

Borradores de ECONOMÍA

Modelo de simulación del
valor de la pensión de un
trabajador en Colombia

Por: Alejandro Reveiz, Carlos
León, Freddy H. Castro,
Gabriel Piraquive

Núm. 553

2009



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

***Modelo de simulación del valor de la pensión de
un trabajador en Colombia****



***Alejandro Reveiz
Carlos León
Freddy H. Castro
Gabriel Piraquive***

***Banco de la República
Colombia***

* Las opiniones expresadas en este documento no constituyen una posición oficial de las instituciones a las que pertenecen los autores, ni sus directivas. Este es un documento de trabajo y no constituye recomendación alguna con respecto a la afiliación o cotización a un fondo de pensiones privado.

Modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia*

Alejandro Reveiz[▲]

Carlos León[◆]

Freddy H. Castro[♥]

Gabriel Piraquive[★]

Resumen

Este trabajo desarrolla un modelo de simulación para estimar el flujo de caja de un pensionado que tiene su cuenta individual en una administradora de fondos de pensiones (AFP) colombiana. Aquel se proyecta a partir de las sendas salariales y densidades de cotización estimadas por la Dirección de Estudios Económicos del Departamento Nacional de Planeación (DNP) y, con base en lo anterior, se calcula el valor de la pensión que se podría obtener a partir de la riqueza acumulada al final de la vida laboral. Los resultados muestran que, de no adoptar medidas encaminadas a aumentar las densidades y las tasas de cotización, un gran porcentaje de la fuerza laboral obtendría pensiones inferiores a la mínima establecida por ley, pero no cumpliría con los requisitos para acceder a la garantía estatal para obtener la misma.

Clasificación JEL: G23, H55, C15.

Palabras clave: Pensiones, Garantía de Pensión Mínima, Jubilación.

* Las opiniones expresadas en este documento no constituyen una posición oficial de las instituciones a las que pertenecen los autores, ni sus directivas. Agradecemos los valiosos aportes y comentarios de Juan Mario Laserna, Armando Zarruk e Ivonne Martínez, así como el apoyo de Leyla Castillo y Christian Mora con las series estadísticas. Cualquier inconsistencia o error es responsabilidad de los autores. Este documento fue publicado en su versión original en marzo de 2009; esta es una versión revisada del mismo, de abril de 2009.

▲ Senior Investment Officer, Banco Mundial, arevez@worldbank.org / alerevez@hotmail.com. Su participación en la elaboración de este documento se produjo como Investigador Principal de la Subgerencia Monetaria y de Reservas del Banco de la República.

◆ Investigador, Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados, Banco de la República, cleonrin@banrep.gov.co / carlosleonr@hotmail.com.

♥ Profesional, Banco de la República, fcastrba@banrep.gov.co / freddycastro@gmail.com.

★ Director de Estudios Económicos, Departamento Nacional de Planeación, gpiraquive@dnpp.gov.co.

Simulation model for the pension value of a Colombian worker*

Alejandro Reveiz[^]

Carlos León[♦]

Freddy H. Castro[♥]

Gabriel Piraquive^{*}

Abstract

This study develops a simulation model to estimate the cash flow of a retiree with an individual account in a Colombian Pension Fund Administrator (AFP). The cash flow is projected based on the wage's path and contribution's densities estimated by the Directorate of Economic Studies of the National Planning Department (DNP), which allows calculating the accumulated wealth at the time of retirement and the obtainable pension value. Results show that in absence of measures intended to augment densities and contributions, a great percentage of the labor force will obtain pensions lower than the minimum established by law, even without fulfilling the requirements to access government's pension guarantee.

JEL classification: G23, H55, C15

Keywords: Pensions, Minimum Pension Guarantee, Retirement.

* The opinions hereby expressed do not necessarily reflect the official position of the author's institutions or their boards. We are grateful to Juan Mario Laserna, Armando Zarruk and Ivonne Martinez, along with Leyla Castillo and Christian Mora for their assistance with time series. Any inconsistency or mistake is the sole responsibility of the authors. This working paper was first published on March 2009; this is a revised version, April 2009.

[^] Senior Investment Officer, World Bank, arevez@worldbank.org / alerevez@hotmail.com. He worked on this document while being a Senior Researcher at Banco de la Republica.

[♦] Researcher, Operations and Market Development Department, Banco de la República, cleonrin@banrep.gov.co / carlosleonr@hotmail.com.

[♥] Professional, Banco de la República, fcastrba@banrep.gov.co / freddycastro@gmail.com.

^{*} Director of Economic Studies, National Planning Department, gpiraquive@dnpp.gov.co.

1. INTRODUCCIÓN

Motivados por una serie de desequilibrios fiscales, cambios demográficos y mejoras en la expectativa de vida de las personas, y con la intención de impulsar el desarrollo de los mercados de capitales, promover la formación bruta de capital y resolver el problema de la ineficiencia estatal en el manejo de los recursos, desde la década de los noventa¹ 26 países han modificado su estructura pensional². Dicha transformación, consistente en el paso de sistemas de reparto o prima media a sistemas de capitalización³, ha generado tres interrogantes:

- A. ¿Los países que han adoptado estos esquemas en realidad lograron reducir significativamente los déficits públicos?;
- B. ¿el sistema de capitalización tiene la capacidad de generar adecuados retornos para los futuros pensionados?, y
- C. con esta estructura pensional, ¿se garantiza que los trabajadores lograrán llegar a una pensión que les permita tener condiciones dignas de vida?

Con respecto al primer interrogante (A.), la reducción de déficits públicos ha sido y será evidente en las próximas generaciones, especialmente si se tiene en cuenta que con el sistema de capitalización el Estado no subsidia en la misma medida a los pensionados, como lo hacía en el pasado.

Adicionalmente, cabe esperar, al menos en principio, que en el caso colombiano el Estado no deba subsidiar al sistema pensional (SP) porque existen los recursos del Fondo de Solidaridad Pensional⁴ (FSP) y el Fondo de Garantía de Pensión Mínima⁵. En

¹ Con excepción de Suecia y Chile, que llevaron a cabo las reformas en 1960 y 1981, respectivamente.

² Según datos de la Federación Internacional de Administradoras de Fondos de Pensión (FIAP), actualizados a diciembre de 2008, los países que adoptaron o están en proceso de implementar sistemas de capitalización son: Suecia, Chile, Perú, Colombia, Uruguay, Bolivia, México, El Salvador, Hungría, Kazajistán, Polonia, Costa Rica, Letonia, Bulgaria, Estonia, Kosovo, Panamá, Federación Rusa, República Dominicana, Croacia, Lituania, India, Eslovaquia, Macedonia, Nigeria, Rumania y Ucrania.

³ Una buena contextualización sobre los diferentes tipos de sistemas está disponible en Merchán (2002a).

⁴ Para mayor información sobre definición, requisitos y objetivos, véase la Ley 100 de 1993, artículos 25-30, y la Ley 797 de 2003.

⁵ Ley 100 de 1993, artículo 20.

conjunto, estos fondos buscan favorecer a personas con altas densidades de cotización⁶, pero con bajos salarios; a grupos de la población que, por sus condiciones socioeconómicas, no pueden acceder a la seguridad social; así como a quienes probablemente no alcanzarán a acumular el capital suficiente para llegar a la pensión mínima⁷ y tendrán que recurrir a la Garantía de Pensión Mínima (GPM)⁸.

En cuanto al segundo y tercer interrogantes (B. y C.), de los cuales se ocupa este documento, en la literatura se encuentran trabajos orientados en dos direcciones:

- a. Los que se enfocan en los problemas sociales y el costo que debería asumir el Estado dadas las altas tasas de desempleo, las bajas densidades de cotización, las bajas tasas de ahorro y la informalidad de la economía, y
- b. los que hacen sugerencias para mejorar la eficiencia de las AFP y, en general, el sistema de ahorro individual⁹.

Para el caso colombiano los estudios en la primera dirección (a.) se ocupan de tres diagnósticos generales: i) el pasivo pensional a cargo del Estado es alto y seguirá creciendo si no se realizan reformas¹⁰; ii) el impacto de no modificar o eliminar los regímenes especiales (Merchán, 2002b); iii) el efecto de los cambios demográficos evidentes desde los años ochenta, tales como la pirámide poblacional invertida¹¹, así como la transición demográfica¹², producto de mayores niveles educativos, aumento de la calidad de vida, métodos de planificación familiar y adecuado control de enfermedades (Echeverry *et al.*, 2001).

Por otra parte, los trabajos de la segunda línea (b.) se pueden clasificar en cinco vertientes: i) aquellos que aconsejan cambiar al régimen de inversión para permitir una

⁶ La densidad de cotización corresponde al cociente entre tiempo de cotización y tiempo de afiliación.

⁷ La pensión mínima asciende a un salario mínimo legal vigente. Ley 100 de 1993, artículo 35 y Ley 797 de 2003, artículo 14.

⁸ Los costos de la GPM son desarrollados en Silva (2003), quien, con un modelo financiero similar al de este trabajo, hace una aproximación al cálculo del costo fiscal implícito en la GPM.

⁹ Un buen resumen de esta literatura está disponible en Reveiz *et al.* (2008).

¹⁰ Echeverry *et al.* (2001) estiman el valor presente neto del pasivo pensional colombiano a cargo de la nación en 192,4% del PIB para el periodo 2000-2050.

¹¹ Colombia pasó de 6,8 hijos vivos por mujer en la década de los sesenta, a 2,4 en el año 2002, mientras que la expectativa de vida al nacer pasó de 56,8 a 72,2 años (Castilla, 2007).

¹² Para el caso de América Latina ver CEPAL (2008).

mayor diversificación de activos (Jara *et al.*, 2005; Jara, 2006a; Laserna, 2007; Reveiz y León, 2008b; Reveiz *et al.*, 2008); ii) los encaminados a modificar el esquema de rentabilidad mínima y comisiones, el cual desincentiva el desempeño eficiente de las AFP (Jara, 2006a; Jara, 2006b; Laserna, 2007; Reveiz y León, 2008b; Reveiz *et al.*, 2008; Julio, 2009); iii) los preocupados por definir un esquema de multifondos que permita alinear la estructura de inversión de los fondos con el perfil de riesgo de los cotizantes (Reveiz y León, 2008b; Reveiz *et al.*, 2008; Castro, 2009); iv) aquellos que, desde la teoría de incentivos, sugieren cambios en el esquema de comisiones (Martínez y Murcia, 2008; Betancourt, 2008; Julio, 2009), y v) los enfocados en los impactos de las operaciones de las AFP en el mercado cambiario (Vargas y Betancourt, 2006; Gómez *et al.*, 2006).

Con respecto a la literatura relacionada con el objeto de este documento, los cálculos actuariales sobre el pasivo pensional de la nación se empezaron a hacer en Colombia a principios de la década de los noventa, pero fue hasta 1999 cuando la OIT hizo la primera estimación considerando la duración de los recursos del Seguro Social, los cuales se proyectó que alcanzarían hasta el año 2010. El mayor inconveniente que se presentaba en ese momento era la inexistencia de bases de datos unificadas y centralizadas para hacer análisis de política.

Posteriormente, Parra (2001) elaboró un modelo actuarial (DNPensión) que muestra los escenarios fiscales del sistema de seguridad social colombiano, incluyendo las AFP, el ISS, las cajas públicas de nivel nacional, las cajas públicas de nivel territorial y el Fondo Social de Prestaciones del Magisterio (no se incluyen las Fuerzas Armadas). En ese ejercicio, con información de la Encuesta Nacional de Hogares del DANE, se estimaron sendas salariales por género, sistema y sector (público o privado). Los resultados afirmaban que la situación fiscal del país podría llegar a ser insostenible en el mediano plazo si no se tomaban medidas drásticas; algunas de éstas fueron adoptadas en la reforma pensional de 2003¹³.

¹³ Ley 797 de 2003.

En la misma línea de Parra (2001) se encuentra el trabajo de Osorio *et al.* (2005), que amplía y actualiza el alcance del modelo DNPensión con proyecciones hasta el año 2100. El modelo, además de incluir una base de datos más completa, cuenta con herramientas computacionales que permiten simular cualquier cambio en variables relevantes, y ha sido, desde su elaboración, el marco de análisis general para las proyecciones pensionales en el país. Osorio *et al.* (2005) y Silva (2003) hacen proyecciones sobre los costos a cargo del Estado por cuenta del sistema de reparto y por cuenta del sistema de capitalización.

Castro (2009) complementa el modelo DNPensión con elementos de administración de activos y pasivos de los fondos de pensiones, resaltando los riesgos que enfrentan dichas entidades y concentrándose en las decisiones de inversión. Los resultados corroboran que mayores tasas de retorno de los portafolios elevan la posibilidad de que, una vez cumplidos los requisitos de edad y tiempo de cotización, un número mayor de personas logren recibir una pensión. Los resultados también indican que el esquema de multifondos propuesto en el proyecto de reforma financiera presentado al Congreso en 2008, permite una mejor alineación de las decisiones de inversión en relación con la etapa productiva de los cotizantes.

En el caso de Chile, Berstein *et al.* (2005) hacen proyecciones para el año 2025 del SP de ese país. Para calcular los flujos, utilizan dos metodologías: en la primera trabajan con una muestra del total del número de afiliados, para lo cual emplean ocho perfiles promedio de individuos, divididos por género e ingreso; en la segunda se estima un modelo panel de efectos aleatorios teniendo en cuenta el ingreso, la edad y una serie de variables *dummy* para cada año de nacimiento. Los resultados señalan que, en el caso chileno, quienes tienen salarios bajos y escasos periodos de cotización (cerca del 50% de los afiliados), no alcanzarán si quiera a una pensión mínima, y solo un 5% de los afiliados podrán hacer uso de la GPM. Berstein *et al.* (2006), usando un escenario base en donde los retornos son del 5.8% real anual, estiman que para 2020 un 55% de los afiliados recibirá pensiones inferiores a la mínima y un 2% de los mismos accederá a la GPM. La justificación de estos resultados está dada por las bajas densidades de

cotización, producidas en parte por la sensación de los trabajadores de que la contribución a la pensión es un impuesto.

Berstein *et al.* (2005) y (2006), corroborando los resultados de Berstein y Tokman (2005), señalan que en Chile las mujeres tienden a recibir pensiones inferiores a las de los hombres y, por ende, son las mayores beneficiadas con la GPM. En el caso de las mujeres, las pensiones son inferiores porque cotizan menos años, tienen mayor expectativa de vida y, adicionalmente, es común que permanezcan mayor tiempo sin empleo por motivos de maternidad.

Los resultados reseñados generan cierta preocupación, especialmente porque corresponden al caso chileno, país pionero de los sistemas de capitalización, que cuenta con una mejor estructura institucional y, comparativamente, ostenta altas tasas de reemplazo¹⁴ (Berstein *et al.*, 2006).

Para América Latina Castilla (2007) asegura que el problema resulta de los bajos niveles de cobertura, en donde en promedio sólo un 40% de la población económicamente activa es cotizante de la seguridad social, lo cual se debe a las altas tasas de desempleo y a la baja participación en el SP por parte de los trabajadores independientes. Rofman y Lucchetti (2006) encuentran que los problemas son más pronunciados en el sector primario, para los trabajadores de empresas pequeñas y para las mujeres, quienes acceden en menor proporción al SP. También observan que, gracias a las condiciones especiales todavía existentes, en promedio los empleados del sector público están en mejores condiciones al momento de recibir la pensión.

A nivel mundial las perspectivas de los futuros pensionados y trabajadores también son motivo de preocupación. Börsch-Supan *et al.* (2006), con base en un modelo de generaciones traslapadas, presentan las caídas en las tasas de ahorro, el porcentaje de personas en edad de trabajar y las tasas de retorno para siete regiones del mundo luego de la transición demográfica, el envejecimiento de la población y el proceso de

¹⁴ La tasa de reemplazo corresponde a los derechos pensionales como proporción de los ingresos individuales promedio durante la vida laboral (Whitehouse, 2007).

desacumulación de la generación de los *babyboomers*; este último proceso se sentirá especialmente en los países europeos a partir del año 2020.

Teniendo en cuenta lo anterior, los objetivos de este documento serán: i) realizar proyecciones a cuarenta años de las pensiones que podrán recibir aquellos que entren a formar parte del SP administrado por las AFP, y ii) estimar el porcentaje de trabajadores que podrá hacer uso de la GPM, aunque no se mide el costo fiscal de esto.

Los resultados del estudio muestran que, bajo las circunstancias actuales, una proporción significativa de la población obtendría pensiones inferiores a la mínima, pero no cumpliría con los requisitos para acceder a la GPM.

Este documento se divide en cinco secciones, incluyendo esta introducción. En la segunda se discuten algunas características del SP colombiano y las posibles modificaciones que pudieron implementarse con la reforma financiera presentada en 2008 al Congreso. En la tercera se desarrolla el modelo con diferentes escenarios de acumulación y desacumulación. En la cuarta se presentan los resultados relevantes. Finalmente, en la última sección se presentan conclusiones, recomendaciones y limitaciones del análisis presentado, así como temas propuestos para próximos trabajos de investigación.

2. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DEL SP COLOMBIANO

La Ley 100 de 1993 le permitió a Colombia adoptar un SP con dos regímenes: el, en ese entonces existente, de prima media, manejado por el Instituto de Seguros Sociales (ISS) y el de ahorro individual, manejadas por las administradoras de fondos de pensiones (AFP). Desde entonces se han hecho algunas modificaciones para mejorarlo y por disminuir los costos que representa para el Estado el régimen de prima media y la existencia de regímenes especiales¹⁵.

¹⁵ Los ajustes a la Ley 100 de 1993 fueron señalados por la Ley 797 de 2003, el Acto Legislativo 01 de 2005 y varias sentencias de las Cortes y el Consejo de Estado.

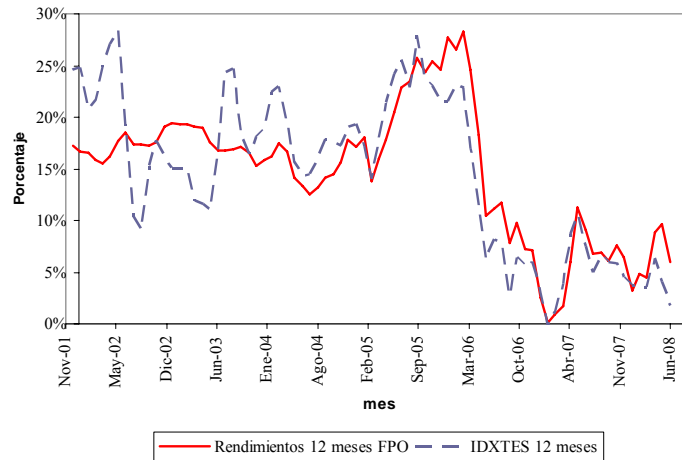
Con la reforma financiera presentada por el Gobierno en 2008, que en sus orígenes se pensó podría ser implementada a partir de 2010, se proponía llegar a un sistema de multifondos, cuyo objetivo consistía en alinear de mejor manera las decisiones de inversión en la etapa productiva de los afiliados, con el fin de aumentar las probabilidades de pensionarse; conseguir una mayor correspondencia entre el perfil de riesgo de los aportantes y la composición de su portafolio de activos; mejorar los niveles de educación financiera, dado el proceso de capacitación por parte de las AFP a sus afiliados, y un mayor desarrollo del mercado de capitales. Además, se planteó una nueva estructura de comisiones por desempeño para incentivar a que las AFP lleven a cabo una gestión más eficiente de los portafolios de los fondos de pensiones obligatorias (FPO).

Con respecto al desempeño reciente del SP colombiano, entre enero de 2001 y junio de 2008 los retornos del sistema han sido altos, con un promedio de 14,7% nominal anual y tasas de inflación anuales promedio del 6,05%, lo que resulta en una rentabilidad anual real promedio cercana a 8,7%; cabe anotar que este periodo estuvo caracterizado por la alta liquidez internacional y la consolidación de la caída estructural de la inflación.

No obstante, este periodo también ha estado acompañado de episodios de alta variabilidad (la desviación estándar del periodo es de 6.54%), la cual se encuentra asociada con el desempeño del mercado de deuda pública local, en donde existe una alta concentración¹⁶; la relación entre el desempeño de los portafolios de los fondos de pensiones y el mercado de deuda pública local se presenta en el Gráfico 1.

¹⁶ A mayo de 2008 el 45,5% del portafolio de los FPO correspondía a deuda pública colombiana, con una correlación de 0,82 entre los retornos de los FPO y del IDXTES. Las causas de esta alta concentración en el mercado de deuda pública local se abordan en Reveiz *et al.* (2008).

Gráfico 1. Variación anual de los retornos de los FPO vs IDXTES



Fuente: Elaboración de los autores con datos de la Superintendencia Financiera y de Reveiz y León (2008a)

Igual de importante a la estructura legal del SP y la creación de esquemas como el de multifondos, es la implementación de políticas que fomenten adecuados niveles de cobertura pensional. Según el estudio de Castilla (2007), para el periodo 2000-2004 en Colombia sólo un 18,6% de la población mayor de 65 años accedió a una pensión de vejez, muy por debajo de países como Argentina y Brasil, donde 68,7% y 86,3% de la población mayor recibe pensión, y cercano a países como México y Paraguay, que llegan a niveles del 18,9% y 16,7%, respectivamente. Esta situación se presenta por problemas estructurales de fondo, como la escasez de mano de obra calificada, el aumento de los costos no laborales, las bajas densidades de cotización, los bajos niveles salariales y la informalidad de la economía (Bustamante, 2006).

El Cuadro 1 muestra los bajos niveles salariales en Colombia. Así, por ejemplo, un hombre del primer decil de ingresos recibe en promedio 0,51 salarios mínimos mensuales (SMM), mientras que una mujer del mismo decil obtiene 0,53 SMM. Los salarios son relativamente bajos hasta los deciles 7 y 8, cuando superan los dos SMM.

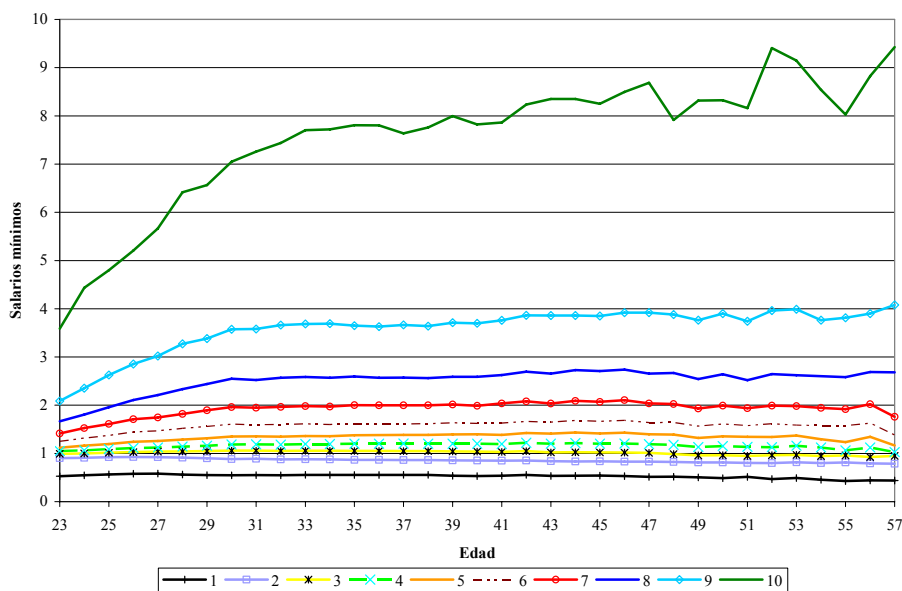
Cuadro 1. Salarios mínimos promedio por decil salarial y género

Decil	Hombres	Mujeres
1	0,51	0,53
2	0,84	0,86
3	1,04	1,01
4	1,24	1,16
5	1,46	1,34
6	1,80	1,58
7	2,32	1,93
8	3,12	2,51
9	4,49	3,59
10	9,62	7,57

Fuente: Cálculos de los autores con datos del DNP

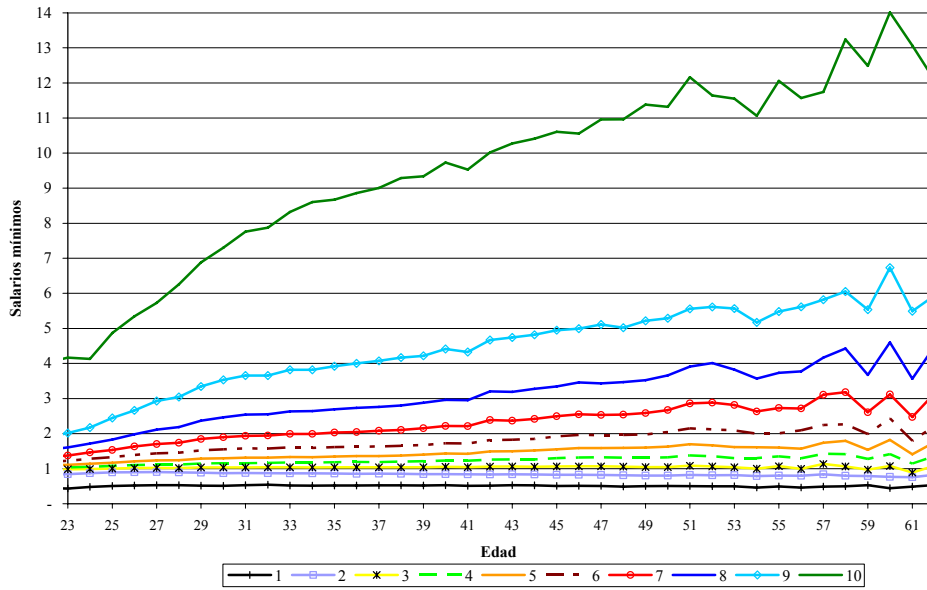
Es posible apreciar que para las mujeres la brecha de ingreso promedio es de 0,78 SMM entre decil y decil, mientras que para los hombres es de 1,01 SMM. Además de bajos salarios, es posible observar también que decil tras decil los salarios en las mujeres son relativamente inferiores a los de los hombres.

Gráfico 2. Sendas salariales (mujeres)



Fuente: Elaboración de los autores con datos del DNP

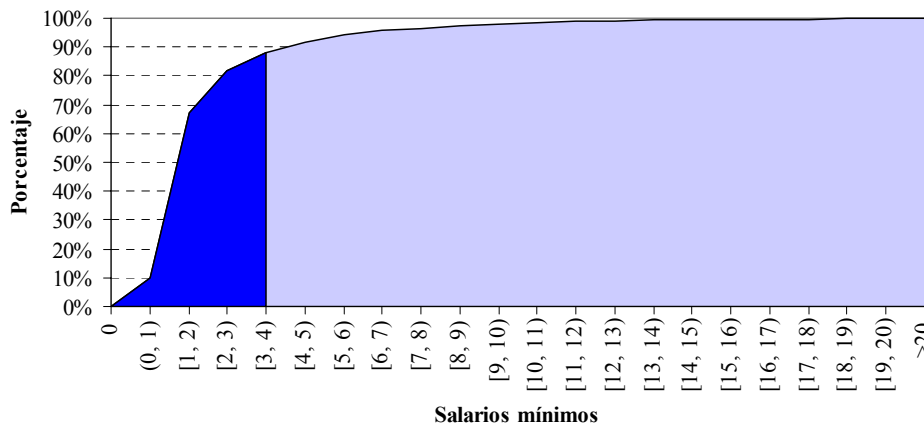
Gráfico 3. Sendas salariales (hombres)



Fuente: Elaboración de los autores con datos del DNP

Adicionalmente, la densidad acumulada de salarios estimada para 2007 (Gráfico 4) permite concluir que, de acuerdo con la información de los FPO procesada por el DNP, cerca de un 88% de la población en Colombia alcanza salarios promedio entre cero y cuatro SMM (\$1.987.600 del año 2009) y un 67,2% obtiene salarios entre cero y dos SMM (\$993.800), donde sólo un 12% de los asalariados hace aportes al FSP; esta información concuerda con la proporcionada por los fondos de pensiones para el año 2003.

Gráfico 4. Densidad acumulada de salarios en Colombia (2007)



Fuente: Elaboración de los autores con datos del DNP

Las densidades de cotización, calculadas por la Dirección de Estudios Económicos del DNP a partir de los datos de ASOFONDOS, podrían explicar parcialmente por qué existen bajas coberturas pensionales, las cuales son las responsables de que las diferencias de ingreso entre los más ricos y los más pobres se profundicen al momento de recibir la pensión. Dichas densidades muestran que las personas que están entre los deciles de ingreso 1 y 3 tienen una probabilidad mensual de cotización menor al 40%; es decir, cuatro de cada diez meses realizan una cotización efectiva. La situación para los deciles 9 y 10 es mejor, con probabilidades cercanas al 70%. Las bajas densidades de cotización resultan en que, en promedio, sólo los hombres del decil 7 en adelante y las mujeres a partir del decil 8 pueden acceder a la GPM.

El Cuadro 2 muestra cuántas semanas efectivas de cotización promedio podrían alcanzar hombres y mujeres por decil de ingreso con las probabilidades mensuales de cotización ya estimadas, asumiendo que el periodo laboral de los hombres es de 40 años y el de las mujeres de 35 años. La parte sombreada corresponde a todos aquellos que, dadas estas características, reúnen el número de semanas necesarias para hacer uso de la GPM -se exige la cotización de por lo menos 1.325 semanas a partir del año 2015¹⁷.

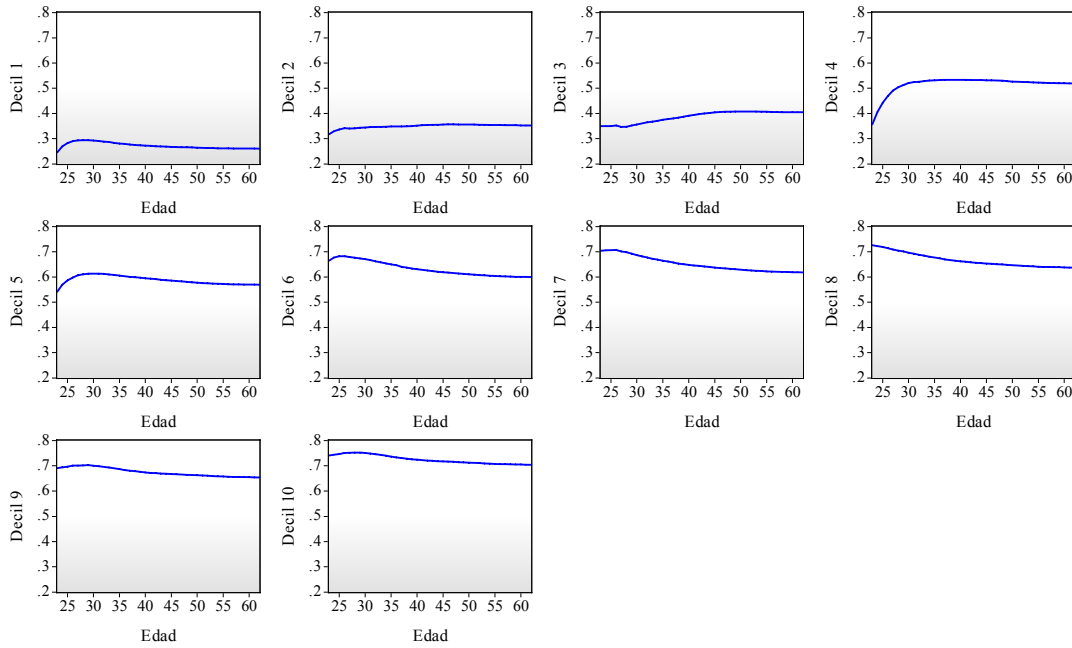
Cuadro 2. Semanas promedio de cotización por decil salarial y género

Decil	Hombres	Mujeres
1	566,49	520,67
2	727,22	749,06
3	804,74	819,87
4	1070,44	1043,66
5	1221,79	1191,42
6	1316,37	1254,38
7	1355,56	1320,38
8	1386,90	1386,37
9	1403,67	1411,82
10	1507,67	1515,82

Fuente: Cálculos de los autores con datos del DNP

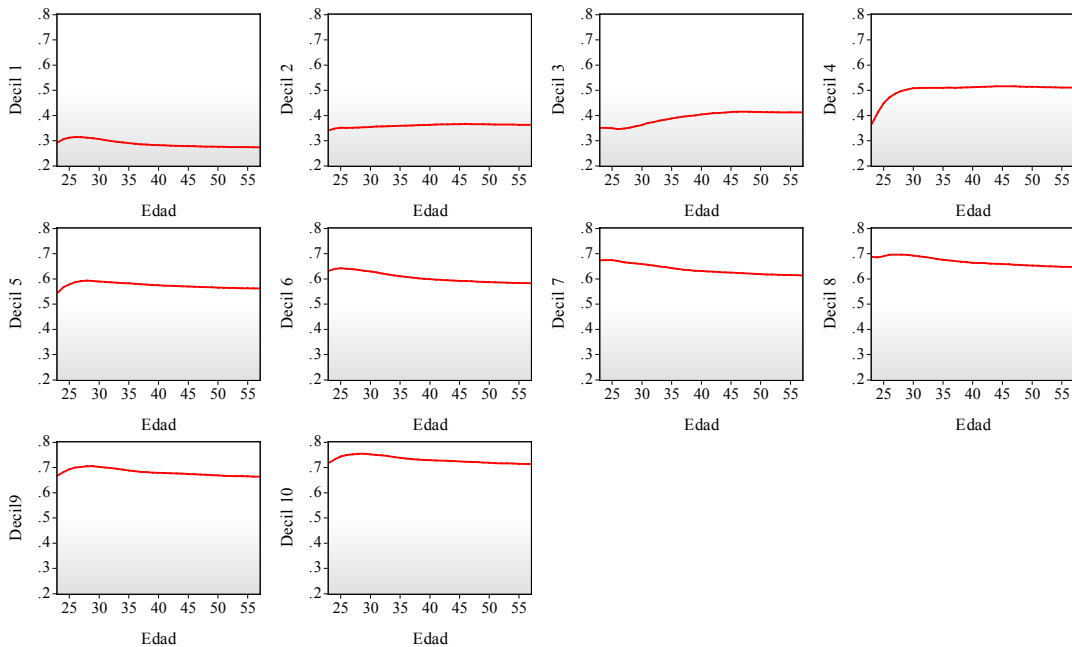
¹⁷ Artículo 14 de la ley 797 de 2003.

Gráfico 5. Probabilidad mensual de cotización por edad y senda (hombres)



Fuente: Cálculos del DNP con datos de ASOFONDOS

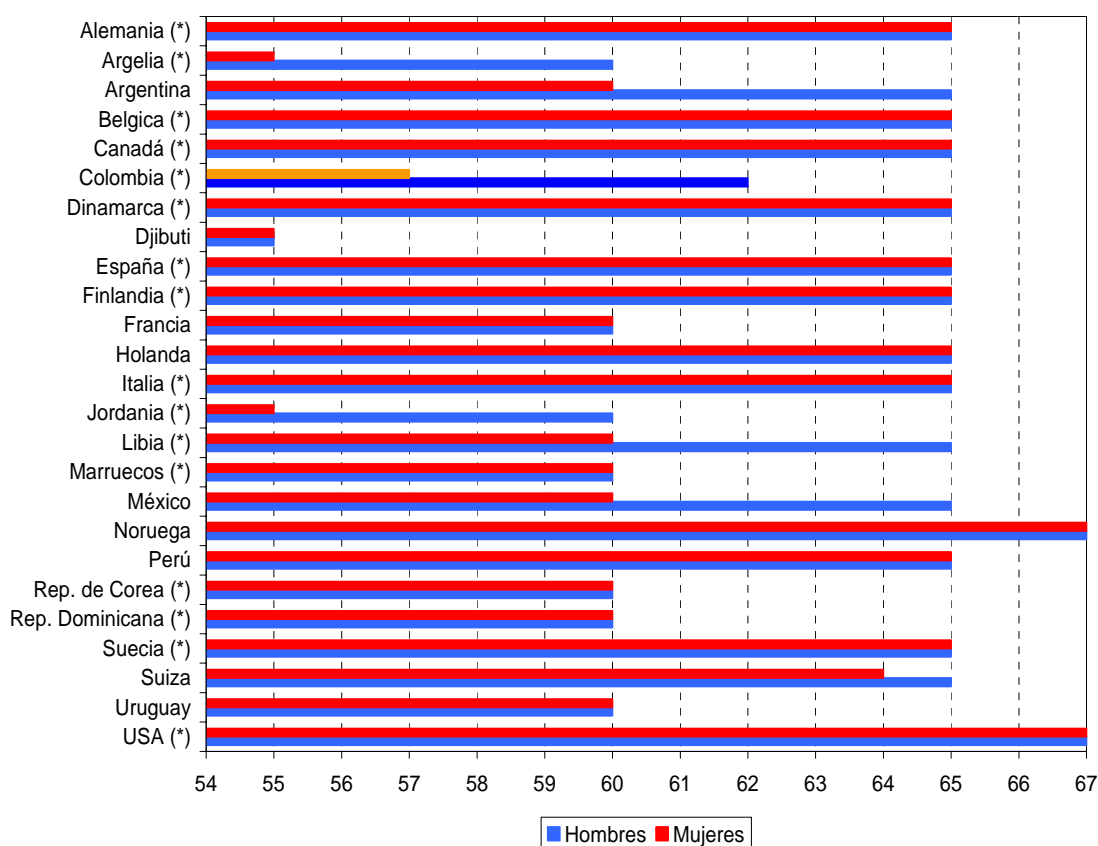
Gráfico 6. Probabilidad mensual de cotización por edad y senda (mujeres)



Fuente: Cálculos del DNP con datos de ASOFONDOS

En Colombia la edad de jubilación para los hombres es de 62 años, mientras que para las mujeres es de 57 años. Al comparar con otros países, es posible observar que en Colombia las personas se pensionan a menor edad (Gráfico 7). Esta información excluye a quienes logran pensionarse a edades inferiores dados sus aportes en el pilar 3 (voluntario)¹⁸, y a aquellos que, por pertenecer a regímenes especiales, gozan de otros beneficios. Del mismo modo, al observar los datos se puede notar que, en la mayoría de países de la muestra, la edad de retiro de hombres y mujeres es la misma.

Gráfico 7. Edad de jubilación (Países seleccionados)



Fuente: Elaboración de los autores con información de Whitehouse (2008); (*) corresponde a países en donde es posible obtener pensión antes de la edad mínima.

¹⁸ Estos están en capacidad de comprar rentas vitalicias y anticipar su retiro.

3. EL MODELO

En este trabajo se construye un modelo para analizar el comportamiento y resultado final del valor del portafolio obligatorio individual. Se cuenta con un modelo contable discreto que replica parcialmente la metodología sugerida por Berstein *et al.* (2005), para lo cual se descompusieron los aportes en diez sendas (deciles de ingreso) divididas por género. El procedimiento es similar al utilizado por Parra (2001), Silva (2003) y Osorio *et al.* (2005), con un supuesto adicional, no incluido en trabajos anteriores: la posibilidad de diversas tasas de retorno acordes con el portafolio seleccionado o asignado para el cotizante¹⁹ y con densidades de cotización acordes al decil de ingreso²⁰, acercándose así al trabajo de Castro (2009), quien plantea un enfoque con distintas tasas de retornos a partir de combinaciones de una canasta de activos.

Es importante aclarar que el presente trabajo, a pesar de enmarcarse en la misma línea de los mencionados, difiere en i) la estimación de los portafolios de inversión, porque los retornos surgen del proceso de optimización desarrollado en Reveiz y León (2008a)²¹ para el periodo 2001-2007; ii) en los resultados, porque se determina cuál podría ser el monto en SMM que recibirían las personas de acuerdo con su nivel de ingreso y probabilidad de cotización, y iii) en la interpretación de los resultados, porque se estima el porcentaje de los cotizantes que podrá acceder a una pensión mínima (1 SMM), así como el porcentaje de la población que podría obtener la GPM.

El modelo supone que los individuos tienen una cotización promedio a lo largo de su vida y que su salario no sufre variaciones en términos reales que lo hagan cambiar de senda salarial, mientras que el periodo de acumulación de los hombres va desde los 23 hasta los 62 años y el de las mujeres desde los 23 hasta los 57 años. Es importante anotar que existen datos para personas que inician su periodo de acumulación desde los 17 años, pero, dadas las características demográficas de la población y las condiciones

¹⁹ La reforma financiera planteaba un enfoque de multifondos, donde los afiliados tendrían la posibilidad de escoger, de acuerdo con su edad y perfil de riesgo, entre tres tipos de portafolio: agresivo, moderado y conservador, con una limitación: cuando falten ocho años para recibir la pensión, debe empezar a hacer la transición gradual hacia el portafolio conservador.

²⁰ Distanciándose de Silva (2003), quien asume una densidad de cotización de 0,7 para todo el periodo.

²¹ El proceso de optimización incluye la utilización de un índice de retorno total de precios de TES (IDXTES), el cual es provisto por Reveiz y León (2008b).

del mercado laboral, este documento tiene en cuenta sólo a aquellos individuos (hombres y mujeres) que empiezan a formar parte del sistema a los 23 años²². Para cada escenario de retornos planteado se realizan 1.000 simulaciones.

Las sendas salariales y las probabilidades de cotización han sido proporcionadas por la Dirección de Estudios Económicos del DNP y ASOFONDOS, y han sido calculados siguiendo la metodología desarrollada en Parra (2001) y Osorio *et al.* (2005).

3.1. Desarrollo del periodo de acumulación

La acumulación para un individuo j que inicia su periodo de cotización, que mantiene la misma senda salarial y que cotiza una tasa constante de su salario²³ durante todo su ciclo de vida, viene dada por:

Primer periodo:

$$A_1^j = w_1^j \cdot Pc_1^j \cdot c_1^j \quad [1]$$

La acumulación del individuo en el primer periodo A_1^j , es explicada por su salario nominal w_1^j , la probabilidad de cotización Pc_1^j y el porcentaje de cotización c_1^j .

Segundo periodo:

$$A_2^j = w_2^j \cdot Pc_2^j \cdot c_2^j + A_1^j \left(1 + \left(r_1^j | Port_1 \right) \right) \quad [2]$$

Ultimo periodo de cotización²⁴ (L):

²² En la literatura no existe consenso acerca del momento cuando las personas ingresan al mercado laboral. Por ejemplo, Santamaría y Rojas (2001) sostienen que para América Latina éste se da entre los 15 y los 20 años de edad; Börsch-Supan *et al.* (2006) toman como punto de partida los 20 años; el trabajo de Berstein *et al.* (2005) supone en su escenario base que los hombres y mujeres empiezan a cotizar desde los 25 años.

²³ La tasa de cotización utilizada es del 11%, de conformidad con el Decreto 4982 del 27 de diciembre de 2007 y las leyes 1122 de 2007 y 797 de 2003.

²⁴ De acuerdo con la legislación vigente, el último periodo de cotización varía dependiendo del género: para las mujeres es 57 años, mientras que para los hombres es 62 años.

$$A_L^j = w_L^j \cdot P c_L^j \cdot c_L^j + A_{L-1}^j \left(1 + \left(r_{L-1}^j | Port_{L-1} \right) \right) \quad [3]$$

Donde $P c_n$ es la probabilidad de cotizar en el periodo n ; w_n^j es el salario nominal del individuo j en el periodo n , con $w_n^j \geq 0$; c_n^j es el porcentaje de cotización en términos del salario nominal del individuo; $\left(r_n^j | Port_{n-1} \right)$ son los rendimientos del portafolio del individuo j en el periodo n y están condicionados a la composición del portafolio vigente en el periodo anterior²⁵.

Finalmente, A^j es el valor final acumulado del portafolio del individuo j , donde $j \in \mathfrak{R}^{2+}[x, y]$, x es el género y $y \in \mathbf{Z}[1, 10]$ representa los diez deciles de cotización mencionados.

Por simplicidad asumimos que los retornos mensuales $\left(r_i^j \right)$ se distribuyen normalmente y están determinados por un proceso Wiener generalizado (Hull, 2002):

$$r_i^j = a \delta t + b \varepsilon \sqrt{\delta t} \quad [4]$$

Donde a y b son constantes, $b \varepsilon \sqrt{\delta t}$ representa la porción estocástica y $a \delta t$ es la media (porción determinística) del proceso. ε es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estandarizada. Los datos de los retornos promedios y de las desviaciones estándar surgen de dos fuentes: i) los rendimientos mensuales de los FPO para el periodo enero de 2001-junio de 2008, y ii) los resultados del ejercicio de optimización de Reveiz y León (2008b)²⁶ -estos valores están señalados en el Anexo 1-

3.2. Periodo de desacumulación

²⁵ Las opciones de retornos construidas en el ejercicio se encuentran señaladas en el Anexo 1.

²⁶ El retorno promedio es mensualizado y se toman los fondos A, C y E como referentes para los portafolios conservador, moderado y agresivo, respectivamente. El riesgo de los fondos (A, C y E) corresponde a la desviación estándar promedio de cada uno y se calcula como el riesgo promedio anualizado por la raíz del tiempo $ds(p) \approx \sigma \sqrt{T}$ (Hull, 2002).

Cabe suponer que en cualquier escenario de inversión de los recursos el proceso de desacumulación será el mismo. Asumiendo la legislación vigente, los hombres deberán recibir su pensión a partir de los 62 años y las mujeres desde los 57 años. La variación anual del ingreso recibido como pensión (Δwp) será igual a la variación de la inflación²⁷, que se asumió es del 5% para todo el periodo.

La desacumulación para el periodo inmediatamente posterior al último periodo de cotización sería de la siguiente forma:

$$A_{L+1}^j = (A_L^j(1 + r_L) - wp_{L+1}^j)(1 - v_{L+1}^x) \quad [5]$$

Donde v_n^x es la probabilidad de que un individuo del género x muera en el periodo n (véase Anexo 2), y wp_n^j es la pensión del individuo j en el periodo n .

Según lo anterior, de manera general:

$$A_{L+k}^j = (A_{L+k-1}^j(1 + r_{L+k-1}^j) - wp_{L+k}^j)(1 - v_{L+k}^x) \quad [6]$$

Todos los meses se descuenta la pensión y el saldo se reinvierte con un retorno igual al del portafolio promedio enunciado en el Anexo 1. Es importante aclarar que este trabajo asume que con el saldo acumulado en el periodo (L), los trabajadores salen al mercado y compran una renta vitalicia a una aseguradora, que puede ser inferior a un SMM.

²⁷ Ley 100, artículo 14.

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Para un portafolio agresivo (portafolio E de Reveiz y León, 2008b), caracterizado por altos retornos y alto riesgo²⁸, teniendo en cuenta que cada decil corresponde a un 10% de la población, los resultados señalan que, en promedio, los hombres que se encuentran en los cuatro primeros deciles y aquellos que están en la parte baja de la distribución del quinto decil (área sombreada del Cuadro 3), no podrán obtener la pensión mínima (un SMM) y, por sus bajas densidades de cotización (véase Cuadro 2), no cumplirán con las semanas requeridas (1.325) para tener el derecho a la GPM.

La pensión promedio para un hombre del decil 10, quien, según el Cuadro 1 devengó un salario promedio de 9,62 SMM, será de 10,20 SMM, mientras que para alguien del decil 1, cuyo salario promedio es de 0,51 SMM, será de 0,36 SMM.

Cuadro 3. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio agresivo (hombres).

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,25	0,28	0,32	0,36	0,40	0,45	0,48
2	0,35	0,37	0,43	0,47	0,52	0,59	0,64
3	0,39	0,41	0,48	0,54	0,60	0,66	0,70
4	0,65	0,71	0,79	0,89	0,99	1,09	1,14
5	0,91	1,00	1,14	1,27	1,41	1,56	1,63
6	1,20	1,33	1,51	1,70	1,89	2,08	2,18
7	1,65	1,83	2,08	2,31	2,58	2,88	3,01
8	2,35	2,58	2,98	3,33	3,70	4,09	4,35
9	3,76	4,06	4,63	5,18	5,77	6,39	6,65
10	7,16	7,84	9,08	10,20	11,35	12,70	13,45

Supuestos: Inflación=5%, μ =51.40% DS= 21.54%

Fuente: cálculos de los autores

En el caso de las mujeres (Cuadro 4), quienes solo a partir del decil 6 lograrán pensiones superiores a 1 SMM, la pensión promedio del decil 10 será de 5,24 SMM,

²⁸ El portafolio E de Reveiz y León (2008b), tal como lo reconocen sus autores, presenta un fuerte sesgo por el desproporcionado retorno del mercado accionario local en el periodo de análisis. Es prudente pensar que este comportamiento, explicado en parte por la caída en la inflación, el exceso de liquidez mundial y el auge del mercado de capitales, no representa una tendencia de largo plazo; por lo tanto, este portafolio es una visión particularmente optimista del comportamiento futuro de los portafolios de inversión.

mientras que para el decil 1 será de 0,26 SMM. Los resultados señalan que, en promedio, las mujeres que se encuentran en los seis primeros deciles y aquellas que se encuentran en la parte baja de la distribución del séptimo decil (área sombreada del Cuadro 4), no podrán obtener la pensión mínima y, por sus bajas densidades de cotización (Cuadro 2), no cumplirán con las semanas requeridas para tener el derecho a la GPM.

Cuadro 4. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio agresivo (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,18	0,20	0,24	0,26	0,29	0,33	0,35
2	0,23	0,25	0,29	0,33	0,36	0,40	0,42
3	0,25	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,47
4	0,37	0,39	0,46	0,52	0,58	0,64	0,68
5	0,51	0,56	0,63	0,71	0,79	0,88	0,94
6	0,66	0,72	0,82	0,92	1,03	1,14	1,22
7	0,90	0,96	1,08	1,21	1,36	1,52	1,59
8	1,26	1,38	1,55	1,74	1,94	2,15	2,26
9	1,80	2,04	2,34	2,62	2,90	3,27	3,46
10	3,70	4,00	4,66	5,24	5,81	6,51	6,86
Supuestos: Inflación=5%, μ =51.40% DS= 21.54%							

Fuente: cálculos de los autores

Estos resultados demuestran que en el caso de la inversión en un portafolio agresivo, dado que en buena parte de los casos los aportes y densidades no alcanzan para obtener un SMM, ni para hacer uso de la GPM, podría predominar la devolución de saldos para una gran parte de los afiliados, en especial para las mujeres.

El portafolio conservador (portafolio A de Reveiz y León, 2008b), caracterizado por bajos riesgos y retorno, genera pensiones menores que las del portafolio agresivo. La pensión más alta promedio que podría recibir un hombre del decil de ingresos más alto es de 3,88 SMM, mientras que las mujeres llegarán a 1,93 SMM. Los hombres que están en el decil 7 de ingresos y las mujeres de los deciles 8 y 9 podrán hacer uso de la GPM (cuadros 5 y 6).

Cuadro 5. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio conservador (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,14	0,14
2	0,15	0,16	0,16	0,17	0,17	0,18	0,18
3	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,22	0,23
4	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35
5	0,41	0,42	0,44	0,45	0,47	0,49	0,50
6	0,55	0,56	0,59	0,61	0,63	0,66	0,68
7	0,76	0,78	0,82	0,85	0,88	0,92	0,94
8	1,15	1,17	1,20	1,23	1,27	1,31	1,34
9	1,78	1,83	1,89	1,94	2,00	2,07	2,13
10	3,52	3,58	3,72	3,88	3,94	4,10	4,23
Supuestos: Inflación=5%, $\mu=10.59\%$ DS=1.80%							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro 6. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio conservador (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,08	0,08	0,09	0,09	0,10	0,11	0,11
2	0,10	0,10	0,11	0,12	0,13	0,13	0,14
3	0,11	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15
4	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
5	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,28	0,29
6	0,30	0,30	0,32	0,33	0,35	0,36	0,37
7	0,40	0,41	0,43	0,44	0,46	0,48	0,49
8	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66	0,69	0,71
9	0,87	0,89	0,93	0,97	1,00	1,04	1,07
10	1,75	1,81	1,88	1,93	0,20	2,09	2,14
Supuestos: Inflación=5%, $\mu=10.59$ DS= 1.80%							

Fuente: cálculos de los autores

Es importante resaltar que el portafolio agresivo ofrece una mayor probabilidad de obtener una pensión mayor a un SMM, así como pensiones de mayor valor para cada combinación de decil salarial y percentil de resultados de la simulación. Pese a que puede ser contraintuitivo a primera vista por el mayor riesgo asumido que implica este portafolio, este resultado es explicado por la dominancia que tiene la tendencia (retorno promedio) sobre la dispersión (desviación estándar) en periodos largos de tiempo (Rebonato, 2007). Éste también es un problema derivado del uso de una distribución normal para el proceso de simulación de los retornos.

En el caso de un portafolio moderado (portafolio C de Reveiz y León, 2008b), las pensiones serán bajas, de modo que un hombre promedio podrá adquirir de una aseguradora una pensión de 0,86 SMM, mientras que una mujer recibirá 0,48 SMM. En este mismo escenario de retornos, la pensión más alta que recibirá un hombre será de 8,6 SMM, mientras que una mujer alcanzará sólo 4,43 SMM. (véase Cuadro A4 y A5 del Anexo 3)

En el caso de una inversión dinámica a lo largo del tiempo, la cual, según el plazo restante a la pensión, resultaría de la inversión secuencial²⁹ en los portafolios agresivo, moderado y conservador (portafolios E, C y A de Reveiz y León, 2008b, respectivamente), los resultados muestran que las pensiones serán menores que en el portafolio moderado, donde los hombre y mujer promedio recibirán una pensión de 0,65 SMM y 0,5 SMM, respectivamente. De acuerdo con las densidades de cotización (Cuadro 2), nadie podría hacer uso de la GPM (véase los cuadros A10 y A11 del Anexo 3).

Finalmente, si asumimos que los retornos totales del sistema se comportarán de acuerdo con lo observado en periodo 2001-2008³⁰ (véase cuadros A8 y A9 del Anexo 3), parte de los hombres del decil 7 y las mujeres del decil 8 y las que están en la parte baja de la distribución del decil 9, tendrán que hacer uso de la GPM. La pensión promedio que alcanzarán los hombres y mujeres del decil 1 será de 0,15 y 0,11 SMM, respectivamente.

Como resultado general, y asumiendo que no hay cambios significativos que permitan generar mejores niveles de ingreso y mayores probabilidades de cotización, se puede esperar que en cuarenta años, además de las grandes diferencias pensionales entre

²⁹ Se supuso que el trabajador invertirá su riqueza acumulada en cada uno de los fondos disponibles de manera secuencial, empezando por el portafolio agresivo, seguido por el portafolio moderado y finalizando con el portafolio conservador. La proporción de tiempo utilizada fue de un tercio en cada portafolio.

³⁰ Es prudente considerar que el comportamiento de los FPO en este periodo estuvo enmarcado en el fuerte auge del mercado accionario y de deuda pública local, lo cual puede indicar que este comportamiento no obedece a una tendencia de largo plazo.

hombres y mujeres, en el escenario más optimista las pensiones serán bajas, el acceso a la GPM será muy limitado, y predominará la devolución de los aportes.

Inclusive, en un escenario de altos retornos (portafolio agresivo), ninguna persona podrá acceder a la GPM dado que quienes no alcanzan a llegar al saldo para comprar una renta vitalicia de un SMM no cumplen los requisitos de semanas cotizadas para acceder a este derecho; de este modo, cerca de un 40% de los hombres y cerca de un 60% de las mujeres comprarán rentas inferiores a la mínima o recibirán la devolución de su saldo.

Entre tanto, en un escenario conservador se tiene que, en promedio, un 10% de los hombres y cerca del 15% de las mujeres hará uso de la GPM, mientras que un 60% de los hombres y un 70% de las mujeres ni siquiera reunirán los requisitos para alcanzar esta garantía.

Si se asume que los retornos pasados son un buen indicador de los retornos futuros³¹, cerca de un 5% de los hombres y cerca de un 12% de las mujeres podrán hacer uso de la GPM, mientras que un 60% de los hombres y un 70% de las mujeres no cumplirán los requisitos para ser beneficiarios de la GPM y obtendrán pensiones inferiores al SMM.

Lo encontrado en este documento coincide con lo hallado en los estudios elaborados en Chile por Berstein *et al.* (2005 y 2006) y Berstein y Tockman (2005), así como con las estimaciones para Colombia elaboradas por Castro (2009).

5. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y LIMITACIONES DEL ANÁLISIS

Los resultados generan una señal de alerta para el futuro, especialmente si se tiene en cuenta que ni siquiera con unos retornos muy superiores al promedio histórico se consiguieron resultados alentadores.

³¹ Es prudente considerar que el comportamiento de los FPO en este periodo contó con un fuerte auge de los mercados accionario y de deuda pública local, lo cual puede indicar que esto no obedece a una tendencia de largo plazo.

Más aún, de repetirse el buen comportamiento pasado de los retornos de los fondos de pensiones -lo cual es poco probable, dado que la caída en la inflación y el exceso de liquidez global son eventos cuya reaparición es más bien incierta-, los resultados señalan la incapacidad del sistema actual para garantizar un nivel de vida digno a la población que ya no estará en edad de trabajar. Lo anterior podría llevar a pensar en flexibilizar las condiciones para hacer uso de la GPM, dado que con los parámetros actuales una parte muy reducida de la población podrá hacer uso de la misma; no obstante, se deberá también considerar el potencial impacto fiscal de tal medida.

Cuando se llega a resultados como los presentados, las propuestas para enfrentar las causas de los problemas pueden llegar a tener efectos negativos en la generación de empleo y el crecimiento de largo plazo. La primera sugerencia podría consistir en aumentar la tasa de cotización sobre el ingreso, lo cual permitiría alcanzar mayores niveles de ahorro y, de este modo, un aumento en el nivel de las pensiones, pero también podría generar mayores incentivos para aumentar la informalidad y reducir el empleo. Echeverry *et al.* (2001) estiman que por un punto de aumento en impuestos a la nómina, disminuye la generación de empleo entre 0,25% y 0,35%. Además, cabe recordar que existen factores institucionales que hacen que los niveles de ahorro no sean los adecuados en un país como Colombia³², en donde, sólo un 1,5% de la población ocupada ahorra en un fondo de pensiones voluntario (Silva, 2003).

La segunda propuesta consistiría en aumentar los años de cotización para hombres y mujeres (o por lo menos equiparar a las mujeres para disminuir la brecha salarial por género³³), de modo que serían más los años para que hombres y mujeres acumulasen riqueza para su vejez. Esta propuesta no estaría exenta de detractores y malestar en los trabajadores.

³² La tasa de cotización sobre el salario en el Seguro Social fue de 4,5% hasta 1985 y desde ese año hasta 1993 de 6,5% (véase Echeverry *et al.*, 2001)

³³ Aunque este es un aspecto de discusión permanente en todos los países, en algunos se ha optado por compensar a las mujeres con cierto número de semanas de acuerdo con los periodos de lactancia y de atención a los niños.

Una posible tercera solución al problema consistiría en generar los mecanismos necesarios para aumentar las densidades de cotización. En Colombia se han realizado esfuerzos en los últimos años, como el plan de Planilla Integrada de Liquidación de Aportes (PILA), que no es más que una simple corrección a la falta de controles administrativos del sistema para evitar la evasión de aportes.

Una cuarta propuesta es hacer los cambios legales necesarios para permitir pensiones inferiores al SMM, situación que no sería exclusiva de Colombia³⁴; lo cual acabaría la devolución de saldos y, de este modo, se preservaría de mejor manera el objeto del sistema pensional.

Por último, también es pertinente aumentar la eficiencia en la administración de los portafolios por parte de las AFP. Como se hizo evidente al comparar el resultado de los portafolios agresivo y conservador, la asignación estratégica de activos es fundamental para conseguir mejores resultados para el SP. Es claro que actualmente la regulación no permite que dicha asignación estratégica se haga de manera eficiente, tal como lo han demostrado diversos autores (Jara, 2006a; Jara, 2006b; Laserna, 2007; Reveiz y León, 2008b; Reveiz *et al.*, 2008).

Algo para analizar y solucionar en el futuro es el ya mencionado problema de baja cobertura y baja densidad de los cotizantes del sistema, tanto en ahorro individual como de prima media. Este problema se presenta por los altos niveles de informalidad y distorsiones del mercado laboral, ocasionado a su vez por múltiples factores, entre los cuales se podrían citar la elevada parafiscalidad, la asimetría entre los perfiles de formación de la mano de obra y la demanda del mercado, los problemas de información del mercado laboral, la velocidad de ajuste entre el cambio técnico y el reentrenamiento de la mano de obra, y la baja capacidad que tiene el sistema productivo para ocupar trabajadores con bajos niveles de educación (Bustamante, 2006).

Finalmente, teniendo en cuenta los trabajos existentes y los resultados presentados, este estudio tiene dos importantes aportes:

³⁴ Algunos de estos países son: Argelia, Grecia, Libia y Letonia (véase Whitehouse, 2007).

El primero consiste en corroborar que, a pesar de los avances en temas regulatorios y de manejo de portafolio, el sistema aún tiene grandes retos en materia de su incidencia en el conjunto de los trabajadores, debido a los problemas de baja cobertura y baja densidad de cotización.

El segundo consiste en señalar que si las condiciones actuales del mercado laboral se mantienen y los mecanismos creados para ampliar la cobertura pensional no son efectivos, desde un escenario particularmente optimista más de un 50% de la población llegará a niveles inferiores a los necesarios para obtener una pensión mínima. Esto tendrá un fuerte impacto social y fiscal en el mediano y largo plazos.

Con respecto a los interrogantes B. y C. propuestos en la introducción, en consideración a la literatura previamente presentada y los dos aportes antes mencionados, los autores concluyen que:

- El sistema de capitalización no tiene la capacidad de generar adecuados retornos para los futuros pensionados, y
- con la estructura pensional actual no se garantiza que la gran mayoría de los trabajadores logren llegar a una pensión que permita tener condiciones dignas de vida.

Los autores reconocen varias limitaciones del presente modelo. La más importante de ellas es la utilización de una distribución normal para la simulación de los retornos, la cual, de acuerdo con la evidencia empírica, implica desconocer la existencia de eventos extremos y de asimetría en la distribución de los retornos, lo cual tiene un impacto importante en la acumulación de riqueza por parte del trabajador.³⁵

³⁵ Sobre este tema en particular se han desarrollado metodologías para la asignación estratégica de activos tales como la propuesta por Reveiz y León (2008c), la cual fue aplicada para el caso de FPO en Colombia por León y Laserna (2008).

Otra limitación proviene del hecho de asumir que un individuo que inicia en determinado decil se mantendrá el resto de la vida en el mismo, sin incluir posibles transiciones o mejoras en sus niveles de ingreso.

También sería aconsejable contar con datos de un periodo de tiempo más amplio y dividido por sectores de la economía, con lo cual se podrían hacer estimaciones que consideren cambios en los ciclos económicos y comparaciones intersectoriales.

Además, es importante destacar que se contó con tablas de mortalidad construidas en 1994 con información de la década de los ochenta, lo cual ignora los cambios demográficos sucedidos a la fecha. Así mismo, asumir que las densidades de cotización se van a mantener constantes en todo el periodo puede ser alejado de la realidad, especialmente si se considera el impacto de los ciclos económicos, los cambios demográficos, así como futuros procesos de flexibilización laboral.

Este documento también deja como resultado dos temas pendientes para trabajos posteriores. El primero de estos es evitar la escogencia de una distribución normal para la simulación de los retornos de los portafolios, así como la posibilidad de estimar de mejor manera el retorno esperado de los portafolios; con esto se lograría tener una mejor estimación de los resultados, aunque cabe esperar que las conclusiones del presente documento no varíen.

El segundo tema pendiente es estimar la secuencia óptima de selección de fondos dentro de un sistema de multifondos, la cual intuitivamente consiste en empezar por un portafolio agresivo, continuar con uno moderado, para finalizar en uno conservador; abordar este reto depende del éxito en cuanto al anterior, ya que la utilización de una distribución normal, así como la estimación tradicional de los parámetros para la simulación de los retornos, sesga los resultados hacia el portafolio agresivo, en clara contradicción con la intuición y el perfil de riesgo de los aportantes al sistema pensional.

BIBLIOGRAFÍA

- Batten, R., Mortality table construction, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1978.
- Börsch-Supan, A.H., Ludwig, A. y Winter, J. “Ageing, Pension Reform and Capital Flows: A Multi-Country Simulation Model”. *Economica*, Vol. 73, Núm. 292, London School of Economics and Political Science, pp. 625-658, noviembre, 2006.
- Berstein, S. y Tokman, A. “Brechas de ingreso entre géneros: ¿Perpetuadas o exacerbadas en la vejez?”, Documentos de Trabajo Núm. 8, Superintendencia de Administradora de Fondos de Pensiones, julio, 2005.
- Berstein, S., Larraín, G. y Pino, F. “Cobertura, densidad y pensiones en Chile: Proyecciones a 20 años plazo”, Documentos de Trabajo Núm. 12, Superintendencia de Administradora de Fondos de Pensiones, noviembre, 2005.
- Berstein, S., Larraín, G. y Pino, F. “Chilean Pension Reform: Coverage Facts and Policy Alternatives”. *Economía*, Journal of the Latin American and Caribbean Economic Association, V. 6. No. 2, 2006.
- Betancourt Y. “El problema de incentivos entre las AFP y los Afiliados al sistema privado de pensiones” en Reporte de Estabilidad Financiera, marzo, 2008.
- Bustamante, J. “Factores que inciden en la cobertura del sistema pensional en Colombia”, *Revista Planeación y Desarrollo*, V. XXXVIII, núm. 2, julio-diciembre, 2006.
- Castilla, L. (Ed), *Oportunidades en América Latina. Hacia una mejor política social*, CAF, Caracas, 2007.
- Castro C. “Administración de riesgos en los Fondos Privados de Pensiones”, Archivos de Economía, documento 351, Departamento Nacional de Planeación, 2009.
- CEPAL, *Transformaciones demográficas y su influencia en el desarrollo en América Latina y el Caribe*, Santo Domingo, 2008.
- Echeverry, J., Escobar, A., Merchán, C., Piraquive, G. y Santamaría, M. “Elementos para el debate sobre una nueva reforma pensional en Colombia”, Archivos de Economía, documento 156, Departamento Nacional de Planeación, septiembre, 2001.

- Gomez, C., Jara, D. y Murcia, A. “Impacto de las operaciones de los fondos de pensiones obligatorias en los mercados financieros colombianos”, Borradores de Economía, núm. 406, Banco de la República, octubre, 2006.
- Hull, H., *Options, Futures, and other Derivatives*. Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 2002.
- Jara, D., Gómez, C. y Pardo, A. “Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales en Colombia”, Ensayos sobre Política Económica, núm.49, pp. 192-239, diciembre, 2005.
- Jara, D. “Propuestas dirigidas a mejorar la eficiencia de los fondos de pensiones”, Borradores de Economía, núm. 423, Banco de la República, diciembre, 2006a.
- Jara, D. “Modelo de la regulación de las AFP en Colombia y su impacto en el Portafolio de los Fondos de Pensiones”, Ensayos sobre Política Económica, no.52, diciembre, 2006b.
- Julio, J. M. “A Principal-Agent Model with a Minimum Performance Warranty: The Case of Mandatory Individual Pension Accounts”, Borradores de Economía, núm. 546, Banco de la Republica, enero, 2009.
- Laserna, J.M., “Una propuesta para mejorar el manejo de riesgo, la diversificación y la eficiencia de los portafolios de los fondos de pensiones obligatorias”, Cuadernos Latinoamericanos de Administración, V. II, No. 4. Universidad El Bosque, 2007.
- León, C. y Laserna, J.M., “Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo”, Borradores de Economía, núm. 523, Banco de la Republica, agosto, 2008.
- Leyes sobre seguridad social; ley 100 de 1993 (diario oficial N° 41.148 del 23 de diciembre de 1993); ley 797 de 2003 (diario oficial N° 45079 del 29 de diciembre de 2005);
- Martínez, O. y Murcia, A. “Sistema de comisiones de las Administradoras de Fondos de Pensiones en Colombia” en Reporte de Estabilidad Financiera, marzo, 2008.
- Merchán, C. “Pensiones: conceptos y esquemas de financiación”, Archivos de Economía, documento 177, Departamento Nacional de Planeación, febrero, 2002a.

- Merchán, C. “¿Cuáles son los colombianos con pensiones privilegiadas”, Archivos de Economía, documento 182, Departamento Nacional de Planeación, abril, 2002b.
- Osorio, J., Martínez, J., y Rodríguez, T. “El modelo DNPensión V 4.0 Parte I”, Archivos de Economía, documento 285, Departamento Nacional de Planeación, junio, 2005.
- Parra, J.C. “DNPensión: Un modelo de simulación para estimar el costo fiscal del sistema pensional colombiano”, Archivos de Economía, documento 150, Departamento Nacional de Planeación, mayo, 2001.
- Rebonato, R. *Plight of the Fortune Tellers*, Princeton University Press, 2007.
- Reveiz, A. y León, C. “Índice representativo del mercado de deuda pública interna: IDXTES”, Borradores de Economía, Núm. 488, Banco de la República, febrero, 2008a.
- Reveiz, A. y León, C. “Administración de fondos de pensiones y multifondos en Colombia”, Borradores de Economía, Núm. 506, Banco de la República, abril, 2008b.
- Reveiz, A. y León, C. “Efficient portfolio optimization in the wealth creation and maximum drawdown space”, Borradores de Economía, Núm. 520, Banco de la República, junio, 2008c. [Próximo a ser publicado en Berkelaar A., Coche J. and Nyholm K. -Eds.- *Strategic Asset Allocation for Central Banks and Sovereign Wealth Managers*, European Central Bank - World Bank – BIS, Palgrave Macmillan, 2009]
- Reveiz, A., León, C., Laserna, J. M. y Martínez. I. “Recomendaciones para la modificación del régimen de pensiones obligatorias de Colombia”. Ensayos Sobre Política Económica, Vol.26, No. 56. Banco de la República, junio, 2008.
- Reveiz, A. y Castro F. “Modelo para la proyección de los flujos del sistema pensional colombiano administrado por AFP”. Mimeo. Banco de la Republica, 2009.
- Rofman, R. y Luccheti, L. “Pension Systems in Latin America: Concepts and Measurements of Coverage”, Social protections, Discussion paper. No. 0616, The World Bank, 2006.
- Santamaría, M. y Rojas, N. “La participación laboral: ¿Qué ha pasado y qué podemos esperar?”, Archivos de Economía, documento 146, Departamento Nacional de Planeación, abril, 2001.

- Silva, C. “Garantía de pensión mínima en Colombia: El efecto de la volatilidad del retorno de la cuenta de ahorro individual”, Documento CEDE 2003-17, Universidad de los Andes, agosto, 2003.
- Vargas, H. y Betancourt Y. “Pension fund managers behavior in the foreign exchange market”, Borradores de Economía, núm. 391, Banco de la República, abril, 2006.
- Whitehouse, E. *Panorama de las pensiones. Sistemas de ingreso al retiro en 53 países*. Bogotá, Banco Mundial, Mayol ediciones, 2007.

ANEXOS

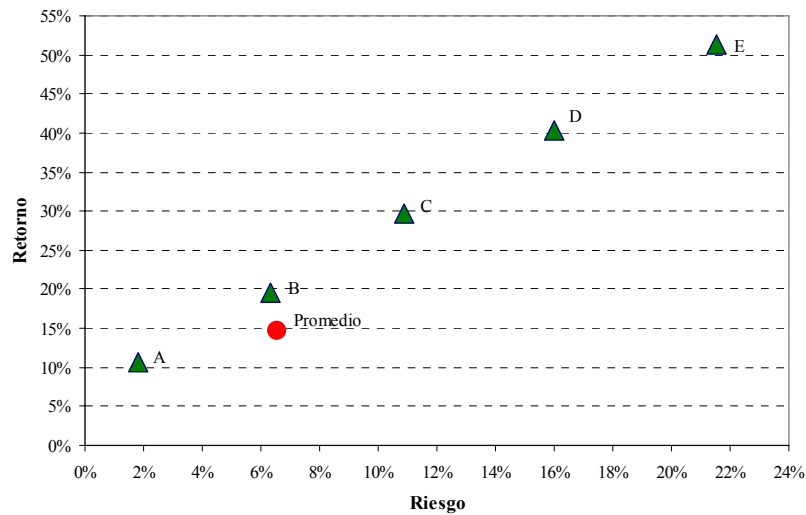
1. Retornos y desviaciones estándar mensuales

Cuadro A1. Cálculo del retorno y la desviación estándar mensual, para las fronteras eficientes de Reveiz y León (2008b) y para los retornos del periodo ene2001-jun2008

Portafolio	Retorno promedio (anualizado)	Retorno promedio (mensualizado)	Riesgo promedio anualizado	Riesgo promedio mensualizado
A	10,59%	0,84%	1,80%	0,52%
B	19,63%	1,50%	6,32%	1,82%
C	29,67%	2,19%	10,87%	3,14%
D	40,36%	2,87%	15,99%	4,62%
E	51,40%	3,52%	21,54%	6,22%
Promedio del sistema 2001-2008	14.68%	1,11%	6.54%	1,41%

Fuente: Cálculos de los autores con información de Reveiz y León (2008b) y la Superintendencia Financiera de Colombia

Gráfico A1. Relación riesgo-retorno (Portafolios del estudio)



Fuente: Elaboración de los autores con información de Reveiz y León (2008b) y la Superintendencia Financiera de Colombia

En el esquema de este trabajo los fondos A, C y E representan a los portafolios conservador, moderado y agresivo, respectivamente. El fondo B representa aproximadamente la elección que surge cuando los agentes deciden invertir 50% en un portafolio conservador y el otro 50% en uno moderado, mientras que el fondo D representa aproximadamente un portafolio que está distribuido un 50% en el portafolio agresivo y 50% en el portafolio conservador.

2. Mensualización de las probabilidades anuales de muerte

Las tablas de mortalidad usadas en este ejercicio son las que rigen para Colombia según la Resolución 0585 de 1994 de la Superintendencia Bancaria (ahora Superintendencia Financiera). Estos datos son anuales, y el ejercicio que presenta este documento genera resultados y hace proyecciones mensuales, por lo que fue necesario hacer tal conversión. El método escogido para mensualizar las probabilidades anuales de muerte es el de Distribución Uniforme de Muertes (UDD, Uniform Distribution of Deaths), la cual requiere la siguiente información.

d_x = es el número de personas que esperan morir en un intervalo de un año.

Entre x y $x+1$.

q_x = la probabilidad, dada una tabla de mortalidad, de que el individuo no sobreviva en el periodo $x+1$.

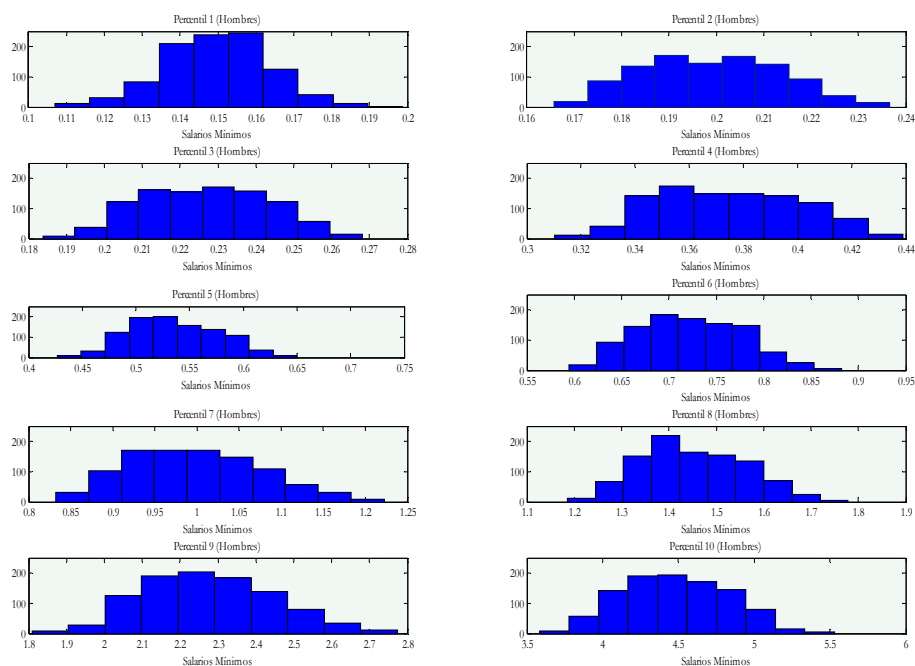
μ_x = fuerza anualizada de mortalidad operativa en la edad x .

Se asumió, además, que la función $f(t) = {}_tq_x^*$ es lineal en el intervalo $(0 \leq t \leq 1)$ y, a partir de los datos anuales, se construyó la serie mes tras mes, siguiendo la metodología sugerida por Batten (1978).

3. Resultados de la simulación

Cada simulación genera una distribución de los SMM que podría recibir un pensionado dado su decil de ingreso. Esto se presenta por la aleatoriedad de los retornos.

Gráfico A2. Distribución de riqueza acumulada, Portafolio A (Hombres)



Fuente: Cálculos de los autores.

Cuadro A2. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio E (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,25	0,28	0,32	0,36	0,40	0,45	0,48
2	0,35	0,37	0,43	0,47	0,52	0,59	0,64
3	0,39	0,41	0,48	0,54	0,60	0,66	0,70
4	0,65	0,71	0,79	0,89	0,99	1,09	1,14
5	0,91	1,00	1,14	1,27	1,41	1,56	1,63
6	1,20	1,33	1,51	1,70	1,89	2,08	2,18
7	1,65	1,83	2,08	2,31	2,58	2,88	3,01
8	2,35	2,58	2,98	3,33	3,70	4,09	4,35
9	3,76	4,06	4,63	5,18	5,77	6,39	6,65
10	7,16	7,84	9,08	10,20	11,35	12,70	13,45

Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 51.40\%$ $\sigma = 21.54\%$

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A3. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio E (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,18	0,20	0,24	0,26	0,29	0,33	0,35
2	0,23	0,25	0,29	0,33	0,36	0,40	0,42
3	0,25	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,47
4	0,37	0,39	0,46	0,52	0,58	0,64	0,68
5	0,51	0,56	0,63	0,71	0,79	0,88	0,94
6	0,66	0,72	0,82	0,92	1,03	1,14	1,22
7	0,90	0,96	1,08	1,21	1,36	1,52	1,59
8	1,26	1,38	1,55	1,74	1,94	2,15	2,26
9	1,80	2,04	2,34	2,62	2,90	3,27	3,46
10	3,70	4,00	4,66	5,24	5,81	6,51	6,86
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 51.40\%$ $\sigma = 21.54\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A4. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio C (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,20	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,29
2	0,26	0,27	0,30	0,32	0,35	0,38	0,39
3	0,29	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,46
4	0,36	0,38	0,43	0,46	0,49	0,52	0,55
5	0,69	0,72	0,79	0,86	0,94	1,00	1,05
6	0,93	0,97	1,07	1,16	1,25	1,36	1,41
7	1,27	0,13	1,46	1,59	1,72	1,86	1,95
8	1,84	1,91	2,11	2,28	2,47	2,70	2,84
9	2,76	3,00	3,29	3,56	3,88	4,21	4,39
10	5,47	5,89	6,51	7,06	7,61	8,30	8,60
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 29.67\%$ $\sigma = 10.87\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A5. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio C (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,13	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,23
2	0,17	0,18	0,20	0,22	0,24	0,27	0,28
3	0,19	0,20	0,22	0,25	0,27	0,29	0,31
4	0,28	0,29	0,32	0,35	0,39	0,42	0,45
5	0,38	0,41	0,44	0,48	0,52	0,57	0,60
6	0,51	0,53	0,58	0,63	0,68	0,75	0,79
7	0,67	0,70	0,76	0,84	0,91	0,99	1,03
8	0,92	0,99	1,10	1,19	1,29	1,41	1,48
9	1,42	1,50	1,65	1,79	1,94	2,12	2,22
10	2,83	2,99	3,30	3,58	3,88	4,25	4,43
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 29.67\%$ $\sigma = 10.87\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A6. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio A (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,14	0,14
2	0,15	0,16	0,16	0,17	0,17	0,18	0,18
3	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,22	0,23
4	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35
5	0,41	0,42	0,44	0,45	0,47	0,49	0,50
6	0,55	0,56	0,59	0,61	0,63	0,66	0,68
7	0,76	0,78	0,82	0,85	0,88	0,92	0,94
8	1,15	1,17	1,20	1,23	1,27	1,31	1,34
9	1,78	1,83	1,89	1,94	2,00	2,07	2,13
10	3,52	3,58	3,72	3,88	3,94	4,10	4,23
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 10.59\%$ $\sigma = 1.80\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A7. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio A (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,08	0,08	0,09	0,09	0,10	0,11	0,11
2	0,10	0,10	0,11	0,12	0,13	0,13	0,14
3	0,11	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15
4	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
5	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,28	0,29
6	0,30	0,30	0,32	0,33	0,35	0,36	0,37
7	0,40	0,41	0,43	0,44	0,46	0,48	0,49
8	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66	0,69	0,71
9	0,87	0,89	0,93	0,97	1,00	1,04	1,07
10	1,75	1,81	1,88	1,93	0,20	2,09	2,14
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 10.59$ $\sigma = 1.80\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A8. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio promedio (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18
2	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23
3	0,19	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,26
4	0,32	0,34	0,35	0,37	0,40	0,42	0,43
5	0,46	0,48	0,51	0,53	0,57	0,60	0,63
6	0,62	0,64	0,68	0,72	0,77	0,81	0,84
7	0,86	0,88	0,94	0,99	1,05	1,13	1,17
8	1,24	1,29	1,37	1,44	1,54	1,63	1,70
9	1,93	2,02	2,14	2,26	2,40	2,57	2,69
10	3,80	3,94	4,22	4,48	4,73	5,06	5,20
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 14.68\%$ $\sigma = 6.54\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A9. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio promedio (mujeres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,09	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14
2	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17
3	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,18	0,18
4	0,18	0,19	0,20	0,22	0,23	0,25	0,26
5	0,26	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
6	0,33	0,35	0,37	0,39	0,42	0,45	0,46
7	0,44	0,46	0,49	0,52	0,55	0,59	0,61
8	0,63	0,66	0,70	0,75	0,79	0,85	0,88
9	0,95	0,99	1,06	1,13	1,20	1,28	1,33
10	1,94	2,01	2,14	2,28	2,41	2,58	2,65
Supuestos: Inflación = 5%, $\mu = 14.68$ $\sigma = 1.11\%$							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A10. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio secuencial (hombres)

Decil	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
2	0,20	0,21	0,23	0,25	0,27	0,29	0,31
3	0,23	0,24	0,26	0,28	0,30	0,33	0,34
4	0,39	0,41	0,43	0,46	0,49	0,53	0,54
5	0,55	0,58	0,62	0,65	0,70	0,75	0,78
6	0,74	0,77	0,82	0,87	0,93	1,00	1,03
7	1,01	1,05	1,12	1,19	1,26	1,34	1,40
8	1,47	1,52	1,60	1,69	1,79	1,90	1,98
9	2,27	2,36	2,49	2,62	2,78	2,95	3,06
10	4,47	4,63	4,92	5,18	5,48	5,85	6,00
Supuestos: Inflación = 5%, μ y σ = combinación agresivo, moderado y conservador							

Fuente: cálculos de los autores

Cuadro A11. Pensión expresada en salarios mínimos promedio, por decil salarial y percentil. Portafolio secuencial (mujeres)

Senda	Percentil 1	Percentil 5	Percentil 25	Percentil 50	Percentil 75	Percentil 95	Percentil 99
1	0,12	0,13	0,15	0,16	0,17	0,19	0,20
2	0,16	0,17	0,19	0,20	0,22	0,23	0,24
3	0,17	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,27
4	0,26	0,27	0,29	0,32	0,34	0,37	0,39
5	0,41	0,43	0,46	0,50	0,54	0,58	0,61
6	0,55	0,58	0,62	0,66	0,71	0,77	0,79
7	0,73	0,76	0,82	0,88	0,94	1,01	1,05
8	1,03	1,07	1,14	1,22	1,32	0,14	0,15
9	1,58	1,65	1,76	1,86	1,99	2,15	2,23
10	3,07	3,20	3,45	3,69	3,95	4,24	4,39
Supuestos: Inflación = 5%, μ y σ = combinación agresivo, moderado y conservador							

Fuente: cálculos de los autores

4. Aspectos Computacionales

El proceso de acumulación y desacumulación del flujo es desarrollado con el *software* MATLAB (versión 7.0) y sus aplicativos Stateflow y Simulink.