

La Tasa de Interés Natural en Colombia

Juan José Echavarría Soto (jechavso@banrep.gov.co)
Enrique López Enciso (elopezen@banrep.gov.co)
Martha Misas Arango (mmisasar@banrep.gov.co)
Juana Téllez Corredor (jtelleco@banrep.gov.co)
Juan Carlos Parra Alvarez (jparraal@banrep.gov.co) ♦

Resumen

En este artículo se estima para Colombia la tasa de interés natural (TIN) para el período 1982-2005, con base en las metodologías propuestas por Laubach y Williams (2001) y Mésonnier y Renne (2004). Un modelo neokeynesiano es la base de la estimación de la TIN de “mediano plazo” como una variable no observada que cambia en el tiempo. Tal estimación se realiza mediante un filtro de Kalman que estima simultáneamente la TIN y la brecha del producto para la economía colombiana. Se sugiere que la política monetaria fue contraccionista en 1998 y 1999, y relativamente expansiva en los años recientes, aún cuando los resultados no son tan claros cuando se trabaja con los promedios móviles de la TIN. La brecha del producto ha sido positiva en 2003 y 2004, confirmando los resultados de otros trabajos en el área.

Palabras claves: Tasa natural de interés, variables no observadas, producto potencial, filtro de Kalman.

JEL clasificación: E43, E52, C32.

♦ Codirector del Banco de la República, Investigadores de la Unidad de Investigación de la Gerencia Técnica del Banco de la República, y pasante de la Universidad EAFIT respectivamente.

Los autores agradecen a Andrés González, Franz Hamman, Munir Jalil y Hernando Vargas por sus invaluable comentarios durante varias etapas de esta investigación. Las opiniones expresadas en el artículo son responsabilidad exclusiva de sus autores y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

1. Introducción	3
2. La Tasa Natural de Interés: Definición y Métodos de Estimación	5
3. Modelo	14
4. Estimación de la tasa natural de interés para Colombia	18
4.1. Los datos	18
4.2. El proceso de estimación	20
4.3. Resultados	24
5. Política Económica en Tiempo Real	37
6. Conclusiones	41
7. Referencias	42
8. Anexos	46

1. Introducción

En los últimos años ha revivido el interés teórico y empírico por el concepto de la tasa de interés natural (TIN). La mayoría de los bancos centrales del mundo utilizan la tasa de interés de corto plazo como instrumento de política, y el trabajo pionero de Taylor (1993) despertó nuevamente el apetito por reglas “simples” sobre el comportamiento deseado de la tasa de interés. En la función de reacción propuesta por Taylor, las decisiones de las autoridades incorporan la tasa de interés “neutral” o “natural”, así como las brechas del producto y de la inflación.

El concepto de tasa de interés “neutral” también es importante en el esquema de *inflación objetivo*, adoptado por más de 50 países (incluido Colombia) ya que, como se muestra en varios trabajos recientes, el diferencial entre la tasa de interés y la tasa “natural” predice cercanamente la inflación futura. Este tipo de indicadores de demanda facilitaría enormemente la toma de decisiones por parte de un grupo colegiado como la Junta del Banco Central (un insumo más en la discusión) y haría más transparente la comunicación con el público. Según Woodford (2003), la TIN varía en el tiempo en respuesta a diferentes *shocks* reales y su monitoreo constituye un reto permanente para los equipos técnicos de los bancos centrales. Por tanto, no es casualidad que la mayoría de trabajos que tratan de medir la evolución de la TIN en los distintos países provengan, precisamente, de los equipos técnicos de los bancos centrales.

En este artículo se estima la evolución de la TIN de “mediano plazo” para Colombia en el período 1982-2005, usando un modelo semi-estructural en el contexto de las metodologías desarrolladas recientemente por Laubach y Williams (2001) para los Estados Unidos y Mésonnier y Renne (2004) para Europa. En éstas se utiliza el filtro de Kalman para estimar variables no observadas como la TIN y el producto potencial. Algunas de las ecuaciones se han modificado para capturar más adecuadamente las características de una economía pequeña y semi-abierta al comercio como Colombia.

Aún cuando no es el objetivo central del trabajo, la estimación permite calcular la brecha del producto, otra variable no observada, relevante en algunos de los modelos de pronóstico utilizados por el Banco Central en Colombia. En términos generales, nuestros

resultados respecto a la brecha del producto son relativamente cercanos a los de otros trabajos en este campo, basados por ejemplo, en indicadores líderes.

El artículo está dividido en seis partes que incluyen esta introducción. En la segunda se presenta un recuento de las definiciones de la TIN y de los métodos de estimación de la misma. La tercera discute el modelo base de la estimación. En la cuarta se estima la TIN para Colombia: se explican las características de la base de datos utilizada, la metodología y los resultados de la estimación. La sección final, antes de las conclusiones, presenta algunas reflexiones sobre las limitaciones del ejercicio para la política monetaria “en tiempo real”.

2. La Tasa Natural de Interés: Definición y Métodos de Estimación

El concepto de la tasa de interés natural tiene sus orígenes en el economista sueco Knut Wicksell (1898), quien la definió como aquella tasa neutral a los precios. Según el autor, la diferencia entre la tasa de interés observada y la natural afecta la demanda por recursos productivos e indirectamente determina el movimiento de los precios¹. El concepto ha resurgido, en parte, debido a que la mayoría de los bancos centrales del mundo utilizan la tasa de interés como instrumento de política y a los nuevos desarrollos teóricos en el área.² Para Svensson (2001):

“¿Puede el Banco Central de un país mantener indefinidamente la tasa de interés baja y la tasa de cambio depreciada con el fin de estimular la economía? La respuesta es, definitivamente no. En el largo plazo, el Banco Central debe colocar su tasa promedio cercana a la tasa natural, aquella consistente con un nivel de producto cercano al producto potencial, y determinada por factores no monetarios. Si el Banco Central trata de mantener la tasa de interés real por debajo de la natural un tiempo excesivo, la demanda agregada desbordará el producto potencial, y la economía se recalentará. La inflación crecerá primero a niveles de un dígito, luego a dos dígitos, y eventualmente se convertirá en hiperinflación” (nuestra traducción).

En una economía cerrada, sujeta a *shocks* reales, el PIB potencial corresponde al de un modelo de equilibrio general con precios flexibles,³ del cual se puede extraer la tasa natural.⁴ Las variaciones en el producto potencial producirán, a su vez, cambios en la

¹ De hecho, Wicksell pensó en la tasa natural de interés en términos de la inversión física. La tasa natural es aquella consistente con inflación estable y que lleva al equilibrio entre la oferta y la demanda de capital (coincidiendo por tanto con la productividad marginal del capital – neta de depreciación- de largo plazo). Según el autor, el dueño de un bosque debe escoger entre dos alternativas. Puede cortar los árboles y prestar el dinero obtenido en la venta, o puede dejar que los árboles crezcan otro año. El interés que obtiene por el préstamo es la “tasa de interés de mercado”, mientras que el interés que deriva de dejar crecer los árboles es la “tasa natural” de interés. Ver Bannock et.al (1998, p.212) Agradecemos a Juan Mario Laserna por este comentario.

² Keynes consideró la teoría sobre la tasa natural de interés como “de simple interés histórico” (*Financial Times*, Julio 12, 2004).

³ En competencia perfecta como en los llamados modelos de ciclos reales (*real business cycles*, RBC, Kydland & Prescott, 1982) o en competencia imperfecta como en Rotemberg & Woodford (1997).

⁴ A partir de las ecuaciones de Euler para el consumo o la inversión óptimas; ambas coinciden en equilibrio.

TIN.⁵ Para una economía cerrada sujeta a *shocks* en productividad, en el gasto público, y en preferencias de los agentes ante el consumo y el ocio, Woodford (2003, p.249-250) muestra que:

$$\tilde{Y}_t^n = \frac{\sigma^{-1}}{\sigma^{-1} + w} (\tilde{G}_t + S_c \bar{c}_t) + \frac{1}{\sigma^{-1} + w} ((1 + w)a_t + v\bar{h}_t)$$

$$\tilde{r}_t^n = (\sigma + w^{-1})^{-1} [(1 - \rho_G)\tilde{G}_t + S_c(1 - \rho_c)\bar{c}_t - (1 + w^{-1})(1 - \rho_a)a_t - w^{-1}v(1 - \rho_h)\bar{h}_t]$$

donde:

- : nivel de la variable en el estado estacionario
- ~ : desviaciones con respecto al estado estacionario, como porcentaje de \bar{y} (y en el estado estacionario)

$$S_c = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}}$$

- C : consumo
- G : consumo público
- r : tasa de interés real (r^n para la TIN)
- Y : Producto (Y^n para el producto "natural")
- a : cambio porcentual en la tecnología (común a todos los sectores)
- \bar{c}_t : cambio porcentual en la demanda de consumo ante un cambio en la utilidad de la función de consumo
- \bar{h}_t : cambio porcentual en la oferta laboral debido a cambios en la utilidad del ocio (v)
- v : el inverso de la elasticidad intertemporal de la oferta laboral
- w : elasticidad del costo marginal real con respecto al nivel de producción de la firma
- ρ : coeficientes de autocorrelación para $\tilde{G}_t, \bar{c}_t, a_t$ y \bar{h}_t ($\rho_G, \rho_c, \rho_a, \rho_h$)
- σ : elasticidad de sustitución intertemporal para el gasto agregado

Observe que \tilde{Y}_t^n y \tilde{r}_t^n solo dependen de variables reales.⁶ La ecuación para \tilde{Y}_t^n indica que

⁵ De hecho, algunos autores como Williams (2003) describen la TIN a partir del corte entre una curva IS de largo plazo y la recta vertical que corresponde al producto potencial. Un mayor nivel del producto potencial reduce la TIN si se mantiene la IS constante.

⁶ Se trata de una situación en que no hay acumulación de capital. Woodford (2003, cap.5) muestra que las conclusiones son muy similares cuando hay inversión productiva

los *shocks* temporales exógenos de \tilde{G}_t , \bar{c}_t , a_t y \bar{h}_t incrementan el PIB potencial, y aquella para \tilde{r}_t^n sugiere que la TIN se eleva con los incrementos *temporales* en G; con el menor ahorro (mayor ρ , mayor impaciencia de los consumidores); con caídas temporales en la productividad (a); o con caídas en el deseo de los agentes de ofrecer trabajo (h).⁷ En este esquema, la TIN es una tasa de corto plazo, definida período a período, con una tendencia central que puede variar (suavemente) en el tiempo.

En cada caso, los efectos de los *shocks* sobre la tasa de interés natural resultan más fuertes cuando la *temporalidad* es breve (con menores coeficientes ρ_G, ρ_c, ρ_a y ρ_h); en el extremo opuesto, los *shocks permanentes* no tienen efecto alguno. Nuevamente, las autoridades monetarias deben permitir (validar) los ajustes “naturales” de la economía sin que ello afecte negativamente las metas de inflación; deben ajustar la tasa de interés real de mercado cuando se presentan cambios en \tilde{r}_t^n .

Obviamente, la tasa de interés *de mercado* puede diferir de la tasa *natural* ante rigideces en precios y en salarios.⁸ En este caso Woodford (2003, pp.246, 277) encuentra que un sistema de ecuaciones compuesto por una curva de oferta agregada (o curva de Phillips), una curva IS y una ecuación de comportamiento de las autoridades monetarias, es suficiente para determinar las variables de mercado. Mientras la TIN solo depende de factores reales, la tasa real *de mercado* también se ve afectada por *shocks* nominales y por la política monetaria.

Concretamente, el autor presenta las siguientes ecuaciones derivadas de microfundamentos para agentes con expectativas racionales:

⁷ Woodford (2003, p.53) considera poco probable que otras variables como la tasa de inflación afecten de manera significativa a \tilde{r}_t^n .

⁸ Ver, por ejemplo, Lam y Tkacz (2004), Giammarioli y Valla (2003).

Curva de Phillips: $\pi_t = kz_t + \beta E_t \pi_{t+1}$
 IS: $z_t = E_t z_{t+1} - \sigma(\tilde{i}_t - E_t \pi_{t+1} - \tilde{r}_t^n)$
 Regla de Política: $\tilde{i}_t = \bar{i}_t + \phi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \phi_x(z_t - \bar{z})/4$

donde:

E_t :	valor esperado en t
\tilde{i}_t :	tasa nominal de interés
z_t :	brecha del producto ($y_t - y_t^n$)
π :	inflación
$\bar{\pi}$:	meta de inflación de las autoridades
ϕ_π, ϕ_x :	ponderadores de las brechas de inflación y del producto en la función de reacción de las autoridades

La ecuación para la IS indica que existe una relación directa entre la brecha de tasas de interés y la brecha del producto. Más específicamente, Woodford (2003, pp.276-277) muestra que en este modelo la inflación, la brecha del producto, y la tasa nominal de interés dependen solo de la brecha de la tasa de interés (hoy y en el futuro). No es necesario considerar en momento alguno la evolución de los agregados monetarios como insumo de la política monetaria.

- **La TIN de “Mediano Plazo”**

Los modelos de equilibrio general antes citados poseen un enorme potencial en el campo de la política aplicada permitiendo, por ejemplo, derivar semana a semana la TIN consistente con la estabilidad de precios *en cada momento del tiempo*. Pero estos modelos aún se encuentran en estado exploratorio, su aplicación requiere un sinnúmero de supuestos relativamente arbitrarios (con resultados muy sensibles a estos mismos), y frecuentemente producen resultados “extraños”. Así, por ejemplo, en varios de ellos la TIN resulta más volátil que la tasa de interés real observada día a día en el mercado (Smets & Wouters, 2002).

La definición de TIN empleada en este documento es menos ambiciosa. Siguiendo a Laubach y Williams, (2001, p.2) “nuestro objetivo es suministrar un método robusto para identificar movimientos de baja frecuencia en la TIN, con resultados que puedan ser incorporados en reglas simples de política que se comporten exitosamente en una variedad amplia de modelos”. La denominamos de “mediano plazo” (Amato, 2005) pues

las leyes de su movimiento son derivadas para el *estado estacionario* de Ramsey (1928). Se trata de un concepto de tasa “natural” relativamente cercano a las definiciones de Wicksell (1898) para la tasa de interés o de Friedman (1968) para el producto; también corresponde cercanamente a la tasa de interés de largo plazo utilizada en la llamada *regla de Taylor* (aún cuando r^n es variable en nuestro caso). Como en el caso de los modelos de equilibrio general con precios rígidos, nuestro modelo caracteriza el comportamiento de la inflación y la brecha del producto a través de las curvas IS y de Phillips. La regla de política aparece en forma implícita en la misma información utilizada.⁹

Este trabajo está inspirado en buena medida en la contribución seminal de Laubach y Williams (2001), quienes presentan un modelo teórico para estimar por medio de un filtro de Kalman la tasa natural de interés y el crecimiento del producto potencial (de los cuales derivan la brecha del producto). Se combina la referencia a modelos macro simples y semiestructurales con el filtro de Kalman, y de esta forma estimar la TIN.

En este enfoque, la TIN es la tasa real de interés de corto plazo consistente con el producto en su potencial y la inflación igual a la meta de mediano plazo. Esto ocurre cuando los *shocks* de demanda sobre la brecha de producto y los de oferta sobre la inflación se han desvanecido. Si bien se trata de una definición menos completa que la de los modelos de equilibrio general descritos antes, es más tratable (Mésonnier y Renne, 2004).

Se adoptan algunos cambios sugeridos por Mésonnier y Renne (2004) en lo que tiene que ver con las ecuaciones de transición, los comovimientos de la TIN, el crecimiento del producto potencial y el cálculo de la tasa de interés real.¹⁰ Así mismo, el artículo modifica

⁹ Como se mencionó antes, Woodford (2003) sugiere trabajar con las ecuaciones para la IS, para la curva de Phillips y para la regla de política. No obstante, ni Laubach y Williams (2001) ni Mésonnier y Renne (2004) incorporan dicha regla en su trabajo empírico de que la regla está implícita en los mismos datos. Además, no ha existido regla explícita en los Estados Unidos, y las metas de política apenas comenzaron a utilizarse en Europa en la década de los 1990. Algo similar sucede para Colombia. Los anuncios de metas explícitas de inflación apenas comenzaron en 1990; además, solo se cumplió con las metas del Banco Central a partir de 1999.

¹⁰ El trabajo de Mésonnier y Renne (2004) para la zona del euro, incluye algunas diferencias con respecto al trabajo seminal de Laubach y Williams (2001). En este caso, en las ecuaciones de transición se especifica que el proceso no observado que rige las fluctuaciones comunes de baja frecuencia entre la TIN y el

el modelo propuesto para hacerlo más compatible con la estructura de una economía pequeña, afectada por la dinámica de la economía mundial, y por los términos de intercambio, con niveles de inflación parcialmente determinados por el precio de los productos importados y por la tasa de cambio (i.e. por el precio en pesos de los bienes importados).

Como se dijo antes, las leyes de movimiento de la economía corresponden en este documento al modelo de largo plazo desarrollado por Ramsey (1928). Para una función de utilidad CRRA (*constant relative risk aversion*), dicho modelo produce los siguientes resultados:

$$r^n = f'(k^*) - \delta = \rho + \theta a$$

donde:

- a : crecimiento porcentual (exógeno) de la productividad multifactorial
- δ : tasa de depreciación del capital
- k : relación capital-trabajo (k^* corresponde a k en el estado estacionario)
- r^n : TIN, coincide con la productividad marginal del capital en el estado estacionario $f'(k^*)$
- ρ : tasa de preferencia intertemporal de los consumidores (mayor tasa de descuento es asimilable a menores niveles de ahorro)
- θ : coeficiente de aversión al riesgo en la función de utilidad

Varias de las características de este modelo coinciden con las del modelo de equilibrio general presentado arriba. En particular r^n crece con ρ (con una caída en el ahorro) y con a .¹¹ Nuevamente, solo los *shocks temporales* en productividad, en el gasto público, y en las demás variables mencionadas arriba para los modelos de equilibrio general afectan

crecimiento del producto potencial es autoregresivo estacionario, en lugar de no estacionario como en el trabajo original. La TIN es estimada suponiendo comovimientos entre ella y el crecimiento del producto potencial. Se mide la tasa de interés real como una tasa real ex ante calculada con expectativas de inflación consistentes con el modelo.

¹¹ El mayor ahorro lleva a mayor consumo en el estado estacionario, a un mayor *stock* de capital y a un menor nivel de r^n (ver Romer, 2006, cap.2).

r^n (y el efecto es mayor cuando la temporalidad es breve).¹² Algunos de estos resultados son compartidos por otros modelos de crecimiento como el de Solow (1956).¹³

- **Hacia Un Programa de Investigación sobre la TIN**

Nuestro trabajo corresponde a un esfuerzo inicial en el área, pero existe un sinnúmero de campos a explorar, entre los cuales podemos enumerar los siguientes, ninguno de ellos exentos de problemas:

En primer lugar, y derivado de la discusión anterior, es importante desarrollar estudios futuros que partan de modelos de equilibrio general, con una estructura más cercana a la que se desprende de micro-fundamentos para las curvas IS y de Phillips. Como se mencionó antes, estos modelos aún se encuentran en estado exploratorio, su aplicación requiere de ciertos supuestos relativamente arbitrarios, y los resultados son muy sensibles a ellos. Además, existe amplia evidencia de que un modelo que incorpora la inflación inercial explica mejor la dinámica de la inflación que los modelos que simplemente asumen expectativas racionales. Se presentan rezagos en el impacto de la política económica, y la persistencia en los hábitos parece jugar un papel importante en los resultados (Woodford, 2003, pp.284, 319).

En segundo lugar, podría argumentarse que este modelo de economía cerrada es poco relevante para una economía pequeña, abierta a flujos de capital como Colombia, proponiendo en su lugar la definición de la tasa de interés real de largo plazo que resulta de la paridad no cubierta para la tasa de interés real. Formalmente, $r^n = r^* + \widehat{q}^{en} + \tau$,

¹² Romer (2006, cap.2) analiza el caso de los shocks del gasto público en el modelo de Ramsey. Los incrementos temporales en G elevan r^n , mientras que los incrementos permanentes no tienen efecto alguno.

¹³ En el modelo de Solow se obtiene que $r^* = \alpha \frac{\delta + n + a}{s} - \delta$, donde α corresponde a la participación del capital en el producto, n es la tasa de crecimiento de la población, a es la tasa de cambio técnico aumentador de trabajo (*labor augmenting*), δ a la tasa de depreciación y s la tasa de ahorro (Laubach y Williams, 2001).

(donde r^n es la TIN doméstica, r^* la tasa de interés real internacional, \widehat{q}^{en} la devaluación esperada para la tasa de cambio real natural o de equilibrio, y τ el riesgo país).¹⁴

Esta visión no está exenta de problemas, sin embargo, pues pocos de los supuestos requeridos resultan válidos en la práctica (aún en el mediano plazo).¹⁵ Es por ello que Obstfeld & Rogoff (2000a) han argumentado recientemente en favor de una visión de economía semi-abierta para explicar algunos de los acertijos (*puzzles*) empíricos no resueltos en la literatura.¹⁶

En ciertos períodos las conclusiones de este enfoque podrían diferir radicalmente de las de nuestro trabajo. Así por ejemplo, durante la recesión de 1998-99 nuestra TIN cae fuertemente (ver Sección 4.3), sugiriendo que las autoridades deberían bajar las tasas de interés para evitar la recesión económica, pero la TIN de economía abierta a flujos de capital podría incluso subir ante el incremento del riesgo país revelado por los mercados financieros.

En tercer lugar, un grupo de trabajos recientes (i.e. Bandesvant et al. 2004) trata de extraer información sobre la tasa de interés de largo plazo a partir de indicadores financieros derivados de la curva de rendimientos. Los problemas en este campo son también evidentes. La literatura muestra que la tasa de interés de largo plazo en la curva de rendimientos está excesivamente influenciada por las noticias recientes. Por ello, para Blinder (2006) esta teoría de las expectativas (relacionada con las causas de los diferenciales a lo largo de la curva de rendimientos) “falla miserablemente en cada *test* empírico”. Las tasas actuales de largo plazo predicen pobremente las tasas futuras de interés.

¹⁴ También sería interesante introducir variantes de economía abierta al modelo empleado en este trabajo. Qué pasa, por ejemplo, cuando se introduce explícitamente la brecha de tasa de cambio real, el diferencial entre la tasa real observada y la de equilibrio?

¹⁵ Es necesario suponer que simultáneamente se cumple con el *efecto fischer* y con la *paridad no cubierta* de las tasas nominales de interés.

¹⁶ La economía colombiana es relativamente cerrada en el sector real. Algunos trabajos internos del Banco Central de Colombia utilizan para el análisis una canasta de consumo donde el peso relativo de los bienes no transables se encuentra cercano a 65%.

¹⁹ Ver por ejemplo Gordon (1998), Brayton et al. (1999); Laubach (2001).

En cuarto y último lugar, valdría la pena investigar cómo cambian nuestros resultados en el contexto de un programa tendiente a reducir la inflación, como el que tuvo lugar en Colombia desde comienzos de la década de los 1990. Los resultados de este trabajo suponen que los niveles de inflación “actuales” coinciden con los deseables en el largo plazo.

3. Modelo

Se adopta la estrategia propuesta por Laubach y Williams (2001) y por Mésonnier y Renne (2004) para estimar la TIN. Se supone que las leyes de movimiento de la economía corresponden a aquellas planteadas por Ramsey (1928) para el estado estacionario. La curva IS sigue la propuesta de Rudebusch y Svensson (1999), mientras que la curva de Phillips es la utilizada en la literatura sobre tasa natural de desempleo.¹⁹ Se trata de ecuaciones *backward looking* (ampliamente utilizadas en la literatura y que parecen comportarse en forma robusta en términos empíricos),²⁰ aún cuando sus características no coinciden exactamente con aquellas derivadas de micro-fundamentos con agentes con expectativas racionales planteadas en la primera parte de la Sección 2. La regla de política de las autoridades está implícita en nuestras ecuaciones (Mésonnier y Renne, 2004).

Como se verá en la sección siguiente, el modelo teórico planteado por los autores es modificado para hacerlo compatible con una economía pequeña, afectada por la dinámica de la economía mundial y por los términos de intercambio, cuya inflación depende parcialmente de los precios internacionales de los bienes importados y de la tasa de cambio. Formalmente, el modelo general está conformado por las siguientes seis ecuaciones:

$$\begin{aligned}\pi_{t+1} &= A(L)\pi_t + B(L)z_t + \varepsilon_{t+1}^\pi \\ z_{t+1} &= \Phi(L)z_t + \Lambda(L)(i_t - \pi_{t+1|t} - r_t^*) + \varepsilon_{t+1}^z \\ r_t^* &= \mu_r + \theta_r a_t \\ \Delta y_t^* &= \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y \\ a_{t+1} &= \psi a_t + \varepsilon_{t+1}^a \\ y_t &= y_t^* + z_t\end{aligned}$$

En el modelo se supone que los cuatro *shocks* $\{\varepsilon_{t+1}^\pi, \varepsilon_{t+1}^z, \varepsilon_t^y, \varepsilon_{t+1}^a\}$ son independientes y normalmente distribuidos con la siguiente matriz de varianza-covarianza:

²⁰ Ver Rudebusch and Svensson (1998, 2002), Laubach and Williams (2001), Mésonnier & Renne (2004) y los trabajos allí citados.

$$\Sigma_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{\pi}^2 & & & \\ & \sigma_z^2 & & \\ & & \sigma_y^2 & \\ & & & \sigma_a^2 \end{bmatrix}$$

El punto de partida para la construcción del modelo es la definición de la TIN como una variable no observada. Para poder identificar econométricamente los determinantes de esta variable no observada se especifica un sistema de dos formas reducidas: una curva de Phillips (ecuación 1) y una curva IS (ecuación 2). En particular, para el caso colombiano, se parte de una ecuación de oferta agregada o curva de Phillips donde la dinámica de la inflación “núcleo” (sin alimentos), π_t ²¹, está determinada por los excesos de demanda, capturados a través del rezago de orden uno de la brecha del producto (z_{t-1}), una inercia inflacionaria considerada a través de los tres primeros rezagos²² de la inflación sin alimentos, como también, un efecto de *pass-through* medido a través de la inflación de bienes importados (π_t^m) y un error serialmente no correlacionado (ε_t^π)²³. La ecuación (1) corresponde a la curva de Phillips anteriormente explicada:

$$\pi_t = \alpha_1 \pi_{t-1} + \alpha_2 \pi_{t-2} + \alpha_3 \pi_{t-3} + \beta_1 z_{t-1} + \alpha_4 \pi_t^m + \varepsilon_t^\pi \quad (1)$$

La ecuación (2) representa una forma reducida de la curva IS, en la cual la brecha del producto, z_t , está determinada por un proceso autorregresivo de orden dos, por los dos primeros rezagos del la brecha de la tasa de interés real, $(I+L)(i_{t-1} - \pi_{t|t-1} - r_{t-1}^*)$, por el crecimiento del grupo de países del G7 (Δy_t^{G7}),²⁴ el primer rezago del crecimiento de los términos de intercambio (Δt_{t-1}) de Colombia²⁵ y un error no correlacionado serialmente

²¹ El Banco de la República utiliza la inflación sin alimentos como uno de los indicadores de inflación básica. También utiliza la inflación sin alimentos primarios, sin combustibles, y sin servicios públicos.

²² Selección a partir de la estimación uniecuacional de la curva de Phillips, llevada a cabo mediante OLS.

²³ Esta especificación es utilizada en otro contexto para el cálculo de la tasa natural de desempleo (Laubach y Williams, 2001).

²⁴ Incluye a Canadá, Francia, Alemania, Japón, Italia, Reino Unido y Estados Unidos. Trabajos posteriores podrían evaluar el impacto del crecimiento de Venezuela.

²⁵ Calvo & Végh (1999) utilizan el crecimiento de los países de la OECD y los términos de intercambio como proxies de demanda internacional.

(ε_t^z). La autoridad monetaria alcanza el control de la inflación con un rezago de tres períodos en la IS especificada en la ecuación (2):

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda(1+L)\left(i_{t-1} - \pi_{t|t-1} - r_{t-1}^*\right) + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t_{t-1} + \varepsilon_t^z \quad (2)$$

La TIN se identifica a partir de la brecha de la tasa de interés. A diferencia de la especificación tradicional de Laubach y Williams (2001) (caminata aleatoria),²⁶ la tasa de interés natural sigue un proceso autorregresivo en la ecuación (3). La Ecuación (4) presenta la dinámica del crecimiento del producto potencial. Como se observa, se supone que la tasa de interés natural comparte fluctuaciones con el crecimiento del producto potencial, expresadas en este caso por a_t .

$$r_t^* = \mu_r + \theta_r a_t \quad (3)$$

$$\Delta y_t^* = \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y \quad (4)$$

donde :

$$a_t = \psi a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad (5)$$

Es posible, de acuerdo con Mésonnier y Renne (2004), dividir el crecimiento del producto potencial, Δy_t^* , en movimientos de alta y baja frecuencia (solo éstos últimos están relacionados con la TIN). El proceso autoregresivo a_t en la ecuación (5) captura las variaciones de baja frecuencia del crecimiento del producto potencial.

Como se mencionó antes, una explicación del comportamiento conjunto de la tasa de interés natural y del producto potencial se encuentra en el modelo estándar de crecimiento de Ramsey. A lo largo de la senda de crecimiento balanceada se obtiene que $r_t^* = \rho + \theta a_t$, siendo a_t la tasa de crecimiento de la productividad (coincidente también con la tasa de

²⁶ Un punto muy importante que señalan Mésonnier y Renne (2004) es que una especificación no estacionaria de la tasa natural de interés y, por consiguiente, del crecimiento del producto potencial podría llevar a que el producto potencial fuera integrado de orden dos. Condición que no es plausible para el caso colombiano.

crecimiento del producto *per cápita*).

La ecuación (6) cierra el modelo a través de la definición de la brecha del producto como la diferencia entre el producto observado y su potencial.

$$y_t = y_t^* + z_t \quad (6)$$

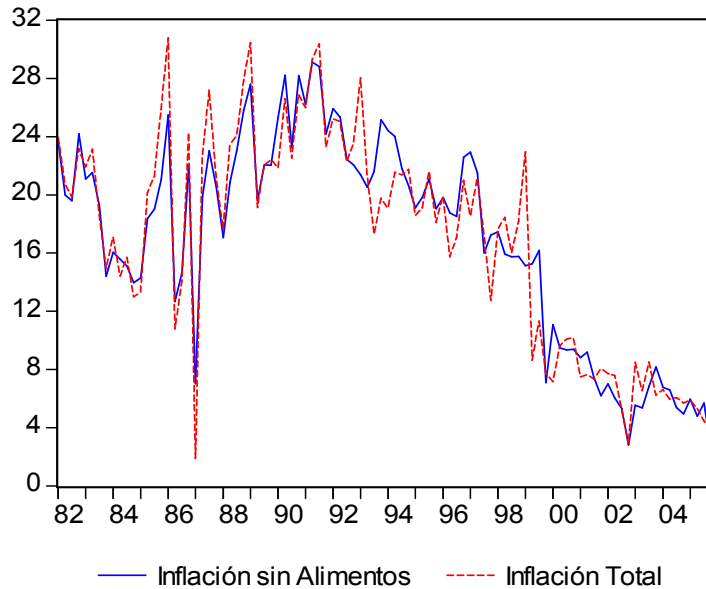
4. Estimación de la tasa natural de interés para Colombia

4.1. Los datos

Para la estimación de la TIN se requieren seis variables observadas: el producto interno bruto real, la inflación “núcleo” (sin alimentos), la inflación de bienes importados, el producto real del grupo de países del G7, los términos de intercambio de la economía colombiana y la tasa de interés nominal. La base de datos cubre un total de 96 observaciones trimestrales a partir del primer trimestre de 1982 hasta el cuarto trimestre de 2005. Las series de tiempo empleadas en la estimación fueron obtenidas del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE), del Banco de la República y de la OECD.

Para el crecimiento del producto real se utilizó la primera diferencia del mismo construida a partir del logaritmo natural de la serie desestacionalizada por medio de Census X-12. La inflación total sin alimentos se define como la variación trimestral anualizada del logaritmo natural del índice de precios al consumidor sin alimentos desestacionalizado por Census X-12. El Gráfico 1 presenta la evolución de la inflación trimestral anualizada en Colombia en el período comprendido entre el segundo trimestre de 1981 y el cuarto trimestre de 2005. Sus valores fueron relativamente altos y cercanos al 20% durante la década de 1980, alcanzaron valores pico en el segundo trimestre de 1985 (25.5%) y de 1988 (27.6%), y en el tercer trimestre de 1990 (29.1%), con una caída importante en el segundo trimestre de 1986 (7.0%). La inflación ha venido descendiendo durante toda la década de los 90 hasta alcanzar valores cercanos al 4% en la actualidad. Es de recordar que, la inflación sin alimentos es menos volátil que la inflación total.

Gráfico 1
Inflación en Colombia: Precios al Consumidor
(Inflación Trimestral Anualizada y Desestacionalizada)



La inflación de importados se construyó a partir de la variación trimestral anualizada del logaritmo natural del índice de precios de importados calculado por el Banco de la República. Para el producto de los países desarrollados se utilizó el crecimiento trimestral del grupo de países del G7. Los términos de intercambio, obtenidos con base en la información del índice de precios al productor (Banco de la República), se definen como la relación de precios de bienes exportados sobre precios de bienes importados y se considera su cambio trimestral.

Por su parte, para el cálculo de la tasa de interés real se deflacta la tasa nominal de los certificados de depósito a 90 días (CDT) por las expectativas de inflación derivadas de la curva de Phillips. Ello significa que la tasa de interés real *ex ante* resulta del mismo proceso de estimación del modelo (ver Anexo 3). La tasa CDT a 90 días es particularmente relevante para la transmisión de la política monetaria ya que su comportamiento a través del tiempo es similar al de la tasa DTF. Trabajos previos han mostrado que para el 50% de la cartera comercial y para el 40% de la cartera total, las

tasas de interés se fijan como un margen sobre la DTF. Además, existe una relación cercana entre la DTF y las tasas de intervención del Banco Central.²⁷

4.2. El proceso de estimación

El proceso de estimación se lleva a cabo a través del trabajo conjunto de un algoritmo de optimización y el filtro de Kalman sobre una representación estado – espacio, lo cual posibilita estimar variables no observadas. En particular, como se muestra en el Anexo 3, el sistema de ecuaciones (1) – (6) se lleva a una representación estado-espacio que hace posible la estimación de la brecha del producto (z_t), y las fluctuaciones compartidas por la tasa de interés natural y el crecimiento del producto potencial (a_t), que permiten determinar la TIN. Dicha representación se muestra en las siguientes ecuaciones:

La ecuación (7) o ecuación de medida se define como:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ z_t \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_y \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ \pi_{t-3} \\ \pi_t^m \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^\pi \end{bmatrix}$$

$$S_t = H L_t + G D_t + \varepsilon_t$$

La ecuación (8) o ecuación de transición es:

²⁷ Huertas *et.al* (2005) analiza la relación entre las tasas de intervención del Banco Central (REPOS), la tasa interbancaria a 1 día (TIB) y la CDT a 90 días. Según los autores, un incremento de 100 puntos en la tasa REPO se traslada 93% a la TIB y 26% a la DTF en una semana. Y en el mediano plazo se traslada un 7% a la TIB y un 50% (adicional) a la DTF. Los autores también concluyen que el incremento de 100 puntos en la DTF se traslada en 42% a las tasas de consumo activas. Amaya (2005) estudia la relación de la TIB con las tasas activas y pasivas de los bancos. Concluye que buena parte del cambio en la TIB se traslada a las demás tasas en un período que oscila entre 4 y 6 meses.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ z_t \\ z_{t-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\theta_r & -\lambda\theta_r & \phi_1 - \beta_1\lambda & \phi_2 - \beta_1\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{t-1} \\ a_{t-2} \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} + \\
L_t &= \quad \quad \quad T \quad \quad \quad L_{t-1} + \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda\alpha_1 & -\lambda(\alpha_2 + \alpha_1) & -\lambda(\alpha_3 + \alpha_2) & -\lambda\alpha_3 & \delta_1 & \delta_2 & -\lambda\alpha_4 & -2\lambda\mu_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{t-1} \\ i_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ \pi_{t-3} \\ \pi_{t-4} \\ \Delta y_t^{G7} \\ \Delta i_{t-1} \\ (\pi_t^m + \pi_{t-1}^m) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^a \\ 0 \\ \varepsilon_t^z \end{bmatrix} \\
&\quad \quad \quad K \quad \quad \quad C_t \quad + \eta_t
\end{aligned}$$

Por su parte, la matriz de varianza-covarianza del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & & & \\ & \sigma_x^2 & & \\ & & \sigma_a^2 & \\ & & & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ Q \end{bmatrix} \quad (9)$$

Siendo R y Q las matrices de varianza-covarianza asociadas a la ecuaciones de medida y transición, respectivamente.

La correspondiente representación estado – espacio en forma matricial compacta está conformada por la ecuación de medida (10) y la de transición (11):

$$S_t = HL_t + d_t + \varepsilon_t \quad (10)$$

donde, la matriz d_t es el resultado del producto de dos matrices G y D_t , $d_t = GxD_t$

$$L_t = TL_{t-1} + c_t + \eta_t \quad (11)$$

donde la matriz c_t es el resultado del producto de dos matrices K y C_t , $c_t = KxC_t$

$$\text{y } E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \begin{cases} R & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases} ; \quad E(\eta_t \eta_\tau') = \begin{cases} Q & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases} \quad \text{y } E(\varepsilon_t \eta_\tau') = 0 \quad \text{para todo } t \text{ y } \tau .$$

Adicionalmente, la especificación estado-espacio supone un vector de estado inicial L_0 con $E[L_0] = \ell_0$ y $Cov[L_0] = P_0$

$$E[\eta_t L_0'] = 0 ; E[\varepsilon_t L_0'] = 0 \quad \forall t = 1, \dots, N$$

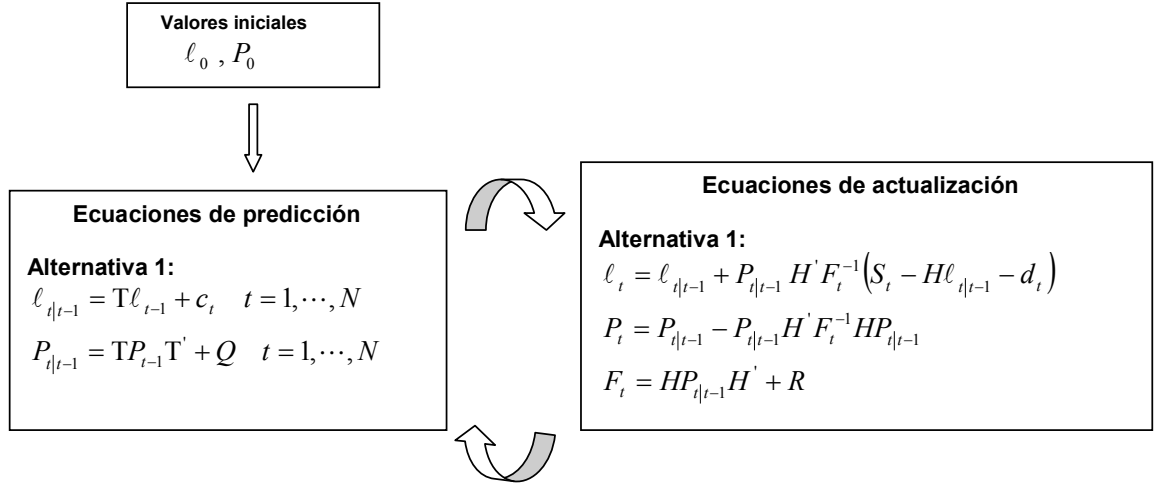
En este caso, las matrices de coeficientes (H, T, G, K) y de covarianza (R) y (Q) son no cambiantes a través del tiempo, es decir, se tiene una representación invariante en el tiempo.

Una vez establecida la representación estado-espacio y sus supuestos fundamentales, el trabajo econométrico se concentra en la estimación de: (i) el vector de estado, que de acuerdo con Harvey (1994) existen diferentes algoritmos, siendo el filtro de Kalman el principal y (ii) los parámetros e hiperparámetros, los cuales son el resultado de un algoritmo de optimización sobre una función de verosimilitud, explicada posteriormente. Es de señalar que, la estimación se debe llevar a cabo de manera conjunta, véase Anexo 1.

El filtro de Kalman se define como un procedimiento recursivo que permite calcular, para un conjunto de ecuaciones, un estimador lineal, insesgado y óptimo, del vector de estado en cada momento del tiempo. Esta recursión se lleva a cabo a partir de la selección de unos valores iniciales para el vector de estado y su matriz de varianza-covarianza y la aplicación de las ecuaciones de predicción en (t-1) y actualización en (t), tal y como se ilustra en la Figura 1²⁸.

²⁸ Véase Welch y Bishop (2001). Trabajos recientes que han aplicado el filtro de Kalman en el análisis macroeconómico colombiano son Misas y Vásquez (2002), Nieto y Melo (2001) y Melo et al. (2001) y Misas et al. (2001).

Figura 1



Donde ℓ_{t-1} es el estimador óptimo de L_{t-1} basado en la información disponible que incluye S_{t-1} , y P_{t-1} la matriz MSE del error de estimación del vector de estado, es decir,

$$P_{t-1} = E[(L_{t-1} - \ell_{t-1})(L_{t-1} - \ell_{t-1})'].$$

La teoría clásica de estimación por máxima verosimilitud es aplicada para obtener estimaciones de los parámetros en H, T, R y Q y en las matrices asociadas a d_t y c_t , G y K . Si cada uno de los vectores conformados por las perturbaciones $\{\varepsilon_t\}$ y $\{\eta_t\}$ sigue una distribución normal implica que S_t , condicional a su conjunto de información relevante en (t-1), sigue también la distribución normal. Así:

$$(S_t | \mathfrak{S}_{t-1}) \sim \text{Distribución Normal}((H a_{t|t-1} + d_t), (H P_{t|t-1} Z' + R)) \quad \mathfrak{S}_{t-1} \equiv \{S_{t-1}, \dots, S_1\}$$

con función de verosimilitud en forma matricial compacta dada por:

$$\text{Log } \mathfrak{S} = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \log |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N v_t' F_t^{-1} v_t$$

Donde:

$$v_t = S_t - \hat{S}_{t|t-1} \quad t = 1, \dots, N$$

Como lo presentan Clar et al. (1998), la forma de la función de verosimilitud es usualmente demasiado compleja para obtener de sus expresiones analíticas los valores de

los parámetros que la hacen máxima. Esta dificultad puede ser superada mediante procedimientos de optimización numérica, véase Anexo 1.

4.3. Resultados

El procedimiento numérico de optimización no lineal utilizado para alcanzar la maximización de la función de verosimilitud es “*Double - dogleg*”, el cual combina las ideas de los métodos “*Quasi-Newton*” y “*Trust-Region*” de acuerdo con el de Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno²⁹.

Los valores iniciales requeridos para la estimación recursiva del filtro de Kalman se obtienen a partir de la construcción de la brecha del producto mediante el filtro de Hodrick y Prescott (HP). La matriz de varianza-covarianza del vector de estado es inicializada en $0.5 \times I_4$. Como lo sugieren Wintr et al. (2005), los valores iniciales de los parámetros e hiperparámetros se obtienen mediante OLS sobre regresiones uniecuacionales que consideran las componentes no observadas obtenidas a través de HP. Al igual que en Méssonier y Renne (2004), para estabilizar el filtro es necesario fijar la varianza de a_t . En nuestro caso, dicha varianza se determina en 0.5.

En la estimación se presenta el problema del *pile-up* que lleva a que algunos parámetros no puedan ser estimados eficientemente por maximización directa de la verosimilitud. En el presente ejercicio, dicho problema implica que las varianzas de las innovaciones que afectan la dinámica de las variables no observadas están sesgadas hacia cero debido a que una gran cantidad de masa de probabilidad en sus distribuciones se aglutina alrededor de dicho valor.

Para solucionar este problema de *pile-up* se sigue la metodología propuesta por

Méssonier y Renne (2004), quienes definen y establecen las razones: $\gamma_1 = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2}$ y $\gamma_2 = \frac{\theta_r}{\theta_y}$

(γ_2 también coincide con el coeficiente de aversión al riesgo en el modelo de Ramsey).

Esta última justificada por el hecho de que la tasa natural de interés y el crecimiento del

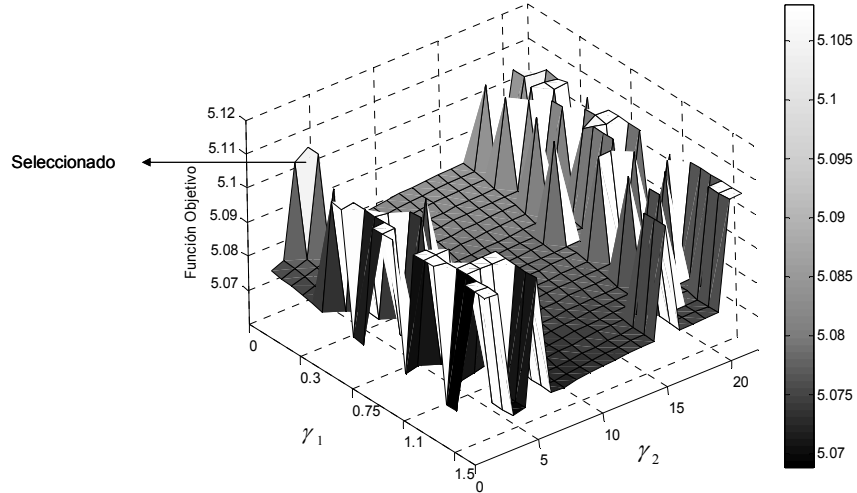
²⁹ Véanse Judge et al. (1985) y Hendry (1995).

producto potencial comparten las mismas fluctuaciones. Es decir, γ_2 corresponde a la razón entre los parámetros asociados a las fluctuaciones de baja frecuencia del producto potencial en la estimación de la tasa de interés natural y del crecimiento del producto potencial. Por lo tanto, los diferentes valores de γ_2 recogen la relación entre la variación de la tasa de interés natural, como resultado de las fluctuaciones de baja frecuencia del producto potencial (θ_r), con los cambios de la tasa de crecimiento potencial cuando varía esa misma variable (θ_y). Tales razones se imponen como restricciones dentro de la estimación del modelo completo³⁰. Así, la estimación de los parámetros se lleva a cabo considerando un conjunto de valores diferentes para cada una de las razones. En particular, se trabaja con $\gamma_1 \in (0, 1.0]$ y $\gamma_2 \in [1, 20]$. La selección de los parámetros finales se lleva a cabo considerando gradientes, función objetivo, significancia y coherencia de los resultados de la brecha del producto y de la tasa de interés natural con la historia económica del país y con trabajos previos en el campo. Es de señalar, que el vector de parámetros seleccionado corresponde al obtenido al considerar $\gamma_1 = 0.005$ y $\gamma_2 = 6.5$.³¹ Tales restricciones resultan ser significativas bajo un *test* de razón de verosimilitud, $LR = 0.0066 \sim \chi^2(2)$. Se llevaron a cabo ejercicios de simulación similares al descrito considerando $\sigma_a^2 = 0.25, 0.65$ y 0.75 , véase Anexo 2. En particular, la selección considerada $\sigma_a^2 = 0.50, \gamma_1 = 0.005, \gamma_2 = 6.5$ corresponde a un máximo, como se observa en el Gráfico 2.

³⁰ Existe otra forma de solucionar el problema del *pile-up* a través del estimador medio insesgado propuesto por Stock y Watson (1998), la cual consiste en estimar en un primer paso la razón señal-ruido e imponerla en una segunda estimación. Esta solución la utilizan Laubach y Williams (2001) en su estimación para los Estados Unidos pero cálculos iniciales para Colombia no permiten obtener resultados coherentes en lo referente a la brecha del producto.

³¹ Como se menciona antes, γ_2 corresponde al coeficiente de aversión al riesgo en el modelo de Ramsey. Pérez (2006) utiliza para Colombia un valor de 5 para dicho parámetro.

Gráfico 2
Selección de Parámetros Fijos del Modelo
 Combinaciones de γ_1 y γ_2 con $\sigma_a^2=0.50$



En el Cuadro 1 se muestran los resultados.³² En la segunda columna se presentan los valores de los parámetros del modelo. La tercera y cuarta columna presentan los percentiles 5 y 95 de cada parámetro, obtenidos a través de *Kernel Density Estimation* sobre los resultados de un procedimiento de *bootstrapping* considerando 1500 replicaciones. Todos los parámetros obtenidos tienen el signo esperado.

Los parámetros directamente asociados a la transmisión de la política monetaria son el β_1 (0.33), la pendiente de la curva de Phillips, y el λ (-0.072), la semielasticidad de la brecha de la tasa de interés a la brecha del producto. Los parámetros que acompañan a la brecha de producto en la ecuación IS (ϕ_1 y ϕ_2) cumplen la restricción proveniente de la teoría de sumar menos que 1, con lo cual las desviaciones respecto a la media están asociadas principalmente a cambios en la brecha de la tasa de interés real. La magnitud estimada del parámetro ψ (0.905) muestra la alta persistencia de la variable estocástica a_t . Como se observa, solo el segundo rezago de la inflación (α_2) y el intercepto en la ley de evolución de r_t^* (μ_r , la tasa de descuento intertemporal) aparecen no significativos, aún cuando el valor medio de μ_r (4.5%) se encuentra relativamente cercano al que

³² Dicha estimación se lleva a cabo en Proc IML, SAS versión 8.

reportan otros trabajos para Colombia.³³ El parámetro δ_2 asociado al cambio de los términos de intercambio resulta significativo al 10.6%.

Cuadro 1
Resultados

Parámetro	Estimación	Kernel Density Estimation	
	Función Objetivo = 5.08213	Percentiles	
		5	95
θ_y	0.002579	0.001484	0,002978
β	0.327375	0.033303	0,618537
α_1	0.394161	0.246739	0,533444
α_2	0.177688	-0,019706	0,309437
α_3	.0342692	0,23161	0,553157
α_4	0.109813	0,07112	0,158512
μ_y	0.007561	0,003099	0,00842
λ	-0,07282	-0,082081	-0,061537
θ_r	0.016763	0,009647	0,019355
ϕ_1	0.387548	0,0275795	0,678528
ϕ_2	0.183305	0,12657	0,291485
μ_r	0.045117	-0,056652	0,12478
ψ	0.905416	0,821605	0,917367
σ_π^2	0.000819	0,000517	0,001023
σ_z^2	0.00009	0,000079	0,000124
δ_1	0.166265	0,001143	0,423751
δ_2	0.004918	0,000107**	0,008017**
$\sigma_a^2 = 0.5, \gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 10$			

*Basado en resultados provenientes de *Bootstrapping*³⁴, **al 10.6%

³³ La tasa de descuento social que utiliza el *Modelo de Mecanismos de Transmisión* del Banco de la República es 4.0%. Ver también Suescún (2001).

³⁴ El procedimiento bootstrapping, Horowitz (2001), se lleva a cabo generando m muestras aleatorias con reemplazamiento de los errores de la ecuación de medida, considerando el vector de estado seleccionado,

De acuerdo con Harvey (1994), la condición necesaria y suficiente para estabilidad del filtro de Kalman es que las raíces características de la matriz T deben tener módulo menor que uno, $|\xi_i(T)| < 1$, $i = 1, \dots, m$ donde m es el número de componentes del vector de estado. Es de señalar que los valores propios asociados a la matriz T , bajo la estimación seleccionada, presenta sus raíces dentro del círculo unitario³⁵, hecho que soporta la estabilidad del filtro.

El Gráfico 3 presenta la evolución de la TIN entre 1982 y 2005 para diferentes valores de γ_2 (4, 6.5 y 8), en línea con el trabajo de Mésonnier y Renne, (2004).³⁶ El comportamiento de las series es relativamente similar para los valores de γ_2 , con un valor promedio de 3.3%, 4.6% y 5.3%, respectivamente. En adelante se reportan los resultados para $\gamma_2 = 6.5$: el valor de la TIN es intermedio entre las series del gráfico, y el valor promedio (4.6%) se encuentra por debajo del valor promedio de la productividad marginal del capital en Colombia (6.65% neta de depreciación, Greco, 2002, capítulo 6, p.185).³⁷ Nuestros resultados también parecen ser relativamente consistentes con la evidencia internacional para otros países (el stock de capital es relativamente menor en Colombia, por lo que resulta mayor la productividad de ese factor): entre 2.0% y 2.75% para los Estados Unidos,³⁸ 3.5% para Australia y 4.5% para Nueva Zelandia (Archibald & Hunter, 2001). Para Europa, Garnier y Wilhelmssen (2005) estiman que la TIN ha

$\{\mathcal{E}^i\}_{i=1, \dots, m}$. Cada una de dichas muestras permite generar un nuevo vector $\{S^i\}_{i=1, \dots, m}$. Con cada uno de estos vectores se procede bajo el esquema presentado en la Figura Anexo 1, considerando como Θ inicial el $\hat{\Theta}$ asociado a la brecha del producto y la tasa de interés natural obtenidos. El ejercicio se lleva a cabo con $m = 1500$.

³⁵ Las raíces características de la ecuación $|\xi I_4 - T| = 0$, son $\{0.879, -0.468, 0, 0.905\}$

³⁶ Nótese que un valor de $\gamma_2 = 4$ corresponde a un comportamiento “neutro” en materia de aversión al riesgo. Acá se supone un coeficiente de relativa aversión al riesgo, y por lo tanto, valores mayores a 4 en γ_2 .

³⁷ Para el período 1990-2001, con base en la metodología sugerida por Harberger (1969), Tribín (2006) encuentra tasas de productividad del capital netas de depreciación aún mayores, entre 7.1% y 7.7%; estas son las tasas más bajas frente a otros escenarios alternativos contruidos por el autor.

³⁸ Laubach y Williams (2001) encuentran una tasa natural que fluctúa entre 1% en la primera parte de los 1990, y 5% a finales de los 1960. Pero la TIN que ha sido calibrada en el modelo básico (baseline) de la Reserva Federal es de 4.5% (Archibald & Hunter, 2001).

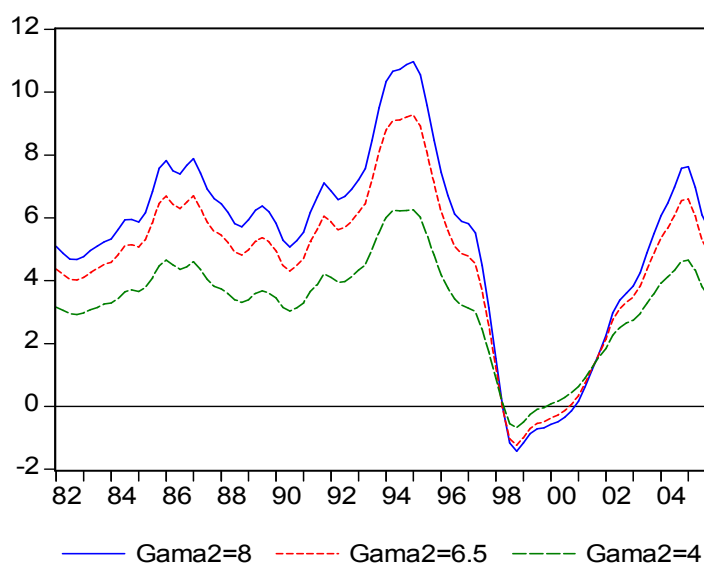
descendido desde 4% en la década de los 1960 a 2% en 2004.

El comportamiento de la TIN (con $\gamma_2 = 6.5$) podría descomponerse en 7 períodos: 1) una fase ascendente entre 1982 (4.3%) y comienzos de 1986 (6.6%); 2) una caída entre 1986 y finales de 1990 (4.3% en el tercer trimestre de 1990); 3) un fuerte incremento hasta el primer trimestre de 1995 (9.2%, el mayor valor histórico de la serie); 4) una caída muy pronunciada en la segunda parte de los 1990 (-0.01% en el cuarto trimestre de 1998); 5) valores muy cercanos a cero entre 1999 y 2001; 6) fuerte recuperación hasta comienzos de 2005; 7) fuerte caída durante 1995. El valor actual no es muy diferente al de comienzos de 1982 o al de finales de 1990. El valor medio observado en los años posteriores a 1994 (3.28%) es de todas formas inferior al de los años anteriores (5.67%).³⁹ Otros trabajos reportan un descenso en la TIN en diferentes países, aún cuando las causas no son enteramente claras.⁴⁰

³⁹ Parece extraño obtener tasas de interés natural cercanas a cero en los años 1998-2000. No obstante, este resultado es relativamente común en la literatura. Garnier y Wilhelmsen (2005) y Mésonnier y Renne (2004) obtienen valores de la TIN para el área del Euro en los que el valor cero se encuentra en el intervalo de confianza en muchos de los años. Para Luxemburgo Wintz et al. (2005) encuentra valores que oscilan entre 0.5% y 3%. Para los Estados Unidos, Laubach y Williams (2001) reportan valores cercanos a 1% en 1994, con un rango que se encuentra entre 1% y 7%..

⁴⁰ Bernhardsen (2005). Nuestro modelo no incluye relación alguna entre la TIN internacional y la TIN en Colombia, un área para investigaciones futuras.

Gráfico 3
Tasa de Interés Natural: Influencia de γ_2



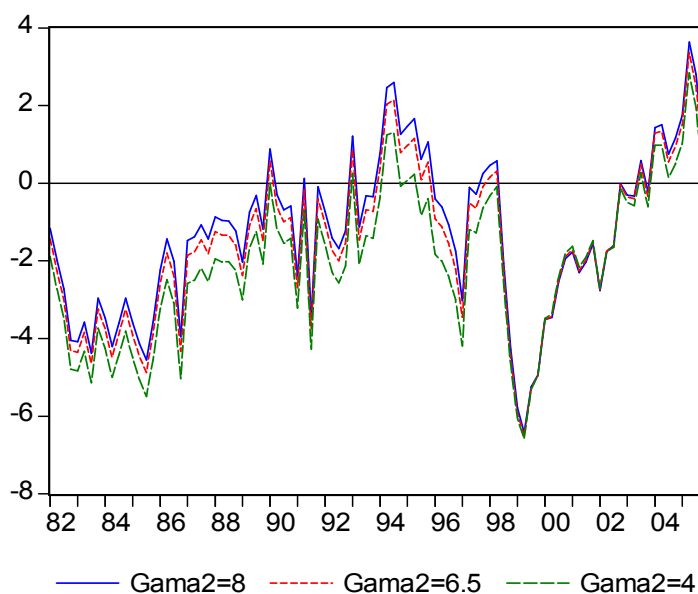
La estimación realizada por medio del filtro de Kalman permite el cálculo simultáneo de otra variable no observada, la brecha del producto, sobre la cual existe amplia discusión en Colombia. El grupo técnico del Banco ha sostenido, por ejemplo, que la brecha del producto se ha ido cerrando paulatinamente, desde valores negativos y grandes en la recesión de 1999, hasta valores cercanos a cero en la actualidad.

El Gráfico 4 presenta la evolución histórica de la brecha del producto para diferentes valores de γ_2 , manteniendo fijo γ_1 . Los resultados son relativamente similares para los distintos valores de γ_2 , con diferencias mínimas a partir de 1998. Nuevamente, como en el caso de la TIN, se otorga preferencia a los valores (intermedios) que resultan para $\gamma_2 = 6.5$. Para este γ_2 se observa un patrón de la brecha del producto similar al que reportan otros trabajos sobre el tema (ver más adelante).

Como se menciona en la Sección 5, es probable que el modelo produzca valores de la brecha más bajos (i.e. más negativos o menos positivos, dependiendo del período) a la brecha “correcta”, en la medida en que no toma en cuenta el comportamiento favorable de las expectativas detectado en la mayoría de encuestas. Ello, posiblemente, como resultado

de que la inflación se ha reducido paulatinamente en Colombia, y que las metas del Banco Central han estado cerca de cumplirse en todos los años desde 1999.⁴¹ Debe recordarse que la ecuación (1) *backward looking* del modelo consideraba que la inflación solo dependía de sus rezagos y de los de la brecha del producto.

Gráfico 4
Brecha del Producto: Influencia de γ_2

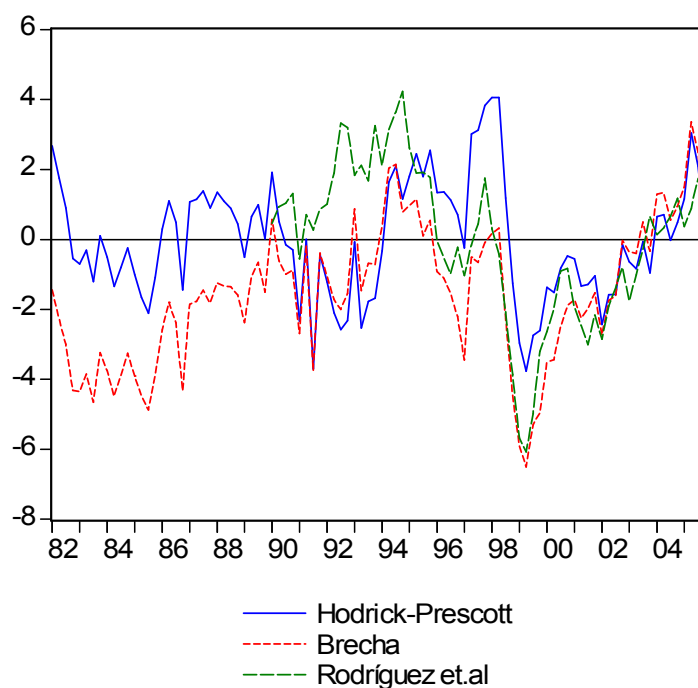


El Gráfico 5 presenta la evolución de la brecha del producto para 3 ejercicios diferentes: para nuestra metodología (con $\gamma_2 = 6.5$); para el filtro de Hodrick-Prescott (HP); y para el ejercicio realizado por Rodríguez *et.al* (2006, R) con base en componentes principales de 16 indicadores líderes. Nuestros resultados para la década de los 1980 difieren de los HP: no se encuentra la brecha positiva que sugiere HP para 1982 o para algunos trimestres en 1987 y 1988; por ello, la brecha promedio obtenida para la década de los 1980 en nuestro trabajo es más negativa que en HP. Los resultados acá obtenidos son mucho más cercanos a los de R luego de 1994 que a los de HP (y más cercanos a HP que

⁴¹ Las metas del Banco Central se incumplieron sistemáticamente antes de la recesión de 1999, se cumplieron en 1999-2001 y en 2004-2005, y estuvieron muy cerca de cumplirse en 2002 y 2003. La encuesta de expectativas realizada por el Banco Central en abril de 2006 revela que el 90.1% de los agentes encuestados cree que el Banco cumplirá con su meta de inflación para el año. Los porcentajes respectivos fueron 79.0% en abril de 2005 y 70.4% en abril de 2004.

a R en 1991-94). El pico observado en nuestra serie en junio de 2005 no aparece en R, pero sí en HP. El valor positivo observado en Diciembre de 2005 es 2.1% para la serie R, 0.72% en nuestro trabajo, y solo 0.2% en HP.⁴²

Gráfico 5
Brecha del Producto, Diferentes Estimaciones

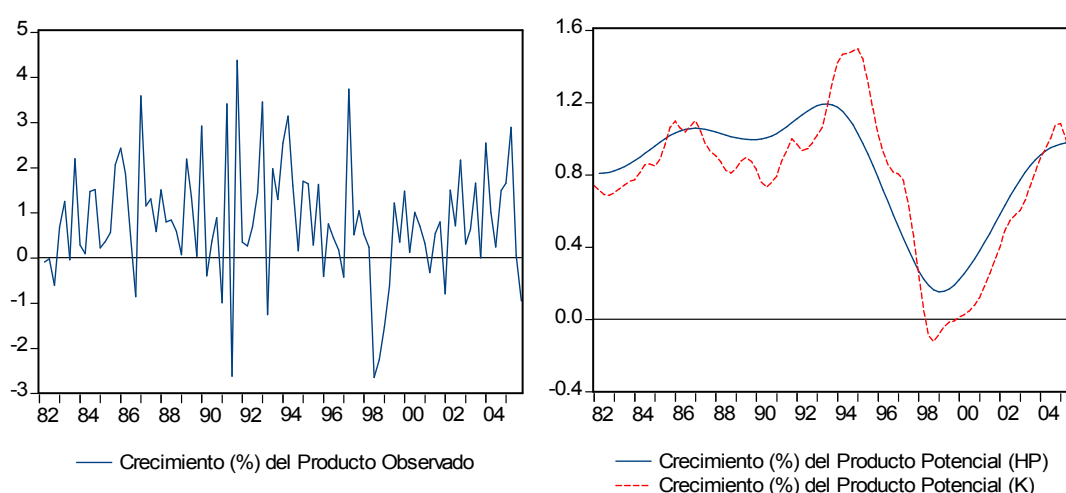


Nuestros resultados sugieren que el desempeño de la economía colombiana no fue el mejor en la década de los 1980: la brecha negativa se amplió en forma relativamente paulatina entre 1982 y el tercer trimestre de 1985 (-4.8% del PIB), se cerró luego progresivamente, y alcanzó un valor ligeramente positivo a finales de la década (0.5% en el primer trimestre de 1990). La brecha fue negativa en 1990-1993 debido, posiblemente, a los efectos iniciales de la apertura comercial, pero la economía se recalentó en 1994 y 1995. Desde ese entonces comenzó una fuerte destorcida, llegando al mayor valor negativo de la serie en el segundo trimestre de 1999 (-6.5%). El gráfico indica una recuperación paulatina desde entonces. La brecha ha sido fuertemente positiva en el 2004 y 2005.

⁴² La brecha “correcta” hoy día podría ser incluso negativa, debido el sesgo de nuestro modelo, al no incluir explícitamente las expectativas de inflación (ver Sección 4.3).

El lado izquierdo del Gráfico 6 presenta las variaciones trimestrales en el PIB real, y el lado derecho compara esa variable con el crecimiento del producto potencial obtenido al utilizar el filtro de Kalman (K) y el filtro de Hodrick-Prescott (HP). El crecimiento del PIB observado es altamente fluctuante, con caídas importantes en el tercer trimestre de 1991, en el segundo semestre de 1998 y en el primer trimestre de 1999. La serie presenta los mayores valores, superiores a 4%, en el cuarto trimestre de 1991 y en el segundo trimestre de 1997. Para el lado derecho del gráfico se observa que el crecimiento de la serie K es generalmente menor al de la serie HP, excepto en el período 1995-1997. Así, el crecimiento promedio anual de K en 1986-94, 1995-97 y 1996-2005 es 1.00%, 0.97% y 0.49%, mientras que el de HP es 1.06%, 0.67% y 0.56% respectivamente.

Gráfico 6
Crecimiento del Producto Observado y del Producto Potencial $\gamma_2 = 6.5$

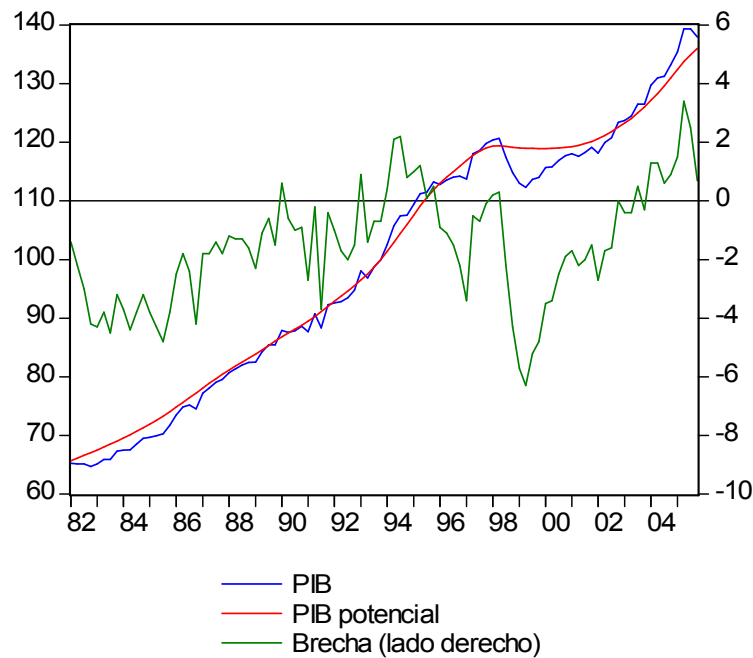


El comportamiento de la brecha del producto depende de la diferencia entre el producto observado y el potencial. El Gráfico 7 muestra el comportamiento de las tres variables (cuando $\gamma_2 = 6.5$ ⁴³). Se pueden distinguir los siguientes sub-períodos en el Gráfico: la brecha es negativa y relativamente estable en 1982-1986 (lo que significa que el PIB y el

⁴³ Con la información para el tercer trimestre de 1993=100 tanto para el PIB como para el PIB potencial

PIB potencial crecen a tasas similares en el período), se cierra paulatinamente entre 1986 y 1994 (con un breve deterioro en 1990-92) cuando alcanza un valor alto y positivo. Se presenta un continuo deterioro entre 1994 y 1999 (mínimo nivel) y una recuperación en los años posteriores. El valor promedio de 2004 y 2005 es relativamente similar al “pico” de mediados de la década de los 1990.

Gráfico 7
Evolución del Índice del PIB y del PIB Potencial (Q3,1993=100) y de la Brecha del Producto, $\gamma_2 = 6.5$

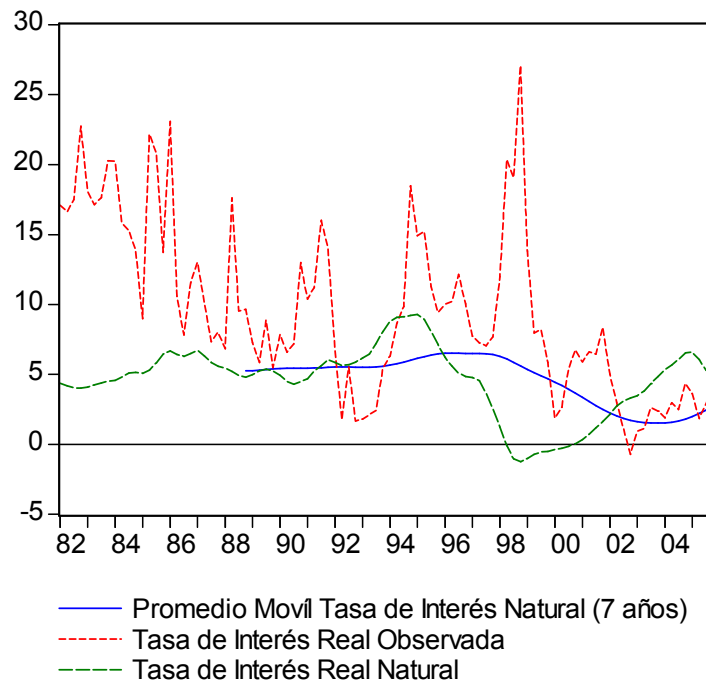


En el Gráfico 8 se relaciona la tasa de interés observada, con la TIN obtenida en el trabajo y con su promedio móvil de 7 años que suaviza el ciclo. Como es de esperar, la TIN fluctúa mucho menos que la tasa de interés real observada y, lejos de ser constante, cambia considerablemente durante los 23 años analizados. Por construcción, sus movimientos están cercanamente asociados a los del crecimiento del PIB potencial. Quizá más relevante para nuestro análisis es el comportamiento del promedio móvil de 7 años: el indicador bajó desde niveles superiores a 5% en el período 1988-98, a menos de 2.0% en los años recientes. De hecho, las tasas actuales no difieren significativamente de dicho promedio.

De otra parte, el comportamiento de la brecha de tasas de interés (Gráfico 9) sugiere que

la política monetaria fue contraccionista en la primera parte de los 1980 y en 1997-2001, expansionista en 1992-94 y en 2002-2005, y relativamente neutra en los demás años. Una concepción diferente de la TIN (i.e aquella relevante para una economía abierta a los flujos de capital) podría llevar a conclusiones diferentes.⁴⁴

Gráfico 8
Tasa de Interés Natural y Real $\gamma_2 = 6.5$



Finalmente, los Gráfico 9 y 10 muestran la relación negativa (ese es el signo esperado) que existe entre la brecha de las tasas de interés con la inflación y con la brecha del producto, un resultado relativamente estándar en la literatura reciente sobre el tema.⁴⁵ Ello confirma que la brecha de tasas de interés puede contener información útil sobre la dinámica de la inflación y sobre la postura de la política monetaria.

⁴⁴ Como se mencionó en la Sección 2, si el riesgo país se incrementó en 1998-99, la TIN derivada de la paridad no cubierta de largo plazo podría elevarse en vez de disminuir.

⁴⁵ Ver, entre otros, Garnier y Wilhelmsen (2005), Basdevant et al. (2004), Borio, English, & Filardo (2006) y los trabajos citados en el Anexo a este último documento.

Gráfico 9
Inflación y Brecha de la Tasa de Interés $\gamma_2 = 6.5$

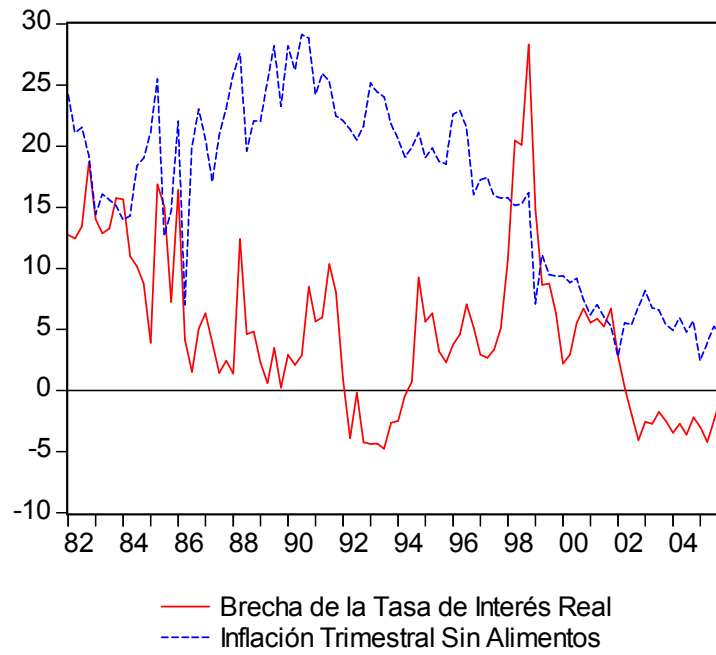
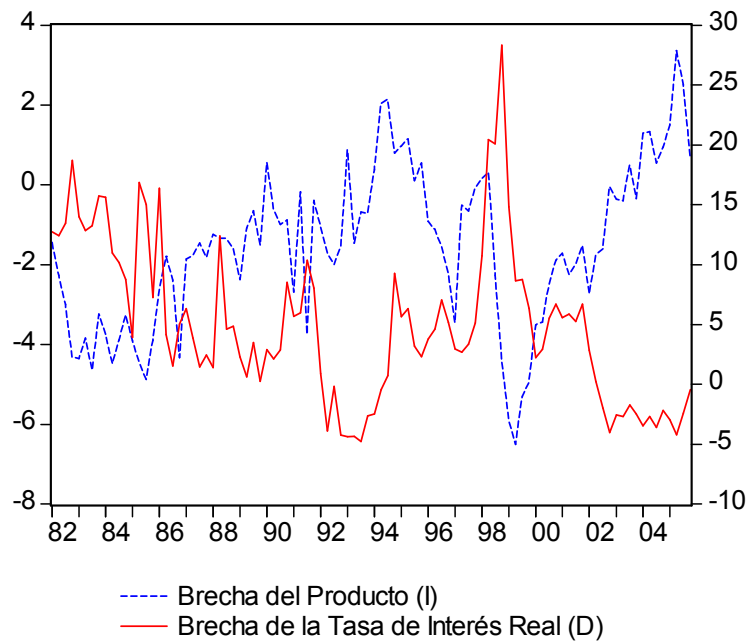


Gráfico 10
Brecha de la Tasa de Interés y del Producto $\gamma_2 = 6.5$



5. Política Económica en Tiempo Real

La tasa de interés natural podría ser utilizada como un instrumento más de política monetaria, complementando el diagnóstico que se deriva de otros instrumentos como la brecha del producto o la NAIRU. De hecho, Borio, English, & Filardo (2006) muestran cómo, bajo ciertas condiciones, la brecha de tasas de interés constituye un mejor predictor de la inflación futura que la brecha del producto. No obstante, existen límites al uso de este concepto.⁴⁶

Así, los estudios de Clark & Kozicki (2004) y de Wu (2005) analizan las dificultades inherentes a la estimación de la TIN con base en información contemporánea (en tiempo real) y concluyen que es problemático utilizar dichos estimativos para la toma de decisiones de política. Llevando al límite este tipo de argumentos, a la pregunta de un senador norteamericano sobre el valor de la tasa de interés neutral Alan Greenspan respondió “No sabemos cuál es la tasa natural hasta que no la alcancemos” (*The Economist*, Diciembre 16, 2004).

Los autores plantean tres tipos de problemas: 1) Las revisiones frecuentes de la información que hacen las autoridades; 2) La incertidumbre sobre la especificación del modelo y; 3) el problema relacionado con los filtros que solo utilizan la información hasta el presente (“filtrada” o “*one side filtering*”), en lugar de “suavizada” o “*two side filtering*”). El “error” acumulado en la predicción de la TIN puede ser sustancial, por lo que las conclusiones de este trabajo deben ser por tanto tomadas con cautela.

Como enfatizan Orphanides y Williams (2002), la alta incertidumbre sobre las brechas en el producto y en la tasa de interés crea problemas para las autoridades encargadas de la política económica. Los errores resultan aún más costosos cuando las autoridades sobreestiman el tamaño de las brechas (como en la década de los años 1970 en los Estados Unidos) que cuando lo subestiman (como en la década de los años 1990).

⁴⁶ Límites adicionales a los que ya se mencionaron en otras secciones del trabajo. Se dijo, por ejemplo, que la TIN en una economía abierta a flujos de capital es diferente a la nuestra. También, que la TIN estimada en el trabajo supone que el nivel actual de inflación “actual” es el “deseable” en el largo plazo (a comienzos de los 1990 Colombia adoptó un programa tendiente a reducir drásticamente la inflación de largo plazo).

En cuanto a 1) (revisiones en la información), para el 2004 el DANE cambió sus estimativos de crecimiento desde 4.01% (cifra publicada en Diciembre de 2005) a 4.79% (cifra publicada en Junio de 2006). Se trató de un cambio fuerte debido a variaciones en la metodología de estimación, pero es de todas formas frecuente que las versiones actualizadas de crecimiento cambien 0.5 puntos o más con respecto a la cifra original. Algo similar sucede en otros países, tanto desarrollados como emergentes. Para los Estados Unidos, por ejemplo, Clark & Kozicki (2004) muestran que las revisiones adoptadas en los últimos 40 años podrían variar los estimativos de TIN entre 1 y 2 puntos.

En cuanto al segundo factor (incertidumbre sobre el modelo), es difícil suponer que el modelo empleado es el correcto. Dijimos, por ejemplo, que nuestra especificación de las curvas IS y Phillips no coincidía exactamente con aquellas derivadas de microfundamentos en un escenario de expectativas racionales; y que la inflación y la brecha del producto podrían depender de factores adicionales a los que se consideraron en nuestro modelo. Según Clark & Kozicki (2004), las diferencias en especificación pueden llevar a otros 2 puntos de variación en la TIN en el caso de los Estados Unidos.

Si bien el tipo de modelos *backward looking* empleados en el trabajo son ampliamente utilizados en la actualidad y parecen comportarse en forma robusta en términos empíricos,⁴⁷ sus características le hacen objeto de la crítica de Lucas, con algunas consecuencias indeseables. En particular, puesto que la inflación ha venido bajando en forma acelerada en Colombia en los años recientes, las características autoregresivas de la ecuación (1) (Sección 3) llevarían a que nuestro modelo produzca valores de la brecha más bajos (i.e. más negativos o menos positivos, dependiendo del período) a la brecha “correcta”. La brecha estimada en este documento podría estar capturando el papel que posiblemente corresponde a las expectativas futuras, no incorporadas en el modelo. Nuevos trabajos deberán incorporar canales de transmisión adicionales de la política monetaria: cambios en el mecanismo de fijación de precios de las firmas, la evolución de la tasa de cambio, las expectativas, los salarios y el crédito aparecen como candidatos

⁴⁷ Ver Mésonnier & Renne (2004) y los trabajos allí citados.

obvios.⁴⁸

En el caso de la política monetaria “en tiempo real” solo se dispone de información hasta el presente. Por ello, se menciona en tercer lugar el problema relacionado con los filtros. La teoría estadística nos dice que la estimación de variables no observadas es más precisa entre mayor sea el número de observaciones. Pero la estimación con la información “hasta el presente” (filtrada o “*one side filtering*”) suele diferir de la que resulta una vez se dispone de información adicional para períodos posteriores (suavizada o “*two side filtering*”). Para los Estados Unidos, por ejemplo, Wu (2005) muestra que las estimaciones filtradas y suavizadas de la TIN pueden diferir hasta en 3 puntos.

Todas las series presentadas en el trabajo corresponden a los valores *suavizados* (“*two side filtering*”), suponiendo que las autoridades cuentan con toda la información en el momento de la toma de decisiones. Aproximaciones de las series filtradas y suavizadas se pueden obtener con el filtro de Kalman. Una serie filtrada obtenida con Kalman es variable *proxy* de una estimación en tiempo real, en la medida en que utiliza únicamente la información disponible hasta al momento t (en lugar de hasta T como en las series suavizadas). Los Gráficos 10 y 11 comparan los resultados con las series suavizadas para la TIN y para la brecha de la tasa de interés real.

Las diferencias no son excesivamente marcadas, aún cuando en ocasiones se presentan variaciones significativas. Así, para el período comprendido entre el tercer trimestre de 1997 y de 1998 el análisis con la información “hasta hoy” produce una TIN promedio de 4.1%, mientras que aquel con información suavizada produce otra de 1.3%. También se presentan diferencias importantes (i.e. cercanas a 2 puntos) a finales de 1993, 1986 y 1991. Estas diferencias aparecen expresadas en términos porcentuales en el Gráfico 12. Nuevamente, las dos series son relativamente similares, con diferencias importantes en los trimestres mencionados.

⁴⁸ Sobre el papel de las imperfecciones financieras y el crédito en la discusión de la TIN ver Amato (2005). En el modelo de Bernanke et.al (1999), los *shocks* de crédito tienen un efecto persistente sobre la inversión vía su impacto sobre la prima de riesgo.

Gráfico 11
TIN Filtrada y Suavizada $\gamma_2 = 6.5$

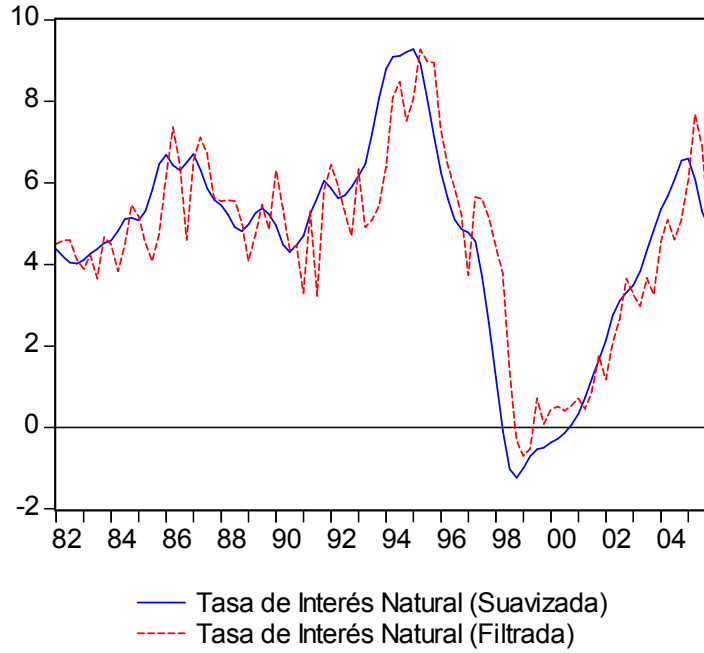
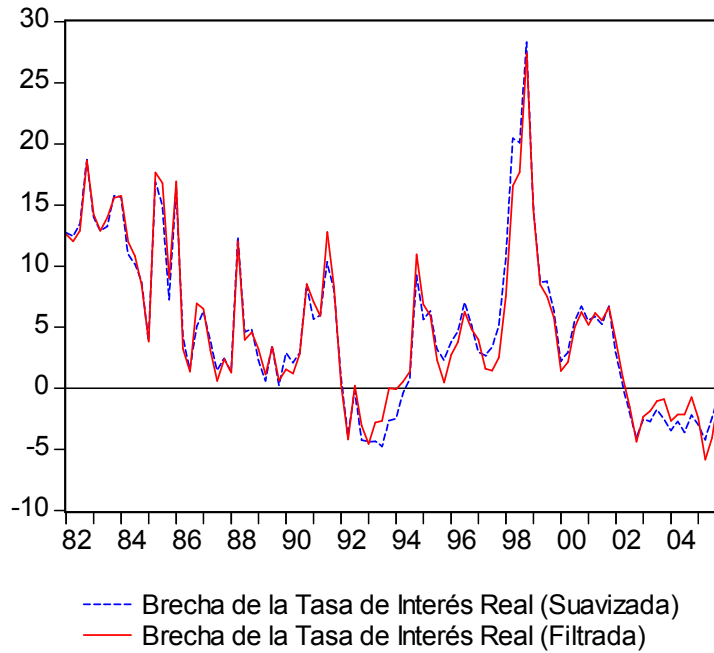


Gráfico 12
Brecha de la Tasa de Interés filtrada y suavizada $\gamma_2 = 6.5$



6. Conclusiones

En este artículo estimamos una tasa natural real de interés (TIN) variable en el tiempo para Colombia en el período 1982-2005. La metodología aplicada sigue la propuesta por Laubach y Williams (2001) para los Estados Unidos y por Mésonnier y Renne (2004) para la zona del euro, modificando el modelo para incluir el efecto de la dinámica mundial y de los términos de intercambio sobre el PIB, y el efecto de los precios internacionales de los bienes importados y de la tasa de cambio sobre la inflación. Se presenta la TIN como una variable no observada dentro de un esquema que incluye una curva IS y una curva de Phillips. El filtro de Kalman es usado para estimar simultáneamente la TIN y la brecha del producto (de esta se deriva el producto potencial).

La TIN estimada muestra importantes cambios durante los últimos 23 años, de manera consistente con la evolución del producto potencial y la brecha del producto. Se sugiere que la brecha del producto dejó de ser negativa en el período reciente, que la política económica fue contraccionista en 1998 y 1999 cuando la TIN descendió marcadamente y las autoridades subieron la tasa de interés para proteger el esquema de banda cambiaria ante salidas fuertes de capital. En el último año la política monetaria ha sido expansionista, y la brecha del producto es positiva como también lo sugieren otros trabajos en el campo.

Las conclusiones citadas deben ser tomadas con cautela, sin embargo, dada la incertidumbre relativamente elevada de los parámetros obtenidos y las características un tanto simplistas del modelo económico empleado. Nuestro trabajo corresponde a un esfuerzo inicial en el área, pero existe un sinnúmero de campos a explorar, algunos de ellos mencionados en el documento.

7. Referencias

- Amato, J. D., (2005) "The Role of the Natural Rate of Interest in Monetary Policy", BIS Working Papers, v.171
- Amaya, C. A., (2005) "Interest Rate Setting and the Colombian Monetary Transmission Mechanism", (mimeo), Banco de la República
- Andrés, J., D. López-Salido & E. Nelson. (2005). "Sticky-Price Models and the Natural Rate". Working Paper 2005-018A. Federal Reserve Bank of St. Louis.
- Archibald, J. & L. Hunter. (2001) "What is the Neutral Real Interest Rate and How We Can Use It?". Reserve Bank of New Zealand, Bulletin Vol. 64 No.3.
- Bannock, G., R.E. Baxter & E. Davis (1998), *Economist Dictionary of Economics*.
- Basdevant, O., Björkstén, N., Karagedikli, Ö. (2004). Estimating a Time Varying Neutral Real Interest Rate for New Zealand. Reserve Bank of New Zealand, SP2004/01.
- Bernanke, B., Th. Laubach, F. Mishkin & A. Posen. (1999) "Inflation Targeting: Lessons from the International Experience". Princeton University Press.
- Benrhardson, T. (2005) "The Neutral Real Interest Rate" Staff Memo Monetary Policy Department No.2005/1, Norges Bank.
- Blinder, A. S., (2006), "Monetary Policy Today: Sixteen Questions and about Twelve Answers", (mimeo).
- Borio, C., W. English & A. Filardo, (2006) "A Tale of Two Perspectives: Old or New Challenges for Monetary Policy?", BIS Papers, v.19
- Brzoza-Brzezina (2004) "The Information Content of the Natural Rate of Interest: The Case of Poland." Mimeo, National Bank of Poland y Warsaw School of Economics.
- Calvo, G. A. & C. A. Végh, (1999) "Inflation Stabilization and BOP Crises in Developing Countries", Handbook of macroeconomics, Volume 1, Chapter 24, pp.1531-1614.
- Clar, M., R. Ramos & J. Suriñach (1998). "A Latent Variable Model to Measure Regional Manufacturing Production in Spain", Workshop on Regional Economic Indicators, University of Minho, Braga.
- Clark, T. & S. Kozicki, (2004) "Estimating Equilibrium Real Interest Rates in Real Time", FRB Kansas City Working Paper, v.2004-08
- Crespo Cuaresma, J., E. Gnan & D. Ritzberger-Gruenwald. (2003) 'Searching for the Natural Rate of Interest: A Euro-Area Perspective', Working Paper 84, Österreichische Nationalbank.
- Cuthbertson, K., S. Hall & M. Taylor, (1992). *Applied Econometric Techniques*, Harvester Wheatsheaf.
- Dib, A. (2002) "Nominal Rigidities and Monetary Policy Rule in Canada Since 1981." Bank of Canada Working Paper No.2002-25.
- Echavarría, J. J., (1999) "Hacia la Devaluación Real, Adiós Bandas Cambiarias", *Coyuntura Económica*, v.29-2, pp.87-105.
- Friedman, M., (1968) "The Role of Monetary Policy", *American Economic Review*, v.58, pp.1-17.
- Garnier, J. & B. Wilhelmsen. (2005) "The Natural Real Interest Rate and the Output Gap in the Euro Area: A Joint Estimation." Working Paper 2005/14, Norges Bank.
- Giammarioli, N. & N. Valla. (2003) "The Natural Real Rate of Interest in the Euro-

- Area" European Central Bank Working Paper 233.
- Harberger, A. C., (1969) "La Tasa de Rendimiento de Capital en Colombia", *Revista de Planeación y Desarrollo*, v.3, pp.13-42.
- Harvey, A. (1994), *Forecasting, Structural Time series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- Hendry, D. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press.
- Horowitz, J. L. (2001); "The Bootstrap", *Handbook of Econometrics*, Vol 5, Chapter 52, Pages 3161 – 3228, Editors Heckman J. and E. Leamer, North Holland.
- Huertas, C., M. Jalil, S. Olarte & J. V. Romero, (2005), "Algunas Consideraciones sobre el Canal del Crédito y la Transmisión de Tasas de Interés en Colombia", (mimeo).
- Judge, G., W. Griffiths, R. Carter, H. Hill, H. Lütkepohl, & T. Lee (1985); *The Theory and Practice of Econometrics*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Kydland, F. & E. Prescott. (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations" *Econometrica* 50: 1345-1370.
- King, R.G. & M.W. Watson. (1996) "Money, Prices, Interest Rates and the Business Cycle", *Review of Economics and Statistics*, Vol.78(1), pp. 35-53.
- Lam, J.P. & G. Tkacz. (2004) "Estimating Policy-Neutral Interest Rates for Canada Using a Dynamic Stochastic General-Equilibrium Framework" Bank of Canada Working Paper 2004-9.
- Larsen, J. & J. McKeown. (2002) "The Informational Content of Empirical Measures of Real Interest Rate and Output Gaps for the United Kingdom." Working Paper No. 224 Bank of England.
- Laubach, T. (2001) "Measuring the NAIRU: Evidence for Seven Economies" *Review of economics and statistics* 83:2, pp. 218-231.
- Laubach, T. & J. Williams. (2001). *Measuring the Natural Rate of Interest*. Finance and Economics Discussion Series. Working Paper No. 2001-56. Federal Reserve Bank.
- Manrique, M. & J. M. Marques (2004) "An Empirical Approximation of the Natural Rate of Interest and Potential Growth", Working Paper 0416, Banco de España.
- McGrattan, E. R. & E. C. Prescott, (2003) "Average Debt and Equity Returns: Puzzling?", *Federal Reserve Bank of Minneapolis Staff Report*, v.313
- Mc Callum, B.T. & E. Nelson. (1999) "Performance of Operational Policy Rules in an Estimated Semi-Classical Structural Model" en Taylor. J.B. (ed.), *Monetary policy rules*, University of Chicago Press, páginas 15-45.
- Melo, L.F, F.H. Nieto, C.E. Posada, Y.R. Betancourt & J.D. Barón. (2001) "Un Índice Coincidente para la Actividad Económica Colombiana" *Borradores de Economía No. 195*, Banco de la República, Bogotá.
- Mésonnier, J.S. & J.P. Renne. (2004) "A Time-Varying "Natural" Rate of Interest for the Euro Area." Banque de France, Working Paper No. 115.
- Miranda, P. & M.K. Muinhos. (2003) "A Taxa de Juros de Equilíbrio: Uma Abordagem Múltipla." Working Paper No.66. Banco Central do Brasil.
- Misas, M., C.E. Posada & D. Vásquez. (2001) "¿Está Determinado el Nivel de Precios por las Expectativas de Dinero y Producto en Colombia?" *Borradores de Economía No. 191*, Banco de la República, Bogotá.
- Misas, M. & D. Vásquez. (2002) "Expectativas de Inflación en Colombia: Un Ejercicio Econométrico". *Borradores de Economía No. 212*, Banco de la República, Bogotá.
- Muinhos, M.K. & M. Nakane. (2006) "Comparing Equilibrium Real Interest Rates:

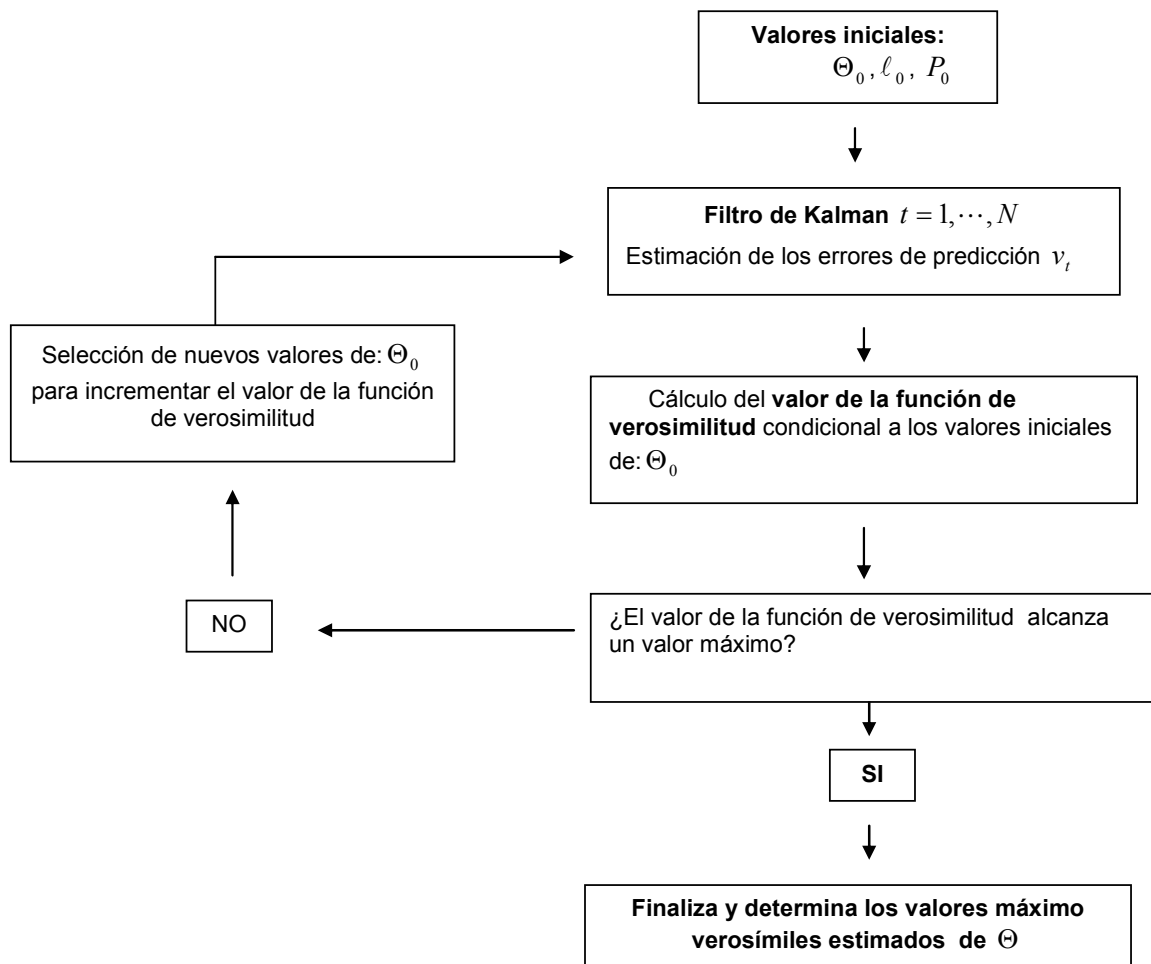
- Different Approaches to Measure Brazilian Rates.” Working Paper No.101. Banco Central do Brasil.
- Neiss, K. & E. Nelson. (2003) “The Real Interest Rate Gap as Inflation Indicator” *Macroeconomic Dynamics* 7(2):239-62.
- Nieto, F. & Melo, L.F. (2001) “About a Coincident Index for the State of the Economy”. *Borradores de Economía No. 194*, Banco de la República, Bogotá.
- Obstfeld, M. & K. S. Rogoff, (2000a) "The Six Major Puzzles in International Macroeconomics: Is There a Common Cause?", NBER Working Paper, v.7777
- Obstfeld, M. & K. S. Rogoff, (2000b) "Perspectives on OECD Economic Integration: Implications for U.S. Current Account Adjustment", Federal Reserve Bank of Kansas City.
- Orphanides, A. & J. Williams. (2002). “Robust Monetary Policy Rules with Unknown Natural Rates”. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2002:2, 63 - 145.
- Pérez, J., (2006), "Evaluación de Reglas de Tasa de Interés en un Modelo de Economía Pequeña y Abierta", *Borradores de Economía*, 385.
- Ramsey, F. (1928) "A Mathematical Theory of Saving" *Economic Journal* No. 152-38, pp.543-559
- Rodríguez, N., J. L. Torres & A. Velasco, (2006) "La Estimación de un Indicador de Brecha del Producto a Partir de Encuestas y Datos Reales", *Borradores de Economía No. 392*, Banco de la República
- Rotemberg, J. & Woodford, M. (1997) “An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy” *NBER Macroeconomics Annual* 12: 297-346.
- Rudebusch, G. & L. Svensson. (1998.) “Policy Rules for Inflation Targeting” NBER Working Paper 6512.
- Rudebusch, G.D. & L.E.O Svensson. (2002). “Eurosystem Monetary Targeting: Lessons from U.S. Data”, *European Economic Review*, v. 46, 417-442.
- Smets, F. & R. Wouters, (2002) "Output and Interest Rate Gaps: Theory vs Practice", *Society for Computational Economics, Computing in Economics and Finance*, v.355.
- Solow, Robert M. (1956), “A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics* 70: pp. 65-94
- Stock, J. H. & M.W. Watson (1998), “Median Unbiased Estimation of Coefficient Variance in a Time-Varying Parameter Model”, *Journal of the American Association*, Vol. 93, No. 441, pp. 349-358.
- Suescún, R. (2001), “Impuesto a las Transacciones: Implicaciones sobre el Bienestar y el Crecimiento”, *Revista de Planeación y Desarrollo*, v.31-4, pp.19-61
- Svensson, L. E. O., (2001), "Independent Review of the Operation of Monetary Policy in New Zealand", Report to the Minister of Finance.
- Taylor, J., (1993) "Discretion vs Policy Rules in Practice", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, v.39, pp.195-214.
- Tribín, A. M., (2006) "Tasa de Rendimiento de Capital de Colombia para el Período entre 1990 y 2001", *Borradores de Economía, No.398*. Banco de la República, Bogotá.
- Weber, A. (2006). “The Role of Interest Rates in Theory and Practice – How Useful is the Concept of the Natural Real Rate of Interest for Monetary Policy?” G.L.S. Shackle Memorial Lecture 2006, Cambridge (UK), 9 March 2006.
- Welch, B. and Bishop, G. (2001) “An Introduction to the Kalman Filter”, Department of

- Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill.
- Wicksell, K. (1898) "Interest and Prices: A Study of the Causes Regulating the Value of Money". Traducido por R. F. Kahn. New York, Augustus M. Kelley, 1965.
- Williams, J. (2003). "The Natural Rate of Interest". *FRBSF Economic Letter*, No. 2003-32.
- Wintr, L., P. Guarda & A. Rouabah. (2005) "Estimating the Natural Interest Rate in Euro-Area and Luxembourg." Cahiers d'études No.15, Banque Centrale du Luxembourg.
- Woodford, M. (2003) *Interest and Prices* Princeton University Press.
- Wu, T., (2005) "Estimating the "Neutral" Real Interest Rate in Real Time", *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Letter*

8. Anexos

Anexo 1: Cálculo Numérico del Máximo de la Función de Verosimilitud

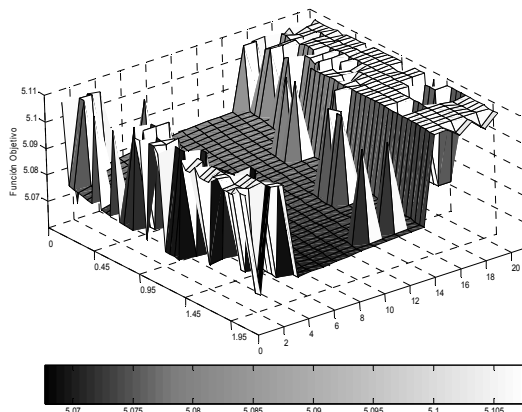
El procedimiento numérico para encontrar el máximo de la función de verosimilitud se presenta en la siguiente figura. Una vez seleccionados los valores iniciales del vector de estado, de su matriz de varianza-covarianza y de los parámetros e hiperparámetros se obtienen los errores de predicción del filtro de Kalman, los cuales permiten la maximización de la correspondiente función de verosimilitud. Si ésta es máxima frente a la obtenida en la iteración anterior el procedimiento finaliza, de lo contrario se continúa hasta alcanzarlo.



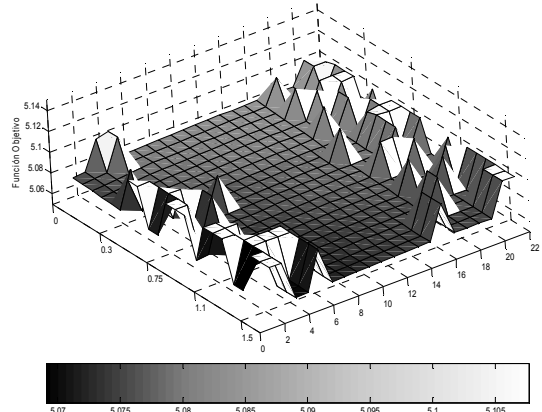
Anexo 2: *Profile Likelihood* para selección de γ_1 y γ_2 dado un σ_a^2 fijo

Con el propósito de seleccionar a γ_1, γ_2 y σ_a^2 se lleva a cabo un proceso de estimación del ejercicio, considerando todas las posibles combinaciones de las restricciones de acuerdo con los intervalos ya presentados. En las gráficas anteriores se presentan los valores de las funciones objetivo alcanzadas por los procesos de maximización en cada caso.

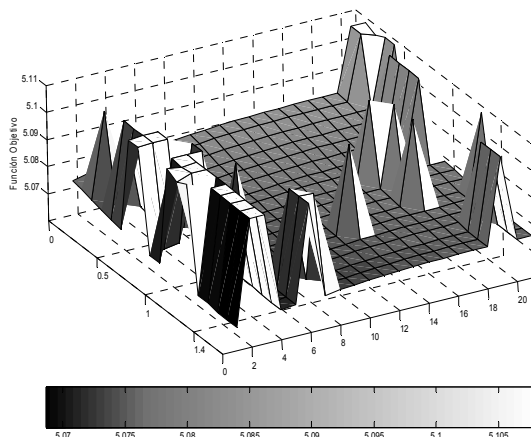
Combinaciones de γ_1 y γ_2 con $\sigma_a^2 = 0.25$



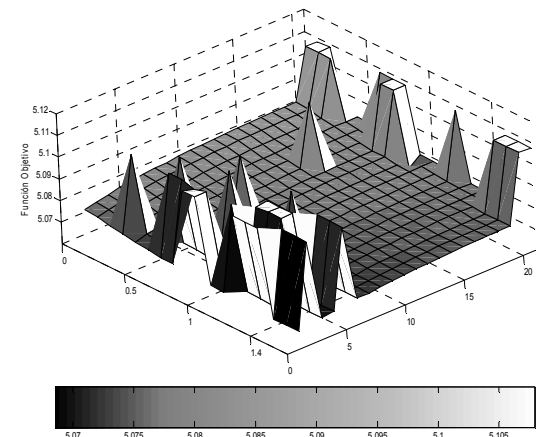
Combinaciones de γ_1 y γ_2 con $\sigma_a^2 = 0.50$



Combinaciones de γ_1 y γ_2 con $\sigma_a^2 = 0.65$



Combinaciones de γ_1 y γ_2 con $\sigma_a^2 = 0.75$



Anexo 3: Derivación de la Representación Estado – Espacio

Por medio de manejo algebraico, el modelo especificado en la sección 3:

$$\pi_t = \alpha_1 \pi_{t-1} + \alpha_2 \pi_{t-2} + \alpha_3 \pi_{t-3} + \beta_1 z_{t-1} + \alpha_4 \pi_t^m + \varepsilon_t^\pi \quad (1)$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda(1+L)(i_{t-1} - \pi_{t-1} - r_{t-1}^*) + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta i_{t-1} + \varepsilon_t^z \quad (2)$$

$$r_t^* = \mu_r + \theta_r a_t \quad (3)$$

$$\Delta y_t^* = \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y \quad (4)$$

$$a_t = \psi a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad (5)$$

$$y_t = y_t^* + z_t \quad (6)$$

puede ser llevado a la representación estado-espacio dada por las ecuaciones (7) y (8), utilizada en la recursión del filtro de Kalman y en el proceso de optimización:

Ecuación de Medida :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ z_t \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ \pi_{t-3} \\ \pi_t^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ \pi_{t-3} \\ \pi_t^m \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^\pi \end{bmatrix}$$

Ecuación de Transición :

$$\begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ z_t \\ z_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\theta_r & -\lambda\theta_r & \phi_1 - \beta_1\lambda & \phi_2 - \beta_1\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{t-1} \\ a_{t-2} \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda\alpha_1 & -\lambda(\alpha_2 + \alpha_1) & -\lambda(\alpha_3 + \alpha_2) & -\lambda\alpha_3 & \delta_1 & \delta_2 & -\lambda\alpha_4 & -2\lambda\mu_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{t-1} \\ i_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ \pi_{t-3} \\ \pi_{t-4} \\ \Delta y_t^{G7} \\ \Delta i_{t-1} \\ (\pi_t^m + \pi_{t-1}^m) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^a \\ 0 \\ \varepsilon_t^z \\ 0 \end{bmatrix}$$

La coherencia entre la representación estado – espacio y el sistema de ecuaciones (1) – (6) se deriva a continuación. El primer elemento de la ecuación de medida viene dado por:

$$\Delta y_t = \theta_y a_t + z_t - z_{t-1} + \mu_y + \varepsilon_t^y$$

El cual se obtiene al realizar algunas manipulaciones algebraicas con las ecuaciones (4) y (6):

$$\Delta y_t^* = \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y$$

$$y_t^* - y_{t-1}^* = \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y$$

$$0 = -y_t^* + y_{t-1}^* + \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y$$

$$y_t - y_{t-1} = -y_t^* + y_{t-1}^* + \mu_y + \theta_y a_t + \varepsilon_t^y + y_t - y_{t-1} \quad (\text{Sumando a ambos lados } y_t \text{ y } y_{t-1})$$

$$\therefore \Delta y_t = \theta_y a_t + z_t - z_{t-1} + \mu_y + \varepsilon_t^y \quad (\text{Haciendo uso de la ecuación (6)} \rightarrow z_t = y_t - y_t^*)$$

De otro lado, como se puede ver al desarrollar matricialmente el segundo elemento de la ecuación de medida, no es necesario realizar ninguna manipulación para introducir la curva de Phillips dentro de la representación estado-espacio. En otras palabras, al desarrollar la ecuación resultante de las operaciones de matrices se tiene que:

$$\pi_t = \beta_1 z_{t-1} + \alpha_1 \pi_{t-1} + \alpha_2 \pi_{t-2} + \alpha_3 \pi_{t-3} + \alpha_4 \pi_t^m + \varepsilon_t^\pi$$

la cual es equivalente a la ecuación (1) del modelo.

Respecto a la ecuación de transición, solo se requiere analizar la ecuación asociada con la variable no observable z_t , dado que la ecuación para a_t resulta ser la misma definición dada por la ecuación (5). Por lo tanto, consideremos la relación para la brecha del producto, la cual de acuerdo con la representación estado-espacio es la siguiente:

$$z_t = -\lambda\theta_r a_{t-1} - \lambda\theta_r a_{t-2} + (\phi_1 - \beta_1\lambda)z_{t-1} + (\phi_2 - \beta_1\lambda)z_{t-2} + \lambda i_{t-1} + \lambda i_{t-2} - \lambda\alpha_1\pi_{t-1} -$$

$$\lambda(\alpha_2 + \alpha_1)\pi_{t-2} - \lambda(\alpha_3 + \alpha_2)\pi_{t-3} - \lambda\alpha_3\pi_{t-4} + \delta_1\Delta y_t^{G7} + \delta_2\Delta t i_{t-1} - 2\lambda\mu_y + \varepsilon_t^z$$

La anterior ecuación se obtiene a partir de álgebra sobre la ecuación (2) del modelo y haciendo uso de las relaciones (1) y (3). Veamos:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda(1+L)(i_{t-1} - \pi_{t-1} - r_{t-1}^*) + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda(i_{t-1} - \pi_{t-1} - r_{t-1}^* + i_{t-2} - \pi_{t-2} - r_{t-2}^*) + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda \pi_{t-1} - \lambda r_{t-1}^* + \lambda i_{t-2} - \lambda \pi_{t-2} - \lambda r_{t-2}^* + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda \pi_{t-1} - \lambda(\mu_r + \theta_r a_{t-1}) + \lambda i_{t-2} - \lambda \pi_{t-2} - \lambda(\mu_r + \theta_r a_{t-2})$$

$$+ \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda \pi_{t-1} - \lambda \mu_r - \lambda \theta_r a_{t-1} + \lambda i_{t-2} - \lambda \pi_{t-2} - \lambda \mu_r - \lambda \theta_r a_{t-2}$$

$$+ \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda(\alpha_1 \pi_{t-1} + \alpha_2 \pi_{t-2} + \alpha_3 \pi_{t-3} + \beta_1 z_{t-1} + \alpha_4 \pi_t^m) - 2\lambda\mu_r - \lambda\theta_r a_{t-1}$$

$$+ \lambda i_{t-2} - \lambda(\alpha_1 \pi_{t-2} + \alpha_2 \pi_{t-3} + \alpha_3 \pi_{t-4} + \beta_1 z_{t-2} + \alpha_4 \pi_{t-1}^m) - \lambda\theta_r a_{t-2} + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda\alpha_1 \pi_{t-1} - \lambda\alpha_2 \pi_{t-2} - \lambda\alpha_3 \pi_{t-3} - \lambda\beta_1 z_{t-1} - \lambda\alpha_4 \pi_t^m - 2\lambda\mu_r - \lambda\theta_r a_{t-1}$$

$$+ \lambda i_{t-2} - \lambda\alpha_1 \pi_{t-2} - \lambda\alpha_2 \pi_{t-3} - \lambda\alpha_3 \pi_{t-4} - \lambda\beta_1 z_{t-2} - \lambda\alpha_4 \pi_{t-1}^m - \lambda\theta_r a_{t-2} + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t i_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = (\phi_1 - \lambda\beta_1)z_{t-1} + (\phi_2 - \lambda\beta_1)z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda\alpha_1 \pi_{t-1} - \lambda(\alpha_2 + \alpha_1)\pi_{t-2} - \lambda(\alpha_3 + \alpha_2)\pi_{t-3} - \lambda\alpha_4 \pi_t^m \\ - 2\lambda\mu_r - \lambda\theta_r a_{t-1} + \lambda i_{t-2} - \lambda\alpha_3 \pi_{t-4} - \lambda\alpha_4 \pi_{t-1}^m - \lambda\theta_r a_{t-2} + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$z_t = (\phi_1 - \lambda\beta_1)z_{t-1} + (\phi_2 - \lambda\beta_1)z_{t-2} + \lambda i_{t-1} - \lambda\alpha_1 \pi_{t-1} - \lambda(\alpha_2 + \alpha_1)\pi_{t-2} - \lambda(\alpha_3 + \alpha_2)\pi_{t-3} \\ - 2\lambda\mu_r - \lambda\theta_r a_{t-1} + \lambda i_{t-2} - \lambda\alpha_3 \pi_{t-4} - \lambda\alpha_4 (\pi_t^m + \pi_{t-1}^m) - \lambda\theta_r a_{t-2} + \delta_1 \Delta y_t^{G7} + \delta_2 \Delta t_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

Así, el desarrollo anterior muestra que la representación estado – espacio corresponde al modelo económico presentado en el bloque de ecuaciones (1) – (6).