta el impacto de los ciclos de la actividad económica sobre la composición relativa de las diferentes denominaciones. En períodos de auge los agentes económicos tienden a hacer un mayor volumen de operaciones de alto valor lo cual acelera la demanda de altas denominaciones en relación con la de bajas modificando la composición relativa de la estructura.
- El valor facial real de la denominación, v_t , el cual captura el cambio en el valor transaccional de la denominación dentro de la distribución transaccional de la economía. Su demanda va cambiando a medida en que ella pasa de ser usada en la

finalización de transacciones de alto valor a transacciones de bajo valor. En algunos estadios será usada intensivamente en la iniciación del pago, en otros funcionará más como cambio (vuelta). Al hacer su transición a moneda los agentes harán una recomposición temporal de billetes por monedas (incluso reteniendo billetes para colección) lo cual incide sobre su participación relativa.

- El valor facial de la denominación sobre el valor fácil de la mayor denominación en el mercado vm_t . Esta variable marca el cambio de la posición de la denominación en la estructura. Tiene la ventaja adicional de reflejar las asimetrías en los valores faciales relativos por ejemplo entre 1 y 2 y 2 y 5 en la secuencia denominacional.
- Los dos primeros rezagos de y_{jt} , y_{jt-1} y y_{jt-2} , los cuales reflejan los costos de ajuste de una denominación frente a cambios en los factores que la determinan o frente a choques no esperados.

De lo anterior se sigue que el conjunto de variables *input* es $X_t = \{y_{jt-1}^*, y_{jt-2}^*, v_{jt}^*, vm_{jt}^*, tc_{jt}^*, dp_t^*, (dp_t \cdot tc_{jt})^*, g_t^*\}$, reescaladas²⁷. El proceso de estimación de la red neuronal se lleva a cabo mediante mínimos cuadrados no-lineales, con base en el período 1987-2003. En este caso, el diseño de la matriz de datos está ordenado según historias denominacionales, incluyendo las historias de las denominaciones de \$200 a \$50.000²⁸. Las historias son desbalanceadas en el sentido que para aquellas denominaciones que entraron en circulación antes de 1987:02 no observamos sus primeros años de historia. El hecho de que cada denominación se encuentra en distintas fases de su historia desde su inserción en la economía permite que cada una de ellas ayude a identificar distintas porciones de la curva de participaciones típica así como la sensibilidad de cada tramo a cambios en el entorno inflacionario.

Para la búsqueda de la mejor arquitectura se asumió una sola configuración del conjunto de información Z_t , $Z_t \equiv X_t$, de la componente no-lineal y se estimaron arquitecturas para un número de unidades ocultas o *hidden units* Q que varían desde uno hasta ocho. En este sentido la extensión de las ANN a un SUR no-lineal como el que se estima aquí, donde la no-linealidad tiene un alto grado de complejidad, sugiere un Q que excede los valores comúnmente observado en aplicaciones de series de tiempo (3 a 4 componentes escondidas). Una vez estimados los parámetros de cada arquitectura, se procedió a calcular las medidas de

²⁷La notación "*" se utiliza para referirse a la transformación del logaritmo de cada serie, es decir: $x_t^* = \frac{x_t - \bar{x}_t}{\sigma(x_t)}$.

²⁸ Sobre la totalidad de este panel se estima el vector de parámetros (ϕ, β, γ) para cada una de las arquitecturas, el cual, además de minimizar la función objetivo, debe cumplir con los criterios de convergencia.

evaluación dentro y fuera de muestra, las cuales permiten elegir la mejor combinación en cada modelo.

El cuadro 8 presenta las medidas de evaluación de pronóstico dentro de muestra para las ocho arquitecturas estimadas, considerando conjuntamente todos los errores dentro de muestra para cada denominación en cada momento del tiempo. De estas medidas se puede concluir que la estructura que mejor recoge la historia conjunta de todas las denominaciones, o “red promedio”, es $P = 8, Q = 6$. No obstante, la selección de la mejor arquitectura para efectos de pronóstico se hizo considerando, para cada denominación, la arquitectura que presentó la mejor bondad de ajuste fuera de muestra, teniendo en cuenta exclusivamente los errores de pronóstico correspondientes a cada denominación, para el período comprendido entre diciembre de 2002 y mayo de 2004.

Cuadro 8. Evaluación dentro de muestra y selección de la mejor “red promedio”

P	Q	AIC	BIC	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	SR
8	1	-10.11409	-10.07440	0.00632	0.04695	0.00330	0.02916	68.20276
8	2	-10.27531	-10.19592	0.00578	0.04602	0.00300	0.02843	68.04916
8	3	-10.37015	-10.25106	0.00547	0.04496	0.00285	0.02792	67.35791
8	4	-10.21317	-10.05438	0.00587	0.04488	0.00303	0.02850	67.58833
8	5	-10.38532	-10.18684	0.00535	0.04308	0.00279	0.02739	67.20430
8	6	-10.31098	-10.07280	0.00551	0.04005	0.00287	0.02627	68.81720
8	7	-10.15421	-9.87634	0.00591	0.04143	0.00309	0.02717	67.20430
8	8	-10.31024	-9.99267	0.00543	0.04320	0.00278	0.02756	66.51306

En el cuadro 9 se reportan las medidas de desempeño de pronóstico fuera de muestra de las ocho arquitecturas “por denominación”. En cada recuadro se resaltan las mejores medidas de ajuste, seleccionando aquella arquitectura que domina con un mayor número de criterios a las otras. Debe notarse que, no obstante, la selección de las arquitecturas por denominación está basada en el desempeño fuera de muestra, la “red promedio” $P = 8, Q = 6$ ocupa el segundo o tercer lugar, con medidas de ajuste muy cercanas a las arrojadas por las arquitecturas escogidas en cada denominación, excepto para las denominaciones de \$ 5.000 y de \$ 10.000²⁹.

El siguiente conjunto de gráficas (gráficas 10 a 17) agrupa los pronósticos de la “red promedio” (8_6) dentro de muestra (Y IN) para las ocho denominaciones de estudio, así como su pronóstico para el período de evaluación fuera de muestra (Y OUT), comprendido entre diciembre de 2002 y mayo de 2004. Simultáneamente, las gráficas muestran el pronóstico de

²⁹ De hecho cuando se calculan las medidas con base en los errores de pronóstico para los últimos 12 meses, la “red promedio” domina en 5 de las 8 denominaciones, de nuevo presentando un pobre desempeño únicamente en las denominaciones de \$5.000 y \$10.000. Cálculos disponibles a solicitud.

aquella red que en particular tuvo el mejor desempeño para el período fuera de muestra por denominación. Como se señaló anteriormente, en algunos casos coincide con la mejor red promedio; tal es el caso de la cuarta y octava denominación a un horizonte de 18 períodos, pero no así en todas³⁰.

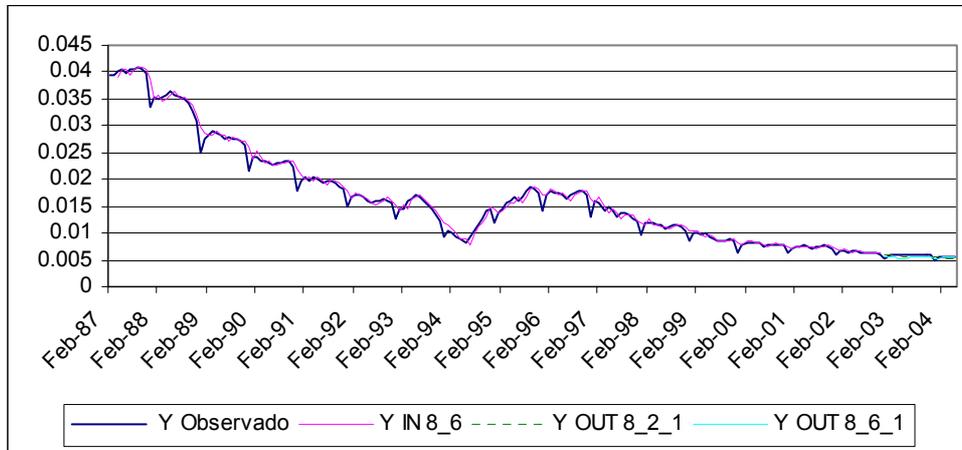
Sorprende la extraordinaria bondad de ajuste de la red para identificar la compleja relación no-lineal de la variable de participación a lo largo del tiempo para cada denominación no obstante, la disparidad en cada una de las historias. Es de notar que la estrategia de aumentar la dimensión Q en la exploración de posibles arquitecturas resultó crucial ya que tanto la “red promedio” como cinco de las ocho arquitecturas por denominación escogidas superaron las cuatro unidades escondidas.

³⁰ En los cuadros 10 a 17 la notación $Y_{out\ p_q_den}$ se refiere a las unidades p_q de la red neuronal respectiva, en tanto que den indica la denominación.

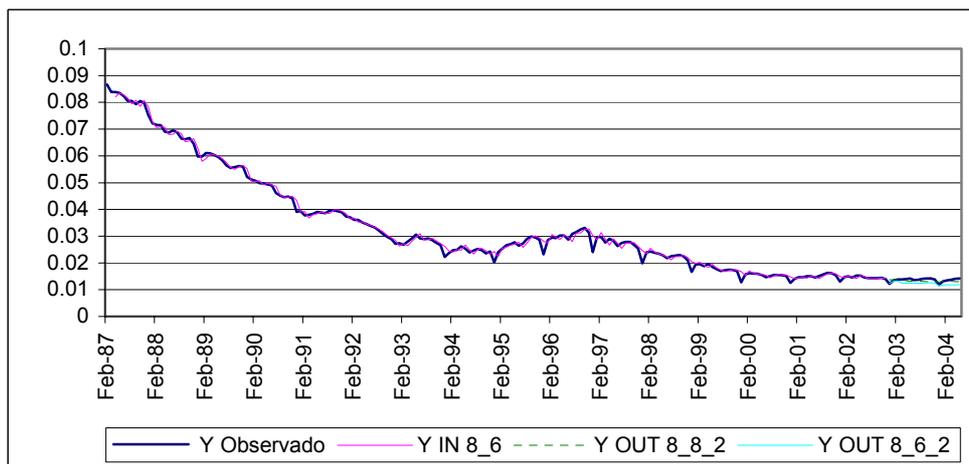
Cuadro 9. Evaluaciones fuera de muestra y selección de la mejor arquitectura por cada denominación.

DEN	P	Q	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE	SR	UTHEIL
200	8	1	0.00068	0.11785	0.00063	0.10860	41.17647	1.76489
	8	2	0.00039	0.06902	0.00035	0.06112	29.41176	1.03358
	8	3	0.00076	0.13159	0.00070	0.12063	47.05882	1.97066
	8	4	0.00149	0.25825	0.00137	0.23799	41.17647	3.86754
	8	5	0.00057	0.09878	0.00053	0.09112	41.17647	1.47936
	8	6	0.00041	0.06945	0.00036	0.06103	70.58824	1.04004
	8	7	0.00052	0.09593	0.00039	0.07019	64.70588	1.43664
	8	8	0.00048	0.08983	0.00037	0.06769	41.17647	1.34530
500	8	1	0.00216	0.15600	0.00194	0.14054	23.52941	2.37393
	8	2	0.00183	0.13172	0.00163	0.11834	23.52941	2.00439
	8	3	0.00225	0.16239	0.00201	0.14608	29.41176	2.47110
	8	4	0.00382	0.27629	0.00345	0.25112	23.52941	4.20435
	8	5	0.00193	0.13882	0.00170	0.12346	29.41176	2.11237
	8	6	0.00148	0.10623	0.00135	0.09770	64.70588	1.61650
	8	7	0.00108	0.07753	0.00099	0.07168	58.82353	1.17984
	8	8	0.00086	0.06350	0.00074	0.05467	35.29412	0.96630
1000	8	1	0.00198	0.16228	0.00184	0.15039	52.94118	4.52748
	8	2	0.00136	0.10954	0.00125	0.10113	52.94118	3.05614
	8	3	0.00167	0.13801	0.00151	0.12412	58.82353	3.85045
	8	4	0.00380	0.31641	0.00349	0.28783	52.94118	8.82762
	8	5	0.00131	0.10815	0.00117	0.09602	58.82353	3.01733
	8	6	0.00111	0.08614	0.00099	0.07768	41.17647	2.40338
	8	7	0.00092	0.07560	0.00084	0.06872	47.05882	2.10923
	8	8	0.00058	0.05012	0.00045	0.03797	58.82353	1.39843
2000	8	1	0.00348	0.19380	0.00314	0.17397	47.05882	7.05637
	8	2	0.00181	0.09910	0.00164	0.08989	47.05882	3.60842
	8	3	0.00119	0.06682	0.00086	0.04797	41.17647	2.43285
	8	4	0.00544	0.30436	0.00489	0.27186	47.05882	11.08201
	8	5	0.00082	0.04550	0.00062	0.03411	35.29412	1.65664
	8	6	0.00059	0.03371	0.00046	0.02555	52.94118	1.22733
	8	7	0.00106	0.05940	0.00097	0.05376	58.82353	2.16289
	8	8	0.00075	0.04077	0.00060	0.03261	35.29412	1.48436
5000	8	1	0.00112	0.03792	0.00081	0.02820	76.47059	0.83850
	8	2	0.00887	0.34091	0.00790	0.29360	41.17647	7.53891
	8	3	0.00420	0.16526	0.00355	0.13340	76.47059	3.65453
	8	4	0.00133	0.04822	0.00105	0.03783	70.58824	1.06637
	8	5	0.00454	0.17890	0.00379	0.14282	64.70588	3.95631
	8	6	0.01053	0.39982	0.00957	0.35343	41.17647	8.84180
	8	7	0.01216	0.47056	0.01066	0.39748	29.41176	10.40610
	8	8	0.00130	0.04993	0.00097	0.03575	76.47059	1.10410
10000	8	1	0.00305	0.02532	0.00238	0.01919	88.23529	0.98265
	8	2	0.01199	0.10127	0.01054	0.08636	82.35294	3.93070
	8	3	0.00362	0.02817	0.00292	0.02279	94.11765	1.09324
	8	4	0.00516	0.04406	0.00405	0.03320	76.47059	1.71012
	8	5	0.00343	0.02943	0.00271	0.02225	82.35294	1.14235
	8	6	0.01764	0.14687	0.01605	0.13060	88.23529	5.70080
	8	7	0.00765	0.06639	0.00539	0.04515	76.47059	2.57708
	8	8	0.00967	0.07821	0.00840	0.06778	88.23529	3.03568
20000	8	1	0.05285	0.11285	0.04833	0.10280	70.58824	20.50911
	8	2	0.06568	0.14065	0.05810	0.12379	76.47059	25.56122
	8	3	0.06004	0.12824	0.05478	0.11655	76.47059	23.30589
	8	4	0.05149	0.10994	0.04712	0.10023	76.47059	19.97885
	8	5	0.05163	0.11042	0.04662	0.09924	76.47059	20.06601
	8	6	0.02075	0.04414	0.01986	0.04212	76.47059	8.02081
	8	7	0.01840	0.03937	0.01579	0.03357	47.05882	7.15523
	8	8	0.02415	0.05172	0.02024	0.04319	70.58824	9.39830
50000	8	1	0.09210	0.28319	0.08475	0.26408	17.64706	15.84644
	8	2	0.06188	0.18820	0.05498	0.17006	23.52941	10.53071
	8	3	0.06907	0.21047	0.06188	0.19171	35.29412	11.77709
	8	4	0.09895	0.30400	0.09036	0.28118	41.17647	17.01076
	8	5	0.02749	0.08748	0.02603	0.08288	64.70588	4.89518
	8	6	0.01918	0.06242	0.01705	0.05538	52.94118	3.49277
	8	7	0.05461	0.17131	0.05283	0.16691	64.70588	9.58595
	8	8	0.02214	0.07185	0.01947	0.06301	94.11765	4.02069

Gráfica 11. Participación de la denominación de \$200 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



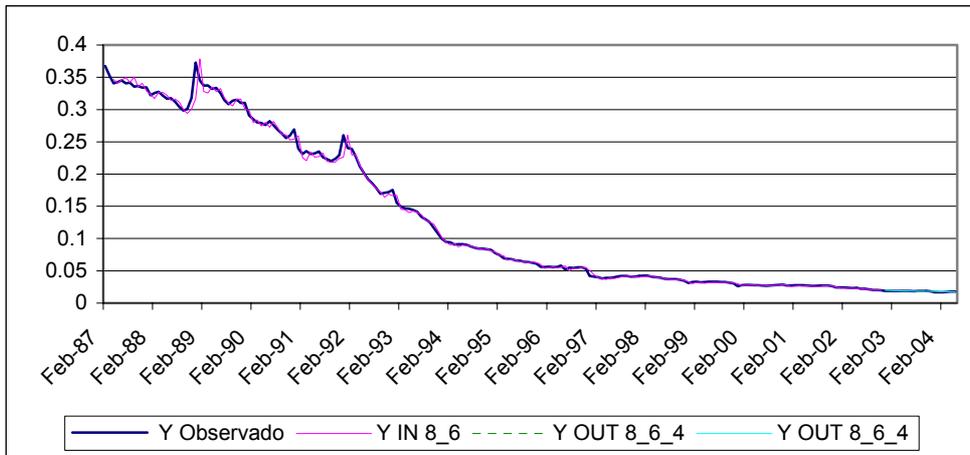
Gráfica 12. Participación de la denominación de \$500 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



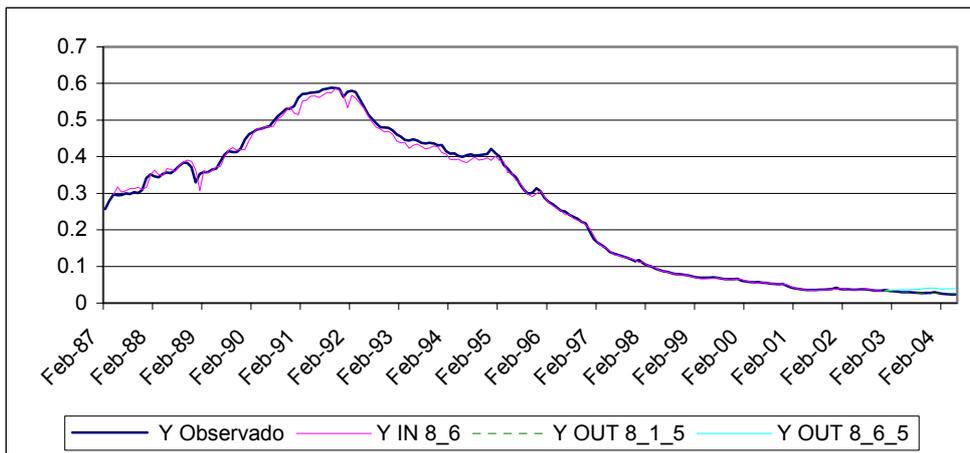
Gráfica 13. Participación de la denominación de \$1000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



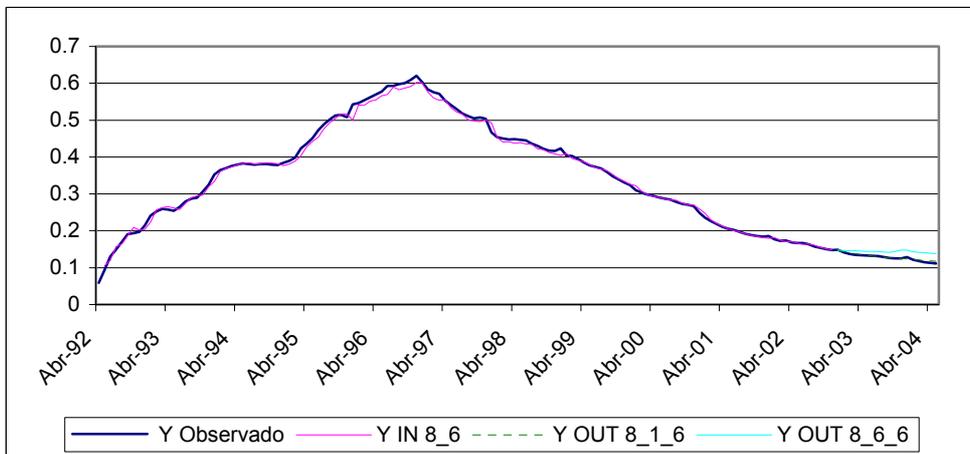
Grafica 14. Participación de la denominación de \$2000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



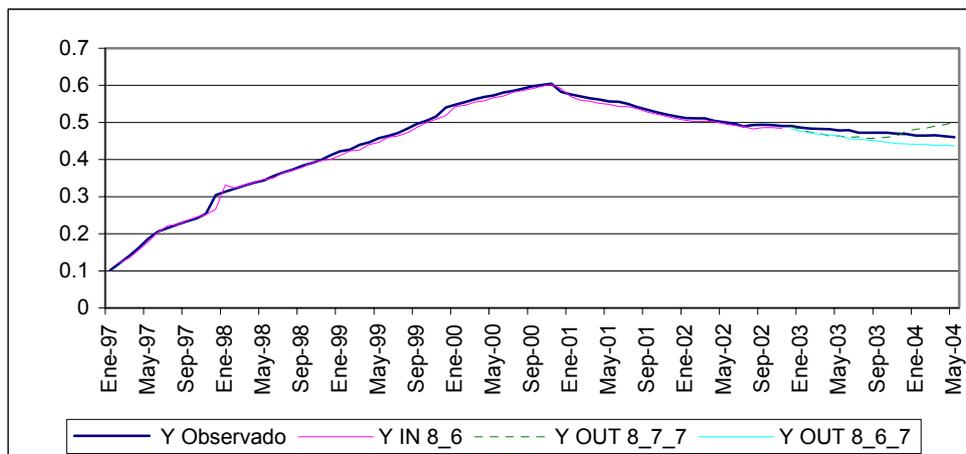
Grafica 15. Participación de la denominación de \$5000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



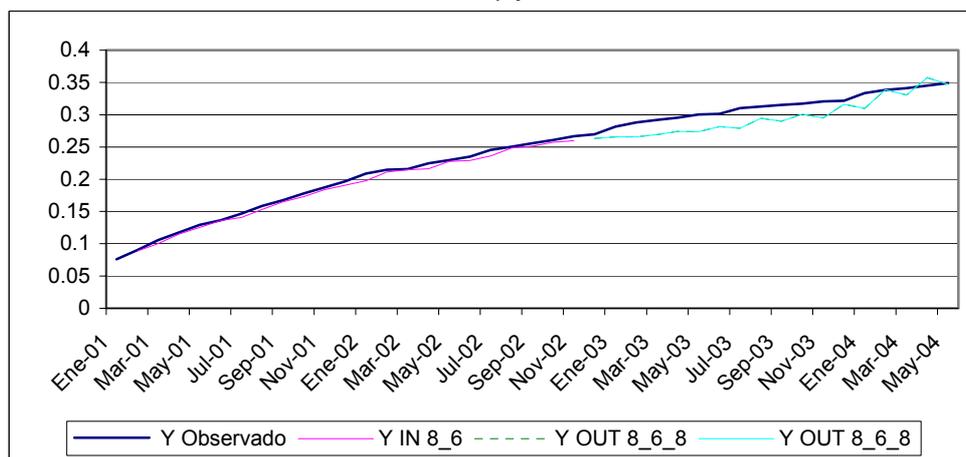
Gráfica 16. Participación de la denominación de \$10000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



Gráfica 17. Participación de la denominación de \$20000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



Gráfica 18. Participación de la denominación de \$50000 sobre el total de especies monetarias. Observada Vs. estimada dentro y fuera de muestra.



6 Mínimos Cuadrados Flexibles

Las dos secciones anteriores se centran en el comportamiento de la estructura conjunta de especies monetarias. Su objetivo es monitorear cambios transitorios en dicha estructura y eventuales configuraciones de largo plazo caracterizadas por cambios estructurales en el régimen inflacionario.

No obstante, la capacidad predicativa de los dos métodos anteriormente expuestos puede dar lugar a errores de pronóstico intolerables por su posible impacto sobre los planes de producción debido a los altos costos en que incurre el Banco Central para ajustar sus inventarios de insumos y del producido de especies frente a choques inesperados de demanda. Esto es particularmente relevante en las bajas denominaciones (normalmente monedas) sobre

las cuales difícilmente un modelo de participación puede capturar innovaciones en su demanda por cambios en la distribución transaccional y en el menú de precios de la economía.

En este sentido, el pronóstico por denominación de la circulación futura ayuda a mejorar la precisión de los pronósticos y a validar los resultados producidos por los modelos estructurales.

La estrategia comúnmente adoptada para llevar a cabo pronósticos por denominación es la utilización de modelos ARIMA. El problema de estos modelos es que no son sensibles a las distintas fases que enfrenta una denominación en circulación: inserción, consolidación y cambio de posición en la estructura, cambio de naturaleza (billete-moneda) y difícilmente pueden ajustarse a innovaciones recientes en la demanda que por su corto periodo de vigencia poco o nada modifican la especificación de los ARIMA.

En esta sección se propone la utilización de un método de estimación de parámetros cambiantes a través del tiempo, mínimos cuadrados flexibles (MCF) que consideran la inestabilidad estructural y permiten minimizar los errores asociados al pronóstico.

Como lo presenta Melo et. al. (2004), la metodología de mínimos cuadrados flexibles propuesta por Kalaba y Tesfatsion (1989, 1990) se basa en el concepto de regresión lineal con coeficientes cambiantes a través del tiempo. Los mínimos cuadrados flexibles son un método de estimación recursiva de las trayectorias de los coeficientes, a través del tiempo, en un modelo de regresión con parámetros cambiantes. En su forma estándar, la solución de los mínimos cuadrados flexibles captura cambios suaves en los coeficientes durante el período de análisis.

En esta metodología se generan dos tipos de error. El error de medida residual, el cual está dado por la diferencia entre el valor observado y_t y el valor estimado por el modelo de regresión lineal, considerando el conjunto de información hasta el momento (t) , es decir, $y_t - X_t' b_t$ y el error dinámico que está conformado por la discrepancia entre los coeficientes estimados en $(t+1)$ y en (t) , $b_{t+1} - b_t$. El costo asignado al error de medida se determina mediante la siguiente suma cuadrada de residuales:

$$r_M^2(b; T) = \sum_{t=1}^T [y_t - X_t' b_t]^2$$

en tanto que, el segundo costo está asociado a los errores dinámicos:

$$r_D^2(b; T) = \sum_{t=1}^{T-1} [b_{t+1} - b_t]' [b_{t+1} - b_t]$$

La solución de mínimos cuadrados flexibles está definida como el conjunto de toda la secuencia de coeficientes estimados (b_1, \dots, b_T) que minimiza la suma ponderada de los costos de medida y dinámicos:

$$c(b; \mu, T) = \mu r_D^2(b; T) + r_M^2(b; T) \quad (4)$$

El factor de ponderación $0 \leq \mu < \infty$ indica el peso en el prior que se le da a los costos asociados con los errores de medida y dinámicos: cuando $\mu \rightarrow 0$ se da un mayor peso a los errores de media sin que sea relevante el grado de inestabilidad de la secuencia (b_1, \dots, b_T) mientras que cuando $\mu \rightarrow \infty$, se da una gran importancia a la estabilidad de los parámetros. De hecho en este último caso, en el límite, los FLS coinciden con el estimador de mínimos cuadrados ordinarios.

Aquí se sigue lo sugerido en Melo et. al. (2004), en el sentido de escoger μ de acuerdo al desempeño de los FLS fuera de muestra. En particular, se estiman las secuencias de (b_1, \dots, b_T) para diferentes valores de μ y se toman aquellas que arroja mejores medidas de bondad de ajuste fuera de muestra (en particular, la raíz cuadrada de la suma de los errores cuadráticos RMSE).

Para escoger los modelos lineales base de la estimación por FLS por denominación se adoptó una estrategia mixta de selección de rezagos de la variable dependiente, condicionando el procedimiento a que entrasen variables que afectan la demanda de una denominación a lo largo de su ciclo de vida aun cuando en promedio su efecto puede ser cero. Estas variables son:

- *Dlpc*: la primera diferencia del logaritmo natural del Índice de Precios al Consumidor el cual recoge cambios en el poder adquisitivo pero también cambios en el menú de precios de la economía. Su efecto en principio debe ser positivo en la medida en que aumentos en los precios obligan a aumentar las unidades de cada denominación, no obstante, una vez la denominación cambia de posición en la estructura, el aumento en los precios puede o aumentar o disminuir su demanda dependiendo de la forma en que se actualiza dicho menú.
- *VF1*: El valor facial de la denominación sobre el valor facial de la primera denominación, el cual recoge su posición relativa en la estructura.

- *Dene* y *Ddic*: Dummies estacionales para los meses de diciembre y enero.
- *Dummy*: *seudo-dummy* billete-moneda calculada como la relación de número de billetes sobre el total de billetes y monedas en circulación, la cual captura la transición suave de billete a moneda para algunas denominaciones.

La variable dependiente, *Dlncant*, es la diferencia del logaritmo del volumen de piezas en circulación (incluyendo monedas y billetes en aquellos casos en que las dos circulan simultáneamente).

El estrategia de selección mixta se basa en una primera selección de modelos con base en procedimientos tales como *backward step wise*, *forward step wise*, R^2 , entre los cuales se escoge el mejor con base en una suma ponderada de los indicadores R^2 , R^2 ajustado, el criterio de información BIC y la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov, buscando en lo posible que los modelos pasen la pruebas de normalidad³¹. Dado que todas las variables en niveles presentaron evidencia de raíz unitaria, los modelos se estimaron en diferencias³². El cuadro 10 presenta los modelos base finalmente escogidos para cada denominación.

Los FLS fueron estimados para cada denominación y para cada horizonte de pronóstico de tal manera que la estrategia de pronóstico se retroalimenta de los mejores μ a cada horizonte. Por ejemplo, en el cuadro 11 se presentan medidas de bondad de ajuste para diferentes valores de μ (el μ óptimo por denominación y los μ más cercanos en términos de bajos errores de pronóstico) a un horizonte de 12 meses.

Claramente, los μ que minimizan los errores de pronóstico difieren sustancialmente entre denominaciones tendiendo a ser mayores en el caso de denominaciones con historias más largas (denominaciones bajas) y menores en el caso de historias cortas (denominaciones altas). Esto es esperable dado que las denominaciones con historias largas incluyen estadios muy dispares de su ciclo de vida: como primera denominación, como billete, posiblemente incluyendo la transición de billete a moneda, y como moneda.

³¹ Consideramos que aun cuando deseable, el criterio de normalidad como indicio de una correcta especificación no es crucial ya que en los casos en que no se cumple el tamaño de la muestra es relativamente grande por lo cual se puede acudir a las propiedades asintóticas del estimador sin necesidad de asumir normalidad.

³² Pruebas disponibles a solicitud del lector.

Cuadro 10. Modelos base de estimación de los FLS por denominación

Variable dependiente: dlncant (y)

denominación	10	20	50	100	200	500
variable	p-val	p-val	p-val	p-val	p-val	p-val
Constante	0.376	0.105	0.752	0.000	0.016	0.339
dummy	0.006	0.065	0.772	0.000	0.259	0.986
Dene	0.566	0.001	0.000	0.000	0.000	0.243
Ddic	0.027	0.000	0.021	0.000	0.535	0.308
vf1	0.012	0.857	0.911	0.000	0.148	0.685
dlipc	0.027	0.530	0.078	0.220	0.249	0.309
dlncant(-1)	0.000	0.000	0.000			
dlncant(-2)		0.072				
dlncant(-3)		0.006	0.001	0.023	0.007	
dlncant(-4)	0.000		0.003			
dlncant(-5)			0.068			
dlncant(-6)			0.000	0.042		
dlncant(-7)	0.070		0.001			
dlncant(-8)			0.017			
dlncant(-9)						
dlncant(-10)			0.000		0.052	
dlncant(-11)					0.000	
dlncant(-12)				0.000	0.000	0.000
dlipc(-1)			0.002			
dlipc(-2)						
RMSE	0.006	0.007	0.009	0.015	0.035	0.031
R2adj	0.552	0.681	0.815	0.692	0.330	0.756
BIC	-2063.5	-2003.0	-1849.6	-1626.8	-1291.1	-1341.0
Kolmo Stat	0.175	0.128	0.049	0.042	0.163	0.118
Prob Kolmo	<0,0100	<0,0100	>0,1500	>0,1500	<0,0100	<0,0100

denominación	1000	2000	5000	10000	20000	50000
variable	p-val	p-val	p-val	p-val	p-val	p-val
Constante	0.739	0.308	0.519	0.001	0.074	
dummy	0.478					
Dene	0.005	0.000	0.000	0.000	0.108	0.000
Ddic	0.274	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
vf1	0.946	0.048	0.000	0.000	0.000	0.005
dlipc	0.535	0.644	0.003	0.001	0.002	0.025
dlncant(-1)			0.001		0.007	
dlncant(-2)		0.075			0.002	0.012
dlncant(-3)			0.000	0.000		
dlncant(-4)						
dlncant(-5)						
dlncant(-6)		0.006	0.000	0.000	0.020	
dlncant(-7)						0.022
dlncant(-8)	0.032					
dlncant(-9)	0.111		0.000	0.000		
dlncant(-10)	0.040			0.010	0.060	
dlncant(-11)	0.046		0.000	0.035		0.000
dlncant(-12)	0.000	0.000			0.021	
dlipc(-1)						
dlipc(-2)		0.053				
RMSE	0.041	0.044	0.033	0.032	0.029	0.017
R2adj	0.797	0.827	0.906	0.895	0.887	0.952
BIC	-1222.9	-1198.4	-1312.3	-909.4	-522.2	-223.5
Kolmo Stat	0.083	0.066	0.052	0.051	0.073	0.116
Prob Kolmo	<0,0100	0.0413	>0,1500	>0,1500	>0,1500	>0,1500

Cuadro 11. Errores de Pronóstico Fuera de Muestra de los FLS a un horizonte de 12 meses según μ (RMSE*10000 para distintos valores de μ)

mu	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000	5,000	10,000	20,000	50,000
1.4								140.29857				
1.5								140.29856				
1.6								140.29865				
4.4		9.19690										
4.5		9.19676										
4.6		9.19706										
6.5									235.49218			
6.6									235.49203			
6.7									235.49221			
7.0												131.79520
7.1												131.79503
7.2												131.79511
12.0									217.41752			
12.1									217.41739			
12.2									217.41816			
13.1											128.57672	
13.2											128.57614	
13.3											128.57621	
92.5	4.39264											
93.0	4.39263											
93.5	4.39265											
123.3			19.24247									
124.2			19.24243									
125.0			19.24246									
129.9						76.49698						
130.6						76.49690						
131.3						76.49692						
185.8							62.39918					
186.8							62.39880					
187.8							62.39884					
836.1								131.69785				
841.8								131.69785				
847.4								131.69805				
58,500,000.0						68.56069						
59,000,000.0						68.56017						
59,500,000.0						68.56085						

Los valores resaltados corresponden al RMSE mínimo.
Fuente: Cálculo de los autores.

En el cuadro 12 se presentan los μ óptimos por denominación y por horizonte de pronóstico seleccionados. Claramente, los valores de μ tienden a aumentar a medida que se amplía el horizonte de pronóstico dándole mayor importancia a la estabilidad de los parámetros (error dinámico), en tanto que para horizontes más cortos es más importante el error de medida. Esto podría deberse a que a horizontes más largos la relación lineal promedio de la variable dependiente respecto a las variables explicativas resulta más importante a la hora de pronosticar, mientras que, para horizontes más cortos son más relevantes las innovaciones más resientes en dicha relación.

Cuadro 12. Valores de μ seleccionados para cada denominación y horizonte de pronóstico.

Horizonte en meses	Denominaciones											
	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000	5,000	10,000	20,000	50,000
1	0.93	1.19	1.18	3.20	2.67	2.50	1.00	1.41	1.04	0.00	2.06	3.35
2	4.39	4.33	2.58	5.78	2.89	10.49	2.26	14.83	1.88	1.60	4.22	2.72
3	10.52	6.09	1.35	8.56	5.21	11.49	3.15	13.24	4.02	3.20	7.28	5.24
4	58.02	4.02	1.67	16.78	5.59	21.73	1.64	5.53	5.59	4.53	10.18	8.65
5	64.99	4.30	1.59	28.07	8.74	51.91	0.93	3.66	6.15	819.20	18.60	7.68
6	96.90	4.06	0.22	33.38	1.23	90.90	1.00	1.70	5.96	289.63	26.48	3.55
7	78.08	3.91	1.38	36.70	127.85	131.38	0.85	21.48	6.24	144.82	23.10	5.99
8	71.84	4.35	60.74	55.44	159.61	345.62	1.02	45.95	7.50	102.40	22.23	12.80
9	78.41	4.11	128.56	61.45	156.65	287.24	0.54	60.39	9.43	144.82	44.45	18.10
10	75.20	3.58	77.91	71.35	0.31	410.00	0.88	49.45	10.55	204.80	30.37	6.40
11	70.99	3.29	92.90	125.73	127.85	53,687,091.00	1,158.52	0.76	10.49	409.60	19.73	0.57
12	93.00	4.53	124.17	130.68	186.80	59,000,000.00	841.82	1.51	12.11	6.60	13.20	7.11

7 Análisis comparado de las diferentes metodologías de pronóstico por denominación

El cuadro 13 presenta las medidas de bondad de ajuste por denominación comparando las tres metodologías exploradas en este documento: métrica D, ANN y FLS.

Los resultados sugieren, en primer lugar, que las ANN de la curva de participaciones o los FLS superan la estratégica de métrica-D a horizontes de pronóstico de corto y mediano plazo. Aunque muchas tesorerías se han movido a modelos de series de tiempo univariados tipo ARIMA (Ver VI Reunión de Tesoreros de Banca Central, Perú, 2002), la metodología de métrica-D se mantiene vigente como método de pronóstico de las necesidades de efectivo, como lo demuestra un anuncio reciente de De la Rue sobre cursos en D-Metric. Hasta donde conocemos este es el primer intento de comparar esta metodología con otras metodologías resultando no ser la mejor estrategia de pronóstico.

En segundo lugar, aparentemente, hay un patrón asimétrico en la bondad relativa de los FLS frente a la ANN. Los primeros superan a la segunda en los pronósticos de bajas denominaciones, mientras que, las segundas tiende a desempeñarse similar o mejor a los FLS para altas denominaciones³³. Este resultado tiene sentido en la medida en que la fortaleza de las ANN de la curva de participaciones es aprender patrones repetitivos a través de las historias que se incluyen en la muestra en cada uno de los estadios de su ciclo de vida en circulación. En contraste, los FLS solo toman información de la historia pasada de cada denominación por separado, dándole relevancia a las innovaciones mas recientes en la serie. En este orden, las ANN son buenos modelos para predecir los eventos no-lineales que se repiten en los primeros estadios de una denominación en circulación (cuando es alta

³³ Excepto en la de \$50.000. No obstante, algunos cálculos preliminares muestran que un promedio de los FLS y la ANN para esta denominación mejora sustancialmente el error de pronóstico frente a a los errores obtenidos por estas en forma individual. Esto amerita una mayor exploración.

denominación) como la demora en la aceptación de una denominación, la oportunidad de entrada de una denominación o los efectos de cambios de regímenes inflacionarios en toda la curva de participaciones. Por su parte, los FLS son mucho más eficientes para capturar innovaciones recientes que son idiosincrásicas a cada denominación (como el cambio del precio del pasaje de transporte que súbitamente aumenta la demanda una moneda en particular) mucho mejor que lo que lo haría la red dado que estas innovaciones no son sistemáticas y por tanto no pueden ser aprendidas por las ANN.

Por último, los resultados muestran que no hay una estrategia que supere a las otras en todas las denominaciones por lo que se sugiere combinarlas tomando en cada denominación la estrategia dominante. Como las ANN pronostican participaciones en el valor total en circulación mientras que los FLS hacen pronósticos directos del volumen en circulación, la combinación de las estrategias obliga a convertir los pronósticos ya sea a participaciones o a volúmenes para reconstruir la estructura total y hacerla compatible con los pronósticos del agregado de especies monetarias.

Cuadro 13. *Evaluación fuera de muestra por denominación*

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 200				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	1,737,996.1	0.00534	1,565,969.6	0.00482
METRICA	12,658,534.6	0.03908	12,240,614.5	0.03776
RED	23,690,549.3	0.07295	19,662,444.6	0.06052
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	4,199,771.0	0.01201	3,027,700.0	0.00885
METRICA	10,438,371.6	0.03190	9,620,457.4	0.02919
RED	24,098,680.3	0.07216	21,756,018.0	0.06502
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	6,349,182.0	0.01771	4,973,747.1	0.01407
METRICA	11,158,858.7	0.03278	10,507,520.1	0.03077
RED	23,620,249.7	0.06902	20,947,459.1	0.06112

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 500				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	5,745,603.3	0.01921	5,183,086.2	0.01730
METRICA	5,269,851.2	0.01744	4,657,663.0	0.01547
RED	18,434,984.6	0.06107	13,919,342.7	0.04616
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	5,265,087.1	0.01706	4,646,638.7	0.01502
METRICA	13,522,338.0	0.04150	11,040,469.6	0.03452
RED	19,990,528.8	0.06350	17,012,962.9	0.05408
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	6,852,980.8	0.02050	6,081,580.6	0.01846
METRICA	20,505,195.8	0.05943	17,132,880.1	0.05070
RED	20,881,225.3	0.06350	17,937,184.5	0.05467

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 1000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	9,085,965.6	0.06392	7,314,381.7	0.05130
METRICA	8,823,380.6	0.05803	6,210,833.8	0.04170
RED	3,897,813.4	0.02620	3,031,105.1	0.02058
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	23,718,494.0	0.16212	19,380,604.9	0.13305
METRICA	6,322,547.1	0.04162	3,721,338.4	0.02505
RED	3,608,496.9	0.02445	2,771,462.6	0.01889
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	41,117,419.2	0.27782	33,642,645.8	0.22782
METRICA	9,281,688.4	0.06248	6,521,834.7	0.04413
RED	7,537,434.8	0.05012	5,660,960.9	0.03797

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 2000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	1,129,065.0	0.01110	937,701.0	0.00916
METRICA	11,450,792.5	0.11219	10,652,132.4	0.10408
RED	3,247,692.7	0.02983	2,684,181.5	0.02510
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	1,473,538.2	0.01406	1,110,030.2	0.01059
METRICA	11,461,138.6	0.10980	11,046,496.2	0.10549
RED	2,567,320.3	0.02367	1,973,832.1	0.01846
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	1,389,106.3	0.01307	1,106,834.1	0.01034
METRICA	11,906,776.1	0.11148	11,421,743.1	0.10666
RED	3,848,002.7	0.03371	2,842,287.9	0.02555

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 5000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	650,694.3	0.00953	566,571.3	0.00810
METRICA	9,686,573.8	0.13941	8,785,506.1	0.12552
RED	2,345,986.1	0.02695	1,392,641.9	0.01722
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	1,724,210.4	0.02574	1,177,950.8	0.01761
METRICA	11,972,693.3	0.18110	11,262,291.0	0.16857
RED	2,017,052.1	0.02567	1,426,636.9	0.01965
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	3,512,086.9	0.04879	2,495,865.5	0.03604
METRICA	14,869,712.6	0.23316	13,358,105.4	0.20490
RED	2,996,481.5	0.03792	2,051,541.1	0.02820

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 10000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	5,403,487.5	0.03693	4,395,333.5	0.02960
METRICA	11,987,152.8	0.07624	10,937,081.3	0.07097
RED	2,818,156.7	0.01835	2,604,350.2	0.01698
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	5,257,052.8	0.03560	4,132,229.9	0.02786
METRICA	12,208,947.1	0.08082	11,491,586.9	0.07659
RED	2,109,494.9	0.01379	1,716,796.7	0.01130
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	7,866,600.2	0.04860	6,075,001.4	0.03906
METRICA	13,697,345.1	0.09059	12,722,929.8	0.08423
RED	3,878,389.8	0.02532	2,932,230.8	0.01919

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 20000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	14,004,881.3	0.05377	12,979,160.9	0.04935
METRICA	25,291,320.8	0.08887	22,339,786.7	0.08124
RED	6,467,983.4	0.02493	5,665,599.2	0.02173
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	17,604,086.3	0.06584	16,592,012.0	0.06186
METRICA	24,303,697.8	0.08681	22,636,642.9	0.08251
RED	7,188,082.8	0.02703	6,585,992.0	0.02470
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	21,472,498.7	0.07592	19,836,184.1	0.07042
METRICA	34,167,190.8	0.11289	30,389,299.3	0.10432
RED	11,300,646.2	0.03937	9,505,077.7	0.03357

	RMSE	RMSPE	MAE	MAPE
Denominación 50000				
<u>Horizonte 6</u>				
FLS	1,831,702.4	0.02868	1,567,573.3	0.02463
METRICA	4,785,668.0	0.07358	4,209,170.9	0.06531
RED	4,391,695.7	0.06943	4,192,260.0	0.06622
<u>Horizonte 12</u>				
FLS	1,818,409.2	0.02697	1,676,524.7	0.02472
METRICA	3,616,973.5	0.05511	2,902,028.7	0.04385
RED	4,924,548.9	0.07216	4,732,355.8	0.06961
<u>Horizonte 18</u>				
FLS	2,614,042.8	0.03296	2,155,853.2	0.02828
METRICA	4,558,654.5	0.05858	3,536,318.1	0.04688
RED	4,413,460.0	0.06242	3,948,799.3	0.05538

8 Conclusiones y Recomendaciones

Este trabajo es un primer esfuerzo por tener una visión integral del problema de emisión, estructura y pronóstico de especies monetarias. El principal reto del estudio es el de encontrar técnicas flexibles que se adapten mejor a economías en transición de regímenes de alta a baja inflación. La ventaja de estas técnicas es su flexibilidad para incorporar cambios estructurales y efectos no lineales de variables claves, como la inflación, en el comportamiento de la estructura denominacional de una economía.

Tanto las ANN como los FLS mostraron tener un excelente desempeño como herramientas de pronóstico frente a modelos lineales para el agregado de especies monetarias.

La extensión de la metodología de ANN para estimar un SUR no-lineal de la curva de participaciones de una denominación haciendo uso de las historias denominacionales disponibles en el período muestral resultó ser bastante exitosa en términos de su bondad de ajuste dentro y fuera de muestra. La curva de participaciones promedio en función del tiempo en circulación y del poder adquisitivo de la estructura denominacional es una forma de modelar el movimiento condicionado de una denominación a lo largo de sus distintos estadios dentro de la estructura denominacional.

Tanto las ANN como los FLS superaron la métrica D como herramientas de pronóstico de la estructura denominacional. En este trabajo se documentan algunos de los problemas que presenta la métrica D para el caso colombiano y su inconveniencia como guía para la toma de decisiones sobre la introducción de nuevas denominaciones, sustitución de billetes por monedas y pronóstico de necesidades de efectivo, entre otros. En este sentido, es deseable que las tesorerías de los Bancos Centrales diseñen encuestas (como lo hace cualquier empresa) para ver el atractivo y la conveniencia y oportunidad de introducir o modificar una especie monetaria.

Otra forma de modelar los movimientos conjuntos de la estructura de denominaciones puede ser el de un modelo multivariado tipo VAR pero en el cual se reconozcan posibles cambios intertemporales en los parámetros. De hecho esta clase de modelación puede expresarse como una representación estado-espacio y estimarse con un filtro del Kalman. Con esto se incorporaría la dependencia en el comportamiento de cada una de las denominaciones de las denominaciones más cercanas. Un modelo de esta clase podría, por ejemplo, identificar cambios en la estructura derivados de una mayor falsificación de una denominación por el rechazo de ésta en el mercado y la mayor demanda por las denominaciones más cercanas.

Otras posibles vías de futura investigación son: la construcción de intervalos de confianza para los pronósticos de las ANN con base en *bootstrapping*; la estimación de una red de proporciones basada en volúmenes en contraste con la red basada en valores que se estima en este documento; la estimación de redes por denominación con el fin de evaluar hasta donde la estimación en SUR aporta en términos de mejores pronósticos, y análisis microestadísticos de la estructura transaccional y el uso de las especies monetarias con base en la observación directa de la forma en que los agentes finalizan sus transacciones (Huchzermeier y Van der Heyden, 2000 y Kippers y Franses, 2003).

Bibliografía

Banco Central de Reserva del Perú (2002), "Modelo para Estimar la Demanda por Circulante: caso peruano", VI Reunión de Tesoreros de Banca Central, Lima-Perú.

Cheung, Y. W. and K. S. Lai (1993), "Finite-Sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, No. 55 Vol.3.

Correa, P. (1983). "Método para la determinación de la estructura óptima de billetes y monedas en un país con inflación (Colombia 1973-1988)", Mimeo, Banco de la República.

Franses P.H. and D. van Dijk (2000), *Non-linear time series models in empirical finance*, Cambridge University Press.

Johansen, S. (1988), "Statistical analysis of cointegration vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 12, pages 231-54.

----- (1994), "The role of the constant and linear terms in cointegration analysis of non-stationary variables", *Econometric Reviews*, No. 13, pages 205-29.

----- (1995), *Likelihood Based Inference in Cointegrated Vector Auto-regressive Models*, *Advanced Text in Econometrics*, Oxford University Press.

Kalaba, R. and L. Tesfatsion, (1989), "Time-Varying Linear Regression Via Flexible Least Squares", *Computers Math Applied*, Vol. 17, No.89, pp 1215-1244.

Makridakis, S. and S. Wheelwright (1989), *Manual de Técnicas de Pronóstico*, Editorial Limusa.

----- (1990), "Flexible Least Squares for Approximately Linear Systems", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol 20, No.5, pp 978-989.

Lütkepohl, H. (1993), *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Second Edition.

Pindyck, R. and D. Rubinfeld (1997), *Econometric Models and Economic Forecasts*, McGraw-Hill International Editions, Fourth Edition.

Melo, L. F. y M. Misas (2004), "Modelos Estructurales de Inflación en Colombia: Estimación a Través de Mínimos Cuadrados Flexibles", Banco de la República, Borradores de Economía, No. 283.

Misas M, E. López y P. Querubín (2002), "La inflación en Colombia: una aproximación desde las redes neuronales", *Ensayos sobre política económica*, Banco de la República, No. 41-42, Junio – Diciembre 2002.

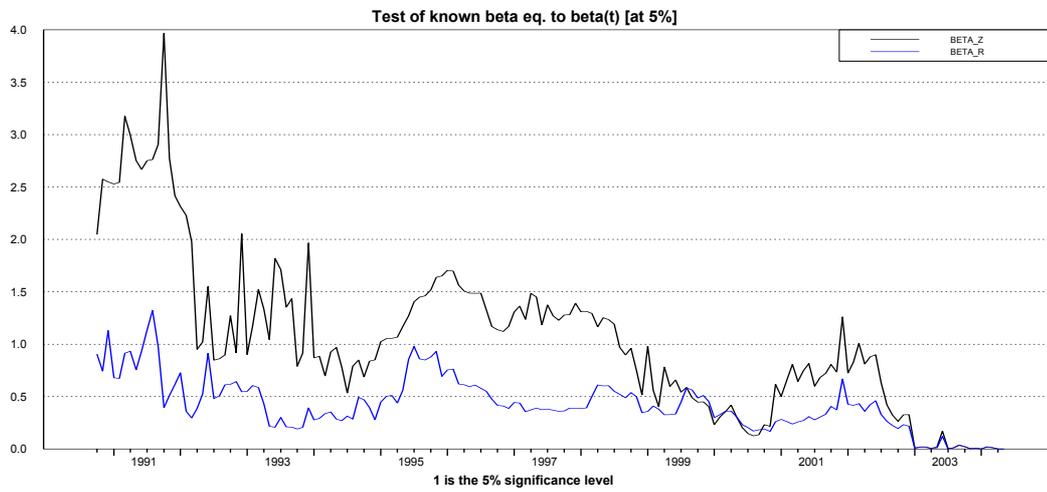
Misas, M.; Lopez, E.; Arango C. A.; y Hernandez, N. (2004). "No-linealidades en la demanda de efectivo en Colombia: las redes neuronales como herramienta de pronóstico", *Ensayos sobre Política Económica*, V. 45.

Mushin, J. (1998), "Modeling the currency Issue", *Atlantic Economic Journal*, V. 26, No. 3.

Huchzermeier, A; L. Van der Heyden (2000). "INTRODUCING EURO NOTES AND COINS TO THE PUBLIC A preliminary scenario analysis of retailer cash transaction data in the early days of January 2002", ludo.van.der.heyden@insead.fr.

Kippers, J.; P. H. Franses (2003). "An empirical analysis of euro cash payments", *Econometric Institute Report EI 2003-25*, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam, July.

Anexo A: PRUEBA DE ESTABILIDAD DEL VECTOR DE COINTEGRACIÓN



1 es el nivel de significancia al 5%

Anexo B³⁴: MEDIDAS DE EVALUACIÓN DE PRONÓSTICO

$$AIC(k) = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{n}$$

$$BIC(k) = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k \ln(n)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}{n}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{y}_t - y_t|$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right|$$

$$U - THEIL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}{(y_t - y_{t-1})}}$$

$$SRP = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n I_t [\{(y_t - y_{t-1}) \cdot (\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1})\} > 0]$$

$$SRN = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n I_t [\{(y_t - y_{t-1}) \cdot (\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1})\} < 0]$$

$$SR = SRP + SRN$$

donde:

n es el número de observaciones consideradas

³⁴ Véanse, Franses y van Dick (2000), Pindyck y Rubinfeld, (1997), y Makridakis y Wheelwright (1989)

Anexo C: METODOLOGÍA MÉTRICA D

1. Para cada uno de los años del período de análisis se tomaron datos anuales de la cantidad de piezas en circulación, o volumen en circulación, para cada denominación i que exista en el momento t . ($Vc_{i,t}$)
2. Se calcula y grafica el volumen acumulado para el año t , de tal manera que se comience con el volumen de la primera denominación, es decir, la de mayor valor facial (1ra), y se adicione sucesivamente las demás denominaciones hasta que se termine en la de menor valor (m), de tal forma que en ésta quede el Volumen acumulado total para el año t (Grafica 8 en el texto).

$$Vac_{it} = \sum_{s=1ra}^i Vc_s, \quad i = 1ra, 2da, \dots, m$$

3. Se deflacta el volumen acumulado por un índice de poder adquisitivo, Ind_t , que puede ser algún índice de precios o un índice basado en la evolución del salario nominal promedio (Gráfica 9 en el texto). A diferencia de la gráfica de volumen acumulado, lo ideal es que las líneas converjan y formar una sola curva ya que esto indicaría que el período de referencia corresponde a una estructura relativamente estable.

$$Vd_{it} = \frac{Vac_{it}}{Ind_t}$$

4. Con base en los datos anteriores y teniendo cuidado de que el periodo escogido tenga la misma estructura de denominaciones y una baja desviación entre las curvas del volumen deflactado, se calcula una curva promedio que servirá de base para proyectar. Para calcular esta curva promedio primero se computa el volumen acumulado deflactado promedio para cada denominación, lo cual equivale al promedio simple de los volúmenes deflactados por denominación para los T años escogidos:

$$\bar{V}d_i = \frac{\sum_{t=1}^T Vd_{it}}{T}$$

5. Se calcula la proporción acumulada promedio para cada denominación así:

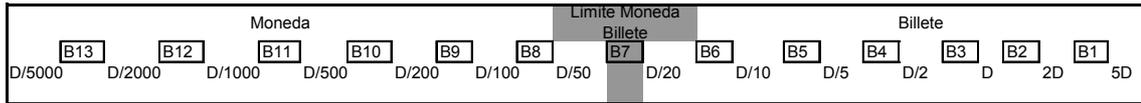
$$P_i = \frac{\bar{V}d_i}{\bar{V}d_m}$$

donde $\bar{V}d_m$ es el volumen de piezas en circulación de todas las denominaciones.

6. Ahora la proporción por denominación promedio es igual a:

$$p_i = P_i - P_{i-1}$$

7. La teoría de la métrica D establece una relación entre el D y la estructura óptima de denominaciones de tal manera que el D debe situarse entre la segunda y tercera denominación de mayor valor como se muestra en el siguiente diagrama:



Conociendo entonces los valores proyectados para el D, se calcula el parámetro ϕ que será la constante que desplazará la curva de proporciones acumulada promedio para el año de proyección, así:

$$\phi_{i+1} = \frac{D - B_3}{B_2 - B_3}, \quad |\phi| < 1,$$

Cuando $\phi > 1$ indica que se debe introducir una nueva denominación y la estructura se desplaza, pasando la primera denominación a ser segunda y así sucesivamente.

De esta manera, las proporciones acumuladas proyectadas para cada denominación serán:

$$\hat{P}_{i,t+1} = P_i + \phi p_{i-1},$$

y las proporciones proyectadas por denominación:

$$\hat{p}_{i,t+1} = \hat{P}_{i,t+1} - \hat{P}_{i-1,t+1}.$$

8. Por último, una vez conocidas las proporciones por denominación proyectadas, se aplican éstas al Volumen total estimado para el año t+1, y se tendrá entonces el volumen proyectado por denominación.

$$\hat{V}c_{i,t+1} = (\hat{p}_{i,t+1}) VT_{t+1}.$$

9. Cabe señalar que en este estudio los pronósticos del agregado se hacen en valores y no en cantidades de piezas. Para calcular el volumen de piezas totales se acude a la siguiente formula:

$$VTc_t = \frac{\sum_{i=1}^m ST_t d_i}{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i d_i},$$

donde $\sum_{i=1}^m ST_t$ es el valor nominal del agregado de especies proyectado y d_i es el valor facial de cada una de las denominaciones en la estructura.