



BANCO DE LA REPUBLICA
Gerencia Técnica

Una aproximación a la dinámica de las tasas de interés de corto plazo en Colombia a través de modelos GARCH multivariados

Luis Fernando Melo Velandia
Oscar Reinaldo Becerra Camargo*

Enero 2006

Resumen

Este documento estudia una parte relevante del mecanismo de transmisión de la política monetaria asociado con el crédito bancario. Con tal objeto se estima un modelo *VARX-GARCH* multivariado para establecer la relación, en frecuencia diaria, entre dos tasas de interés de corto plazo, la *CDT* y la *TIB* y una de las tasas de intervención del Banco de la República, la tasa de subasta de expansión, *SEXP*, en el periodo enero de 2001 - septiembre de 2005. Este tipo de modelos tiene la ventaja de que no solo incorpora las interacciones entre los niveles (o variaciones) de estas series, si no que también modela las relaciones entre las volatilidades de las variables endógenas del modelo.

Posteriormente, se realizan análisis de impulso respuesta en niveles (*IRF* y *MA*) y en volatilidades (*VIRF*). En niveles, se encuentra que la variable que más responde a choques sobre variables endógenas y exógenas del modelo, es la *TIB*. La respuesta de la tasa *CDT* ante un choque de 100 puntos básicos (p.b.) en *SEXP* oscila alrededor de 7 p.b., mientras que la respuesta de la *TIB* ante ese mismo choque es inicialmente de 68 p.b. y finalmente se estabiliza en 38 p.b.. Sin embargo, cuando se consideran muestras más recientes el efecto de *SEXP* sobre la *TIB* aumenta, lo cual indica una relación más estrecha entre los instrumentos de política y la meta operativa del *BR*. Para la muestra 2003-2005 la respuesta de la *TIB* a un choque en *SEXP* es inicialmente de 82 p.b. y converge a 56 p.b.

Analizando los efectos cruzados, se observa que la respuesta de la *TIB* ante choques en la *CDT* es casi nula, mientras la *CDT* responde de manera significativa a choques en la *TIB*. Es así, como un aumento de 100 p.b. en la *TIB* incrementa aproximadamente 8.5 p.b. la tasa *CDT*. Todos estos efectos son permanentes.

El análisis *VIRF* es realizado para diferentes tipos de choques. Sin embargo, los resultados muestran que no existen patrones claramente diferenciables para los distintos tipos de choques analizados. Esto indica que con respecto a otros tipos de choques, los que realiza el Banco Central a través de cambios en la tasa de subasta de expansión no afectan de manera diferente las volatilidades de las series. También se encuentra que en términos de volatilidad la variable que presenta una mayor respuesta ante diferentes choques al igual que en choques en niveles es la *TIB*, con un efecto aproximado de tres meses. Adicionalmente, al comparar los efectos sobre la volatilidad de la *TIB* con los de la *CDT*, se observa que aunque la magnitud de respuesta de la volatilidad de la tasa *CDT* es menor, su persistencia es más alta.

Palabras clave: Modelos *VARX*, modelos *GARCH* multivariados, función de impulso respuesta en varianza (*VIRF*).

Códigos JEL: C32, C52, E43

* Econometrista principal de la gerencia técnica del Banco de la República e Investigador de CERAC, respectivamente. Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de La República ni a su junta directiva. Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de Luis E. Arango, Andrés González, Carlos Huertas, Munir Jalil, John J. León, Daniel Osorio, José V. Romero y Hernando Vargas.

1. Introducción

La tasa de interés de corto plazo ha jugado un papel importante en la política monetaria colombiana. En los últimos años, bajo la política de Inflación Objetivo, la tasa de interés de corto plazo se convirtió en la meta operativa del Banco de la República (*BR*). A través del logro de esta meta la autoridad monetaria pretende alcanzar su objetivo final, el control de la inflación.

En este contexto, es importante identificar de una manera correcta la dinámica existente entre los instrumentos de política monetaria (tasas de subasta y tasas lombardas de expansión y contracción) y las tasas de interés de corto plazo. Como lo mencionan Gómez *et al.* (2002) en los últimos años el *BR* ha tratado de: “fortalecer la relación existente entre las tasas de intervención, la tasa interbancaria y las tasas de plazos más largos”.

En este documento, se intentará aproximar la relación existente entre dos tasas de interés de corto plazo, la tasa interbancaria (*TIB*) y la tasa de certificados de depósitos a 90 días (*DTF*), y una de las tasas de intervención del Banco de la República (tasa de subasta de expansión¹) a través de la aplicación de modelos *VARX - GARCH* multivariados. Éstos modelos tienen la ventaja que pueden modelar dependencias en el primer momento (la media) y segundo momento condicional de las series (la varianza).

La estructura del documento es como sigue: en la segunda sección, se presentarán brevemente algunas consideraciones acerca de las relaciones existentes entre las tasas de interés y sus implicaciones en política monetaria. En la tercera sección se presenta una introducción a los modelos *GARCH* multivariados, *MGARCH*, y los resultados de la estimación se presentan en la sección 4. Finalmente, en la quinta sección se concluye.

2. Tasas de interés y política monetaria

En la literatura económica existen diferentes mecanismos de transmisión de la política monetaria, a través de los cuales los Bancos Centrales alcanzan sus objetivos finales. El más tradicional, y quizás uno de los más discutidos, es el canal de tasas de interés. Este ha sido ampliamente estudiado y es una pieza clave en la estructura IS-LM [Mishkin, 1996]. En éste, el Banco Central afecta las tasas de interés nominales de corto plazo, y en presencia de precios rígidos, afecta las tasas reales de corto y largo plazo², lo cual lleva a cambios en las decisiones de inversión de los agentes³, y finalmente afecta la demanda agregada y los precios.

¹ La cual tiene relevancia como instrumento de política dado el carácter de prestamista neto que ha tenido el *BR* en estos últimos años.

² Inclusive en presencia de expectativas racionales, Mishkin (1996).

³ Incluyendo el consumo en bienes durables, e.g. el gasto en vivienda.

Esta teoría asume que en la economía existen solamente dos activos, el dinero y los bonos. En este último activo se encuentran todos los demás activos financieros que sirven como reserva de valor⁴. Otra característica principal de este canal es que se asume que el dinero no tiene sustitutos perfectos y que su oferta es controlada por la autoridad monetaria. Además, como se mencionó anteriormente, se asume que los precios no se ajustan automáticamente, [Villalobos *et al*, 1999].

Complementario al canal de tasas de interés se encuentra el canal de crédito, el cual se fundamenta básicamente en el papel de los bancos comerciales en la solución de los problemas de información asimétrica en los mercados financieros y en la heterogeneidad de los agentes que participan en los mismos [Walsh, 2003]. Este canal a su vez puede descomponerse en dos: el canal del crédito bancario y el de hoja de balance. De acuerdo con el canal de crédito bancario, cambios en la política monetaria que afecten las posiciones de reserva de los bancos comerciales, varía la oferta de crédito en la economía, las tasas de interés y por consiguiente las decisiones de inversión (consumo) por parte de los agentes, la demanda agregada y los precios [Mishkin, 1996].

Por otra parte, el canal de hoja de balance establece que en presencia de problemas de riesgo moral y selección adversa, las instituciones financieras pueden racionar el crédito a ciertos agentes dentro de la economía. Los flujos netos de caja de las firmas cambian ante medidas de política monetaria que afecten las tasas de interés nominales. Entre más bajos (altos) sean los flujos netos de caja de las firmas, las instituciones financieras encontrarán más (menos) problemas de riesgo moral y selección adversa para otorgar crédito a las firmas. En consecuencia, la oferta de crédito varía, afectando las decisiones de inversión por parte de las firmas y finalmente la demanda agregada y los precios [Mishkin, 1996].

El canal de crédito bancario asume, por el lado de los prestamistas, que los bancos no tienen sustitutos perfectos dentro de sus activos sujetos a reservas, de manera que las decisiones de política puedan afectar la oferta de crédito y por el lado de los prestatarios, que las firmas no poseen sustitutos perfectos del crédito bancario, es decir, que no existen fuentes alternas de financiación a las cuales puedan acudir sin incurrir en costos adicionales, tales como la emisión de acciones o de títulos de deuda. En el canal de crédito de hoja de balance, es necesario que los establecimientos bancarios no puedan ser sustituidos en su tarea de reducir las asimetrías de información en el mercado [Walsh, 2003]⁵. Si estos supuestos no se cumplen, la relación entre las tasas de interés puede ser

⁴ Mishkin (2001) Discute ampliamente el papel de otros activos como agentes transmisores de la política monetaria.

⁵ Es importante anotar que existen otros canales de transmisión de política monetaria en la literatura económica, tales como el canal de tipo de cambio y el canal de precios de otros activos financieros, entre otros, véase Mishkin (1996).

más difusa y por lo tanto, las medidas de política monetaria tendrían una menor efectividad a través de este canal.

En el caso colombiano, a partir del año 2001 la tasa de interés de corto plazo se convirtió en la meta operativa de la política monetaria colombiana. Las subastas de expansión y contracción se convirtieron en los principales instrumentos de política a través de los cuales el Banco de la República (*BR*) suministra liquidez dentro de la economía, tratando de mantener una estrecha relación entre sus tasas de interés y la tasa de interés de corto plazo, medida a través de la tasa del mercado interbancario *TIB* [Huertas *et al*, 2005].

Esta relación entre las tasas de intervención del *BR* y las tasas de corto plazo sólo corresponde a la fase inicial del mecanismo a través del cual se transmiten a la economía las decisiones de política adoptadas por el *BR* y afectan su objetivo final principal, el control de precios⁶.

Tal como lo destacan Huertas *et al*, (2005), otro aspecto importante en la determinación de medidas de políticas monetarias en las cuales se utiliza como meta operativa las tasas de interés, es la estabilidad de estas últimas. Tasas de interés estables implican mayor certeza para las entidades financieras en la definición de sus pasivos y sus tasas de colocación, lo cual se termina transmitiendo al resto de la economía.

Desde 1995, el *BR* ha tomado una serie de medidas encaminadas a reducir la volatilidad en la *TIB*, las cuales han obtenido mejores resultados a partir de 2001⁷. En la Figura 1 se presenta la evolución de la tasa interbancaria y la tasa diaria de los Certificados de Depósito a 90 días (*CDT*), junto con las tasas de intervención del *BR* para el periodo diario comprendido entre enero de 2001 y septiembre de 2005. En esta gráfica se muestra que en la mayor parte del período analizado, las tasas de corto plazo siguen la dinámica de las tasas de intervención.

En este contexto, es necesario entender de la mejor manera posible las relaciones existentes entre las tasas de intervención del *BR*, (Subastas de expansión y contracción, tasas lombardas de expansión y contracción) y las tasas de interés de corto plazo (*TIB* y *DTF*). En las siguientes secciones, se pretende identificar posibles efectos de las decisiones de política monetaria en su primera etapa, es decir, en la acción de los instrumentos de política monetaria sobre las metas operativas. Específicamente, se evaluará la relación existente entre una de las tasas de intervención del *BR*, la tasa de subasta de expansión, y dos tasas de corto plazo, la tasa interbancaria (*TIB*) y la tasa de depósitos a término fijo (*DTF*), la cual sirve como referencia a otras tasas en la economía [Huertas *et al*, 2005].

⁶ Una descripción detallada de los procesos que realiza un Banco Central en la etapa inicial del canal de transmisión monetaria se encuentra en Huertas *et al* (2005).

⁷ Banco de la República (2000) y Cardozo y Hernández (2005).

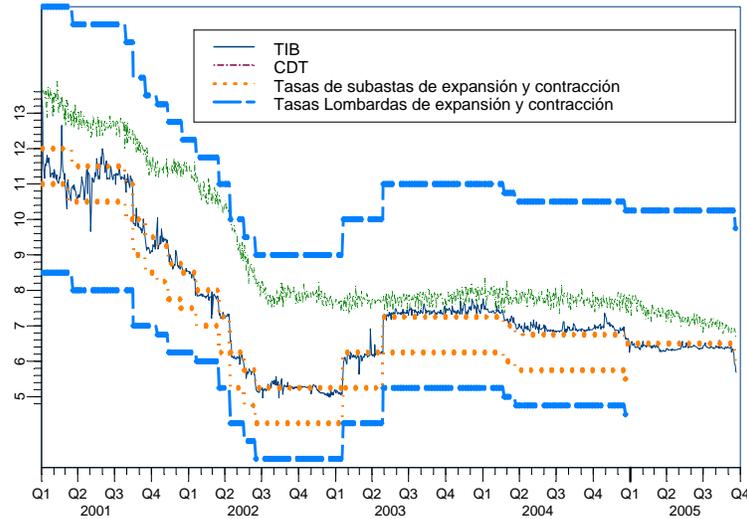


Figura 1. TIB, CDT y tasas de intervención del BR

3. Aproximación a la relación de las tasas de interés a través de modelos VARX – MGARCH

Si la teoría del canal de crédito se cumple, las decisiones de política monetaria afectan la liquidez del sistema financiero, las tasas de interés varían y finalmente, este efecto se transmite al resto de la economía. Sin embargo, las decisiones de política monetaria no solamente deben preocuparse por controlar los niveles de las tasas de interés, sino también por su estabilidad, la cual puede ser aproximada por la volatilidad de las tasas.

En este sentido, es necesario tomar algún tipo de aproximación que cumpla con estas características. Por un lado, que pueda incluir las relaciones dinámicas entre las tasas, pero no solamente en su nivel (o su variación) sino también que tenga en cuenta las relaciones de las volatilidades de las series. Adicionalmente, la aproximación seleccionada debe tener en cuenta el carácter exógeno de la tasa de subasta de expansión y permitir observar los efectos de cambios en esta variable sobre la *TIB* y la *DTF*.

Incluir otra tasa de interés como la tasa de depósitos a termino *DTF*, ofrece información adicional acerca de los efectos directos e indirectos de la política monetaria (i.e. por movimientos en las tasas de intervención o a través de la *TIB*) sobre la estructura de plazos de tasas de interés. Adicionalmente, la inclusión de la *DTF* permite observar la interacción dinámica de esta tasa con la *TIB*, lo cual es aún más informativo si se tiene en cuenta que la *DTF* es una tasa que se utiliza como referencia para otras tasas en la economía [Huertas *et al*, 2005].

Huertas *et al* (2005), emplean la metodología de modelos *VAR* para observar las relaciones dinámicas entre algunas de las tasas de interés del mercado colombiano e integran un análisis descriptivo para analizar el efecto de las tasas de intervención sobre dichas tasas. Sin embargo, esta metodología no permite ver si las volatilidades de estas tasas se encuentran relacionadas, ni el efecto dinámico que puede tener las variaciones de la tasas de intervención del *BR* sobre las tasas de mercado.

Por lo tanto, se adoptó la metodología de modelos *GARCH* multivariados, en la cual se puede considerar simultáneamente las interacciones dinámicas entre las tasas de interés tanto en su nivel (variación) como en su volatilidad. Adicionalmente, se incluyó como variable exógena la tasa de subasta de expansión. Finalmente, a través del análisis de Funciones de Impulso Respuesta (*IRF*), tanto en media como en varianza, y de Análisis de Multiplicadores (*MA*) se observaron las relaciones existentes entre la *TIB*, la *DTF* y las tasas de intervención del *BR*⁸.

3.1. Modelos *ARCH* y *GARCH*

Los modelos *ARCH* (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models) pretenden replicar algunas regularidades de los activos financieros tales como los conglomerados de volatilidad (*volatility clustering*) y las colas pesadas de la distribución⁹. Estos modelos fueron desarrollados por Engle (1982) y suponen que la varianza no condicional es constante en el tiempo, mientras que la varianza condicional es variable. El modelo *ARCH* (*q*) se define de la siguiente forma:

$$(1) \quad y_t = f(z_t) + \varepsilon_t$$

$$(2) \quad \eta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$$

$$(3) \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

donde $f(z_t)$ es una función que modela el valor esperado de y_t , la cual puede ser por ejemplo un modelo de regresión lineal o un proceso *ARMA*¹⁰, y $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$ es un proceso independiente de h_t . Adicionalmente, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ y

⁸ Una breve explicación de la *IRF* y el *MA* para los modelos *VARX* se encuentran en el Anexo 1. Adicionalmente, la definición de la *IRF* asociada a la varianza se encuentra en la sección 3.3.

⁹ Una descripción detallada de las regularidades de los activos financieros se encuentra en Bollerslev *et al.* (1994).

¹⁰ En el caso que $f(z_t)$ este asociada a un modelo *ARMA*, se dice que las ecuaciones (1), (2) y (3) conforman un proceso *ARMA-ARCH*.

$\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$. Es posible demostrar bajo estos supuestos que ε_t es un proceso ruido blanco con varianza condicional h_t .

Una posible generalización de estos modelos son los modelos *GARCH*, los cuales fueron desarrollados por Bollerslev (1986). Los modelos *GARCH* (generalized autoregressive conditional heteroskedastic) poseen una estructura de rezagos más flexible y en muchos casos, permiten una descripción más parsimoniosa de los datos. Un modelo *GARCH* (p, q) es descrito por las ecuaciones (1), (2) y (4), esta última ecuación es representada como:

$$(4) \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, lo que garantiza la no negatividad de la varianza condicional.

En este modelo la varianza no condicionada del error es:

$$(5) \quad V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}$$

en consecuencia, si $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \geq 1$ la varianza del error no se encuentra definida.

En tal caso, un choque en la volatilidad no se desvanece a medida que avanza el tiempo. Por lo tanto, para que la varianza del error esté definida la suma de los coeficientes debe ser menor que uno.

Como se mencionó anteriormente los modelos *ARCH* o *GARCH* pueden replicar dos hechos estilizados de los retornos financieros: conglomerados de volatilidad y distribuciones de colas pesadas. Por un lado, las ecuaciones (3) ó (4) implican conglomerados de volatilidad y por otro lado, dado que ε_t condicionado al conjunto de información pasada hasta $t-1$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza condicionada h_t , se puede demostrar que la curtosis de ε_t no condicionado es mayor que tres¹¹, la curtosis bajo el supuesto de normalidad. Por lo tanto, la distribución de ε_t puede ser de colas pesadas.

¹¹ Esto es demostrado, entre otros textos, en Gouriéroux (1997).

3.2. Modelos ARCH y GARCH multivariados

La extensión multivariada de los modelos GARCH corresponde a una generalización de las expresiones (1), (2) y (4). La media condicional del proceso y_t de dimensión $N \times 1$ puede ser representada por un modelo VARX (l, s):

$$(6) \quad y_t = \mu + C_1 y_{t-1} + \dots + C_l y_{t-l} + D_0 x_t + \dots + D_s x_{t-s} + \varepsilon_t$$

Donde x_t corresponde a un vector de variables exógenas de dimensión M y C_i y D_i representan matrices de coeficientes de dimensiones $N \times N$ y $N \times M$, respectivamente.

Usualmente, se asume que los errores del modelo (6) tienen una distribución condicional normal multivariada con valor esperado cero (vectorial) y matriz de covarianzas H_t . Si ψ_t denota el conjunto de información disponible hasta el periodo t :

$$(7) \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N_N(0, H_t)$$

Este modelo es denominado VARX – MGARCH. Al igual que en el modelo GARCH(p, q) del caso univariado, H_t depende de las observaciones pasadas de ε_{t-i} , $i = 1, \dots, q$ y de las matrices de covarianzas H_{t-i} , $i = 1, \dots, p$. Considerando que $vech(\cdot)$ denota el operador que transforma la parte triangular inferior (incluyendo la diagonal) de una matriz simétrica $N \times N$ en un vector de dimensión $N^* = (N(N+1)/2)$, un modelo GARCH(p, q) multivariado, MGARCH(p, q), puede ser representado como:

$$(8) \quad vech(H_t) = c + \sum_{i=1}^q A_i vech(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^p B_i vech(H_{t-i})$$

La expresión (8) es denominada representación vec del modelo MGARCH¹², A_i y B_i corresponden a matrices de parámetros de dimensión $N^* \times N^*$ y c es un vector $N^* \times 1$.

Una condición suficiente para la estacionariedad en sentido débil del proceso $\{\varepsilon_t\}$ se tiene si todas las raíces del determinante de la ecuación matricial (9) están por fuera del círculo unitario:

¹² Bollerslev *et al* (1988).

$$(9) \quad \det \left[I - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (A_i + B_i) z^i \right] = 0$$

$A_{q+1} = \dots = A_p = 0$ si $p > q$, y $B_{p+1} = \dots = B_q = 0$ si $q > p$.

Bajo el supuesto de estacionariedad débil, la matriz de covarianzas no condicionada de ε_t es la siguiente:

$$(10) \quad \text{vech}(H) = \left(I - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (A_i + B_i) \right)^{-1} c$$

Un problema del modelo $MGARCH(p,q)$ *vec* es su alto número de parámetros, $\frac{1}{4}(p+q)N^2(N+1)^2 + \frac{1}{2}N(N+1)$; por lo cual, se han propuesto varias alternativas; entre los cuales se encuentran modelos diagonales y modelos basados en $GARCH$ univariados¹³.

Bollerslev *et al* (1988) propusieron los modelos *vec* diagonales, o *dvec*, en los cuales las matrices A_i y B_i son diagonales. Sin embargo, bajo esta representación no se puede garantizar que la matriz de covarianzas H_t sea definida positiva.

Otra manera de formular los modelos $MGARCH$ es a través de modelos $GARCH$ univariados. Uno de estos casos corresponde al modelo de correlación constante, CCC, sugerido por Bollerslev (1990). Este modelo parte del hecho que $H_t = \Delta_t R_t \Delta_t$, donde R_t corresponde a la matriz de correlación condicional y Δ_t es a la matriz diagonal de desviaciones estándar condicionales.

El modelo CCC supone que la matriz de correlaciones condicionales es constante en el tiempo y por lo tanto $H_t = \Delta_t R \Delta_t$. En esta representación Bollerslev supone que las varianzas condicionales son determinadas de acuerdo a modelos $GARCH$ univariados, mientras que las covarianzas condicionales son determinadas por la relación $H_t = \Delta_t R \Delta_t$.

Engle y Kroner (1995) plantearon la siguiente especificación:

$$(11) \quad H_t = C_0' C_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q F_{ki}' \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' F_{ki} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p G_{ki}' H_{t-i} G_{ki}$$

¹³ Sin embargo, existen otras representaciones de modelos $MGARCH$. Por ejemplo, generalizaciones de modelos de correlación constante, modelo factoriales, modelos con coeficientes aleatorios, entre otros. Un recuento de este tipo de modelos puede ser consultado en Franses y van Dijk (2000) y Bauwens *et al* (2003).

donde C_0 es una matriz triangular inferior de orden $N \times N$ y F_{ki} y G_{ki} son matrices $N \times N$ de parámetros.

Este modelo es conocido como representación $BEKK(p,q,k)$. En su forma más sencilla, $BEKK(p,q,1)$, este modelo tiene menos parámetros que los modelos vec y presenta dos características positivas. Primero, las matrices H_t son simétricas y definidas positivas si por lo menos alguna de las matrices C_0 ó G_{ki} tiene rango completo. Segundo, a diferencia de otros modelos más restrictivos, la representación $BEKK$ permite una mayor dinámica. Por ejemplo, no asume que la matriz de correlaciones condicional sea constante; adicionalmente, este modelo permite una dependencia directa entre la varianza condicional de una variable con respecto a los datos observados de las varianzas condicionales de otras variables del sistema.

El modelo $BEKK(p,q,k)$ puede ser representado en la notación vec utilizando las propiedades de los operadores $vech$ y vec ¹⁴. Para $p = q = k = 1$ este modelo se representa como:

$$\begin{aligned}
 H_t &= C_0' C_0 + F_1' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' F_1 + G_1' H_{t-1} G_1 \\
 vech(H_t) &= vech(C_0' C_0) + L_N vec(F_1' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' F_1) + L_N vec(G_1' H_{t-1} G_1) \\
 (12) \quad vech(H_t) &= vech(C_0' C_0) + L_N (F_1 \otimes F_1)' D_N vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') + L_N (G_1 \otimes G_1)' D_N vech(H_{t-1})
 \end{aligned}$$

donde D_N representa la matriz de duplicación tal que para una matriz simétrica A de dimensiones $N \times N$, $vec(A) = D_N vech(A)$ y L_N es la matriz de eliminación tal que $vech(A) = L_N vec(A)$.

3.3. Función de Impulso Respuesta en la Volatilidad

En los modelos de series de tiempo multivariados la función de impulso respuesta se utiliza para analizar el efecto de un choque a una serie del sistema. Este concepto esta asociado al modelamiento del primer momento de las series y puede ser generalizado al segundo momento usando los modelos $GARCH$ multivariados. Es así como Hafner y Herwartz (2001) definen la función de impulso respuesta en la volatilidad, $VIRF$ por sus siglas en inglés, para un modelo $MGARCH$ como la diferencia entre el valor esperado condicional de H_t con y sin choque¹⁵:

¹⁴ El operador vec transforma una matriz en un vector posicionando las columnas de la matriz una debajo de otra.

¹⁵ Hafner y Herwartz (2001) utilizan dos definiciones de $VIRF$. En este documento se utiliza la definición que los autores denominan como CVP , la cual es la más cercana a la definición de la función de impulso respuesta tradicional.

$$(13) \quad VIRF_t(\delta) = E[vech(H_t)|\varepsilon_0 = \delta, \Psi_{-1}] - E[vech(H_t)|\varepsilon_0 = 0, \Psi_{-1}]$$

Por lo tanto, la *VIRF* indica el efecto que tiene un choque de magnitud δ sobre la varianza condicional, t periodos después de haberse realizado. Para un modelo *MGARCH(1,1)* en representación *vec* se tiene el siguiente resultado:

$$(14) \quad VIRF_t(\delta) = \begin{cases} A_1 vech(\delta\delta') & \text{para } t=1 \\ (A_1 + B_1)VIRF_{t-1}(\delta) & \text{para } t>1 \end{cases}$$

Utilizando la expresión (12), la *VIRF* para un modelo *BEKK(1,1,1)* esta dada por:

$$(15) \quad VIRF_t(\delta) = \begin{cases} L_N(F_1 \otimes F_1)' D_N vech(\delta\delta') & \text{para } t=1 \\ L_N(F_1 \otimes F_1 + G_1 \otimes G_1)' D_N VIRF_{t-1}(\delta) & \text{para } t>1 \end{cases}$$

Hafner y Herwartz proponen dividir cada elemento de la *VIRF* por las volatilidades condicionales asociadas al periodo de choque, H_0 . Esto permite interpretar estos resultados como desviaciones porcentuales con respecto a los elementos de H_0 .

Una diferencia importante entre la función de impulso respuesta para un modelo *VAR* o *VARX* y la *VIRF* estandarizada, es que esta última sí depende del periodo en que se realiza el choque. Esto es debido a que la *VIRF* estandarizada depende de H_0 .

4. Estimación y resultados

4.1. Definición de las series

Para analizar la relación existente entre las tasas de intervención y las tasas de corto plazo del mercado colombiano. Se utilizaron tres series representativas de estos mercados.

Como tasa de intervención del *BR* se incluyó la tasa de subasta de expansión, con la cual el *BR* brinda liquidez a la economía a través del mecanismo de subasta, con un monto fijo establecido con anticipación. Tal como lo destacan Huertas *et al* (2005) ésta resulta un buen indicador de las decisiones de política monetaria, dado el carácter de prestamista neto del *BR*.

Las tasas de mercado incluidas son dos: la tasa interbancaria (*TIB*), la cual se calcula como el promedio ponderado por montos de la tasa pasiva de los préstamos interbancarios a un día hábil.

La otra tasa de mercado incluida es el promedio ponderado de la tasa diaria de los certificados de depósito a término fijo a 90 días (*CDT*) emitidos por los

establecimientos bancarios, corporaciones financieras, compañías de financiamiento comercial y corporaciones de ahorro y vivienda. A partir de esta es construida la *DTF*, la cual sirve como punto de referencia a otras tasas en la economía. Sin embargo, dado el carácter semanal de la *DTF*, se decidió trabajar con la tasa *CDT* dada la frecuencia diaria de la base de datos.

4.2. Descripción de las series

En la Figura 2 y la Figura 3 se grafican los niveles y las primeras diferencias de la *TIB*, *CDT* y *SEXP* para el periodo diario comprendido entre enero de 2001 y septiembre de 2005¹⁶. La primera diferencia de las series *TIB* y *CDT* es necesaria debido a la presencia de una raíz unitaria en estas variables, los resultados de estas pruebas son presentados en la Tabla A2.1 del Anexo 2¹⁷.

La serie *TIB* presenta dos características usuales dentro de las series financieras. Primero, presenta episodios de alta volatilidad seguidos por episodios de calma o baja volatilidad, y segundo, esta serie presenta una gran cantidad de valores “atípicos”. Esta última característica implica distribuciones de colas pesadas, lo que conlleva una curtosis alta.

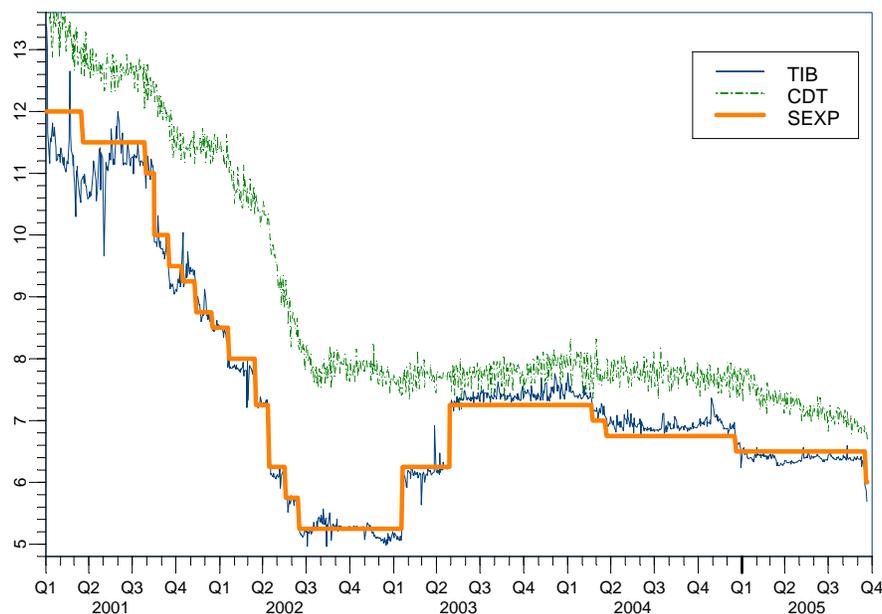


Figura 2. *TIB*, *CDT* y la tasa de subasta de expansión

La característica de colas pesadas es confirmada al analizar el histograma y el gráfico Q-Q de la serie *DTIB* en la Figura 4. Sin embargo, no ocurre lo mismo para *DCDT*. El histograma de *DTIB* muestra grandes desviaciones con respecto al de una variable aleatoria normal. Adicionalmente, la gráfica Q-Q de esta variable se

¹⁶ La fuente de los datos utilizados corresponde al Banco de la República.

¹⁷ La presencia de una raíz unitaria en estas series garantiza que si la autoridad monetaria afecta estas tasas, *ceteris paribus*, el efecto sobre los niveles de estas será permanente.

desvía de una línea recta principalmente en los extremos, esto último también confirma la presencia de colas pesadas en esta serie¹.

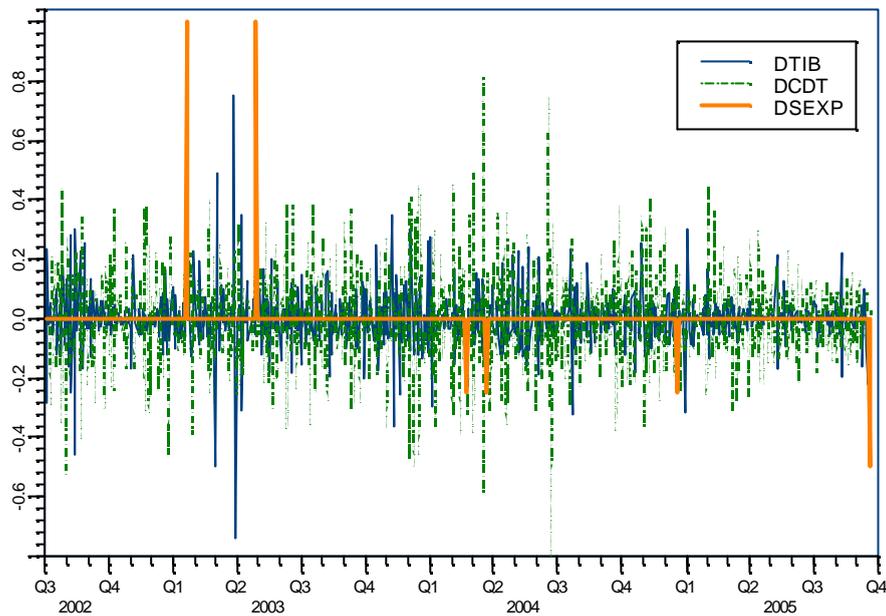


Figura 3. Variaciones diarias de TIB, de CDT y de la tasa de subasta de expansión

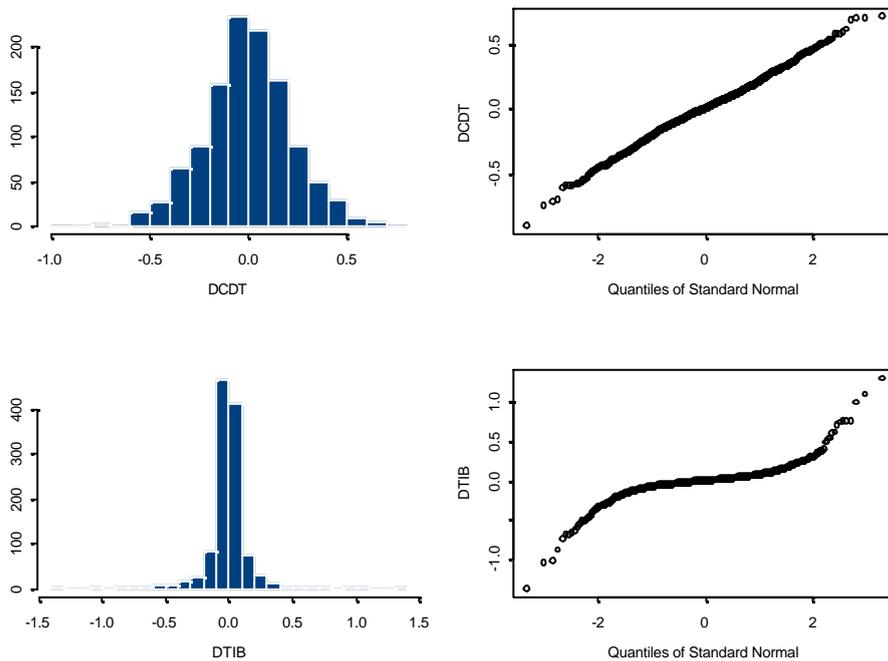


Figura 4. Histograma y gráfico Q-Q para las variaciones de CDT y TIB.

¹ En el gráfico Q-Q se presentan los cuantiles de una distribución teórica, en este caso normal, contra los cuantiles de la distribución empírica de la serie, si la serie en análisis sigue la distribución teórica, ésta debería mostrar una línea recta con un ángulo de 45 grados.

4.3. Estimación del modelo MGARCH

Dadas las características estocásticas de las series *CDT* y *TIB*, se identificó y estimó un modelo $VARX(10,0)$ para la primera diferencia de estas dos series en el periodo diario comprendido entre el 2 de enero de 2001 y el 21 de septiembre de 2005¹⁹. Como variables exógenas se tomaron la tasa de subasta de expansión y variables *dummy* para cada día de la semana con el objeto de modelar estacionalidad determinística diaria; adicionalmente, se incluyó una variable *dummy* para modelar el efecto de días festivos.

En la Tabla A3.1 y la Figura A3.1 del Anexo 3 se presentan las pruebas de especificación sobre los residuales del modelo $VARX(10,0)$. Estas muestran que no existe evidencia de autocorrelación ni de inestabilidad en los parámetros, sin embargo, existe evidencia de efectos *ARCH*.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se estimó un modelo $VARX(10,0)$ –*MGARCH*(1,1) sobre las series *DCDT* y *DTIB*, en el cual fueron incluidas las variables exógenas utilizadas en la especificación del modelo $VARX(10,0)$. El modelo *MGARCH* fue estimado bajo la especificación *BEKK*.

Los resultados de la estimación del modelo $VARX(10,0)$ –*MGARCH*(1,1) son presentados en la Tabla A4.1 del Anexo 4. Debido a la no normalidad de los residuales estandarizados, los errores estándar de los parámetros estimados son calculados utilizando pseudo máxima verosimilitud²⁰. Este método tiene la ventaja que es robusto a este tipo de desviaciones de los supuestos.

En las tablas A5.1, A5.2 y A5.3 del Anexo 5 se muestran las pruebas de especificación sobre las estimaciones de este modelo. En adición a la no normalidad de los residuales estandarizados, estas pruebas no muestran ningún indicio de violaciones a los supuestos del modelo.

La función de impulso respuesta y el análisis de multiplicadores se presentan en las Figuras 5 y 6. Debido a la no normalidad de los residuales estandarizados del modelo, los intervalos de confianza son estimados con técnicas bootstrap. En la Figura 5 se presentan las respuestas del sistema ante choques en *CDT* y *TIB*²¹, se observa que un choque en *CDT* no tiene un impacto significativo sobre la tasa *TIB*. Sin embargo, un choque en la *TIB* si afecta de manera significativa a la *CDT*, es así como un aumento de 100 puntos básicos (p.b.) en la *TIB* incrementa

¹⁹ El número de rezagos del modelo se seleccionó como el mínimo para el cual se obtiene errores ruido blanco multivariados. El comportamiento estocástico de largo plazo explicado a través de modelos *VEC* no se considero debido al número reducido de años en la muestra analizada.

²⁰ Una explicación de este método puede ser encontrada en Gouriéroux (1997).

²¹ Esta función de impulso respuesta utiliza la descomposición de Cholesky en la cual se asume que de las dos variables endógenas del modelo, la variable *TIB* es la más exógena contemporáneamente.

aproximadamente 8.5 p.b. la tasa *CDT*. Aunque la respuesta a este choque fluctúa al inicio, se estabiliza alrededor de un mes después.

Por otra parte, la respuesta de la *TIB* ante un choque en ella misma es más alta que en el caso de la *CDT*. Mientras que un choque de 100 p.b. en *CDT* representa un aumento en esta serie de 25 p.b., un choque de magnitud similar en la *TIB* aumenta esta última en 56 p.b.

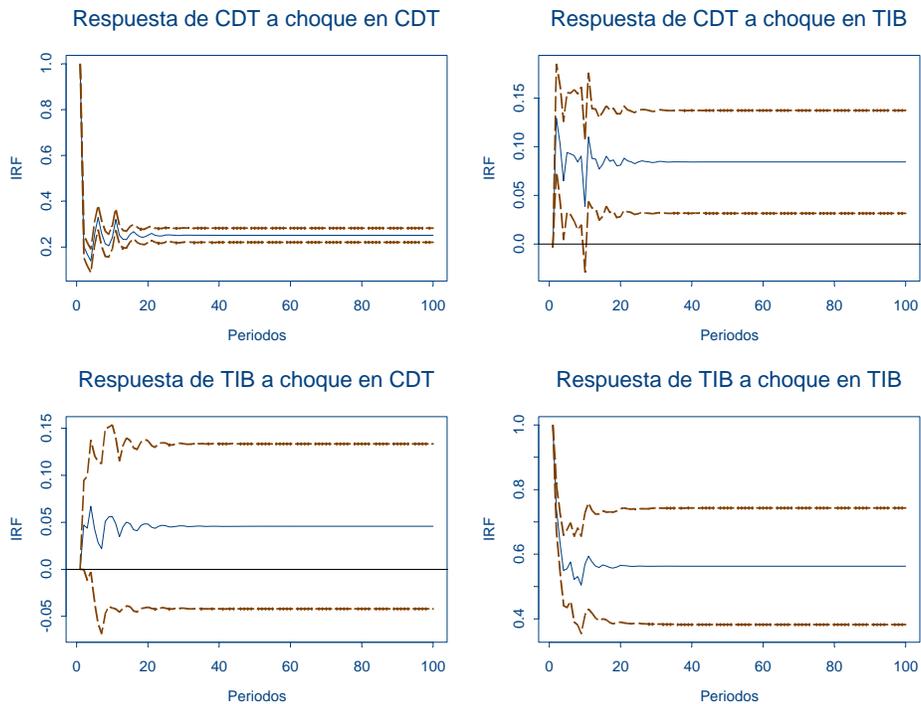


Figura 5. Funciones de Impulso – Respuesta con intervalos de confianza del 90%

Los resultados del análisis de multiplicadores son presentados en la Figura 6. En esta gráfica se muestran las respuestas sobre las dos variables endógenas del sistema a un choque en la tasa de subasta de expansión (*SEXP*). Un choque en esta variable produce incrementos significativos en *CDT* y *TIB*. Específicamente, un incremento de 100 puntos básicos en *SEXP* produce un incremento de alrededor de 7 p.b. en *CDT*; sobre la tasa *TIB*, se produce inicialmente un incremento de 68 p.b. que luego decae y se estabiliza en 38 p.b. después de aproximadamente 10 días. El efecto permanente de un choque en la tasa de subasta de expansión sobre estas dos tasas de interés es consistente con el papel que ha jugado el *BR* como prestamista neto sobre la liquidez del sistema financiero durante el período de estudio.

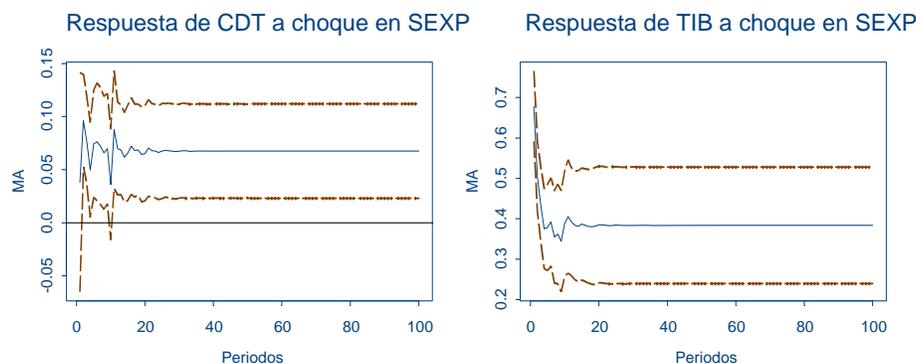


Figura 6. Análisis de Multiplicadores con intervalos de confianza del 90%

Muestra	Respuesta contemporánea	Respuesta en el largo plazo
Muestra completa: 02/ene/2001 - 21/sep/2005	68 p.b.	38 p.b.
02/ene/2001 - 31/mar/2003	64 p.b.	35 p.b.
01/abr/2003 - 21/sep/2005	86 p.b.	58 p.b.

Tabla 1. Respuesta de TIB a choque en SEXP al inicio y final de la muestra

Muestra	Respuesta contemporánea	Respuesta en el largo plazo
Muestra completa: 02/ene/2001 - 21/sep/2005	68 p.b.	38 p.b.
02/ene/2002 - 21/sep/2005	73 p.b.	53 p.b.
02/ene/2003 - 21/sep/2005	82 p.b.	56 p.b.

Tabla 2. Respuesta de TIB a choque en SEXP para muestras más recientes

Adicionalmente, algunos de los resultados del *MA* para la parte final de la muestra son diferentes respecto a los obtenidos para la parte inicial de la misma (Tabla1). Cuando el modelo es estimado para muestras más recientes (Tabla2), la respuesta de *TIB* a choques en *SEXP* es mayor²² indicando una relación más estrecha entre los instrumentos de política y la meta operativa del *BR*²³.

²² Los resultados de la función de impulso respuesta para las variables endógenas y del análisis de multiplicadores para la tasa *CDT* no cambian significativamente cuando la estimación del modelo se realiza para las muestras consideradas en las Tablas 1 y 2.

²³ Los resultados presentados en las Tablas 1 y 2 podrían sugerir que los parámetros estimados en el modelo no son estables en el tiempo. Sin embargo, las pruebas estadísticas presentadas en los Anexos 3 y 5 muestran que la hipótesis de invarianza no se rechaza, lo que indica estabilidad. Esta incongruencia puede ser debida a dos causas; primero, de seis conjuntos de resultados (cuatro *IRF* y dos *MA*) sólo uno muestra algunos indicios de inestabilidad en los parámetros (respuesta de *TIB* a choque en *SEXP*, Tablas 1 y 2). Segundo, las pruebas de estabilidad son realizadas sobre los parámetros del modelo; sin embargo, los coeficientes del *IRF* y *MA* corresponden a funciones no lineales de estos parámetros. Una alternativa que podría ser realizada en trabajos posteriores, es estimar un modelo no lineal en la media, ya que en este tipo de modelos el *IRF* y el *MA* pueden variar en el tiempo.

En las Figuras 7, 8, 9 y 10 se presentan el análisis de impulso respuesta sobre las volatilidades (*VIRF*). Estas gráficas muestran las respuestas de las volatilidades de las series endógenas del modelo a choques en estas series. En este contexto, las volatilidades se miden como las desviaciones estándar condicionales de las series, dadas por el modelo *MGARCH*.

Una diferencia importante con respecto al análisis de impulso respuesta tradicional, es que los resultados del análisis *VIRF* dependen del periodo en el cual se realiza el choque. Por tal motivo, se escogieron cuatro choques observados, los dos primeros corresponden a fechas en las cuales se realizaron cambios en la tasa de subasta de expansión, el tercer choque se encuentra en agosto de 2002, período en el cual se presentó alta inestabilidad en las tasas de los títulos de tesorería del Gobierno nacional (*TES*) y el cuarto corresponde a uno de los periodos con mayor volatilidad de *CDT* con respecto a los dos últimos años de la muestra. Los dos primeros choques se realizaron en los días 29/abr/2003 y 19/sep/2005 donde la tasa de subasta de expansión aumentó 100 p.b. y disminuyó 50 p.b., respectivamente. Los dos choques finales corresponden a los periodos 14/ago/2002 y 02/mar/2004, respectivamente.

El análisis de la *VIRF* se realiza en forma similar al de la *IRF*. Por ejemplo, en la Figura 7 se observa que aunque el choque ocurrido el 29 de abril de 2003, el cual coincide con el aumento de 100 p.b. en *SEXP*, aumenta considerablemente la volatilidad de la *TIB*, no cambia significativamente la volatilidad en la *CDT*. Es así como la *VIRF* muestra que la volatilidad de la *TIB* se incrementa inicialmente en 117% con respecto a la volatilidad del día del choque y posteriormente decrece lentamente hacia cero, después de 120 días el incremento es del 5.6%.

Los resultados del análisis de la *VIRF*, los cuales incluyen las Figuras 7, 8, 9, 10 y otros ejercicios que no se presentan, muestran que no existen patrones claramente diferenciables para los distintos tipos de choques analizados (cambios en *SEXP*, crisis *TES*, etc.). Sin embargo, ante estos choques las respuestas de las volatilidades de la *TIB* y del *CDT* son diferentes. En general, la volatilidad de la *TIB* se incrementa en una mayor magnitud con respecto a la volatilidad de la *CDT*; aunque ambas respuestas decrecen y eventualmente convergen a cero, la respuesta de la volatilidad de *CDT* es más persistente y decrece más lentamente comparada con la de la *TIB*.

Este último resultado es consistente con los hechos estilizados mencionados anteriormente: la *TIB* muestra un comportamiento más volátil a lo largo de todo el período de análisis y esto se evidencia en la respuesta de la volatilidad ante los diferentes choques presentados. Los intervalos de confianza de la *VIRF* indican que un choque en el sistema persiste en la volatilidad de la *TIB* aproximadamente 60 días (3 meses).

Vale la pena destacar que la respuesta de la covarianza entre las dos series resulta no significativa para la mayoría de los casos. Excepto para el choque del

02/mar/2004, esto indica que la relación de estas dos variables se mantiene “estable” después de un choque.

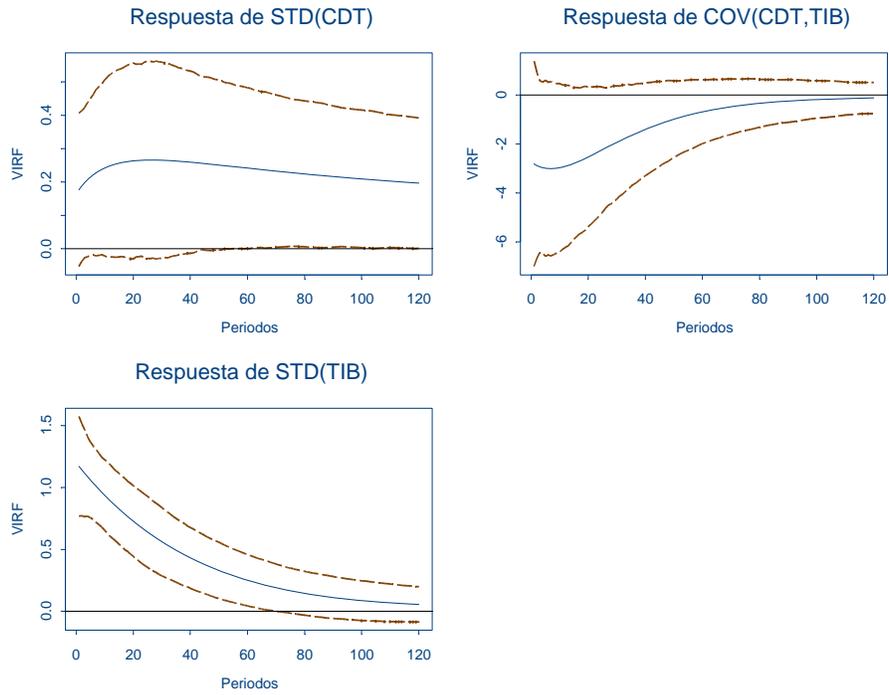


Figura 7. Función *VIRF* con choque en 29/abr/2003 e intervalos de confianza del 90%

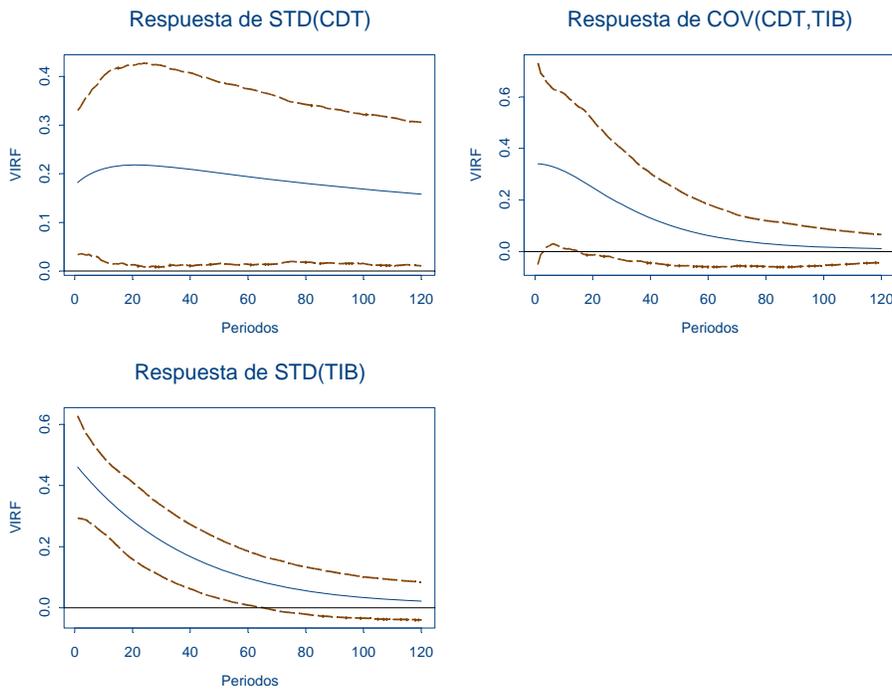


Figura 8. Función *VIRF* con choque en 19/sep/2005 e intervalos de confianza del 90%

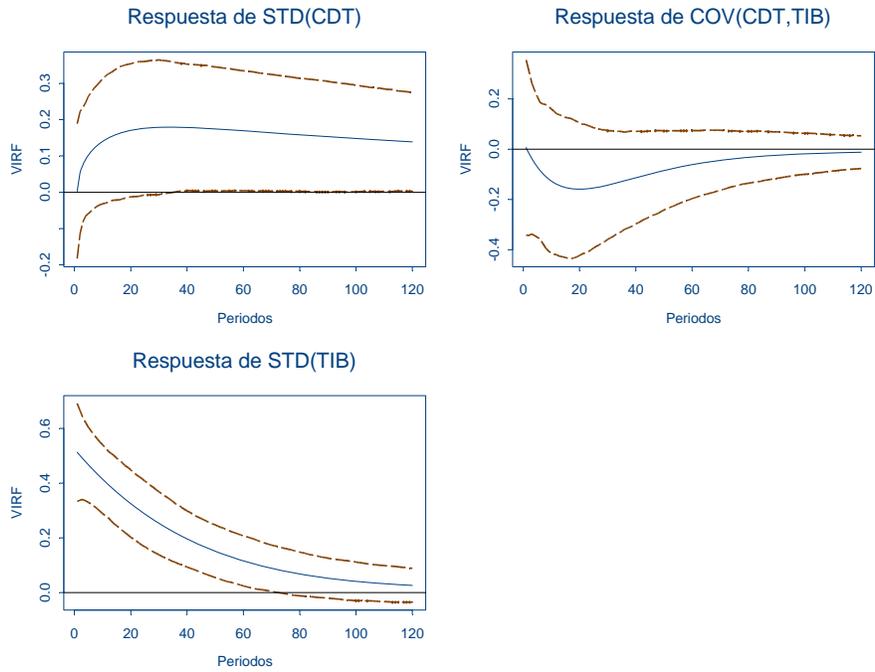


Figura 9. Función *VIRF* con choque en 14/ago/2002 e intervalos de confianza del 90%

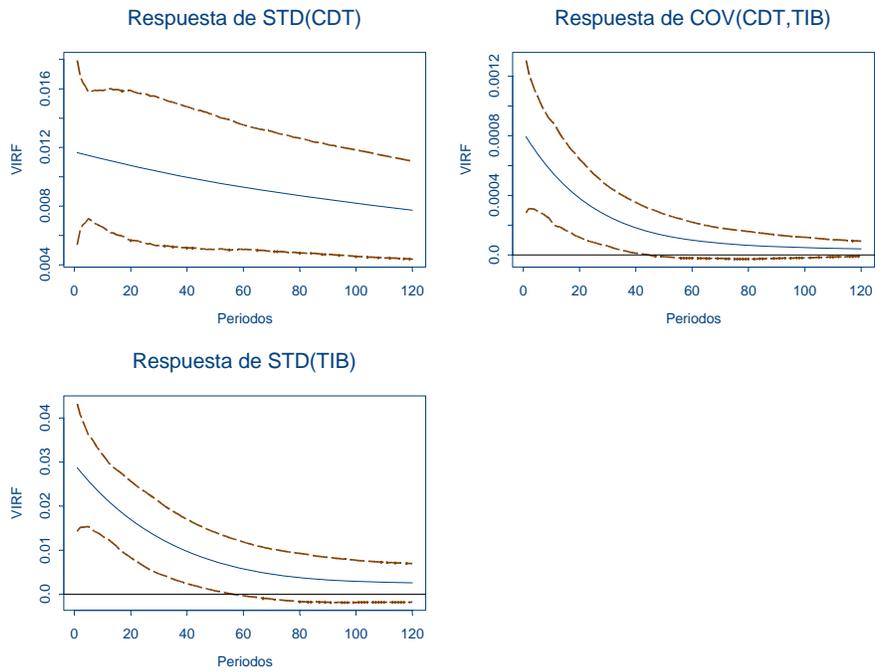


Figura 10. Función *VIRF* con choque en 02/mar/2004 e intervalos de confianza del 90%

5. Conclusiones

En este documento se identificaron algunas de las relaciones existentes entre uno de los instrumentos de política monetaria del *BR*, la tasa de subasta de expansión, meta operativa del *BR*, la tasa interbancaria y una tasa de corto plazo, la tasa diaria de depósitos a término fijo (*CDT*). Teniendo en cuenta la importancia de encontrar las relaciones entre estas series en sus niveles y en sus volatilidades, se utilizó la metodología de modelos *VARX-GARCH* multivariados. Estos modelos permiten encontrar las respuestas dinámicas de las variables de estudio ante choques en el sistema y ante choques en variables exógenas mediante el análisis de funciones de impulso respuesta (*IRF* y *VIRF*) y de análisis de multiplicadores (*MA*).

Bajo estos modelos y para una muestra de frecuencia diaria entre enero de 2001 y septiembre de 2005, se encontró que la variable que más responde a choques exógenos en el sistema y ante choques en si misma, es la tasa interbancaria *TIB*, lo cual resalta la importancia de tener en cuenta la estructura de plazos de las tasas de interés en las decisiones de política monetaria. Movimientos en las tasas de interés de intervención del *BR* afectan en mayor magnitud la tasa de más corto plazo (*TIB*), mientras que el impacto de la tasa de subasta de expansión sobre la tasa *CDT* es mucho más bajo.

La respuesta de la *TIB* ante un choque de 100 puntos básicos en la tasa de subasta de expansión es inicialmente de 68 p.b. y finalmente se estabiliza en 38 p.b., mientras que la respuesta de la tasa *CDT* ante ese mismo choque oscila alrededor de 7 p.b. Además, la respuesta de la *TIB* ante choques en si misma oscila alrededor de 56 p.b.; para la *CDT*, su respuesta a choques en ella misma se encuentra alrededor de los 25 p.b. En todos los casos anteriores, el efecto del choque es permanente. Analizando los efectos cruzados, se observa que la respuesta de la *TIB* ante choques en la *CDT* es casi nula, mientras la *CDT* responde de manera significativa a choques en la *TIB*. Es así, como un aumento de 100 p.b. en la *TIB* incrementa aproximadamente 8.5 p.b. la tasa *CDT*. Aunque la respuesta a este choque fluctúa al inicio, se estabiliza alrededor de un mes después.

La respuesta de la *TIB* a choques en *SEXP* aumenta cuando se consideran muestras más recientes. Para la muestra 2003-2005 esta respuesta es inicialmente de 82 p.b. y converge a 56 p.b., lo cual indica una relación más estrecha entre los instrumentos de política y la meta operativa del *BR*. Los resultados de la función de impulso respuesta para las variables endógenas del modelo y los resultados del análisis de multiplicadores para *CDT* no cambian significativamente bajo estos escenarios alternos.

Una ventaja adicional de la metodología propuesta, es la posibilidad de analizar no solo la respuesta de los niveles de las series, sino también las respuestas de sus volatilidades ante choques en las series endógenas del modelo. Una diferencia

importante con respecto al análisis de impulso respuesta tradicional, es que los resultados del análisis del impulso respuesta sobre volatilidades dependen del periodo en el cual se realiza el choque. Por tal motivo, se seleccionaron diversos choques observados, entre otros se consideraron fechas en las cuales se realizaron cambios significativos en la tasa de subasta de expansión. A este respecto los resultados muestran que no existen patrones claramente diferenciables para los distintos tipos de choques analizados. Lo anterior indica que con respecto a otros tipos de choques, los que realiza el Banco Central a través cambios en la tasa de subasta de expansión no afectan de manera diferente las volatilidades de las series.

De la misma forma que al analizar los niveles, en términos de volatilidad la variable que presentó una mayor respuesta ante diferentes choques, fue la *TIB*. En todos los casos analizados, los efectos de un choque sobre la volatilidad de la *TIB* son significativos los 3 primeros meses. Adicionalmente, al comparar los efectos sobre la volatilidad de la *TIB* con los de la *CDT*, se observa que aunque la magnitud de respuesta de la volatilidad de la tasa *CDT* es menor, su persistencia es más alta.

Referencias

- Amisano, G. y C. Giannini (1997) *Topics in Structural VAR Econometrics*. Springer, Second Edition.
- Bauwens, L, Laurent S. y J. V.K. Rombouts (2003). Multivariate GARCH Models: A Survey. *CORE discussion paper* 2003/31.
- Banco de la República (2000). *Informe de la Junta Directiva al Congreso de la República*. Marzo.
- Bollerslev T. (1986). Generalized autoregressive conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- Bollerslev, T., Engle R. F., y J. M. Wooldridge (1988), A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, *Journal of Political Economy*, 96 No. 1, 116-131.
- Bollerslev T. (1990). Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model, *The Review of Economics and Statistics*, 72, 498–505.
- Bollerslev T., Engle R. F. y D. B. Nelson, (1994). ARCH models, en *Handbook of Econometrics*, vol. 4, 2961-2984, Elsevier North Holland.
- Cardozo, P. y C. Hernandez (2005). *Documentos técnicos de la subgerencia monetaria*. Banco de la República.
- Engle RF. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.
- Engle, R. F. y K. F. Kroner (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, 122-150.
- Franses, P y D. van Dijk. (2000) *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge.
- Gomez, J., Uribe, José D. y H. Vargas (2002). The Implementation of Inflation Targeting in Colombia. Borradores de economía del Banco de la República, No. 202.
- Gouriéroux, C.(1997). *ARCH Models and Financial Applications*, Springer.
- Hafner C. M. and H. Herwartz (2001). Volatility Impulse Response Functions for Multivariate GARCH Models . *CORE discussion paper* 2001/3.

Huertas C., M. Jalil, S. Olarte y J. Romero (2005). Algunas Consideraciones sobre el Canal del Crédito y la Transmisión de Tasas de Interés en Colombia. *Borradores de Economía* 351, septiembre.

Lütkepohl, H., (1993). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Second Edition.

Mishkin F. (1996). The Channels of Monetary Transmission: Lessons for Monetary Policy. *NBER Working Paper Series* 5464, February.

Mishkin F. (2001). The Transmission Mechanism and the Role of Asset Prices in Monetary Policy. *NBER Working Paper Series* 8617, December.

Villalobos L., C. Torres y J. Madrigal, (1999). *Mecanismo de transmisión de la política monetaria: Marco conceptual*. Banco Central de Costa Rica, abril.

Walsh C. (2003). *Monetary Theory and Policy*. The MIT Press. Second Edition.

ANEXO 1

Funciones de impulso respuesta y multiplicadores dinámicos para un modelo VARX

La función de impulso respuesta, *IRF* por sus siglas en ingles, y los multiplicadores dinámicos, permiten calcular las respuestas dinámicas de las variables endógenas de un modelo, con respecto a un choque en el sistema. En el análisis de la *IRF* los choques se efectúan sobre las variables endógenas mientras que en los multiplicadores dinámicos los choques son aplicados a las variables exógenas. Los resultados presentados en esta sección están basados en Lütkepohl (1993).

1. Función de Impulso – Respuesta de un modelo VARX

La Función de Impulso – Respuesta, *IRF* por sus siglas en ingles, describe el efecto en el tiempo de un choque sobre las series del sistema, X_t . Por lo tanto, esta puede ser calculada como la diferencia entre el valor esperado condicional de las series con y sin choque:

$$(A1.1) \quad IRF_h(\delta) = E(X_{T^*+h} | \varepsilon_{T^*} = \delta, \Psi_{T^*}) - E(X_{T^*+h} | \varepsilon_{T^*} = 0, \Psi_{T^*})$$

para $h=1,2,\dots$. Donde Ψ_t denota el conjunto de información disponible hasta el periodo t .

En la ecuación (A1.1) la función de impulso - respuesta indica el efecto que tiene un choque de magnitud δ sobre el vector de series X_t en $t=T^*$, h periodos después de haberse realizado.

Dado el siguiente modelo VARX (\tilde{p}, \tilde{q}):

$$(A1.2) \quad \Gamma_{\tilde{p}}(L) X_t = \Phi_{\tilde{q}}(L) Z_t + \varepsilon_t; \quad t=1,2,\dots,T$$

donde X_t es un vector de series de tiempo estacionarias de dimensión N , Z_t es un vector de variables exógenas estacionarias de dimensión M , L es el operador de rezago, $\Gamma_{\tilde{p}}(L) = I - \Gamma_1 L - \dots - \Gamma_{\tilde{p}} L^{\tilde{p}}$, $\Phi_{\tilde{q}}(L) = \Phi_0 + \Phi_1 L + \dots + \Phi_{\tilde{q}} L^{\tilde{q}}$ y $\varepsilon_t \sim^{iid} (0, \Sigma_\varepsilon)$.

El modelo (A1.2) se puede representar de la siguiente forma:

$$(A1.3) \quad X_t = Y(L) Z_t + \Gamma_{\tilde{p}}(L)^{-1} \varepsilon_t$$

donde $Y(L) = \Gamma_{\tilde{p}}(L)^{-1} \Phi_{\tilde{q}}(L) = \nu_0 + \nu_1 L + \nu_2 L^2 + \dots$

Usualmente se supone que el choque δ es dado sobre una sola variable, es decir $\delta = \kappa(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ donde κ es un escalar. Este supuesto puede ser razonable si los choques asociados a las diferentes variables no están correlacionados; sin embargo, esto no sucede en la mayoría de casos en la práctica. Para evitar este problema el modelo (A1.2), y en consecuencia el (A1.3), se expresan en términos de errores “ortogonalizados”, u_t , de la siguiente forma²⁴:

$$(A1.4) \quad X_t = \Upsilon(L)Z_t + \Theta(L)u_t$$

donde, $u_t = P^{-1}\varepsilon_t$, $\Theta(L) = [\Gamma_{\tilde{p}}(L)^{-1}]P = \theta_0 + \theta_1L + \theta_2L^2 + \dots$ y P corresponde a una matriz triangular tal que $\Sigma_{\varepsilon} = PP'$.

Utilizando la definición (A1.1) para el modelo (A1.4) se tiene que:

$$(A1.5) \quad IRF_h(\delta) = \theta_h \delta$$

por lo tanto el análisis de impulso - respuesta depende de los parámetros θ_i del modelo (A1.4).

2. Multiplicadores dinámicos de un modelo VARX

El análisis de multiplicadores o multiplicadores dinámicos, MA , también describe el efecto en el tiempo de un choque sobre las series del sistema, X_t . Pero en este caso el choque es realizado sobre las variables exógenas del modelo. Los multiplicadores dinámicos pueden ser calculados como la diferencia entre el valor esperado condicional de las series con y sin este tipo de choque:

$$(A1.6) \quad MA_h(\tilde{\delta}) = E(X_{T^*+h} | Z_{T^*} = \tilde{Z}_{T^*} + \tilde{\delta}, \varepsilon_{T^*} = 0, \Psi_{T^*}) - E(X_{T^*+h} | Z_{T^*} = \tilde{Z}_{T^*}, \varepsilon_{T^*} = 0, \Psi_{T^*})$$

Utilizando la definición (A1.6) para el modelo VARX especificado en (A1.2) y (A1.3) se tiene que:

$$(A1.7) \quad MA_h(\tilde{\delta}) = v_h \tilde{\delta}$$

Es importante anotar que los multiplicadores dinámicos dependen de los parámetros v_i especificados en (A1.3) y no dependen de la matriz P asociada a los errores ortogonalizados u_t . Por consiguiente, en este caso no hay necesidad de realizar ningún tipo de transformaciones sobre los errores del modelo.

²⁴ En general, este problema puede ser solucionado utilizando modelos VAR estructurales, SVAR. Una descripción de estos modelos puede ser encontrada en Amisano y Giannini (1997).

ANEXO 2

Pruebas de raíz unitaria

Serie	Prueba	Hipótesis Nula	Estadística	Valor Crítico al 5%
<i>CDT</i>	Elliott-Rothenberg-Stock DF con constante	No estacionariedad	2.082	-1.941
<i>CDT</i>	KPSS con constante	Estacionariedad	5.841	0.463
<i>TIB</i>	Elliott-Rothenberg-Stock DF con constante	No estacionariedad	0.972	-1.941
<i>TIB</i>	KPSS con constante	Estacionariedad	3.246	0.463

Tabla A2.1 Pruebas de raíz unitaria

ANEXO 3

Pruebas de especificación para el modelo VARX (10,0)

Pruebas Univariadas				
Prueba	Hipótesis Nula	Rezagos	Estadística	P-Value
Prueba de Engle sobre DCDT	No hay efecto GARCH	12	50.78	<0.001
Prueba de Engle sobre DTIB	No hay efecto GARCH	12	190.52	<0.001
Pruebas Multivariadas				
Prueba	Hipótesis Nula	Rezagos	Estadística	P-Value
Portmanteau tipo Ljung-Box sobre los residuales	No existe autocorrelación	250	1022.11	0.307
Portmanteau tipo Ljung-Box sobre el cuadrado de los residuales	No hay efecto MGARCH	12	445.29	<0.001

Tabla A3.1. Pruebas de especificación sobre los residuales del modelo VARX (10,0)

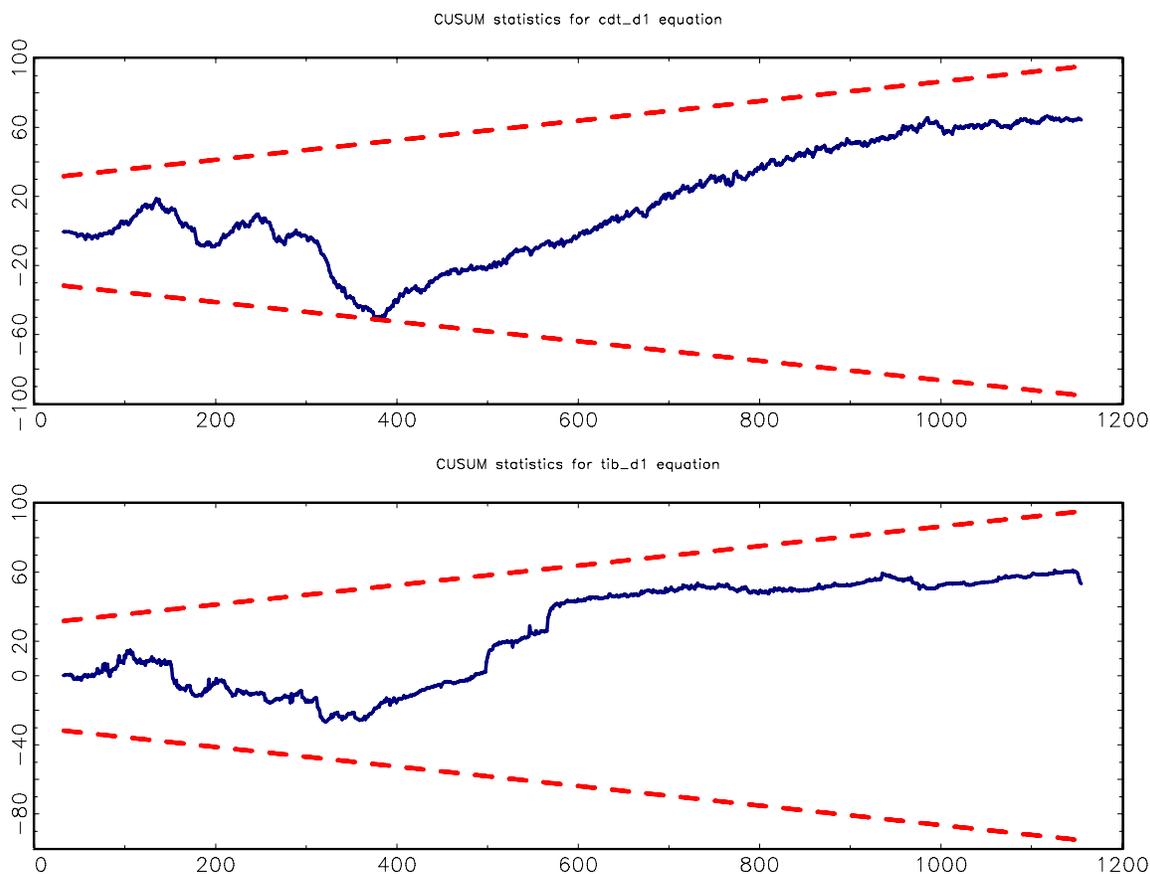


Figura A3.1 Pruebas de estabilidad para el modelo VARX (10,0)

ANEXO 4

Resultados de la estimación del modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$

Parámetro	Valor	STD	Z	P-Value
$C_{0,11}$	0.007	0.005	1.45	0.146
$C_{0,21}$	-0.037	0.012	-3.15	0.002
$C_{0,22}$	0.008	0.003	3.05	0.002
$F_{1,11}$ ($ARCH_{1,11}$)	0.164	0.025	6.56	<0.001
$F_{1,21}$ ($ARCH_{1,21}$)	-0.078	0.022	-3.58	<0.001
$F_{1,12}$ ($ARCH_{1,12}$)	0.052	0.027	1.97	0.049
$F_{1,22}$ ($ARCH_{1,22}$)	0.405	0.094	4.29	<0.001
$G_{1,11}$ ($GARCH_{1,11}$)	0.984	0.004	232.51	<0.001
$G_{1,21}$ ($GARCH_{1,21}$)	0.019	0.009	2.03	0.042
$G_{1,12}$ ($GARCH_{1,12}$)	-0.017	0.019	-0.88	0.379
$G_{1,22}$ ($GARCH_{1,22}$)	0.889	0.036	24.38	<0.001

Tabla A4.1 Ecuación MGARCH del modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$

ANEXO 5

Pruebas de especificación del modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$

Prueba	Hipótesis Nula	Rezagos	Estadística	P-Value
Portmanteau tipo Ljung-Box sobre los residuales	No existe autocorrelación	250	975.54	0.704
Portmanteau tipo Ljung-Box sobre el cuadrado de los residuales	No hay efecto MGARCH	12	53.85	0.261
Doornik-Hansen	Normalidad	-	1770.99	<0.001

Tabla A5.1 Pruebas de especificación multivariadas sobre los residuales del modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$

Máximos módulos de las raíces del polinomio VAR	0.8305, 0.8305, 0.7705, 0.7705
Máximos módulos de las raíces del polinomio MGARCH	0.9941, 0.9467, 0.9467, 0.9461

Tabla A5.2. Módulos de las raíces de los polinomios asociados al modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$ ²⁵

Prueba	Hipótesis Nula	Estadística	P-Value
Engle -Ng sobre DCDT	No existen asimetrías	0.516	0.672
Engle -Ng sobre DTIB	No existen asimetrías	3.607	0.013
Lundbergh - Teräsvirta sobre DCDT	Parámetros invariantes	0.025	0.995
Lundbergh - Teräsvirta sobre DTIB	Parámetros invariantes	0.298	0.827

Tabla A5.3. Otras pruebas de especificación sobre los residuales del modelo $VARX(10,0) - MGARCH(1,1)$

²⁵ Módulos mayores que la unidad denotan no estacionariedad.