

# Borradores de ECONOMÍA

Asignación Estratégica de Activos  
para Fondos de Pensiones Obligatorias  
en Colombia: Un Enfoque Alternativo

□□□

Por: Carlos León y Juan Mario Laserna

□

No. 523  
2008



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

*Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones  
Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo*♦



*Carlos León  
Juan Mario Laserna*

*Banco de la República  
Colombia*

---

♦ La serie Borradores de Economía es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

# *Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo*<sup>†</sup>

Carlos León<sup>♦</sup>  
Juan Mario Laserna<sup>\*</sup>  
Banco de la República  
Colombia

## Resumen

La práctica sobre políticas de inversión diferencia entre la definición de la composición del portafolio de referencia de largo plazo o *benchmark* y de los mecanismos de desviación en el corto plazo respecto a ese portafolio, en lo que se conoce como **asignación estratégica de activos** y **asignación táctica de activos**, respectivamente.

Este documento se ocupa de revisar la práctica sobre **asignación estratégica de activos**, aplicada al caso de inversiones de largo plazo como lo son los Fondos de Pensiones Obligatorias, pero introduce un enfoque alternativo en lo que a la optimización del portafolio se refiere. En lugar de utilizar el criterio clásico de *media-varianza*, el cual es el común denominador de los modelos teóricos y académicos de optimización de portafolios, se aplica el modelo de *retorno total-máximo drawdown*, el cual evita varias de las conocidas limitaciones del criterio clásico y procura un mejor resultado del portafolio en el largo plazo.

Los resultados corroboran los beneficios de seguir las fases que componen el proceso de **asignación estratégica de activos**, tales como la diversificación local, la diversificación internacional y la exposición cambiaria. Adicionalmente, los resultados obtenidos brindan evidencia de las ventajas que ofrece un enfoque alternativo como el de la optimización de portafolios en el espacio *retorno total-máximo drawdown*.

**Keywords:** Fondos de Pensiones, Diversificación, Teoría de Portafolio, Optimización de Portafolio, Máximo Drawdown, Asignación Estratégica de Activos.

**JEL Classification:** G11, G23, G32, D81.

---

<sup>†</sup> Las ideas y opiniones expresadas en este documento son responsabilidad de los autores. Los autores agradecen los comentarios de Silvia Juliana Mera.

<sup>♦</sup> Investigador, Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados, [cleonrin@banrep.gov.co](mailto:cleonrin@banrep.gov.co).

<sup>\*</sup> Miembro de la Junta Directiva del Banco de la República, [jlaserja@banrep.gov.co](mailto:jlaserja@banrep.gov.co).

## 1. Introducción

Por su tamaño al interior del mercado de capitales y del mercado cambiario colombiano, así como por su función de gestionar los beneficios pensionales futuros de sus cotizantes, los Administradores de Fondos de Pensiones (AFP) tienen una gran responsabilidad como administradores de los Fondos de Pensiones Obligatorias (FPO).

De acuerdo con la OECD (2006, 2003), la instrumentación de todo sistema pensional depende de la viabilidad financiera del sistema y de la capacidad del mismo para gestionar de manera eficiente los recursos de los aportantes. Dado que en Colombia, al igual que en otros países, se produjo el tránsito hacia un sistema de contribución definida, es la capacidad de gestión de los AFP la que determina si los beneficios pensionales futuros pueden ser cubiertos en su totalidad por el sistema o si, por el contrario, el Estado debe aportar para garantizar al trabajador una pensión mínima.<sup>1</sup>

Estudios anteriores han señalado deficiencias en la gestión de los portafolios por parte de las AFP en Colombia<sup>2</sup>. Las principales causas de dichas deficiencias parten de la regulación aplicable a los FPO, la cual ha impuesto límites de inversión que han restringido la eficiencia de los portafolios de los recursos de los FPO, al tiempo que ha establecido requisitos de rentabilidad mínima y esquemas de remuneración que han desalineado los incentivos de los AFP como administradores de los pasivos pensionales y como entes económicos.

Respecto a la eficiencia de los portafolios de los FPO, los estudios realizados para el caso colombiano utilizan el modelo académico tradicional basado en el criterio de *media-varianza*, el cual, pese a su amplia utilización académica, no es bien recibido por administradores profesionales de portafolios. Adicionalmente, los estudios realizados no se ocupan de una característica fundamental de los FPO: los portafolios deben ser contruidos con una visión de largo plazo, estratégica, que corresponda con el perfil de pasivos que busca cubrir.

El presente documento, basado en el desarrollo teórico de Reveiz y León (2008c), pretende aplicar una metodología basada en el criterio *retorno total-máximo drawdown* como alternativa al criterio clásico de *media-varianza*. Con esta aplicación, que evita las principales falencias del criterio clásico de *media-varianza*, se pretende tener una aproximación a lo que una asignación estratégica de activos para FPO debe ser; es decir, cuál debe ser la combinación de largo plazo de activos que deben tener los portafolios que administran las AFP's.

El documento se divide en siete partes, donde la primera es esta introducción. En la segunda parte se describe la práctica internacional sobre asignación estratégica de activos, así como algunos comentarios sobre su aplicación al caso de fondos de

---

<sup>1</sup> En el caso de Colombia el afiliado comparte el riesgo de viabilidad financiera con la sociedad y el Estado. De acuerdo con la Ley 100 de 1993 y la Ley 797 de 2003, luego de cumplir con ciertos requisitos, todo afiliado al sistema pensional tiene derecho a recibir una pensión mínima de vejez o jubilación de no menos de un salario mínimo legal mensual vigente, para lo cual se constituyó el Fondo de Garantía de Pensión Mínima del Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad, del cual se pagará en primera instancia dicha pensión mínima.

<sup>2</sup> Reveiz *et al.* (2008), Reveiz y León (2008b), Laserna (2007), Martínez y Murcia (2007), Rudolph *et al.* (2006), Jara *et al.* (2005) y Chan-Lau (2004).

pensiones en Colombia. La tercera presenta brevemente el criterio clásico (de *media-varianza*) utilizado para la asignación estratégica de activos, así como sus principales falencias. La cuarta justifica y presenta la utilización del criterio propuesto (*retorno total-máximo drawdown*). La quinta parte muestra los resultados de la utilización del criterio propuesto para la asignación estratégica de activos para el caso de fondos de pensiones en Colombia. En la sexta parte se comparan los resultados del criterio propuesto con los del criterio clásico. En la última parte se concluye y se presentan algunas recomendaciones.

## 2. La asignación estratégica de activos para fondos de pensiones

El objetivo fundamental de todo sistema pensional es servir como fuente segura de ingreso para el retiro futuro de sus afiliados. Como tal, el objetivo de la función de inversión de las AFP en un esquema de contribución definida<sup>3</sup> -como el colombiano-, es generar los máximos retornos posibles de acuerdo con la estructura de los pasivos de los FPO, sus necesidades de liquidez y la tolerancia de riesgo de sus afiliados.<sup>4</sup>

A ese respecto, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, 2006), dentro de las directrices para la administración de portafolios de pensiones, recomienda que la política de inversión deba, como mínimo, i.) identificar la **asignación estratégica de activos** para el fondo de pensiones, la cual consiste en la combinación de largo plazo por categorías de activos, y ii.) definir la **asignación táctica de activos**, consistente en los mecanismos de modificación de la asignación estratégica como consecuencia de cambios en los pasivos y en las condiciones de mercado. Este documento se ocupa exclusivamente de la asignación estratégica de activos.

Pese a que la recomendación de la OECD puede parecer en principio trivial, su aplicación práctica dista de serlo. La asignación estratégica de activos resulta de un ejercicio que pueda ser considerado de largo plazo<sup>5</sup>, que sirva de referencia o *benchmark* global, que sea útil como guía para la estrategia de inversión. La asignación estratégica de activos está compuesta por tres fases: a.) determinar el alcance del *benchmark* global; b.) definir las ponderaciones al interior del *benchmark*; y c.) definir la posición frente al riesgo cambiario.<sup>6</sup>

---

<sup>3</sup> Un esquema de contribución definida consiste en la constitución de una cuenta o fondo individual por parte de cada trabajador, donde la pensión a recibir depende de los aportes realizados, los costos administrativos y de los retornos generados por sus aportes al ser invertidos en el mercado. Un esquema de beneficio definido consiste en la garantía de un monto de pensión, donde dicho monto no está expuesto directamente a las fluctuaciones del mercado. Davis (2005) y Chan-Lau (2004) advierten que la política de inversión de los fondos de pensiones de contribución definida debe buscar el calce con los pasivos (v.g. el tamaño, duración y volatilidad de los pasivos), por lo que, dado que los pasivos están denominados en moneda local, el portafolio de activos se concentrará en el mercado doméstico; la optimización del portafolio de activos en un sistema de contribución definida debe procurar la maximización de retornos para un determinado nivel de riesgo –como sugiere la teoría de portafolio.

<sup>4</sup> Reveiz *et al.* (2008) y Chan-Lau (2004).

<sup>5</sup> Usualmente se identifica que una asignación estratégica de activos corresponde a un portafolio diseñado para reflejar objetivos de diez o más años (Winkelmann, 2003).

<sup>6</sup> A continuación se desarrolla el proceso de asignación estratégica de activos, para lo cual se usó extensamente el documento de Solnik, *et al.* (2004); para facilitar la lectura, se suprimió en muchos casos la cita del mencionado autor.

#### a) Determinación del alcance del benchmark global

Para determinar el alcance del *benchmark* global se deben definir las clases de activos, internos y externos, que serán incluidos. Por lo general, se debe tener como objetivo el conseguir un portafolio verdaderamente global, que permita acceder a diversas oportunidades de inversión.

En el caso de la administración de FPO en Colombia se debe considerar la facilidad de que los AFP mantengan inversiones en mercados que les son poco conocidos, donde su *expertise*, costos transaccionales y difícil acceso a información, puedan ser una barrera de entrada a ciertas clases de activos.

Adicionalmente, como se ha demostrado en estudios anteriores<sup>7</sup>, la regulación vigente en Colombia sesga de manera importante la determinación de un *benchmark* global. Por ejemplo, los límites a la inversión imponen participaciones máximas a algunos instrumentos, así como a la posición en moneda extranjera. A lo anterior se suma la existencia de un límite de solvencia<sup>8</sup> y un esquema de rentabilidad mínima, los cuales generan incentivos a que los AFP se concentren en inversiones en el mercado local, al tiempo que se crea un incentivo a sincronizar los retornos de los portafolios para reducir la incertidumbre con respecto a la rentabilidad mínima.

#### b) Definición de las ponderaciones al interior del benchmark

Respecto a la definición de las ponderaciones al interior del *benchmark*, la práctica internacional señala que el método más utilizado es la capitalización de los mercados<sup>9</sup> y, alternativamente, la representatividad del PIB del país.

En el caso de los mercados de tamaño mediano o pequeño la práctica de utilizar la capitalización de los mercados implicaría que la gran mayoría del portafolio debería estar en el extranjero, en mercados desarrollados. Al respecto, existe evidencia de un sesgo local o *home bias*, según el cual los inversionistas prefieren mantener portafolios concentrados en el mercado local como consecuencia de percepción de mayor riesgo en mercados extranjeros (vg. riesgo país, legal y cambiario), restricciones regulatorias, así como costos transaccionales y falta de *expertise*<sup>10</sup>.

---

<sup>7</sup> Reveiz *et al.* (2008), Laserna (2007), Martínez y Murcia (2007), Jara, *et al.* (2005), Rudolph *et al.* (2006), Chan-Lau (2004).

<sup>8</sup> Por ejemplo, los títulos de deuda pública interna del Gobierno Nacional (TES) no computan dentro del cálculo de solvencia.

<sup>9</sup> Uno de los modelos de asignación estratégica que utiliza la capitalización de los mercados es el Black-Litterman. Este modelo parte de un portafolio de equilibrio, el cual está dado por la capitalización del mercado, para luego incorporar las expectativas o *views* del inversionista, donde el portafolio óptimo resulta de una combinación ponderada del portafolio de equilibrio por capitalización de mercado y los portafolios de expectativas. (Litterman, 2003)

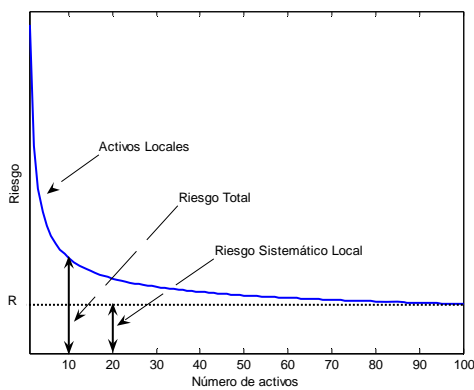
<sup>10</sup> Respecto a los costos transaccionales y la falta de *expertise*, la globalización financiera y el creciente desarrollo de los mercados financieros ha disminuido notablemente el costo de entrada a inversiones en otros mercados, al tiempo que ha aumentado el número de vehículos a través de los cuales agentes especializados ofrecen acceso a éstos.

La práctica también señala que es común que los inversionistas, confrontados con el *home bias*, prefieran construir un *benchmark* global ajustado, el cual suele determinarse a partir de técnicas de optimización que busquen diversificar el riesgo y puedan incluir restricciones que consideren el mencionado sesgo local.

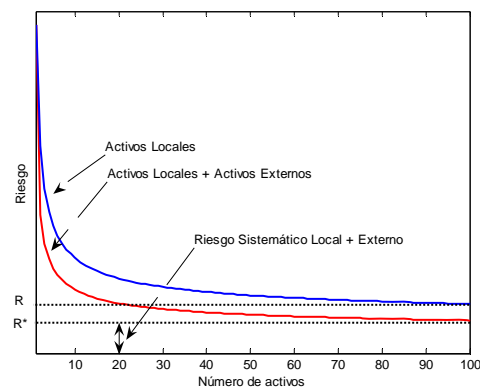
Ya sea a través de la capitalización de los mercados, el PIB o la optimización de un *benchmark* global ajustado, el objetivo de la combinación de diferentes clases de activos y mercados es la diversificación. Es bien conocido el argumento según el cual la sucesiva adición de activos de un mercado a un portafolio elimina el riesgo diversificable, restando únicamente el riesgo de mercado<sup>11</sup>, sistémico o no diversificable (Gráfico No. 1, izquierda). Sin embargo, Solnik (1995) reconoce que de igual manera cualquier inversionista se beneficia de la inclusión de activos externos -diversificación internacional-, ya que esto resulta en la posibilidad de mitigar el riesgo sistémico del mercado local<sup>12</sup> (Gráfica No. 1, derecha).

Gráfico No. 1  
*Beneficios de la Diversificación Local e Internacional*

*Reducción del riesgo por diversificación local*



*Reducción del riesgo por diversificación local e internacional*



Fuente: Elaboración de los autores, con base en Solnik (1995).

Para un mercado de gran tamaño, como el de los Estados Unidos, que tiene amplias oportunidades de diversificación local, Solnik (1995) encuentra que la diversificación internacional efectivamente disminuye el riesgo, pero reconoce que las ganancias de la diversificación internacional tienden a ser mayores en la medida en que el mercado local sea más reducido; entonces, un mercado de capitales donde existe un número reducido de alternativas de inversión –como el colombiano-, tendría un beneficio de diversificación considerable<sup>13</sup>.

Persson (2002), basado en un ejercicio de optimización de portafolio a varios plazos para cuatro mercados desarrollados en el periodo 1919-1997, encuentra que la participación de activos externos en portafolios eficientes es significativamente

<sup>11</sup> Sharpe (1995).

<sup>12</sup> La diversificación del riesgo sistémico se sustenta en que los ciclos económicos y comerciales entre países no estén perfectamente correlacionados; en que los choques sean específicos a cada mercado financiero; y que los desastres naturales o confrontaciones armadas son específicos de cada país, entre otros. (Davis, 2005)

<sup>13</sup> Este argumento es compartido por Davis (2005), Feldstein (2002) y Solnik (1995).

más estable para horizontes de inversión amplios, por lo que –concluye- la diversificación internacional es más relevante para inversiones de largo plazo, como es el caso de los FPO. Por otra parte, Burtless (2007), también basado en un ejercicio de optimización, con información para ocho mercados desarrollados en el periodo 1927-2005, encuentra que todos los portafolios eficientes de fondos de pensiones incluyen una proporción sustancial de activos externos, independientemente de la nacionalidad del aportante o el periodo escogido al interior de la muestra.

Adicionalmente, Chan-Lau (2004) encuentra que el crecimiento de los activos del sistema pensional América Latina y Europa del Este ha superado el crecimiento de sus mercados financieros. Como consecuencia de lo anterior, existe al interior de los fondos de pensiones una tendencia a la concentración de riesgo en el mercado local, niveles de diversificación subóptimos, así como una mayor propensión del mercado local a experimentar burbujas financieras, por lo que –afirma- es aconsejable relajar los límites a la inversión en activos externos<sup>14</sup>.

Para el caso colombiano, dado el tamaño de su mercado de capitales, la definición de las ponderaciones al interior del *benchmark* debe considerar los mencionados factores que determinan el *home bias*, con especial atención a las restricciones a la inversión, así como los requisitos de rentabilidad mínima que le son aplicables actualmente a las AFP.

Rudolph *et al.* (2006), además de validar la afirmación de Chan-Lau (2004) respecto de la baja diversificación que existe en los FPO colombianos como consecuencia de una oferta limitada de activos en el mercado local<sup>15</sup>, resalta la importancia de revisar las restricciones legales a la inversión en activos externos por parte de los FPO con el fin de evitar resultados ineficientes para las inversiones de los recursos de los aportantes.

En lo que respecta a los requisitos de rentabilidad mínima aplicables a las AFP en Colombia<sup>16</sup>, Chan-Lau (2004) encuentra evidencia de que dicho requisito incentiva la selección de portafolios similares entre los FPO<sup>17</sup>, así como la existencia de reducidas posiciones en activos externos. Lo anterior se explica por la presencia de un castigo a las AFP que incumplan el mencionado requisito sin

---

<sup>14</sup> No obstante, relajar los límites a la inversión en activos extranjeros no es suficiente. Chan-Lau (2004) encuentra evidencia de que el esquema de rentabilidad mínima adoptado en Colombia incentiva la selección de portafolios similares entre los FPO, así como la existencia de reducidas posiciones en activos externos, situación que permanece luego de la flexibilización de los límites a la inversión.

<sup>15</sup> De acuerdo con Rudolph *et al.* (2006), el tamaño del portafolio de activos de los FPO en Colombia es aproximadamente 10% del PIB. En comparación, el mercado –afirma- es de reducido tamaño si se tiene en cuenta que los bonos corporativos e hipotecarios solo representan el 2% y el 1.5% del PIB, mientras que el saldo del mercado accionario que se transa apenas alcanza el 9% del PIB y se encuentra altamente concentrado (cinco acciones concentran el 51% de la capitalización de mercado); por su parte, los títulos de deuda pública interna del Gobierno representan el 48% del PIB.

<sup>16</sup> Según el artículo 2<sup>o</sup> del decreto 2664 de 2007, y la reglamentación expedida por la SFC, la rentabilidad mínima de los fondos de pensiones es la que resulte inferior entre: a). El 70% del promedio simple del retorno promedio obtenido por los FPO en el período de cálculo correspondiente, ponderado por el tamaño de cada fondo; el retorno del índice accionario del IGBC; el retorno (en pesos) del índice accionario S&P 500; y el retorno del portafolio de referencia, definido (ex - post) por la SFC y b). El promedio simple de los mismos factores enumerados anteriormente, disminuido en 260 puntos básicos.

<sup>17</sup> Esto concuerda con las conclusiones de Reveiz *et al.* (2008), Laserna (2007) y Jara (2006).



que exista recompensa por buen desempeño, la inclusión de un componente de rentabilidad del sistema y la definición ex – post del portafolio de referencia de la SFC.

En suma, existe evidencia que señala que el requisito de rentabilidad mínima y los límites a la inversión aplicables a las AFP en Colombia pueden viciar el objeto de la optimización de portafolio como herramienta de definición de la composición del *benchmark*.

### c) Definición de la posición respecto al riesgo cambiario

Por último, la asignación estratégica de activos requiere la definición de la posición respecto al riesgo cambiario<sup>18</sup>. Solnik *et al.* (2004) señala que la cobertura cambiaria total de las posiciones en activos externos ignora los beneficios de diversificación entre monedas, y entre activos y monedas. Además afirma, basado en Froot (1993), que para un portafolio de largo plazo, como es un fondo de pensiones, existe evidencia de que la volatilidad del retorno de los activos externos es mayor cuando están cubiertos<sup>19</sup>; en el mismo sentido, Persson (2002) encuentra que las inversiones de largo plazo en activos externos no se benefician de la cobertura cambiaria.

Davis (2005) documenta argumentos a favor y en contra de las restricciones a la exposición a activos externos y al riesgo cambiario para los portafolios de fondos de pensiones. Por lo general, los argumentos tradicionales en favor de las restricciones en el caso de los fondos de pensiones se centran en la dificultad y costo de incursionar en otro mercado; el impulso al desarrollo del mercado local en mercados emergentes; y el facilitar la financiación del gasto público<sup>20</sup>. Los argumentos en contra se centran en los beneficios de la diversificación internacional: provisión de cobertura contra el riesgo de inflación, ya que la tasa de cambio tiende a aumentar durante periodos de inflación; ofrecer cobertura para la canasta de consumo futura de los pensionados, ya que una porción de ésta está compuesta por bienes y servicios provenientes del exterior; brindar cobertura ante desastres naturales, conflictos armados y crisis bancarias o bursátiles del mercado local, eventos en los cuales la moneda local tiende a debilitarse; y mejoría en las

---

<sup>18</sup> Winkelmann (2003) señala que la definición de la posición respecto al riesgo cambiario no debe reflejar expectativas de corto plazo sobre las tasas de cambio; estas expectativas se deben reflejar a través del manejo activo o táctico.

<sup>19</sup> Con información para el mercado de Estados Unidos, Froot (1993) encuentra que para horizontes de más de cinco años la volatilidad del retorno de acciones extranjeras es mayor cuando tienen cobertura cambiaria, que cuando no la tienen; para bonos externos encuentra un horizonte de ocho años. Froot encuentra que la razón para este hallazgo radica en que la cobertura cambiaria protege contra variaciones en la tasa de cambio real, la cual efectivamente es más volátil en el corto plazo, pero tiende a ser constante en el largo plazo (reversión a la media de la tasa de cambio real por la paridad del poder de compra), por lo cual la decisión de cobertura depende del horizonte de inversión; además, argumenta, que si se consideran los costos de transacción y los riesgos de contraparte de las coberturas, las posiciones descubiertas ofrecen una mejor alternativa en el espacio riesgo-retorno. (Solnik *et al.*, 2004 y Levi, 1997)

<sup>20</sup> Davis (2005) señala que el facilitar la financiación del gasto público tiene consecuencias negativas, tales como incentivar la concentración del riesgo en unos pocos instrumentos, limitar la diversificación, cortar el canal por el cual el sistema pensional sirve como instrumento para la formación de capital, así como llevar al sistema pensional a financiarse colectivamente a partir de los trabajadores actuales vía impuestos.

combinaciones riesgo-retorno disponibles al inversionista, lo cual compensa la inclusión de un factor de riesgo adicional. En suma, Davis concluye que los argumentos a favor de las restricciones son débiles en comparación con los beneficios de la inversión en activos externos y la exposición cambiaria.

Adicionalmente, desde una perspectiva macroeconómica, Lane y Shambaugh (2007) señalan la conveniencia de que parte del ahorro nacional se encuentre expuesto al riesgo cambiario. Dado que los países emergentes se caracterizan por tener posiciones cortas en moneda extranjera (representadas en endeudamiento externo neto con el exterior), lo cual implica un efecto balance adverso ante devaluaciones no esperadas, el mantener activos en moneda extranjera puede tener efectos deseables para el desempeño macroeconómico.

Por lo anterior, la asignación estratégica tiene como objetivo la definición de un portafolio de referencia o *benchmark*, de largo plazo, que consiga aprovechar las ventajas de la diversificación local e internacional, que procure para el aportante más y mejores combinaciones riesgo-retorno, con el fin de maximizar su riqueza futura de acuerdo con su perfil de riesgo. Todo esfuerzo por diseñar una política de inversión para un FPO debe considerar este objetivo y las tres fases antes señaladas.

### 3. El criterio clásico de *media-varianza* como función objetivo de la asignación estratégica de activos<sup>21</sup>

La función objetivo de la asignación estratégica de activos, consistente en la definición de un portafolio de referencia o *benchmark* de largo plazo que consiga aprovechar las ventajas de la diversificación local e internacional, tradicionalmente se basa en el criterio clásico de *media-varianza* de Markowitz (1952)<sup>22</sup>.

El criterio de *media-varianza* establece que cuando un inversionista enfrenta dos portafolios de activos, *A* y *B*, siempre preferirá el portafolio *A* si:

$$E(r_A) \geq E(r_B)$$

y

$$\sigma^2(r_A) \leq \sigma^2(r_B)$$

donde

$E(r_i)$	Retorno esperado del portafolio “ <i>i</i> ”
$\sigma^2(r_i)$	Varianza esperada del portafolio “ <i>i</i> ”

---

<sup>21</sup> Esta sección se basa en el documento de Reveiz y León (2008c); para facilitar la lectura, se suprimió en muchos casos la cita del mencionado autor. Para un mayor detalle metodológico de esta sección el lector puede remitirse a ese documento.

<sup>22</sup> La mayor parte de la literatura sobre optimización de portafolios para la asignación estratégica de activos, inversión de largo plazo o diversificación (local o internacional) se basan en el criterio clásico de *media-varianza*, entre ellos Reveiz y León (2008b), Burtless (2007), Laserna (2007), Davis (2005), Jara *et al.* (2005), Chan-Lau (2004), Persson (2002), Solnik (1995), Sharpe (1995).

Markowitz pudo demostrar matemáticamente que existe un conjunto de combinaciones eficientes de retorno esperado y riesgo (varianza), en lo que se conoce comúnmente como la frontera eficiente. La optimización entonces consiste en hallar la combinación de activos que para cada nivel de retorno disponible en el mercado consigue el menor riesgo posible.

El argumento central de Markowitz, el cual se mantiene hoy día, es que el riesgo de un portafolio es inferior a la suma ponderada de los riesgos individuales, lo cual es consecuencia de la correlación imperfecta existente entre los activos individuales y la diversificación de riesgo que esto consigue. Al formalizar matemáticamente el espacio riesgo-retorno de esta manera, Markowitz identificó al beneficio de diversificación como la piedra angular de la teoría de portafolio, la cual sirve también de base para el argumento a favor de la diversificación internacional expuesto en la sección anterior.

Aún cuando el trabajo de Markowitz (1952) concentró toda la atención académica, mereciéndole el Premio Nobel en 1990, la fundamentación matemática y formal del beneficio de la diversificación no le es del todo exclusiva. Al mismo tiempo, Roy (1952) desarrolló un fundamento matemático alternativo, el cual difiere principalmente en la medida de riesgo.

Roy, consciente de la existencia de los eventos negativos extremos y de que éstos son la principal fuente de preocupación para cualquier inversionista, desarrolla el concepto de “*safety first*” o de “la seguridad primero”. Roy afirma que el inversionista verdaderamente se preocupa por aquel evento que puede realmente afectar el resultado de su inversión, mientras que el resultado promedio o esperado de su inversión le es irrelevante. Según esto, es razonable, y probable en la práctica, que un individuo, dada su falta de información, simplemente busque minimizar la probabilidad de que un evento negativo extremo ocurra.

Pese a que minimizar la probabilidad de ocurrencia de un evento negativo extremo parezca un objetivo evidente e intuitivo, el criterio clásico de *media-varianza* -en su modelo básico y en la mayoría de sus variantes- es inadecuado para tal fin. Prueba de ello es que la mayoría de modelos de valoración de riesgo tienen un desempeño pobre frente a los movimientos extremos del mercado.

Este argumento, compartido por Greenspan (2008), Taleb (2007), Bhansali (2005) y Zimmermann *et al.* (2003), se fundamenta principalmente en las fallas del criterio de *media-varianza* para medir el riesgo y la diversificación del riesgo.

Respecto a la medición del riesgo, Litterman (2003) reconoce dos principales fuentes de debilidad en la utilización de medidas de volatilidad (varianza o desviación estándar): i.) solo en casos especiales, como la normalidad de los retornos de los activos, la volatilidad por sí sola puede proveer suficiente información como para contemplar los eventos verdaderamente relevantes y ii.) la volatilidad no diferencia entre riesgo de aumento y riesgo de caída en el precio de un activo. Taleb (2007) señala que los conceptos de desviación estándar o correlación no existen fuera de un entorno *Gaussiano* o de distribución normal. Afirma que usar modelos basados en la normalidad de los retornos, en la cual la probabilidad de encontrar una desviación con respecto a la media decae exponencialmente, es nefasto cuando se trata de actividades como el

manejo de portafolio, ya que son los eventos extremos, no los típicos, los que acumuladamente tienen un impacto dramático en el resultado final.

En cuanto a la diversificación del riesgo, Greenspan (2008), Bhansali (2005) y Zimmermann *et al.* (2003) comparten el argumento según el cual, dado que utilizan información extraída de periodos de auge y caída de los mercados, donde las caídas son significativamente más breves<sup>23</sup> pero más abruptas, los modelos sobrevaloran los beneficios de la diversificación, subvaloran el riesgo y son incapaces de considerar eventos extremos. Los argumentos antes mencionados son aplicables a modelos tales como los de *Value at Risk* (Valor en Riesgo), *Expected Shortfall* y a las optimizaciones de portafolios basadas en el criterio clásico de *media-varianza*.

Davidson (2008) y Campbell (2008) documentan que, pese al anunciado poder, velocidad y eficiencia de los sistemas de administración de riesgo de los principales bancos del mundo, los efectos de las recientes crisis en los mercados financiero y crediticio demuestran que existen problemas en los modelos de riesgo. De acuerdo con ambos autores, los problemas de los modelos utilizados, en especial el VaR, radican en la excesiva confianza en los supuestos utilizados y en el manejo de series históricas típicas de periodos tranquilos, los cuales resultaron en la incapacidad para capturar choques extremos.

Así mismo, con motivo de la crisis de los mercados durante 2007-2008, el *Counterparty Risk Management Policy Group*, compuesto por los principales bancos e instituciones financieras a nivel mundial<sup>24</sup>, publicó el reporte “*Containing Systemic Risk: The Road to Reform*”, el cual resalta que los análisis y mediciones de riesgo basadas en condiciones de mercado normales subestiman los riesgos inherentes a situaciones de iliquidez de los mercados, periodos de estrés sistémico, así como la existencia del riesgo de colas anchas.

Por lo anterior, Reveiz y León (2008c) desarrollan una metodología que recoge la función objetivo de Roy (1952), consistente en minimizar la ocurrencia de eventos negativos extremos, al tiempo que contempla los argumentos en contra del criterio clásico de *media-varianza*. Basada en el criterio alternativo de *retorno total-máximo drawdown*, la aplicación de dicha metodología pretende servir de base para la optimización de portafolios en el largo plazo, que sirvan como base para la asignación estratégica de activos para los FPO en Colombia.

---

<sup>23</sup> Greenspan A. (2008) señala que en los últimos cincuenta años la economía de los Estados Unidos solo estuvo en contracción una séptima parte del tiempo. En Colombia, según cálculos de Reveiz y León (2008c), la economía solo estuvo en contracción en una trigésima octava parte del tiempo en el periodo 1968-2006.

<sup>24</sup> Hacen parte del grupo Goldman Sachs, HSBC, Lehman Brothers, Morgan Stanley, JP Morgan Chase, BNP Paribas, Bank of America, Merrill Lynch, Citigroup, entre otros. (CRMPG, 2008)

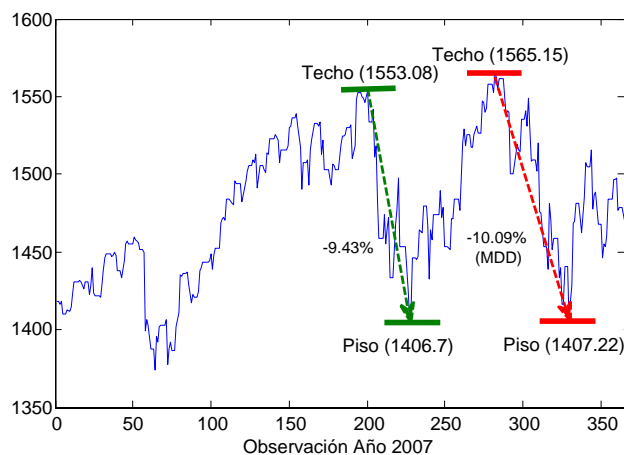
#### 4. El criterio de *retorno total-máximo drawdown* como función objetivo de la asignación estratégica de activos<sup>25</sup>

En un esfuerzo por evitar las falencias del criterio clásico de *media-varianza*, y con el fin de desarrollar una metodología alternativa de optimización de portafolios, Reveiz y León (2008c) abordan el problema de eficiencia de los portafolios a partir de medidas alternativas de riesgo y retorno: el *máximo drawdown* (MDD) y el retorno total<sup>26</sup>, respectivamente.

El *máximo drawdown* (MDD), que es una medida utilizada por administradores de portafolio<sup>27</sup>, consiste en la medición de la máxima caída porcentual (de techo a piso) que le ocurre a una inversión en un periodo de tiempo.

A continuación se presenta gráficamente el cálculo del MDD para el índice de renta variable S&P 500 durante el 2007: se presentan las dos caídas más fuertes que experimentó el índice durante el periodo, 9.43% y 10.09%, donde la última es la mayor y, por tanto, equivalente al MDD para ese periodo.

Gráfico No.2  
MDD del Índice S&P 500



Fuente: Reveiz y León (2008c)

El cálculo del MDD, a diferencia de las medidas de volatilidad (desviación estándar y varianza), no es posible a través de una fórmula cerrada y debe realizarse de manera recursiva. Para calcular el MDD para el periodo  $[0, T]$ , si  $V_T$  es el valor monetario de la última observación de la serie de tiempo ( $T$ ) y  $V_{max}$  el máximo valor monetario de la serie en el periodo  $[0, T-1]$ , dado el cálculo previo de MDD para el periodo  $[0, T-1]$ ,

$$MDD_{[0, T]} = \min\left(\frac{V_T - V_{max}}{V_{max}}, MDD_{[0, T-1]}\right)$$

<sup>25</sup> Esta sección se basa en el documento de Reveiz y León (2008c); para facilitar la lectura, se suprimió en muchos casos la cita del mencionado autor. Para un mayor detalle metodológico de esta sección el lector puede remitirse a ese documento.

<sup>26</sup> Corresponde al retorno calculado como la diferencia porcentual entre el valor de compra del activo y su valor presente (spot).

<sup>27</sup> Pedersen C. S. *et al.* (2003).

Las ventajas de esta medida de riesgo son varias: i) el MDD solo comprende el riesgo de caída en el precio del activo, lo cual es una propiedad deseable si se quiere evitar el efecto de incluir indistintamente periodos de auge y caída de los mercados; ii) dado que es una medida de la magnitud y extensión de los eventos adversos, el MDD ofrece una optimización de portafolios basada en la minimización de los efectos las discontinuidades y el comportamiento irracional de los mercados; iii) dado que utiliza los retornos históricos directamente, el MDD evita supuestos de normalidad y errores de estimación<sup>28</sup>; iv) la diversificación del riesgo no depende de la calidad de la estimación de la matriz de correlación, ya que la disminución en el riesgo resulta de la reducción efectiva –no estimada- del riesgo en presencia de eventos negativos extremos.

Entonces, siguiendo a Reveiz y León (2008c), la optimización del portafolio resulta de la búsqueda de la combinación de activos que consigue el mínimo MDD para cada nivel de retorno total disponible en el mercado, lo cual resulta –al igual que usando el criterio clásico- en una frontera eficiente.

Las características de esta metodología la hacen útil para la construcción de portafolios de largo plazo, tales como aquellos que debe mantener un FPO. Como lo reconoce Magdon-Ismail y Atiya (2004), la mayoría de administradores de portafolio están interesados en el desempeño de largo plazo, en sistemas que puedan sobrevivir en el largo plazo, con mayor retorno y *drawdowns* reducidos. Adicionalmente, tal y como lo demuestran Reveiz y León (2008c), la utilización del MDD como medida de riesgo cumple con las medidas de coherencia teóricas desarrolladas por Artzner *et al.* (1998).

Tal como lo reconocen Reveiz y León (2008c), las ventajas de su propuesta metodológica implican un costo: la exigencia en términos computacionales. Esto se debe a que esta metodología no utiliza los momentos estimados de la distribución o la correlación estimada para hallar aquella combinación que ofrece el menor riesgo para cada nivel de retorno, sino que realiza la optimización sobre las series de tiempo directamente, lo cual debe hacerse recursivamente dada la inexistencia de una fórmula cerrada para su cálculo.

Adicionalmente, el criterio de *retorno total-máximo drawdown*, al igual que el criterio de *media-varianza*, es sensible a la extensión y elección de la serie de tiempo escogida. En el caso de la metodología propuesta, dado que la medida de riesgo se concentra en los eventos extremos adversos, es de suma importancia contar con series de tiempo lo suficientemente largas como para capturar los eventos extremos de todos los activos o factores de riesgo bajo consideración, así como la disminución en el riesgo conseguida al combinarlos. Los autores de la metodología, por lo tanto, recomiendan como mínimo contar con información que cubra un ciclo económico completo.

## **5. La asignación estratégica de activos para fondos de pensiones bajo el criterio de *retorno total-máximo drawdown***

Utilizando series de tiempo diarias para el periodo comprendido entre enero de 2000 y diciembre de 2007, se aplicó la metodología de Reveiz y León (2008c). Para la

---

<sup>28</sup> No se requiere estimar los momentos de la distribución (media, varianza, curtosis, sesgo, etc.), ni matriz de correlación alguna.

definición del *benchmark* se utilizaron índices o activos que fueran representativos de las principales clases de activos existentes a nivel global<sup>29</sup>: i) el mercado de renta fija local; ii) el mercado de renta variable local; iii) el mercado de renta fija externa; iv) el mercado de renta variable externa; y iv) la exposición cambiaria.

*Tabla No.1*  
*Series Utilizadas*

Clase	Factor de Riesgo	Descripción
<b>Renta Fija Local</b>	Deuda Interna de Colombia - TES	IDXTES (Reveiz y León, 2008a)
<b>Renta Variable Local</b>	IGBC	(Fuente: BVC, en Bloomberg)
<b>Renta Fija Externa</b>	Deuda Externa de Colombia	EMBI Global Colombia (Fuente: JPMorgan, en Bloomberg)
	Mercados Emergentes	EMBI+ (Fuente: JPMorgan, en Bloomberg)
	Estados Unidos	Índices de Bonos Soberanos 5-10y, 10+y e Índice de Bonos Corporativos AAA (Fuente: Merrill Lynch, en Bloomberg)
	Alemania	Índices de Bonos Soberanos 5-10y, 10+y (Fuente: Merrill Lynch, en Bloomberg)
	Reino Unido	
Japón		
<b>Renta Variable Externa</b>	Estados Unidos	S&P 500 (Fuente: Bloomberg)
	Mercados Internacionales	MSCI (Fuente: MSCI Barra, en Bloomberg)
	Mercados Emergentes	MSCI-EM (Fuente: MSCI Barra, en Bloomberg)
<b>Monedas*</b>	Dólar de Estados Unidos	(Fuente: Bloomberg)
	Euro	
	Libra Esterlina	
	Yen de Japón	

(\*) El factor de riesgo dólar de Estados Unidos corresponde al precio del dólar en pesos colombianos; el resto de monedas corresponde al precio en dólares de cada una de ellas.

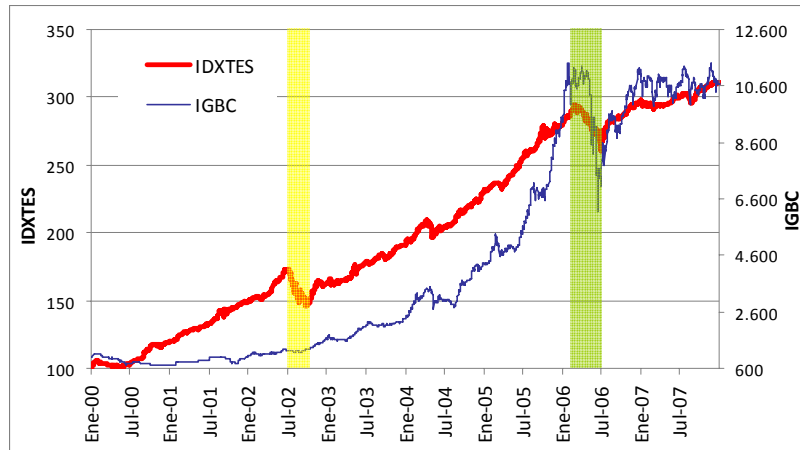
Pese a que entre las recomendaciones de Reveiz y León (2008c) está el utilizar series de tiempo bastante extensas, con las cuales se capture de mejor manera los comportamientos extremos de los activos o factores de riesgo, los autores escogieron el periodo 2000-2007 por la falta de información del mercado local. El principal instrumento del mercado local de renta fija, los TES, es incluido utilizando el índice IDXTES desarrollado y calculado por Reveiz y León (2008a). El mencionado índice cuenta con información desde principios del año 2000, lo cual se explica por el incipiente desarrollo y la baja liquidez del mercado antes de ese año, lo que resulta en la imposibilidad de que el índice cumpliera con los requerimientos mínimos de liquidez y replicabilidad establecidos por los autores.

Esta limitación, pese a ir en contra de las recomendaciones del modelo, obedece a la inexistencia de la información y no puede ser solucionada. No obstante, se debe destacar que el periodo escogido (2000-2007) presentó varios eventos al interior del

<sup>29</sup> La escogencia de los índices y activos que componen cada clase obedeció también a la disponibilidad de series de datos. Resalta el caso del mercado de renta fija local corporativa, el cual ha cobrado relevancia en los últimos años, pero es reducido (representa el 2% del PIB según Rudolph *et al.* (2006)), dista aún de ser líquido y no permite elaborar un índice que cumpla con criterios mínimos de liquidez, representatividad y replicabilidad; adicionalmente, por ser un mercado relativamente nuevo, su inclusión exigiría utilizar series de tiempo aún más reducidas.

mercado de capitales local, los cuales, teniendo en cuenta el sesgo interno o *home bias*, permiten capturar el comportamiento de los factores de riesgo que se supone pueden ser más relevantes para un inversionista local. Como se aprecia en el Gráfico No.3, los eventos a que se hace referencia sucedieron en el año 2002 y 2006.

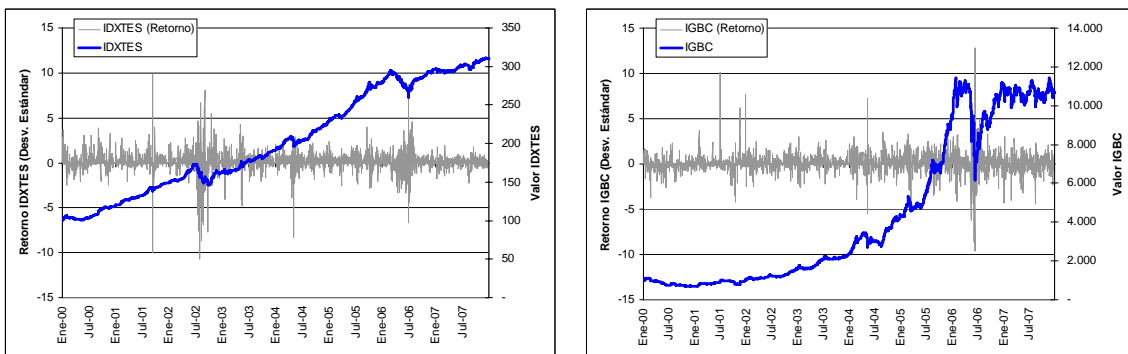
Gráfico No.3  
*IDXTES e IGBC (2000-2007)*



Fuente: Banco de la República y Reveiz y León (2008a).

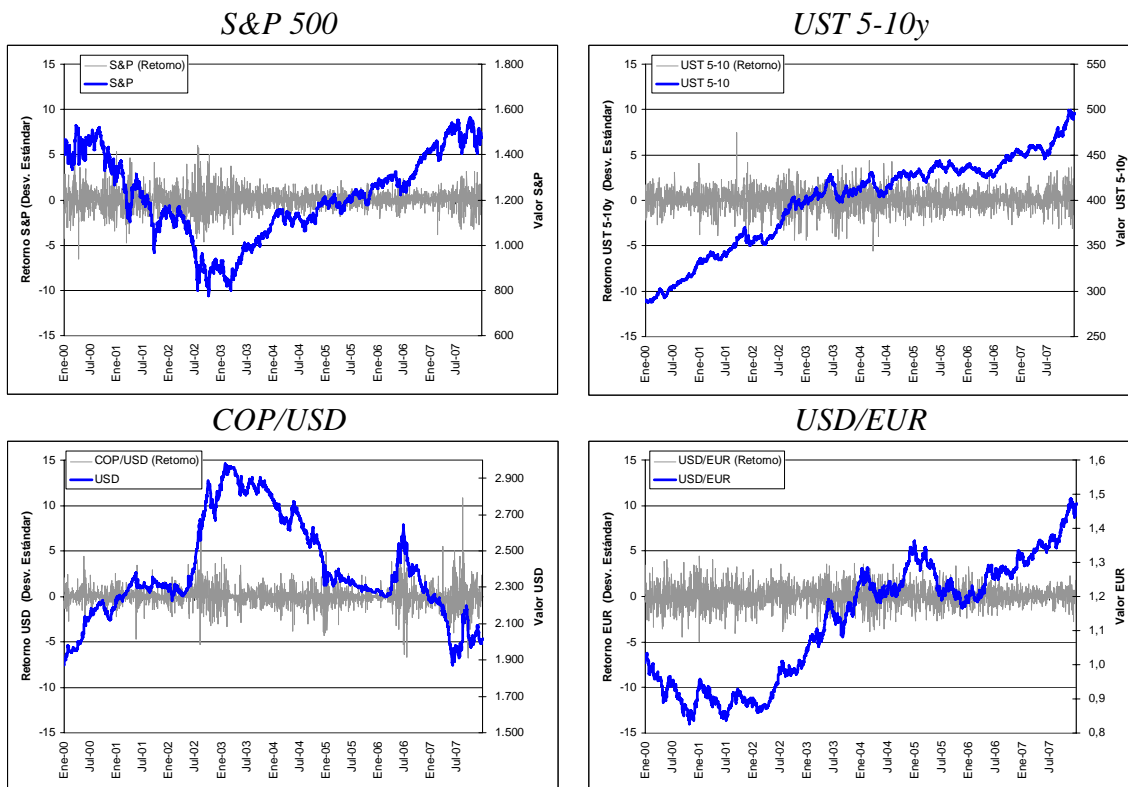
Con el fin de corroborar la conveniencia de utilizar una medida de riesgo como el MDD, a continuación se presenta evidencia del grado de alejamiento que tienen algunos activos o factores de riesgo con respecto al supuesto de normalidad. Primero se verifica gráficamente la magnitud estandarizada<sup>30</sup> de los cambios diarios que tienen las series de tiempo del IDXTES, IGBC, S&P 500, UST 5-10, la tasa de cambio peso-dólar y dólar-euro, y luego se contrasta la ocurrencia efectiva de los movimientos extremos con el supuesto de normalidad.

Gráfico No.4  
*Retornos Estandarizados de Algunos Activos o Factores de Riesgo*  
*IDXTES* *IGBC*



<sup>30</sup> Se refiere a expresar los retornos diarios en términos de desviaciones estándar del activo o factor de riesgo. El supuesto de normalidad indica que retornos estandarizados superiores a  $\pm 3$  desviaciones estándar solo ocurren en un 0.13% de las ocasiones aproximadamente.





Fuente: Cálculo de los autores con información de varias fuentes (ver Tabla No.1).

Gráficamente se comprueba que el comportamiento del retorno de los activos dista de ser normal, en especial aquellos que pertenecen al mercado de capitales local, así como la tasa de cambio peso-dólar. En la Tabla No.2 se verifica numéricamente que la ocurrencia de eventos extremos excede los supuestos de normalidad.

Tabla No.2  
Ocurrencia Efectiva de Eventos Extremos

Magnitud del Evento (Número X de Desviaciones Estándar)	Probabilidad de Ocurrencia (Normal)	Ocurrencia Efectiva (2000-2007)					
		IDXTES	IGBC	S&P500 <sup>31</sup>	UST 5-10	USD/EUR	COP/USD
-1,645 > X > 1,645	10,00%	7,123%	7,158%	9,692%	10,788%	11,027%	8,767%
-2 > X > 2	4,55%	4,829%	4,521%	6,301%	5,993%	6,815%	5,959%
-3 > X > 3	0,27%	1,918%	1,610%	1,918%	1,507%	1,507%	2,192%
-4 > X > 4	6,33E-05	0,959%	0,890%	0,616%	0,445%	0,205%	0,788%
-5 > X > 5	5,73E-07	0,548%	0,548%	0,205%	0,103%	0,000%	0,342%
-10 > X > 10	0,00E+00	0,034%	0,068%	0,000%	0,000%	0,000%	0,034%

Fuente: Cálculo de los autores con información de varias fuentes (ver Tabla No.1).

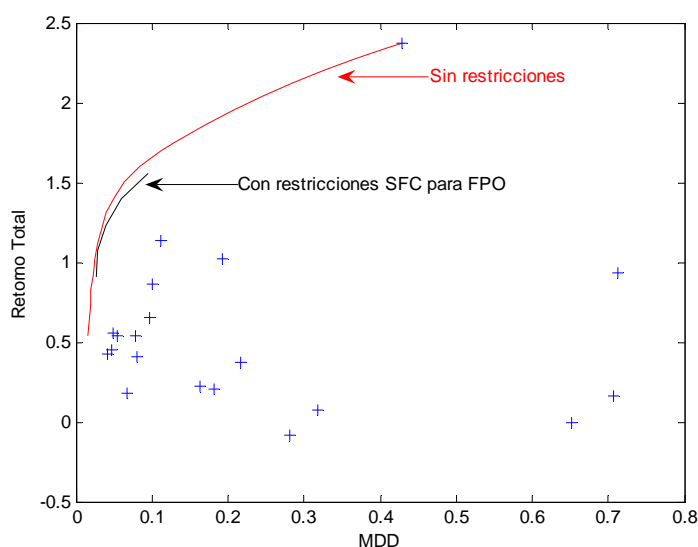
<sup>31</sup> Vale la pena recordar que el índice accionario S&P 500, pese a no haber tenido movimientos tan extremos como el IDXTES o el IGBC en el periodo en cuestión (2000-2007), en el pasado experimentó cambios de -19.71 y -11.93 desviaciones estándar, el 19 de octubre de 1987 y el 28 de octubre de 1929 respectivamente. Estos eventos, según la probabilidad de ocurrencia basada en la normalidad, nunca en la historia de la humanidad deberían haber sucedido.

Por ejemplo, se encontró que el comportamiento del IGBC presentó en 16 ocasiones retornos que igualan o exceden las cinco desviaciones estándar de magnitud, de las cuales 6 ocasiones tuvieron lugar en el mes de junio de 2006; en ese mismo mes el comportamiento del IDXTES presentó en dos ocasiones cambios superiores a cinco desviaciones estándar<sup>32</sup>. El supuesto de normalidad señala que tales eventos solo suceden una vez cada 4779 años aproximadamente.

Lo anterior corrobora la inconveniencia de utilizar el supuesto de normalidad para describir la dinámica de estos activos, lo cual implica que un ejercicio de optimización basado en el criterio de *media-varianza* es, por construcción, inadecuado.

El ejercicio consistió entonces en la generación de veinte portafolios eficientes en el espacio *retorno total-máximo drawdown*<sup>33</sup>, lo cual resulta en el proceso de definición de las ponderaciones al interior del *benchmark* de la asignación estratégica de activos. La frontera eficiente se presenta a continuación (línea roja), junto con la combinación de retorno total y MDD de cada activo individual, así como la frontera eficiente que resulta de aplicar las restricciones que impone la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) a los FPO (línea negra)<sup>34</sup>:

*Gráfico No.5*  
*Frontera Eficiente Retorno Total-Máximo Drawdown*



Fuente: Cálculo de los autores

<sup>32</sup> El día 12 de junio de 2006 el IGBC cayó 11.1% y el día siguiente un 9.1%, o sea que el mercado accionario perdió más de una vigésima parte de su valor en dos días. Un inversionista que hubiera invertido 100 pesos en el IGBC a principio de junio habría terminado el mes con menos de 82 pesos, una pérdida de casi una quinta parte de su inversión.

<sup>33</sup> El ejercicio incluyó restricciones de no negatividad (no venta en corto) de la ponderación de los activos, así como que la exposición en moneda extranjera sea inferior o igual a la posición en activos que sean denominados en esa moneda.

<sup>34</sup> Se comprueba el efecto negativo de las restricciones de la SFC sobre las combinaciones riesgo-retorno que pueden ofrecer los FPO a sus afiliados. Dadas las dificultades en obtener series de tiempo confiables y completas para el periodo en cuestión, las restricciones de la SFC se generalizaron de la siguiente forma: máximo 60% en deuda pública (local y externa); máximo 40% en renta variable local; máximo 40% en renta fija y variable externa; máximo 30% en exposición cambiaria no cubierta.

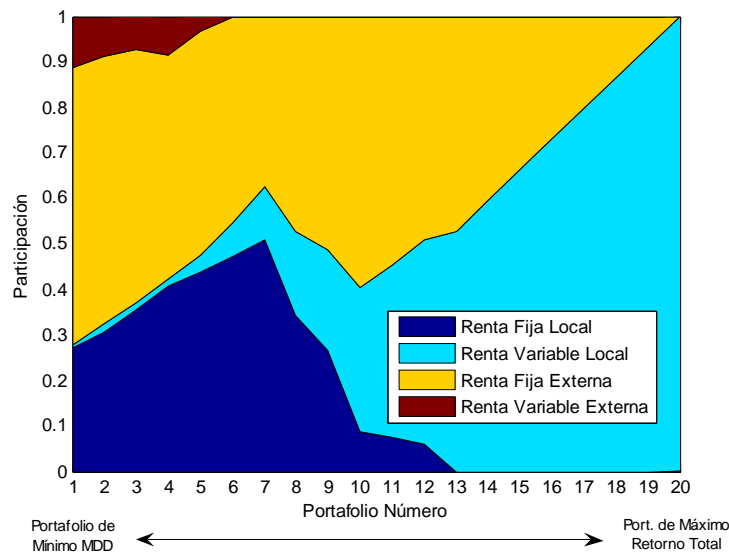
La composición de los veinte portafolios que conforman la frontera eficiente en el espacio *retorno total-máximo drawdown* se presenta en la Tabla No.3 y Gráfico No.6; se presentan los portafolios desde el de mínimo MDD hasta el de máximo retorno total.

*Tabla No.3*  
*Composición de los portafolios por clases de activos*  
*(como porcentaje del total del portafolio)*

MDD	Retorno Acum.	Renta Fija Local	Renta Variable Local	Renta Fija Externa	Renta Variable Externa
1,62%	53,79%	27,4%	0,4%	61,0%	11,3%
1,70%	63,45%	30,8%	1,6%	59,0%	8,6%
1,86%	73,10%	35,6%	1,4%	55,7%	7,2%
2,02%	82,75%	40,8%	1,4%	49,3%	8,5%
2,22%	92,41%	44,0%	3,5%	49,2%	3,4%
2,42%	102,06%	47,2%	7,5%	45,3%	0,0%
2,79%	111,71%	51,0%	11,6%	37,4%	0,0%
3,38%	121,36%	34,3%	18,4%	47,3%	0,0%
4,01%	131,02%	26,6%	22,2%	51,1%	0,0%
5,15%	140,67%	8,9%	31,5%	59,6%	0,0%
6,41%	150,32%	7,6%	38,0%	54,5%	0,0%
8,38%	159,98%	5,9%	45,2%	48,9%	0,0%
11,24%	169,63%	0,0%	52,7%	47,3%	0,0%
14,47%	179,28%	0,0%	59,5%	40,5%	0,0%
18,13%	188,93%	0,0%	66,2%	33,8%	0,0%
22,13%	198,59%	0,0%	73,0%	27,0%	0,0%
26,51%	208,24%	0,0%	79,7%	20,3%	0,0%
31,40%	217,89%	0,0%	86,5%	13,5%	0,0%
36,84%	227,55%	0,0%	93,2%	6,8%	0,0%
42,87%	237,20%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%

Fuente: Cálculo de los autores

*Gráfico No.6*  
*Composición de los Portafolios Eficientes por Clases de Activos*



Fuente: Cálculo de los autores

La Tabla No.3 muestra que la ponderación al interior del *benchmark* aprovecha de manera importante la diversificación internacional, tal como lo señala la teoría.

En el proceso de diversificación internacional de este ejercicio resalta la participación de la inversión en renta fija externa. Al descomponer esta clase de la inversión se evidencia que los portafolios de menor riesgo asignan una porción importante a los índices de renta fija de títulos soberanos de países desarrollados, los cuales suelen ofrecer refugio a los inversionistas en tiempos de volatilidad de los mercados internacionales. Conforme los portafolios se alejan del portafolio de mínimo riesgo, las combinaciones eficientes incluyen una mayor proporción de bonos corporativos (AAA) de los Estados Unidos, los cuales dan paso posteriormente a los índices representativos de deuda soberana de mercados emergentes, como se muestra en la Tabla No.4.

*Tabla No.4  
Composición de Renta Fija Externa  
(como porcentaje del total del portafolio)*

<b>MDD</b>	<b>Retorno Acum.</b>	<b>Mercados Emergentes</b>	<b>Soberanos Desarrollados</b>	<b>Corporativos AAA US</b>
1,62%	53,79%	0,0%	55,3%	5,7%
1,70%	63,45%	0,0%	50,6%	8,4%
1,86%	73,10%	0,1%	38,2%	17,4%
2,02%	82,75%	0,0%	30,7%	18,6%
2,22%	92,41%	0,2%	23,0%	26,1%
2,42%	102,06%	0,1%	13,1%	32,2%
2,79%	111,71%	22,8%	0,0%	28,8%
3,38%	121,36%	60,8%	0,0%	18,5%
4,01%	131,02%	90,7%	4,1%	0,6%
5,15%	140,67%	48,2%	11,4%	0,0%
6,41%	150,32%	47,9%	6,6%	0,0%
8,38%	159,98%	48,9%	0,0%	0,0%
11,24%	169,63%	47,3%	0,0%	0,0%
14,47%	179,28%	40,5%	0,0%	0,0%
18,13%	188,93%	33,8%	0,0%	0,0%
22,13%	198,59%	27,0%	0,0%	0,0%
26,51%	208,24%	20,3%	0,0%	0,0%
31,40%	217,89%	13,5%	0,0%	0,0%
36,84%	227,55%	6,8%	0,0%	0,0%
42,87%	237,20%	0,0%	0,0%	0,0%

Fuente: Cálculo de los autores

Por último en el proceso de asignación estratégica de activos se encuentra la definición de la exposición cambiaria. De acuerdo con los resultados del modelo, la diversificación internacional resultante de la optimización de las ponderaciones al interior del *benchmark* está acompañada de una importante exposición al riesgo cambiario, la cual en promedio se acerca al 40%, como muestra la Tabla No.5.

*Tabla No.5*  
*Composición de los Portafolios por Exposición Cambiaria*  
*(como porcentaje del total del portafolio)*

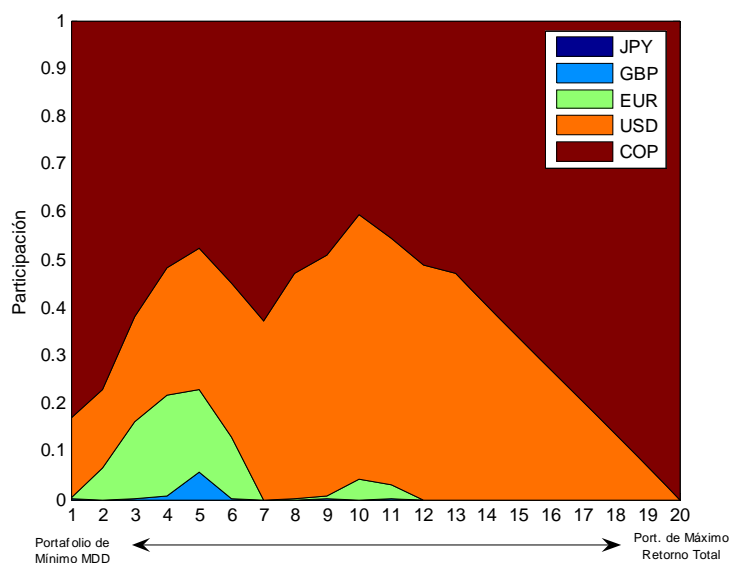
<b>MDD</b>	<b>Retorno Acum.</b>	<b>Activos Locales</b>	<b>Activos Externos</b>	<b>Exposición M/E</b>
1,62%	53,79%	27,7%	72,3%	17,0%
1,70%	63,45%	32,3%	67,7%	22,8%
1,86%	73,10%	37,1%	62,9%	38,3%
2,02%	82,75%	42,2%	57,8%	48,4%
2,22%	92,41%	47,4%	52,6%	52,6%
2,42%	102,06%	54,7%	45,3%	45,2%
2,79%	111,71%	62,6%	37,4%	37,4%
3,38%	121,36%	52,7%	47,3%	47,3%
4,01%	131,02%	48,9%	51,1%	51,1%
5,15%	140,67%	40,4%	59,6%	59,6%
6,41%	150,32%	45,5%	54,5%	54,5%
8,38%	159,98%	51,1%	48,9%	48,9%
11,24%	169,63%	52,7%	47,3%	47,3%
14,47%	179,28%	59,5%	40,5%	40,5%
18,13%	188,93%	66,2%	33,8%	33,8%
22,13%	198,59%	73,0%	27,0%	27,0%
26,51%	208,24%	79,7%	20,3%	20,3%
31,40%	217,89%	86,5%	13,5%	13,5%
36,84%	227,55%	93,2%	6,8%	6,8%
42,87%	237,20%	100,0%	0,0%	0,0%

Fuente: Cálculo de los autores

La posición en moneda extranjera oscila entre 0% y 59,6%, donde la primera corresponde al portafolio de máximo retorno total, el cual se consigue al invertir por completo en renta variable en el mercado local. El portafolio de mínimo MDD presenta una exposición cambiaria de 17%, la cual resulta de un portafolio compuesto en 27,7% por activos locales y 72,3% por activos externos, de los cuales se cubren tres cuartas partes aproximadamente.

La descomposición de los portafolios por exposición cambiaria se concentra en posiciones en pesos y dólares, donde el euro, la libra esterlina y el yen tienen una baja participación. Esta composición coincide con el *home bias*, el cual señala que existirá un sesgo a mantener activos denominados en moneda local, y con la moneda de reserva más utilizada en el mercado colombiano, el dólar.

*Gráfico No.7*  
*Composición de los Portafolios Eficientes por Moneda*



Fuente: Cálculo de los autores

*Tabla No.6*  
*Composición de la Exposición Cambiaria*  
*(como porcentaje del total del portafolio)*

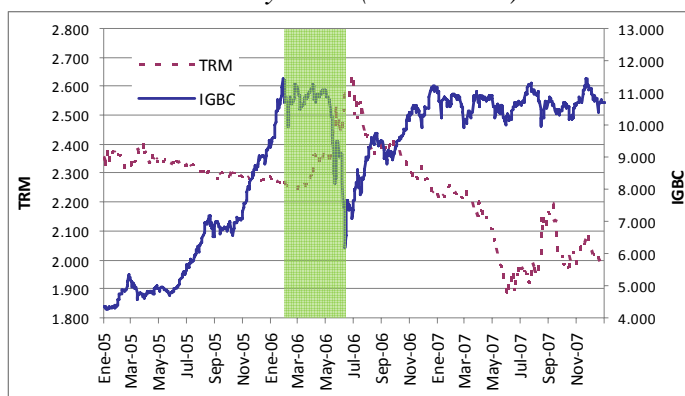
MDD	Retorno Acum.	Exposición M/E	Exposición USD	Exposición EUR	Exposición GBP	Exposición JPY
1,62%	53,79%	17,0%	17%	0%	0%	0%
1,70%	63,45%	22,8%	16%	7%	0%	0%
1,86%	73,10%	38,3%	22%	16%	0%	0%
2,02%	82,75%	48,4%	27%	21%	1%	0%
2,22%	92,41%	52,6%	30%	17%	6%	0%
2,42%	102,06%	45,2%	32%	13%	0%	0%
2,79%	111,71%	37,4%	37%	0%	0%	0%
3,38%	121,36%	47,3%	47%	0%	0%	0%
4,01%	131,02%	51,1%	51%	1%	0%	0%
5,15%	140,67%	59,6%	55%	4%	0%	0%
6,41%	150,32%	54,5%	51%	3%	0%	0%
8,38%	159,98%	48,9%	49%	0%	0%	0%
11,24%	169,63%	47,3%	47%	0%	0%	0%
14,47%	179,28%	40,5%	41%	0%	0%	0%
18,13%	188,93%	33,8%	34%	0%	0%	0%
22,13%	198,59%	27,0%	27%	0%	0%	0%
26,51%	208,24%	20,3%	20%	0%	0%	0%
31,40%	217,89%	13,5%	14%	0%	0%	0%
36,84%	227,55%	6,8%	7%	0%	0%	0%
42,87%	237,20%	0,0%	0%	0%	0%	0%

Fuente: Cálculo de los autores

El mantener una posición estructural en activos externos en moneda extranjera, como la que resulta de este ejercicio, se justifica por la conveniencia de mantener en el portafolio factores de riesgo cuyo comportamiento durante una crisis del mercado local tienden a mitigar el impacto de la misma<sup>35</sup> y viceversa.

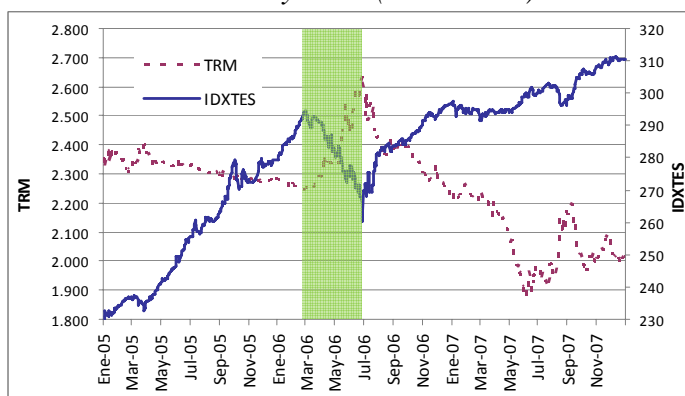
En el caso colombiano, los episodios recientes de crisis en el mercado de capitales local han estado acompañados de aumentos en el retorno de los activos denominados en moneda extranjera. En la muestra utilizada para este ejercicio se destacan dos episodios de caída del mercado de capitales local: i) durante el primer semestre de 2006, cuando el mercado de renta variable y renta fija local sufrieron una abrupta caída y ii) a mediados de 2002, cuando el mercado de deuda pública sufrió un fuerte revés. Ambos episodios estuvieron acompañados por un aumento de la devaluación y, por ende, de la rentabilidad de los activos denominados en moneda extranjera, tal como lo muestran los gráficos siguientes:

Gráfico No.8  
IGBC y TRM (2005-2007)



Fuente: Cálculo de los autores

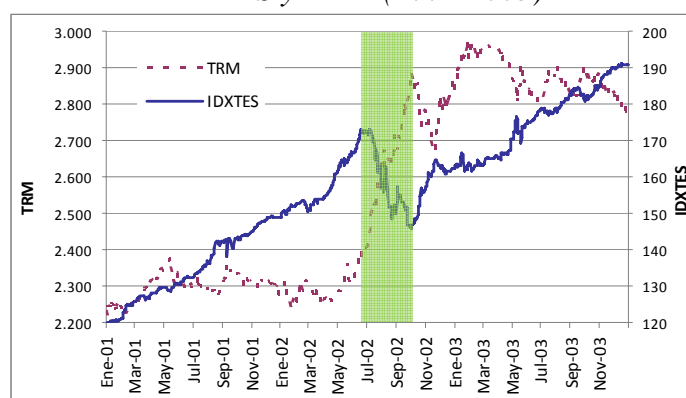
Gráfico No.9  
IDXTES y TRM (2005-2007)



Fuente: Cálculo de los autores

<sup>35</sup> De esta manera, la aproximación a través del criterio *retorno total-máximo drawdown* difiere del criterio *media-varianza*. Éste último criterio busca la diversificación a partir de los comportamientos promedio o típicos de los activos, mientras que el criterio *retorno total-máximo drawdown* se ocupa de la diversificación en los eventos extremos negativos de los mercados.

Gráfico No.10  
IDXTES y TRM (2001-2003)



Fuente: Cálculo de los autores

En suma, la optimización de portafolios en el espacio *retorno total-máximo drawdown* busca aquellas combinaciones de factores de riesgo o activos que evitan caídas pronunciadas en el valor del portafolio para cada nivel posible de retorno total, las cuales juzga como eficientes. En el caso colombiano, en el periodo 2000-2007, dichas combinaciones eficientes incluyen en todos los casos exposiciones en moneda extranjera<sup>36</sup>.

## 6. Comparación de los resultados del criterio de *media-varianza* y *retorno total-máximo drawdown*

Pese a que las diferencias metodológicas en la medición de riesgo hacen imposible su comparación en un espacio común<sup>37</sup>, sí es posible llevar a cabo una comparación de ambos criterios a partir de los resultados de cada curva eficiente en términos de creación de riqueza; esto es, revisar si alguna de las fronteras logra la misma acumulación de riqueza para todos los portafolios y logra mayor acumulación en por lo menos uno de ellos, en lo que se aproximaría a un concepto de dominancia de un criterio sobre otro.

Para tal fin se revisará el desempeño efectivo de cada una de las fronteras (*media-varianza* y *retorno total-máximo drawdown*) en términos de i) valor final de cada portafolio y ii) en términos de retorno promedio anual. Posteriormente se buscará explicar el origen de la diferencia en creación de valor entre criterios.

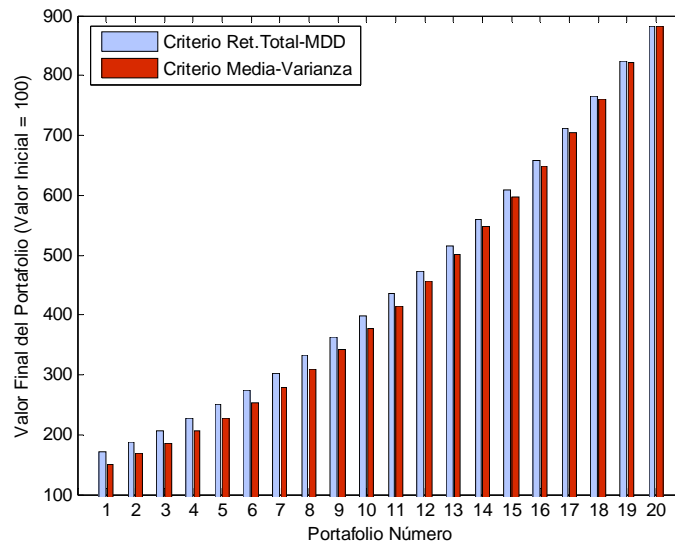
En el primer caso, para comparar el valor final de los portafolios conseguidos por cada criterio, se supuso que un individuo invirtió 100 pesos el día 2 de enero de 2000 en cada uno de los veinte portafolios que compone cada frontera de cada criterio, luego de lo cual se utilizarán los retornos realizados de los activos para determinar el valor final de los 100 pesos en el día 31 de diciembre de 2007. La Gráfica No.11 muestra el valor final de la inversión de cada uno de los veinte portafolios de cada criterio.

<sup>36</sup> Con excepción del portafolio de máximo retorno, el cual, por construcción, está compuesto por un 100% del activo que mayor retorno total consiguió (IGBC).

<sup>37</sup> No es posible transformar o expresar el *máximo drawdown* en desviaciones estándar o viceversa.



*Gráfico No.11*  
*Valor Final de la Inversión por Criterio*

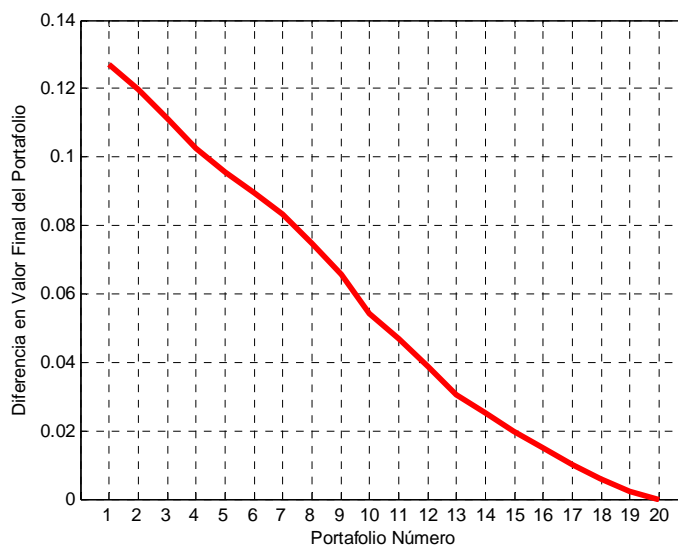


Fuente: Cálculo de los autores

Gráficamente se observa que en cada uno de los portafolios el criterio *retorno total-máximo drawdown* tuvo un mejor resultado en términos del valor final de la inversión, excepto en el vigésimo portafolio, en el cual obtuvo exactamente el mismo resultado<sup>38</sup>.

La ganancia en términos de valor final es mayor en los portafolios más cercanos al de mínimo riesgo: el portafolio de mínimo MDD obtuvo un valor final 12.73% mayor que el de mínima varianza, tal como se muestra en el Gráfico No.12, a continuación:

*Gráfico No.12*  
*Diferencia en el Valor Final de la Inversión por Criterio*

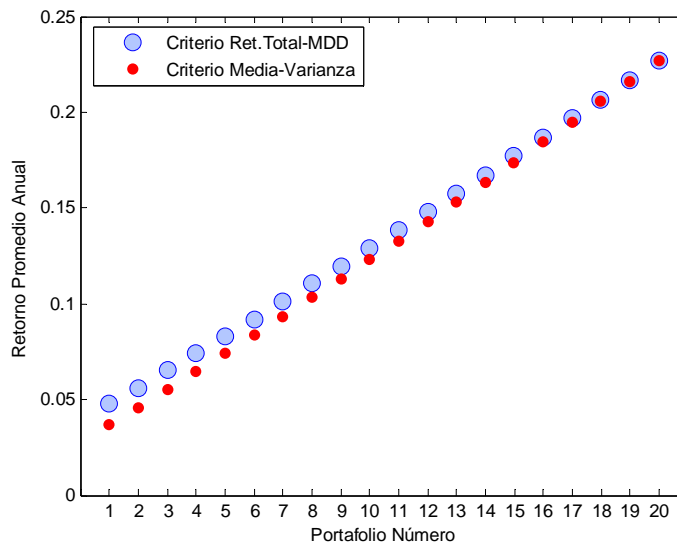


Fuente: Cálculo de los autores

<sup>38</sup> En el último portafolio, correspondiente al de máximo riesgo dentro de la frontera eficiente, ambos modelos obtienen la misma ponderación, 100% en renta variable local.

El análisis en términos de retorno promedio anual consistió en la comparación del retorno efectivo obtenido por cada uno de los portafolios que componen cada una de las fronteras eficientes, el cual se expresó como promedio anual. Al igual que con la comparación en términos de valor final de la inversión, el criterio *retorno total-máximo drawdown* domina al criterio de *media-varianza*.

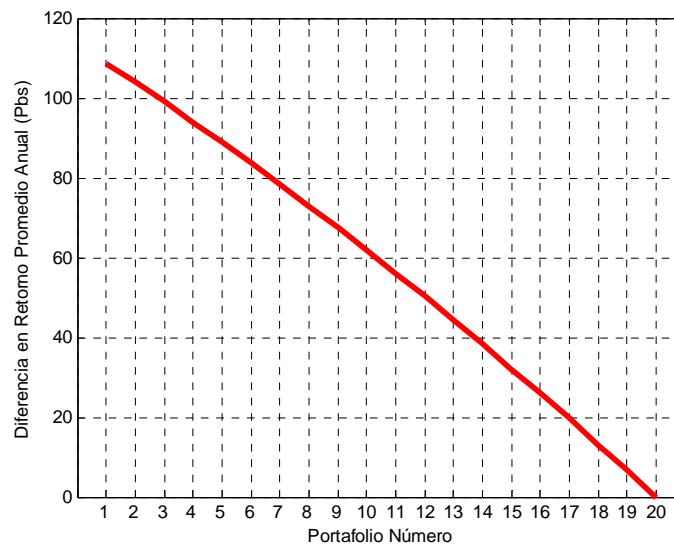
*Gráfico No.13*  
*Retorno Promedio Anual de la Inversión por Criterio*



Fuente: Cálculo de los autores

La diferencia en puntos básicos (Pbs) del retorno promedio de cada frontera muestra que el portafolio de mínimo riesgo en el espacio *retorno total-máximo drawdown* obtuvo una rentabilidad promedio superior en 108.73 Pbs, tal como se muestra en el Gráfico No.14.

*Gráfico No.14*  
*Diferencia en el Retorno Promedio Anual de la Inversión por Criterio*

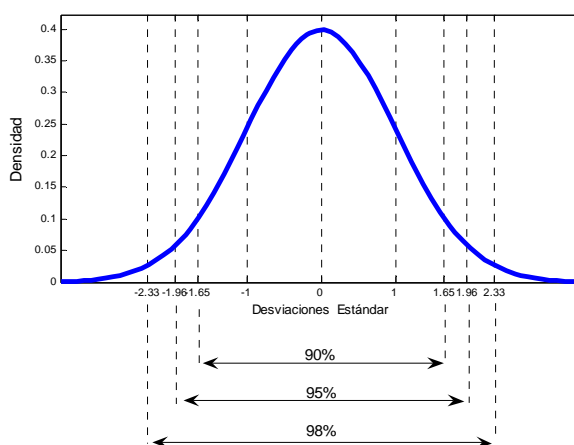


Fuente: Cálculo de los autores

Esta diferencia en la capacidad de cada criterio para maximizar la riqueza puede explicarse por la forma en que cada optimización se aproxima al riesgo. El criterio *media-varianza*, por estar basado en la distribución normal de los retornos de los activos, confía en que, dada su baja probabilidad de ocurrencia, los eventos extremos no tienen un impacto relevante en el retorno promedio de los activos. El criterio *retorno rotal-máximo drawdown* se concentra en los eventos extremos inherentes a la dinámica de los activos, por lo cual reconoce que el valor de un portafolio puede ser afectado seriamente por eventos de gran magnitud; al respecto, Taleb (2007) afirma que la magnitud de este tipo de eventos puede ser de tal proporción que la probabilidad de ocurrencia es poco relevante, por lo que un reducido número de eventos puede determinar el resultado final.

De acuerdo con lo anterior, con el fin de esclarecer la fuente de las diferencias en retorno (total y promedio) entre criterios, se analizó la fuente de la rentabilidad de cada uno, discriminando entre la fuente de rentabilidad típica y la fuente de rentabilidad extrema, para lo cual se utilizaron, a manera de ejemplo, tres límites conceptuales de lo que puede considerarse un evento extremo: cambios superiores a  $\pm 1,645$ ,  $\pm 1,96$  y  $\pm 2,33$  desviaciones estándar<sup>39</sup>, las cuales corresponden a niveles de confianza del 90%, 95% y 98% respectivamente, tal como muestra el Gráfico No.15.

*Gráfico No.15  
Distribución Normal y Niveles de Confianza Escogidos*



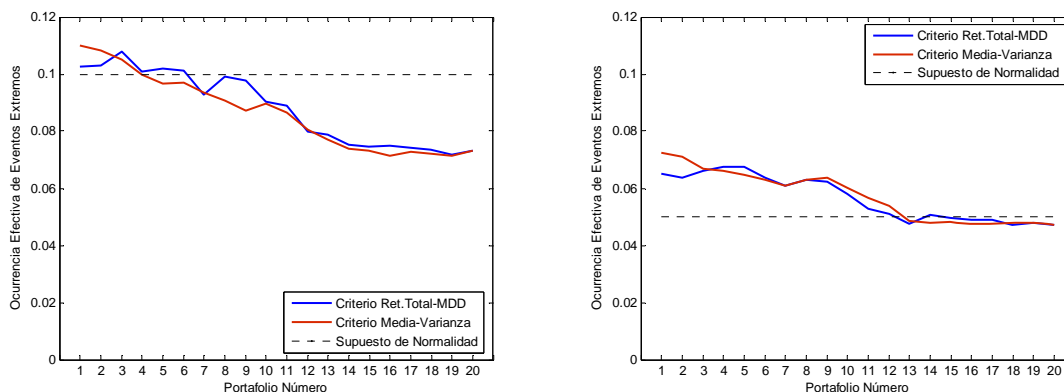
Fuente: Elaboración de los autores

Utilizando los límites de  $\pm 1,645$ ,  $\pm 1,96$  y  $\pm 2,33$  desviaciones estándar se comparó la ocurrencia de eventos extremos de cada portafolio, para cada criterio. Para el primer límite los eventos observados para cada portafolio estuvieron en su mayoría por debajo

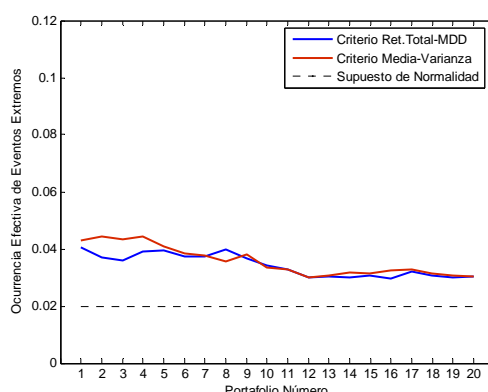
<sup>39</sup> Los límites de  $\pm 1,645$ ,  $\pm 1,96$  y  $\pm 2,33$  desviaciones estándar corresponden a 10%, 5% y 2% de ocurrencia de eventos extremos positivos o negativos. El primer y tercer límite corresponde al nivel de confianza de 95% y 99% sugerido por Riskmetrics y el BIS para calcular el Valor en Riesgo sobre la cola izquierda de la distribución normal; la transformación de probabilidad de ocurrencia de evento exclusivamente negativo (cola izquierda) a negativo y positivo (cola izquierda y derecha) obedece a que se busca evaluar el impacto que tienen los eventos extremos en el valor del portafolio, cualquiera sea su signo.

del 10% supuesto por la distribución normal, mientras que para el segundo y tercer límite se hizo evidente un mayor alejamiento con respecto al supuesto de normalidad<sup>40</sup>.

**Gráfico No.16**  
**Ocurrencia Efectiva de Eventos Extremos**  
*(como participación del total de observaciones)*  
 $> \pm 1.645$  desviaciones estándar (90% de confianza)       $> \pm 1.96$  desviaciones estándar (95% de confianza)



$> \pm 2.33$  desviaciones estándar  
(98% de confianza)



Fuente: Cálculo de los autores

De los gráficos anteriores se puede corroborar, una vez más, que los eventos extremos ocurren con mayor frecuencia de la esperada por el supuesto de normalidad, inclusive al conformar portafolios. Al comparar los criterios de *retorno total-máximo drawdown* y *media-varianza* no se encuentran diferencias significativas en cuanto a la ocurrencia de eventos extremos al interior de los portafolios que conforman las fronteras eficientes.

Dado que la ocurrencia de eventos extremos no parece variar entre criterios, y en especial atención a que lo más relevante en este análisis no es la ocurrencia, sino la

<sup>40</sup> Que para el primer límite las ocurrencias efectivas se encuentren por debajo de las supuestas por la distribución normal, y que los otros dos límites –más extremos- se encuentren por encima de las supuestas por la distribución normal, podría indicar que la distribución es más apuntalada en el centro y con colas más anchas, como es el caso de la distribución t-student. Al respecto, varios estudios prueban la conveniencia de utilizar una distribución-t para aproximar el exceso de kurtosis (colas anchas) en los retornos de los activos (Blattberg y Gonedes, 1974; Theodossiou, 1998; Huisman, Koedijk, Kool y Palm F., 1998).

incidencia de los eventos extremos o el resultado acumulado de dichos eventos, se calculó la contribución neta de la exposición a retornos extremos.

La contribución neta de la exposición a retornos extremos corresponde a la proporción del valor final del portafolio que fue generada por la exposición a movimientos que excedieron los límites de desviaciones estándar antes definidos. Si la contribución neta tiene signo positivo indicaría que la exposición a retornos extremos generó un retorno neto positivo para el portafolio; si la contribución neta tiene signo negativo indicaría que la exposición a retornos extremos tuvo un efecto adverso sobre el valor del portafolio.

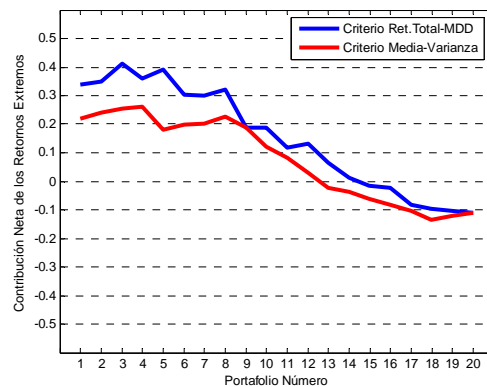
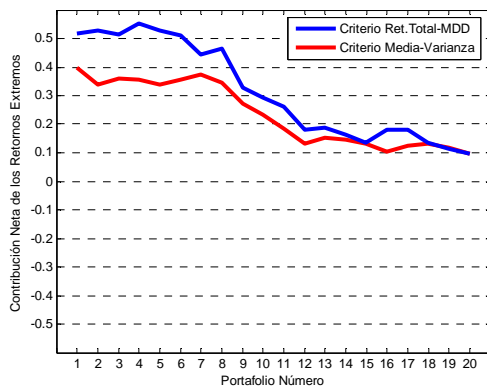
Si uno de los criterios exhibe una mayor contribución neta de la exposición a retornos extremos, esto indicaría que éste es capaz de aprovechar la asimetría que existe en la ocurrencia de eventos extremos, optimizando así la exposición a eventos extremos negativos y generando valor para el portafolio.

A continuación se presenta la contribución neta de la exposición a retornos extremos para ambos criterios, para los límites de desviaciones estándar antes señalados:

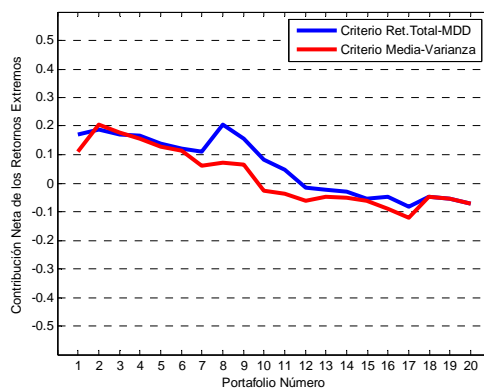
*Gráfico No.17*  
*Contribución Neta de la Exposición a Retornos Extremos*  
*(como participación del total de observaciones)*

*>±1.645 desviaciones estándar*

*>±1.96 desviaciones estándar*



*>±2.33 desviaciones estándar*



Fuente: Cálculo de los autores

Los resultados señalan que el criterio *retorno total-máximo drawdown* domina al criterio clásico de *media-varianza* cuando se consideran eventos extremos a todos aquellos cambios superiores a  $\pm 1,645$  y  $\pm 1,96$  desviaciones estándar, lo cual indicaría que el criterio propuesto consigue una mejor combinación de activos para optimizar la exposición a eventos extremos; para el caso de  $\pm 2.33$  el criterio *retorno total-máximo drawdown* es mejor en 18 de los 20 portafolios. Para el caso de  $\pm 1,645$  desviaciones estándar, el criterio *retorno total-máximo drawdown* consigue una contribución neta de los eventos extremos un 8% por encima de la correspondiente al criterio clásico *media-varianza*, y para  $\pm 1,645$  y  $\pm 2.33$  desviaciones estándar dicha mayor contribución neta es del 7,54% y 3,52%, respectivamente.<sup>41</sup>

Lo anterior, unido al hecho que la frontera del criterio *retorno total-máximo drawdown* domina a la frontera del criterio clásico de *media-varianza* en cuanto a retorno total y promedio se refiere, señala que existe evidencia de que el criterio propuesto puede proporcionar ciertas ventajas frente a la optimización de portafolios tradicional. Se destaca la posibilidad de conseguir combinaciones de retorno-riesgo que, a partir de la optimización de la incidencia de eventos extremos, permiten una mayor acumulación de riqueza para el inversionista.

## 7. Conclusiones y recomendaciones

Tal como se ha demostrado en este documento, pese a ser la base de la teoría de portafolios, el criterio *media-varianza* se caracteriza por abordar el riesgo de una manera que puede ser inapropiada para conseguir objetivos de largo plazo de maximización de riqueza. Esta falencia se explica en buena parte por la incapacidad de ese criterio para considerar la incidencia de los eventos extremos en la creación de valor en un portafolio, lo cual afecta su capacidad de conseguir una asignación estratégica de activos.

A partir de las ventajas del criterio *retorno total-máximo drawdown* se llevó a cabo un ejercicio consistente en la asignación estratégica de activos para portafolios de largo plazo, como es el caso de los FPO en Colombia. Los resultados confirman la necesidad de diversificar internacionalmente y de mantener exposición cambiaria en portafolios de largo plazo, así como considerar el impacto de los eventos extremos, para conseguir la maximización de la riqueza de un inversionista interesado en el largo plazo, como lo es un afiliado al sistema pensional.

Los autores reconocen que una de las principales recomendaciones de la metodología desarrollada por Reveiz y León (2008c), la extensión de las series de tiempo, no puede

---

<sup>41</sup> Estos resultados corresponden a una prueba “*in-the-sample*”, es decir, que prueba la eficiencia del modelo con los mismos datos con los que se realizó el ejercicio de optimización. Los autores reconocen que lo ideal es llevar a cabo una prueba “*out-the-sample*”, donde se prueba la eficiencia del modelo con observaciones no incluidas en el proceso de optimización del mismo. Este último tipo de prueba exige contar con series de tiempo lo suficientemente largas como para utilizar una parte para realizar la optimización y otra para realizar las pruebas de eficiencia, por lo cual, en consideración de las limitaciones en cuanto a longitud de las series de tiempo, los autores consideraron no tener la información suficiente para su correcta realización. Como complemento a las pruebas presentadas se realizaron ejercicios basados en muestreos aleatorios no ordenados de los datos disponibles para comparar la eficiencia de los criterios, cuyos resultados no difirieron significativamente de los aquí presentados.

ser acogida dadas las características y disponibilidad de información del mercado de capitales local; en la medida que las series de tiempo sean más largas, se podrán llevar a cabo más y mejores pruebas de la eficiencia de la metodología en el largo plazo.

## 8. Referencias

- Artzner P., Delbaen F., Eber J-M. and Heath D. (1998) “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance*, No. 9, pp.203-228, November.
- Bhansali V. (2005) “Putting Economics (Back) into Quantitative Models”, *Risk Magazines Annual Quant Congress*, New York, November 8 and 9.
- Blattberg R. and Gonedes N. (1974), “A comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices”, *The Journal of Business*, Vol.47, No.2, April, pp.244-280.
- Burtless G. (2007) “International Investment for Retirement Savers: Historical Evidence on Risks and Returns”, CRR WP 2007-5, Center for Retirement Research at Boston College, Febrero.
- Chan-Lau J. (2004) “Pension Funds and Emerging Markets”, IMF Working Paper, No.WP/04/181, IMF, Septiembre.
- Campbell A. (2008) “The year of living riskily”, *Risk*, July.
- Davidson C. (2008) “Systems failure”, *Risk*, July.
- Davis P. (2005) “Pension fund management and international investment – a global perspective”, *Pensions*, Vol.10, No.3.
- Feldstein M. (2002) “A New Strategy for Social Security Investment in Latina America”, Inter-American Conference of Social Security, Ciudad de México, octubre 7<sup>th</sup>.
- Froot K. (1993) “Currency Hedging Over Long Horizons”, NBER Working Paper, NBER, No.4355, Mayo.
- Huisman R., Koedijk K., Kool C., Palm F. (1998) “The Fat-tailedness of FX Returns”, Limburg Institute of Financial Economics, Maastricht University.
- Jara, D. (2006), “Modelo de regulación de las AFP en Colombia y su impacto en el portafolio de los fondos de pensiones”, en Borradores de Economía, No. 416, Banco de la República, diciembre.
- Jara, D., Gómez, C. y Pardo, A. (2005), “Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales en Colombia”, en Ensayos sobre Política Económica, núm.49, diciembre.
- Lane P. y Shambaugh J. (2007), “Financial exchange rates and international currency exposures”, *Research on global financial stability: the use of BIS international financial statistics*, Bank for International Settlements, number 29, June.
- Laserna, J.M. (2007), “Una propuesta para mejorar el manejo de riesgo, la diversificación y la eficiencia de los portafolios de los fondos de pensiones obligatorias”, en Cuadernos Latinoamericanos de Administración, V. II, No. 4. Universidad El Bosque.
- Levi M. (1997) *Finanzas Internacionales*, Tercera Edición, McGraw Hill.
- Litterman R. (2003) “Risk Measurement”, *Modern Investment Management*, John Wiley & Sons.

- Magdon-Ismael M. and Atiya A. (2004) “Maximum Drawdown”, Risk, October.
- Markowitz H. M. (1952) “Portfolio Selection”, The Journal of Finance, Vol.7, No.1, pp. 77-91, March.
- Martínez, Ó. y Murcia, A., (2007). “Desempeño financiero de los fondos de pensiones obligatorias en Colombia”, en Reporte de Estabilidad Financiera, Banco de la República, marzo.
- OECD (2003) “Occupational Pensions Core Principles and Methodology”, Insurance and Private Pensions Committee and Working Party on Private Pensions, October.
- OECD (2006) “OECD Guidelines on Pension Fund Asset Management – Recommendation of the Council”, Directorate for Financial and Enterprise Affairs- Insurance and Private Pensions Committee and Working Party on Private Pensions, January.
- Pedersen C. S and Rudholm-Alfvén T. (2003) “Selecting a risk-adjusted shareholder performance measure”, Journal of Asset Management, Vol4, No.3, pp.152-172, October.
- Persson M. (2002) "Long-Term Investing and International Diversification", disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=302682>.
- Reveiz A. y León C. (2008a) “Índice representativo del mercado de deuda pública interna: *IDXTES*”, Borradores de Economía, No.488, Banco de la República.
- Reveiz A. y León C. (2008b) “Administración de fondos de pensiones y multifondos en Colombia”, Borradores de Economía, No.506, Banco de la República.
- Reveiz A. y León C. (2008c) “Efficient Portfolio Optimization in the Wealth Creation and Maximum Drawdown Space”, Borradores de Economía, No.520, Banco de la República.
- Reveiz A., León C., Laserna J.M. y Martínez I. (2008) “Recomendaciones para la modificación del régimen de pensiones obligatorias de Colombia”, Revista Ensayos sobre Política Económica, Vol. 26, No.56, enero-junio 2008. [en preparación editorial]
- Roy D. (1952) “Safety First and the Holding of Assets”, Econometrics, Vol.20, No.3, pp.431-449, July.
- Rudolph H., Cheikhrouhou H., Rocha R. and Thornurn C. (2006) “Financial Sector Dimensions of the Colombian Pension System”, The World Bank Group -Finance, Private Sector and Infrastructure - Latin America and the Caribbean Region, June.
- Sharpe W. (1995) “Risk, Market Sensitivity, and Diversification”, Financial Analysts Journal, Vol.51, No.1, enero-febrero.
- Solnik B.(1995) “Why not diversify internationally rather than domestically?”, Financial Analysts Journal, Enero-Febrero.
- Solnik B., McLeavey D., Rati V., Squires J. (2004) Structuring the Global Investment Process, International Investments, Quinta edición, Pearson.
- Taleb N. N. (2007) The Black Swan, Random House.
- Theodossiou P. (1998) “Financial Data and the Skewed Generalized t-Distribution”, *Management Science*, Vol.44, No.12, December, pp. 1650-1661.
- Winkelmann K. (2003) “Issues in Strategic Asset Allocation”, Modern Investment Management, John Wiley & Sons.



- Zimmermann H., Drobetz W. and Oertmann P. (2003) Global Asset Allocation, John Wiley & Sons.