

La elasticidad de Frisch y la
transmisión de la política
monetaria en Colombia

Por: Juan David Prada Sarmiento
Luis Eduardo Rojas Dueñas

Borradores de ECONOMÍA

Núm. 555

2009



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

La elasticidad de Frisch y la transmisión de la política monetaria en Colombia*

Juan David Prada Sarmiento Luis Eduardo Rojas Dueñas

jpradasa@banrep.gov.co

lrojasdu@banrep.gov.co

Departamento de Modelos Macroeconómicos

Banco de la República

Marzo de 2009

Este artículo estudia el mecanismo de transmisión de la política monetaria a través de los salarios reales y la oferta de trabajo. El *trade-off* inflación producto depende de la calificación de los trabajadores y de la elasticidad de la oferta de trabajo al salario real. Se plantea un modelo teórico simple que incorpora la segmentación entre trabajadores calificados y no calificados y las restricciones en el acceso al sistema financiero. Utilizando el método generalizado de momentos se estima la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo. Se construyeron series de salarios representativos y de horas ofrecidas al mercado, utilizando una aproximación diferente a la encontrada en la literatura en general, que utiliza el número de horas trabajadas. La estimación puntual arrojó una elasticidad de Frisch de 0,31 y una elasticidad de sustitución intertemporal de 0,42. La oferta laboral es inelástica en Colombia, generando que los costos en términos de producción de la estabilización de precios sean importantes.

Palabras Clave: Elasticidad de Frisch, oferta laboral, política monetaria, Colombia

Clasificación JEL: E24, E50, J22

*Agradecemos especialmente los comentarios y sugerencias de Andrés González y Lavan Mahadeva, y la colaboración de Luz Karime Ardila en la construcción de la base de datos.

Los resultados y opiniones presentadas en este trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

1. Introducción

Uno de los mercados más importantes en la economía colombiana es el mercado de trabajo. Para las firmas el trabajo es su principal factor de producción. Para los hogares, la principal fuente de ingresos en Colombia es la remuneración laboral.

Como factor de producción, el salario vigente en la economía afecta directamente al costo marginal de producción, que es uno de los determinantes principales de la tasa de inflación. Como ingreso, el salario afecta las decisiones de consumo de los hogares, modificando la demanda agregada. Por ello es importante conocer la estructura del mercado laboral, para comprender las interrelaciones que presentan las diversas variables macroeconómicas y así entender cómo reacciona la economía ante las intervenciones de política.

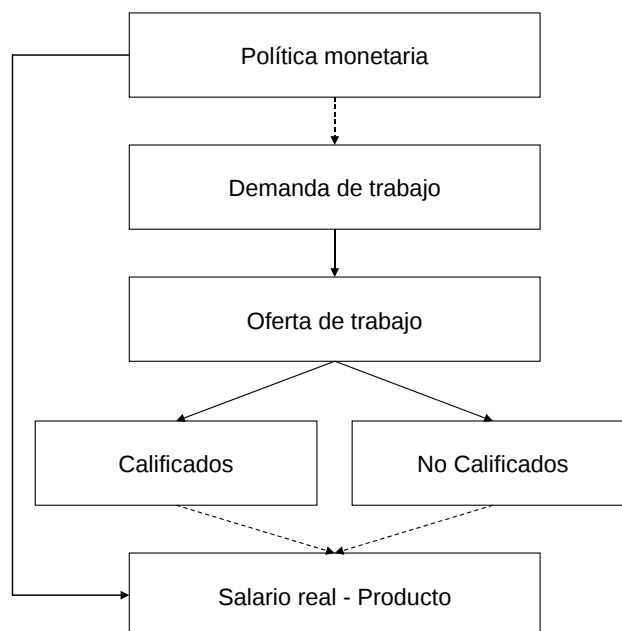
1.1. El mecanismo de transmisión

El objetivo de la autoridad monetaria es la estabilización de la inflación, intentando minimizar los costos sobre el producto, a través de la modificación de los instrumentos de política disponibles (por lo general, la tasa de interés del banco central). En este artículo se parte de la relación existente entre las decisiones de la autoridad monetaria y la demanda por trabajo: intervenciones de política monetaria que buscan modificar la demanda agregada se manifiestan en el mercado laboral como choques a la demanda por trabajo. Una vez cambia la demanda por trabajo, el efecto final sobre los salarios reales, las horas de trabajo y el producto depende de la oferta de trabajo. Es por ello que es importante estudiar en detalle la decisión de oferta de horas laborales.

Por ejemplo, si un mayor ingreso laboral generado por choques en la demanda de trabajo incentiva una mayor oferta de trabajo, entonces la respuesta del producto ante cualquier choque que aumente los salarios será mayor que cuando la oferta no reacciona a estos choques. De forma análoga, choques negativos a los salarios reales, como los causados por incrementos exógenos en los precios del petróleo, pueden tener efectos contractivos importantes cuando la oferta de trabajo cae fuertemente.

Sin embargo, el efecto de la oferta laboral sobre el producto depende también de qué tan productivo es el trabajo y con qué intensidad es utilizado en la producción. Ramírez-Hassan (2008) muestra, estimando una función de producción translogarítmica, que en Colombia la elasticidad demanda-producto por trabajo calificado es mayor que la correspondiente elasticidad para el trabajo no calificado. Entonces las firmas necesitan una reacción mayor del trabajo calificado cuando quieren cambiar la producción. Así, la respuesta de la oferta de trabajo calificado puede tener efectos mayores sobre el producto

Gráfico 1: Mecanismo de transmisión oferta de trabajo



que la oferta de trabajo no calificado. Por otra parte, López (2001) presenta evidencia indicando que el salario de los trabajadores calificados es muy superior al salario de los no calificados. El salario es un indicador de la productividad de cada tipo de trabajo, y este resultado confirma que el trabajo calificado podría tener efectos más fuertes sobre la producción.

Por el lado de la oferta, puede argumentarse que la proporción de colombianos que tienen el suficiente capital humano para trabajar en empleos altamente productivos es pequeña, explicando el nivel de desigualdad salarial reportado por Arango, Posada y Uribe (2005). Además, dada la ausencia de redes de asistencia social y de acceso al sector financiero, puede suponerse que la elasticidad de la oferta de trabajo no calificado es mucho mayor que la correspondiente elasticidad en el sector calificado. A pesar de ello, la elasticidad agregada de la oferta de trabajo sobre el producto sería baja, ya que los trabajos no productivos tienen poco efecto sobre la producción. En otras palabras, la elasticidad de la oferta de trabajo agregada podría ser baja, incluso si la elasticidad individual es alta. Por ello es conveniente estudiar la oferta laboral del sector calificado y no calificado.

El Gráfico 1 resume el mecanismo de transmisión de la política monetaria que se presenta en este trabajo. La política monetaria afecta a la demanda por trabajo, y los

efectos que este choque tiene sobre el salario real y sobre la producción dependen de las características de la oferta de trabajo calificado y no calificado.

1.2. Elasticidad salario de la oferta de trabajo

En este artículo se estudia la decisión de oferta de trabajo y el papel que ésta juega en la transmisión de la política monetaria en Colombia. El aspecto de la decisión de oferta laboral estudiado es la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real.

¿Cómo la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real está conectada con los efectos que las acciones de política tienen sobre la inflación y el producto?

La razón principal por la que la elasticidad de la oferta de trabajo es esencial para estudiar el mecanismo de transmisión de política monetaria tiene que ver con la disyuntiva producto-inflación, la respuesta relativa del producto en comparación con la inflación, cuando la política monetaria cambia. Cuando la autoridad monetaria intenta disminuir la inflación, por ejemplo, también lleva al producto por debajo de su nivel de tendencia. El *trade-off* producto-inflación es la cantidad de producción perdida, relativa a la ganancia obtenida en la estabilización de la inflación. Este es un aspecto clave del mecanismo de transmisión de la política monetaria: Cogley y Sargent (2005) y Sargent (2001) argumentan que una fuente importante de errores de política monetaria en el pasado ha sido un mal entendimiento, por parte de la autoridad monetaria, de este *trade-off* producto-inflación.

La literatura teórica en esta relación sugiere que la elasticidad de la oferta de trabajo es un determinante crucial del *trade-off* producto-inflación. En un contexto de salarios nominales rígidos, una oferta de trabajo menos elástica ocasiona un mayor sacrificio en términos de producto de la política monetaria, ya que es más costoso el ajuste de los salarios reales ante choques a la economía, amplificando el efecto sobre el producto real de perturbaciones nominales. Para verlo, suponga un desplazamiento exógeno de la demanda laboral. Si la oferta es inelástica, hay presiones de mercado para disminuir significativamente el salario real. Si el salario es rígido a la baja, esto genera costos adicionales para la economía, amplificando los efectos reales de choques nominales.

Un ejemplo se encuentra en Benigno y Ricci (2008). En un modelo con salarios nominales rígidos a la baja y movimiento Browniano para los choques de productividad y gasto, encuentran expresiones explícitas para el valor esperado de la tasa de desempleo de largo plazo, y para su relación no lineal con el valor esperado de la inflación de largo plazo. Ambas expresiones dependen crucialmente de la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real. Si la oferta de trabajo es elástica con respecto al salario, entonces los salarios nominales reaccionan menos a choques nominales de gasto,

porque los fijadores de salario están dispuestos a tolerar fluctuaciones más grandes en las horas trabajadas. Si los salarios reaccionan menos, existe un riesgo menor de tener que resistir caídas en el salario nominal, de forma tal que la tasa de desempleo de equilibrio puede ser más baja. De manera similar, con una oferta de trabajo elástica la inflación puede completar su ajuste con menores costos en término de empleo. Un resultado similar fue encontrado previamente por Jeanne (1998), mostrando que tanto la amplitud como la persistencia de la respuesta del producto ante una perturbación monetaria está inversamente relacionada con la elasticidad de la oferta de trabajo.

Con esta motivación en mente, en este artículo se estima la elasticidad de la oferta agregada de trabajo efectivo con respecto al salario real para Colombia. De forma más precisa, se estima la elasticidad de Frisch de la oferta agregada, que se define como el cambio porcentual en la oferta de trabajo efectiva ante un cambio porcentual en el salario real, manteniendo la utilidad marginal del consumo constante.

Suponga por un momento que las preferencias de un agente representativo están representadas por una función de utilidad instantánea separable:

$$U(c_t) - V(h_t)$$

siendo c_t el consumo del período t y h_t las horas de trabajo, U una función cóncava diferenciable y V una función convexa diferenciable.

El agente representativo busca maximizar el valor esperado de la suma descontada de la utilidad a lo largo de un horizonte infinito de tiempo, escogiendo sendas óptimas de consumo y horas de trabajo. En particular se obtiene la siguiente condición de primer orden respecto al salario real

$$V_h(h_t) = U_c(c_t) w_t$$

que representa de forma implícita la oferta de horas de trabajo del agente, siendo w_t el salario real después de impuestos, $V_h(h_t)$ la derivada con respecto a h y $U_c(c_t)$ la derivada con respecto a c .

La derivada total de esta condición de primer orden puede hallarse fácilmente

$$V_{hh}(h_t) dh_t = U_{cc}(c_t) w_t dc_t + U_c(c_t) dw_t$$

y esta expresión permite cuantificar la sensibilidad de la oferta de trabajo ante cambios en el salario:

$$\frac{dh_t}{dw_t} = \frac{1}{V_{hh}(h_t)} \left(U_c(c_t) + U_{cc}(c_t) w_t \frac{dc_t}{dw_t} \right)$$

de donde

$$e_t^{hw} = \frac{1}{\eta_t} (1 - \sigma_t e_t^{cw})$$

siendo e_t^{hw} la elasticidad de las horas ofrecidas ante el salario, e_t^{cw} la elasticidad del consumo ante el salario, $\eta_t = \frac{V_{hh}(h_t)h_t}{V_h(h_t)}$ y $\sigma_t = -\frac{U_{cc}(c_t)c_t}{U_c(c_t)}$ el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

La elasticidad salario de la oferta de trabajo depende directamente de la elasticidad del consumo ante el salario: cambios en el consumo, ocasionados por variaciones en el salario, se manifiestan en la oferta de horas. Esto refleja la sustitución intratemporal entre consumo y ocio. En algunos trabajos esta elasticidad es llamada “no compensada”.

Para analizar el efecto puro del salario sobre la oferta de horas deben aislarse estos efectos intratemporales, especialmente si se busca comprender los efectos de la política monetaria sobre la oferta de horas de trabajo.

Hay varias alternativas para estudiar la sensibilidad de la oferta de trabajo ante cambios en el salario:

- La elasticidad de Frisch de la oferta laboral, que se calcula manteniendo constante la utilidad marginal del consumo. En este caso se tiene que

$$e_t^{frisch} = \frac{V_h(h_t)}{V_{hh}(h_t)h_t} \Big|_{U_c(c_t)=cte}$$

Es importante recordar que en un modelo de optimización intertemporal la utilidad marginal del consumo presente representa el valor presente de la utilidad adicional que obtiene un individuo ante aumentos de una unidad en la riqueza total. Al mantener constante la utilidad marginal del consumo se están controlando explícitamente los efectos riqueza generados por la política monetaria.

- La m -elasticidad, que es la elasticidad de la oferta de trabajo en la cual se mantiene el nivel de consumo actual constante. Esta elasticidad muestra el cambio porcentual en las horas ofrecidas causado por cambios porcentuales en los salarios actuales, suponiendo que el consumo es constante, y es una cota superior para la elasticidad de Frisch.
- La elasticidad marshalliana, que es la elasticidad de la oferta de trabajo en la cual se mantiene el nivel de ingreso neto actual constante. Esta elasticidad puede generar una cota inferior para la elasticidad de Frisch.
- La elasticidad hicksiana, que es la elasticidad de la oferta de trabajo en la cual se

mantiene el nivel de utilidad actual constante. Esta elasticidad puede generar una cota inferior para la elasticidad de Frisch.

Siguiendo a Kuroda y Yamamoto (2007), se tiene que estas tres últimas elasticidades son robustas a restricciones de liquidez, ya que en su definición formal no requieren la utilización de la ecuación de Euler de consumo intertemporal. Es por esta razón que muchos trabajos internacionales estiman alguna de estas elasticidades, en lugar de tratar de calcular la elasticidad de Frisch, que sí se puede ver afectada por restricciones de liquidez y acumulación de activos. Estas restricciones son importantes en la estimación econométrica de la elasticidad salario de la oferta de trabajo.

Ahora es pertinente preguntarse ¿por qué utilizar la elasticidad de Frisch? La elasticidad Frisch de la oferta laboral captura la elasticidad salario efectivo de las horas trabajadas, manteniendo constante la utilidad marginal del consumo. Esta elasticidad mide el efecto sustitución que un cambio en el salario efectivo recibido genera en la oferta laboral, y parece ser la apropiada en este artículo por varias razones:

- La elasticidad de Frisch depende de parámetros profundos de la economía. Al tratar de estimar la elasticidad salario de la oferta laboral directamente de los datos, a partir de simples correlaciones que cambian con el tiempo, los resultados dependen del contexto económico. La elasticidad de Frisch en cambio es invariante a modificaciones en la política económica, por lo que puede ser utilizada para evaluar los efectos de las intervenciones de las autoridades monetaria y fiscal sin estar expuesto a la crítica de Lucas (Prescott (1986)).
- Los efectos de la política monetaria sobre el salario se presentan como desviaciones de corto plazo de su nivel de equilibrio de largo plazo. Como el objetivo es precisamente entender los mecanismos de transmisión de la política monetaria, las variaciones relevantes del salario son aquellas desviaciones de su senda de crecimiento balanceado. La elasticidad de Frisch cumple la propiedad deseable de medir cuánto varía la oferta laboral ante estas desviaciones del salario, aislándolas de movimientos de largo plazo o de tendencia que no son atribuidos a la política monetaria.
- La elasticidad de Frisch permite aislar el efecto del movimiento de los salarios sobre la oferta de otros fenómenos que se pueden dar en la economía de forma simultánea, como una caída del producto o del consumo por una recesión. Esto se debe a que la elasticidad de Frisch refleja únicamente el efecto sustitución de trabajo entre distintos momentos en el tiempo y no el efecto ingreso.

- Esta elasticidad ha sido calculada por varios trabajos para distintos países en el mundo, de modo que permite realizar comparaciones internacionales. Adicionalmente, modelos dinámicos y estocásticos de equilibrio general, que vienen siendo utilizados por los bancos centrales como herramienta para el análisis de política y pronóstico, son sensibles a la especificación de este parámetro, de modo que es relevante una estimación de la elasticidad de Frisch.

1.3. Revisión de literatura

Evers, Mooij y Vuuren (2008) presentan una amplia revisión de literatura concerniente a estimaciones de la elasticidad de la oferta de trabajo, enfocándose principalmente en las elasticidades no compensadas. Encuentran en la mayoría de las estimaciones elasticidades menores a uno. Explican cómo gran parte de las diferencias entre los estudios se debe a las aproximaciones para abordar tres elementos fundamentales que surgen a la hora de estimar la elasticidad de la oferta de trabajo: restricciones de presupuesto no lineales (restricciones de endeudamiento), salarios no observados de los individuos no trabajadores y aspectos econométricos relativos a problemas de endogeneidad e identificación. Las estimaciones que Evers y otros (2008) realizan se encuentran en el rango de 0,1 a 0,5.

Respecto a la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo, Kimball y Shapiro (2008) presentan un resumen de las estimaciones encontradas en la literatura. La mayoría de los trabajos presentan estimaciones para la elasticidad entre cero y 0,5 donde en algunos casos, como en la estimación de MaCurdy (1981), parece presentarse un problema de sesgo negativo debido al uso de instrumentos débiles para resolver el problema de endogeneidad del salario. Estos autores a su vez presentan una estimación de la elasticidad de Frisch cercana a la unidad utilizando como muestra la respuesta en horas de trabajo de posibles ganadores de una lotería. Hall (2006) menciona sin embargo que este resultado es poco robusto.

Por otra parte estimaciones de la elasticidad de Frisch superiores a 0,5 se encuentran en Kuroda y Yamamoto (2007), quienes estiman la elasticidad de Frisch, a partir de un panel por localidades para el Japón, que se encuentra entre 0,7 y 1,0. Otros enfoques que se han desarrollado en la literatura incluyen en la estimación las expectativas de salarios futuros de un agente cuando toma su decisión de horas trabajadas. Por ejemplo, Pistaferri (2003) utiliza datos de encuestas sobre expectativas de salarios encontrando una elasticidad de Frisch de 0,7. Por otra parte, Felices y Tinsley (2006) resaltan el problema de utilizar como variable de horas ofrecidas a las horas trabajadas en el mercado. Utilizando adicionalmente datos de las horas trabajadas en el hogar muestran que las

estimaciones son sustancialmente diferentes.

En Colombia se han realizado varios artículos sobre la oferta de trabajo enfocados en los determinantes de la participación en el mercado laboral, que entre otros hallazgos han logrado caracterizar diferencias entre hombres y mujeres en la participación laboral. Este enfoque tiene como desventajas que no permite encontrar ni estimar de forma directa elasticidades de oferta de trabajo al salario, que generalmente se utilizan formas reducidas las cuales sufren usualmente de problemas de endogeneidad, y que los parámetros estimados no tienen interpretaciones económicas claras y por lo tanto no permiten plantear implicaciones de política. Una revisión extensiva de esta literatura se encuentra en Robbins, Salinas y Manco (2007).

Utilizando un pseudo-panel estimado por mínimos cuadrados ponderados, discriminando por cohortes y niveles de educación, Robbins y otros (2007) encuentran una elasticidad de Frisch de 0,06 en promedio para las mujeres en Colombia con datos de 1976 a 2006. También presentan, bajo algunos supuestos sobre el proceso de salarios y riqueza, la elasticidad no compensada, cuyo valor estimado es en promedio de 0,04. Robbins y otros (2007) no modelan la segmentación del mercado laboral, las restricciones de liquidez que enfrentan los agentes y utilizan horas trabajadas y no horas ofrecidas.

Entre las múltiples estimaciones de la elasticidad de Frisch, un criterio de clasificación es el tipo de variación de la oferta que se analiza: margen intensivo, que se refiere a la variación en las horas que ofrece cada individuo, y margen extensivo, que se refiere a la variación en el número de personas empleadas. MaCurdy (1981) encuentra para Estados Unidos una elasticidad entre 0,1 y 0,4 para hombres que hacen parte de la fuerza de trabajo. Este trabajo se enfoca en los cambios de la oferta al margen intensivo. Por otra parte, trabajos como Gourio y Noual (2006) encuentran para Nueva York una elasticidad agregada de 1,5, al tener en cuenta también el margen extensivo, es decir, el cambio en el número de trabajadores.

En Colombia el margen extensivo explica la mayor volatilidad de las horas totales trabajadas, mientras que el margen intensivo parece indicar poca variabilidad de las horas. De acuerdo con Parra (2008), las horas promedio de la economía son poco variables y acíclicas contemporáneamente mientras que las horas totales son procíclicas y más volátiles. Esto indica que el margen extensivo es importante en Colombia.

En Colombia parece ser más difícil que los trabajadores que tienen bajos ingresos, como los pertenecientes al sector informal, puedan acceder a un empleo formal mejor remunerado. En un trabajo en el que se busca estudiar, a través de un modelo con agentes heterogéneos y restricciones de liquidez, las consecuencias económicas de la informalidad

en Colombia, Riascos y Prada (2007) calculan la matriz de transición trimestral entre los estados de empleo formal, empleo informal y desempleo. Riascos y Prada (2007) encuentran que la probabilidad de que un trabajador que hoy es informal acceda a un empleo formal en el trimestre siguiente es tan sólo de 4,35 %. En cambio, la probabilidad que tiene un trabajador informal de seguir siendo informal es 84,11 %, y la probabilidad que tiene un trabajador formal de mantenerse en este sector es de 73,09 %. Esta es una evidencia clara de que la movilidad del empleo en Colombia se da dentro de cada sector (formal, informal), y no entre sectores. Los trabajadores de baja productividad (bajos salarios, asociados con el empleo informal) tienen muchas dificultades para acceder a trabajos de alta productividad (altos salarios) en Colombia. Una modelación formal de estas barreras de entrada para los trabajadores informales para economías en desarrollo se encuentra en Amaral y Quintin (2006). La persistencia de esta segmentación entre sectores laborales también justifica entonces modelar por separado trabajadores productivos calificados y trabajadores poco productivos.

Los hallazgos en la literatura de baja elasticidad en el nivel intensivo y alta elasticidad al involucrar el margen extensivo son coherentes con la posibilidad de que cada persona responde muy poco variando su nivel de horas trabajadas ante cambios en el salario, pero que hay una alta proporción de personas en el margen, aquellas que deciden participar o no en el mercado laboral dependiendo de pequeños cambios en el salario. La indivisibilidad del trabajo es un elemento que refuerza este punto. En la mayoría de los casos las personas no pueden decidir si trabajar tres horas al día o cuatro, sino que deben decidir entre trabajar tiempo completo, medio tiempo o no trabajar. Esto podría deberse a la legislación colombiana y al mecanismo de contratación de las firmas. Una discusión teórica detallada sobre la indivisibilidad del trabajo se encuentra en Hansen (1985). De esta forma es posible encontrar una baja elasticidad de Frisch para cada persona y una alta volatilidad de la oferta agregada de trabajo.

Por otra parte, como lo mencionan Domeij y Floden (2006) y Kuroda y Yamamoto (2007) la estimación de la elasticidad de Frisch es sensible a restricciones de liquidez o de acumulación de activos. La omisión de estas restricciones en la modelación de la oferta de trabajo puede generar estimadores sesgados e inconsistentes¹. Por esta característica metodológica es recomendable tener en cuenta estas restricciones de acumulación. Además, en la modelación económica también es importante considerar las restricciones exóge-

¹Kuroda y Yamamoto (2007) y otros autores no incorporan las restricciones de liquidez de forma explícita y presentan ante este problema cotas superiores e inferiores de la elasticidad de Frisch, utilizando la m -elasticidad y la elasticidad hicksiana, por ejemplo.

nas que enfrentan los individuos. El clásico trabajo de Imrohoroglu (1989), por ejemplo, resalta la importancia de las restricciones de liquidez y crédito en las predicciones que generan modelos de equilibrio general.

En relación con el problema que se aborda en este artículo, es de esperar que para individuos no calificados las restricciones de financiamiento estén activas y sean más importantes que para los individuos calificados, principalmente por la diferencia que se encuentra en ingresos y su acceso al sistema financiero. En países en desarrollo como Colombia, las restricciones de acumulación de activos parecen ser una característica fundamental de la economía. El trabajo de Iregui y Melo (2009) muestra que las restricciones de liquidez son importantes en Colombia, y la ausencia de acceso al sistema financiero formal está directamente relacionado con el nivel de ingresos y de educación de los individuos. Por otra parte, Evans y Karras (1998) estiman que una fracción significativa de la población colombiana tiene restricciones de liquidez, resultado ya sustentado en Cárdenas y Escobar (1997). Diferenciar entre tipos de trabajadores permite incorporar de forma explícita este componente en el modelo económico que es presentado en la sección 3, y al ser modeladas estas restricciones de crédito se evita el sesgo en la estimación de la elasticidad de Frisch.

1.4. ¿Qué aspectos de la oferta laboral colombiana debe incorporar un modelo teórico?

Teniendo en cuenta las características del mercado laboral colombiano y el mecanismo de transmisión a estudiar, ciertos aspectos clave de la oferta laboral deben trasladarse al modelo teórico a partir del cual se estima la elasticidad de Frisch.

Al ser la elasticidad de Frisch una elasticidad de sustitución intertemporal, es necesario que el modelo teórico incorpore elementos dinámicos. Esto permite capturar una variedad de fenómenos que un modelo estático no podría incorporar, como el manejo de expectativas en las decisiones de los hogares y el efecto de las tasas de interés sobre el consumo y el ocio.

Así, en la sección 3 se presenta un modelo dinámico a partir del cual se obtiene una expresión explícita para la oferta laboral. En la economía modelo hay dos tipos de trabajadores: calificados y no calificados. Esta separación se hace con el objeto de incorporar las dos características de la oferta laboral relevantes en la economía colombiana descritas en la subsección anterior:

- Movimientos de corto y largo plazo de los salarios parecen seguir procesos distintos para los trabajadores calificados y no calificados. Es un hecho estilizado que el

salario relativo de los trabajadores calificados respecto al salario de trabajadores no calificados ha crecido significativamente durante los últimos años (Sánchez y Núñez (1998), López (2001)), aumentando la desigualdad salarial en Colombia (Arango y otros (2005)). Esta diferencia en el salario relativo entre sectores es persistente, señalando claramente la falta de movilidad del trabajo entre el sector calificado y el sector no calificado. La segmentación en el mercado laboral colombiano es un elemento que debe incorporarse en cualquier modelo de la oferta laboral.

- Como lo mencionan Domeij y Floden (2006) y Kuroda y Yamamoto (2007) la omisión de las restricciones de liquidez y crédito afecta la estimación de la elasticidad de Frisch, pudiendo generar estimadores sesgados e inconsistentes. Además, como lo argumenta Iregui y Melo (2009), las restricciones de liquidez son un elemento importante para la decisión entre consumo y ocio en Colombia. En este artículo se supone que los trabajadores no calificados, de menor productividad y menores ingresos, no tienen acceso al sistema financiero formal y enfrentan restricciones de acumulación de activos.

Las principales ventajas de esta modelación respecto a otras en la literatura son que se incluye la restricción de acumulación de activos de manera explícita, se incorporan diferencias en la volatilidad y cambio en las horas de los trabajadores en la economía, sin la necesidad de modificar las preferencias en el tiempo, como lo hacen Gourio y Noual (2006) y se puede hallar de forma explícita la oferta laboral y la elasticidad de Frisch de forma microfundamentada.

Dada la naturaleza del modelo se tiene que en este artículo, la oferta de trabajo no sólo incluye horas de equilibrio (como en Gourio y Noual (2006) y Kuroda y Yamamoto (2007) por ejemplo) sino también las horas que las personas estarían dispuestas a trabajar por el salario vigente (pero que no fueron trabajadas). De esta forma se incorpora el desempleo y la insuficiencia de horas en el empleo. Así se logra medir efectivamente la oferta laboral, que puede diferir de las cantidades transadas.

Esta diferencia en la medición de la oferta puede tener implicaciones significativas en la estimación de la elasticidad de Frisch. Por ejemplo, considere el evento de un choque positivo y transitorio sobre el salario real, el cual, teniendo en cuenta el efecto de la sustitución intertemporal, aumenta la oferta de trabajo. Sin embargo, dada la probabilidad de emparejamiento² el número de horas trabajadas aumentaría en una proporción menor, o inclusive podría disminuir, dependiendo de la reacción de la demanda (podrían despedir

²Se refiere a la probabilidad de que una persona que ofrece su capacidad de trabajo se encuentre con una firma que tiene vacantes y se pueda realizar un contrato de trabajo.

trabajadores ante la subida de los costos). En este caso es evidente que el número de horas trabajadas no refleja el cambio en la oferta y los resultados obtenidos a partir de observaciones de equilibrio subestimarían la elasticidad de Frisch.

Finalmente, el modelo teórico que se presenta en la sección 3 permite capturar el margen intensivo y el margen extensivo: se modelan explícitamente las decisiones de los hogares para incorporar el margen intensivo, pero no se deja de lado el margen extensivo, que está modelado exógenamente. Debido a que en el modelo teórico las decisiones se toman para el promedio de habitantes de cada hogar, la estimación de la elasticidad de Frisch obtenida incluye el efecto extensivo de movimientos en el número de individuos en cada tipo hogar, por lo que resume el margen intensivo y este margen extensivo por promedio.

El artículo está organizado de la siguiente forma: esta introducción constituye la primera sección; en la sección dos se presentan los datos a utilizar y algunos hechos estilizados del mercado laboral colombiano; en la sección tres se presenta el modelo teórico y se deriva una expresión explícita para la oferta laboral en el sector calificado y no calificado; la cuarta sección explica la construcción de la base de datos utilizada para la estimación y la calibración del modelo; la quinta sección presenta y discute los resultados; la última sección concluye.

2. Hechos estilizados del mercado laboral colombiano

Los datos utilizados para la estimación del modelo son obtenidos a partir de la Encuesta Continua de Hogares (ECH) que realiza de forma trimestral en Colombia el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). La información está disponible desde el primer trimestre del año 2001 hasta el segundo trimestre del año 2006.

La ECH recoge información de características generales de los hogares y de las condiciones de empleo. El DANE utiliza esta encuesta para calcular la tasa de desempleo y de ocupación. Cada trimestre una nueva muestra de la población es escogida y el DANE asigna a cada individuo un factor de expansión que cuantifica su grado de representatividad en la población.

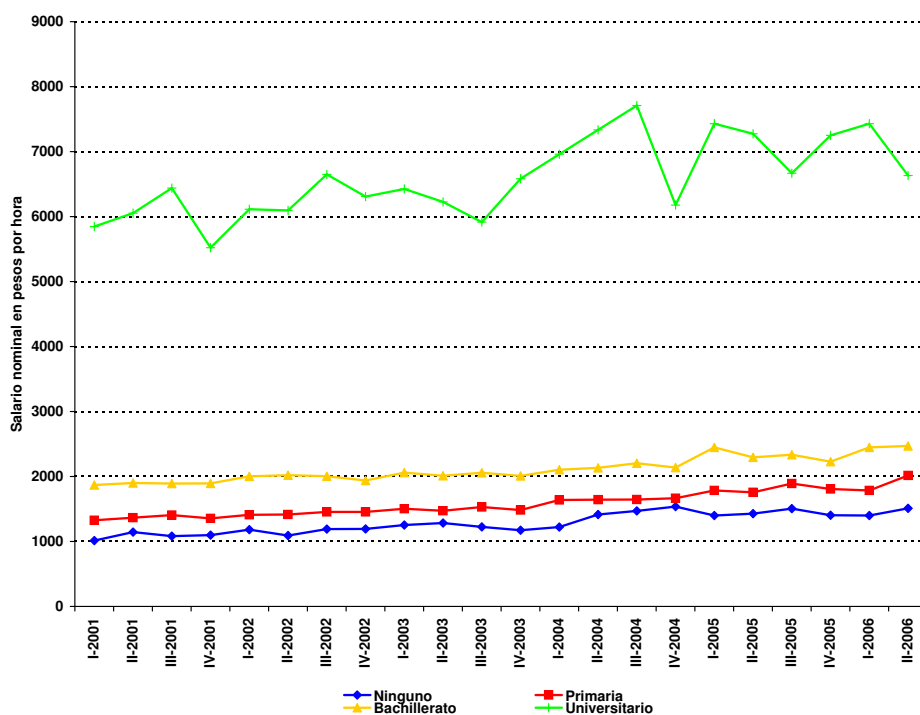
La ECH se divide en módulos especializados en diferentes aspectos socio-económicos. En este trabajo se utilizaron los módulos de educación, ocupados y desocupados.

A partir del módulo de educación es posible clasificar a cada individuo en uno de 33 grupos dependiendo del nivel educativo más alto alcanzado y del último año aprobado en su respectivo nivel. Los niveles de educación son preescolar, primaria, secundaria,

superior y ninguna educación. Con esta información se clasifica a los individuos como calificados si alcanzaron a cursar al menos un año de educación superior, y no calificados en caso contrario.

Uno de los criterios de clasificación es la restricción de acumulación de activos relacionada con los menores ingresos de los individuos no calificados. El Gráfico 2 muestra que la diferencia en el salario por hora es sustancial entre los individuos que terminan los grados básicos de educación y los individuos que terminan el grado de educación superior. Los datos también presentan evidencia de cierta homogeneidad entre los salarios recibidos por los diferentes niveles de educación básica. Esta aparente homogeneidad dentro de los grupos, con diferencias importantes entre los grupos, justifica en parte el supuesto de escoger el nivel de educación superior como punto de corte entre calificados y no calificados. Bajo el supuesto de mercados competitivos con barreras de entrada, esta significativa diferencia en los salarios indica un mercado laboral segmentado en dos grupos con grandes diferencias en productividad.

Gráfico 2: Salario por hora promedio por nivel educativo



Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

En el módulo de ocupados se encuentran preguntas sobre ingresos laborales mensuales y

número de horas trabajadas. Es posible discriminar en este punto entre trabajo principal y secundario, pero para efectos de este artículo simplemente se suman las horas e ingresos en cada uno de ellos, obteniendo así el número de horas totales trabajadas (HT) y el ingreso por salarios total. Con esta información se calcula el salario por hora de trabajo promedio para cada nivel de educación (véase Gráfico 2). Debe aclararse que para obtener estos promedios y otras estadísticas agregadas se utilizan como ponderadores los factores de expansión del DANE. Si bien estos factores fueron diseñados para asignar a cada individuo un grado de representatividad en la población buscando capturar características diferentes al nivel educativo, necesarias para calcular la tasa de desempleo y ocupación, son los únicos ponderadores disponibles para agregar la información muestral y obtener estadísticas relevantes del mercado laboral.

Este módulo también permite obtener la información de cuántas horas adicionales (HA) estarían dispuestos a trabajar los individuos clasificados como ocupados. Por definición, esta información hace parte de la oferta laboral.

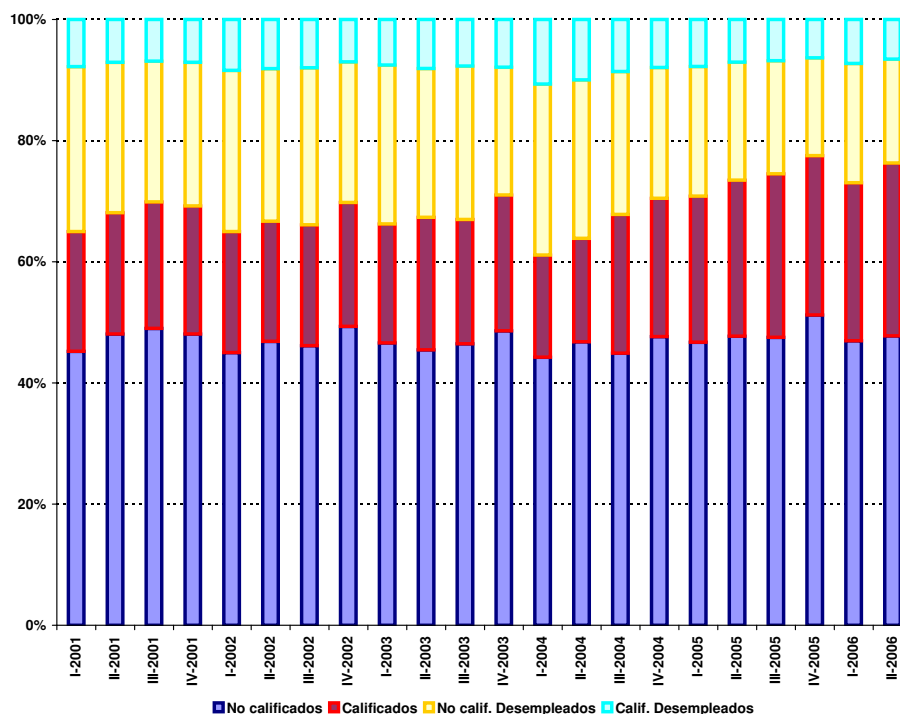
Por otra parte, del módulo de desocupados se tiene la información de cuántas horas estarían dispuestos a trabajar los desempleados (HD), es decir, cuántas horas están ofreciendo en el mercado.

El Gráfico 3 presenta la participación de los calificados y no calificados respecto al total de personas que ofrecen trabajo (tiempo completo y medio tiempo). En promedio durante el período en que hay datos disponibles, el 71,9% de los individuos de la muestra son clasificados como no calificados, y el restante 28,1% son clasificados como calificados. Esta proporción es bastante estable durante el período estudiado. Por otra parte, el ingreso salarial de los empleados asalariados no calificados representa en promedio el 48% del total de ingresos salariales de los empleados. Esto se explica porque los no calificados ofrecen y trabajan en promedio más horas que los calificados.

El número total de horas ofrecidas en cada nivel educativo es simplemente la suma de las horas ofrecidas por cada persona que pertenece a ese nivel. Para los ocupados estas horas corresponden a $HT + HA$ y para los desocupados las horas ofrecidas son HD .

Para obtener el salario por nivel educativo relevante para la oferta de horas de trabajo, debe considerarse el salario recibido por los ocupados y el salario al cual los desocupados estarían dispuestos a ofrecer las horas que reportan (HD). Los ingresos laborales de las personas ocupadas son observables. Para obtener la variable no observada del salario al cual los desempleados ofrecen sus horas de trabajo, se utiliza el salario promedio de aquellos trabajadores que comparten el mismo número de años de educación, teniendo en cuenta a la educación como una variable *proxy* de oportunidades iniciales, habilidades, productividad y otros factores que determinan el salario.

Gráfico 3: Participación en el Mercado Laboral (%)

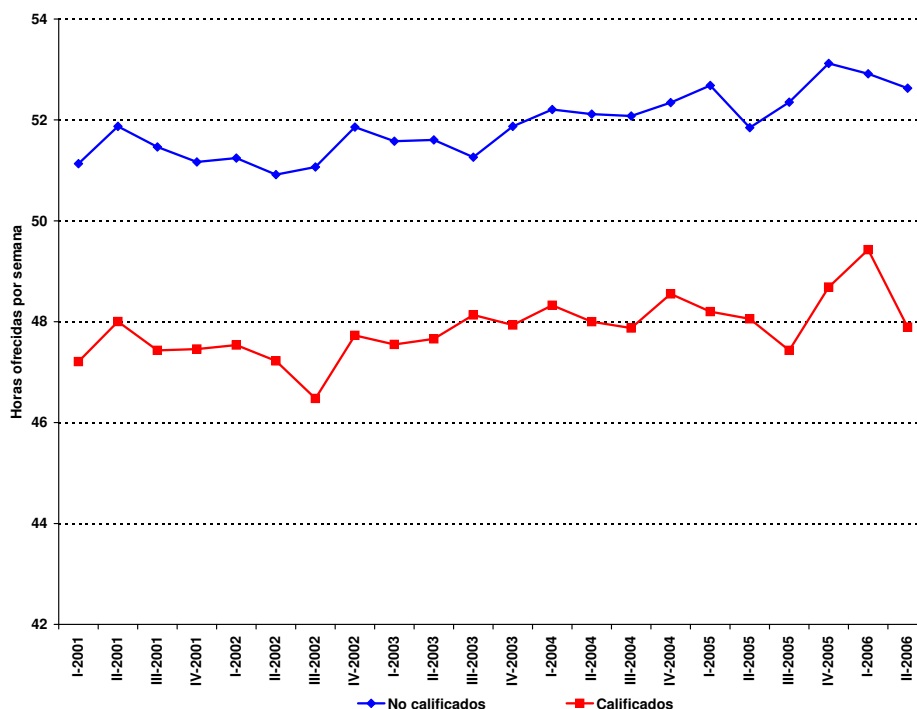


Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

En el Gráfico 4 se presenta las horas promedio ofrecidas por los calificados y no calificados. El Gráfico 5 muestra el salario nominal promedio relevante para esa oferta de horas.

Se encuentra una diferencia significativa tanto en salarios como en horas: por ejemplo, el promedio de la razón salario calificado/salario no calificado es de 3,14. Es notorio el hecho que los individuos no calificados sistemáticamente ofrecen más horas por una remuneración menor, respecto a los individuos calificados. Esto es consistente con lo hallado por López (2001). Si el mercado laboral es competitivo, esto es clara señal de una segmentación entre un grupo de productividad alta y un grupo de productividad baja. Dada que esta diferencia en salarios es persistente, parece claro que es difícil cambiar de productividad, confirmando lo mostrado por Riascos y Prada (2007). Además parece haber una mayor varianza en los datos de los individuos calificados, en parte explicada por la menor cantidad de datos en la muestra disponibles para ese sector, y en parte por la mayor variedad de roles que los individuos calificados pueden desempeñar en el mercado laboral.

Gráfico 4: Horas oferta laboral promedio



Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

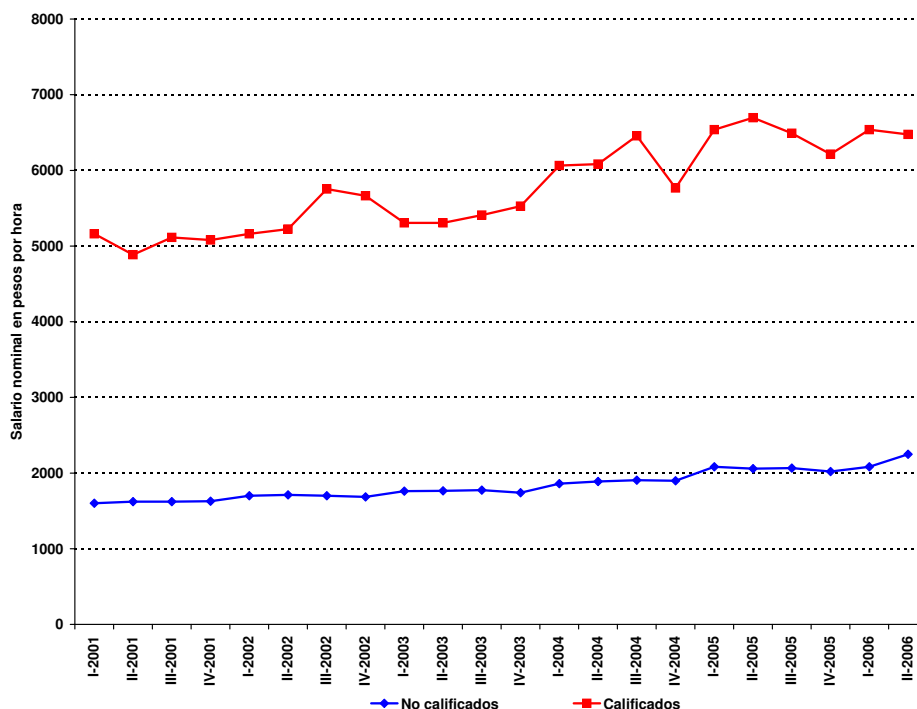
3. Modelo

Se sigue el modelo estándar de decisión intertemporal entre consumo y ahorro y decisión intratemporal entre consumo y ocio para obtener una expresión microfundamentada de la oferta laboral. Dado que el interés se concentra sobre el mercado laboral, y en particular sobre la oferta, el modelo se especializa en el problema de los hogares. La demanda por trabajo y otros aspectos de la economía son exógenos en el modelo.

La utilización de un modelo de este tipo tiene varias ventajas:

- Al obtener una expresión microfundamentada de la oferta laboral pueden estimarse los parámetros profundos con un menor riesgo de estar sujetos a la crítica de Lucas.
- Se obtiene una solución dinámica que tiene en cuenta las expectativas racionales de los agentes de la economía y es consistente con la búsqueda de objetivos individuales sujeto a restricciones económicas.
- Al obtenerse una expresión para la oferta laboral a partir del modelo se tiene un

Gráfico 5: Salario nominal promedio (calificados y no calificados)



Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

momento teórico, y puede contrastarse empíricamente de forma natural utilizando el método de momentos generalizado (GMM por sus siglas en inglés).

- Permite el uso de datos desagregados, al estar modelándose la decisión de cada hogar individualmente. En caso contrario deberían usarse datos macroeconómicos agregados, que podrían no reflejar la elasticidad de Frisch que es relevante para el *trade-off* de producción-inflación.

Siguiendo a la literatura sobre dualidad y segmentación del mercado laboral en los países en desarrollo, y dada la evidencia presentada en las secciones anteriores, se tiene que la población está compuesta por dos tipos de agentes: individuos calificados e individuos no calificados. La educación es un proceso de adquisición de capital humano que permite incrementar la productividad laboral. Sin embargo, es un proceso costoso y es razonable pensar que los individuos deben pagar por su educación. En particular, se supone que existe un costo fijo $\vartheta_t > 0$ por adquirir un nivel superior de educación y mantener el capital humano asociado a un mayor nivel educativo.

Los individuos no calificados son aquellos que no asumieron el costo fijo de adquirir un nivel superior de educación. Como su nivel de capital humano es relativamente bajo, su productividad laboral es relativamente baja. Por otra parte, los individuos calificados adquirieron algún tipo de educación superior y pagan el costo fijo por adquirir y mantener su nivel relativamente superior de capital humano. Por lo tanto que su productividad es relativamente alta.

La distinción entre calificados y no calificados no se limita únicamente a la productividad asociada a cada sector. Se supone que el sector no calificado de la población tiene restricciones de acumulación de activos netos: no se permite la suavización del consumo a través de activos intertemporales para los individuos no calificados. Esto es coherente con lo encontrado para la economía colombiana en la sección 2.

Así, en cada período, la población de la economía N_t es la suma de la población calificada N_t^c y la población no calificada N_t^{nc} :

$$N_t = N_t^c + N_t^{nc}$$

Por facilidad se supone que las decisiones de educación y acumulación de capital humano fueron tomadas previamente y que se basaron en la cantidad de riqueza real inicial de los individuos. Es decir, se utiliza la distribución de riqueza como *proxy* de las oportunidades iniciales, habilidades innatas etc. que influyeron en la decisión de estudiar o no, y que determinan su capacidad de pagar el costo fijo por adquirir y mantener un nivel relativamente superior de capital humano. De esta forma, en lugar de utilizar una distribución de “habilidades” o “capital humano” no observable, se usa una distribución de la cual se puede obtener información más fácilmente y que será útil en la estimación del modelo.

El supuesto clave aquí es que los hogares con mayor riqueza inicial (a los que se asocia mayores habilidades y mayor disposición a asumir el costo de la educación) son calificados, y los hogares con menor riqueza son no calificados.

Por lo tanto se supone que la composición de la población entre calificada y no calificada es exógena. Este supuesto no genera ninguna pérdida de generalidad. Si bien las decisiones de educación son endógenas y dependen de la situación económica, movimientos de corto plazo no deberían afectar significativamente la composición de la población entre calificados y no calificados (cambios importantes en el nivel educativo de los individuos son fenómenos de mediano y largo plazo). La distribución de riqueza permite capturar los determinantes de las decisiones educativas de los individuos.

Finalmente, dado que el interés principal es sobre la oferta de trabajo agregada, se

modela explícitamente y por separado las decisiones de los individuos calificados y no calificados y luego se agrega las respectivas ofertas.

3.1. Supuestos

Se supone que en cada sector de la economía (calificado y no calificado) existe un continuo de hogares indexados de acuerdo con el nivel inicial de riqueza real. Por realismo y al mismo tiempo por facilidad, con el fin de incorporar el crecimiento de la población y el crecimiento de la productividad, el tamaño de cada hogar aumenta a la tasa exógena de crecimiento de la población en cada sector n_t^c y n_t^{nc} . Implícitamente se está suponiendo que la tasa de crecimiento de los hogares es independiente del nivel de activos inicial (y por lo tanto independiente del índice del hogar) pero no es independiente del sector de la economía en que esté el hogar. En estado estacionario, sin embargo, ambas poblaciones crecen a la misma tasa n .

Dado que la evolución de la población y la evolución de las productividades son exógenas en el modelo, se suponen los siguientes procesos

$$\begin{aligned} N_t^c &= (1 + n_t^c) N_{t-1}^c \\ N_t^{nc} &= (1 + n_t^{nc}) N_{t-1}^{nc} \\ F_t^c &= (1 + g_t^c) F_{t-1}^c \\ F_t^{nc} &= (1 + g_t^{nc}) F_{t-1}^{nc} \end{aligned}$$

siendo F_t^c el nivel de productividad del sector calificado y g_t^c su tasa de crecimiento, y F_t^{nc} es el nivel de productividad del sector no calificado y g_t^{nc} su tasa de crecimiento. En estado estacionario la productividad en ambos sectores crece a la misma tasa g .

Cada hogar recibe utilidad instantánea por el consumo promedio de sus habitantes y por el nivel de ocio promedio de sus habitantes. Las preferencias están representadas por una función de utilidad instantánea separable que es igual para todos los habitantes de la economía:

$$U(c_t) - V(F_t, h_t)$$

La separabilidad de la función de utilidad entre consumo y ocio asegura que la elasticidad de Frisch es independiente del nivel de consumo, y facilita el cálculo de esta elasticidad y la resolución de problemas de maximización en el ciclo de vida (Blundell y MaCurdy (1999)).

Para asegurar la existencia de una senda de crecimiento balanceado debe suponerse que el consumo y el progreso técnico son homogéneos de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ en la función de

utilidad. Así para cualquier $k \geq 0$

$$U(kc_t) - V(kF_t, h_t) = k^\alpha (U(c_t) - V(F_t, h_t))$$

Los hogares son impacientes, en el sentido que valoran más la utilidad de períodos cercanos al presente que la utilidad de períodos lejanos. Se descuenta la utilidad futura con un factor de descuento $\beta \in (0, 1)$, que es igual para los hogares en ambos sectores de la economía.

Finalmente hay incertidumbre en la economía: los hogares en cualquier sector desconocen la senda de ingresos futuros, debido a los posibles choques en el sector productivo, en la fracción disponible del ingreso laboral, en las tasas de interés de mercado, en la acumulación de activos etc. Por lo tanto toman sus decisiones basados en las expectativas que forman con toda la información disponible.

3.2. Hogar en el sector calificado

El hogar calificado i busca maximizar el valor esperado de la suma descontada de la utilidad instantánea escogiendo sendas de consumo, ocio y acumulación de activos que satisfacen su restricción presupuestaria (expresada en unidades por trabajador)

$$\tau_{t+s}^c w_{t+s}^c h_{t+s}^c(i) + \frac{N_{t+s-1}^c}{N_{t+s}^c} (1 + r_{t+s-1}) a_{t+s-1}^c(i) \geq c_{t+s}^c(i) + a_{t+s}^c(i) + \vartheta_{t+s}$$

El hogar calificado recibe de las firmas un salario w_{t+s}^c por cada una de las horas trabajadas h_{t+s}^c , pero tiene disponible únicamente una fracción τ_{t+s}^c de este ingreso laboral, ya que debe financiar seguridad social, pensiones, impuestos al trabajo etc. Como este hogar tiene acceso al sistema financiero, cada período recibe la remuneración asociada a su nivel de ahorro neto y es capaz de decidir la acumulación de activos. Así el sistema financiero reconoce la tasa de interés real r_{t+s-1} sobre el nivel de activos netos del hogar i heredado del período anterior, $a_{t+s-1}^c(i)$. Estos ingresos son utilizados para financiar el consumo del hogar i , $c_{t+s}^c(i)$, la acumulación de activos netos $a_{t+s}^c(i) - a_{t+s-1}^c(i)$ y el costo fijo por mantener un nivel de capital humano relativamente alto ϑ_{t+s} .

Así el hogar i enfrenta el siguiente problema, expresado en unidades por trabajador:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t^c(i), h_t^c(i), a_t^c(i)\}} \quad & E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} (U(c_{t+s}^c(i)) - V(F_{t+s}^c, h_{t+s}^c(i))) \\ \text{s.a} \quad & \tau_{t+s}^c w_{t+s}^c h_{t+s}^c(i) + \frac{N_{t+s-1}^c}{N_{t+s}^c} (1 + r_{t+s-1}) a_{t+s-1}^c(i) \\ & \geq c_{t+s}^c(i) + a_{t+s}^c(i) + \vartheta_{t+s} \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias de primer orden para el hogar calificado i son, expresadas en unidades por trabajador efectivo:

$$V_h(1, h_t^c(i)) = U_c\left(\frac{c_t^c(i)}{F_t^c}\right) \tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} \quad (1)$$

$$U_c\left(\frac{c_t^c(i)}{F_t^c}\right) = \beta E_t \left(\frac{F_{t+1}^c}{F_t^c}\right)^{\alpha-1} U_c\left(\frac{c_{t+1}^c(i)}{F_{t+1}^c}\right) \frac{P_t}{P_{t+1}} (1 + i_t) \quad (2)$$

$$\frac{c_t^c(i)}{F_t^c} + \frac{a_t^c(i)}{F_t^c} + \frac{\vartheta_t}{F_t^c} = \tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} h_t^c(i) + \frac{N_{t-1}^c}{N_t^c} \frac{F_{t-1}^c}{F_t^c} (1 + r_{t-1}) \frac{a_{t-1}^c(i)}{F_{t-1}^c} \quad (3)$$

donde la oferta de horas de trabajo del hogar i está dada por la expresión (1). Esta condición marginal es típica: la utilidad a la que se renuncia por dedicar marginalmente más tiempo al trabajo ($V_h(1, h_t^c(i))$) debe ser, en el óptimo, igual a la utilidad que puede generar ese trabajo adicional. Esa utilidad está dada por la utilidad del consumo adicional que permite comprar el ingreso laboral después de impuestos ($\tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} U_c\left(\frac{c_t^c(i)}{F_t^c}\right)$).

Note que la decisión de oferta de trabajo en el sector calificado depende de las expectativas de los agentes sobre consumo futuro. Más adelante se modelan explícitamente las expectativas con el fin de sustituirlas y poder obtener una oferta de trabajo contrastable empíricamente.

3.3. Hogar en el sector no calificado

El hogar no calificado j busca maximizar el valor esperado de la suma descontada de la utilidad instantánea escogiendo sendas de consumo y ocio. Este hogar enfrenta restricciones de acumulación de activos netos, por lo que no puede escoger la senda de activos óptimos. Es decir, por el hecho de ser un hogar no calificado se cumple que los activos por habitante efectivo se mantienen constantes (es como si cada nuevo integrante del hogar trajera consigo la misma cantidad de activos promedio del hogar ajustada por

el crecimiento de la productividad)

$$\frac{a_{t+s}^{nc}(j)}{F_{t+s}^{nc}} = \frac{a_{t+s-1}^{nc}(j)}{F_{t+s-1}^{nc}}$$

Por lo tanto su restricción presupuestaria, expresada en unidades por trabajador, está dada por

$$\tau_{t+s}^{nc} w_{t+s}^{nc} h_{t+s}^{nc}(j) + \left(\frac{N_{t+s-1}^{nc}}{N_{t+s}^{nc}} (1 + r_{t+s-1}) - \frac{F_{t+s}^{nc}}{F_{t+s-1}^{nc}} \right) a_{t+s-1}^{nc}(j) \geq c_{t+s}^{nc}(j)$$

El hogar no calificado recibe ingresos al ofrecer horas de trabajo h_{t+s}^{nc} por un salario w_{t+s}^{nc} . Nuevamente se supone que hay ciertos gastos obligatorios (seguridad social, algunos impuestos) que se cubren a partir del ingreso salarial, por lo que el hogar recibe únicamente una proporción τ_{t+s}^{nc} de su ingreso salarial. También recibe la remuneración del sistema financiero por sus activos netos descontando la acumulación obligatoria. Los ingresos se utilizan para consumir.

El hogar j en el sector no calificado enfrenta el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t^{nc}(j), h_t^{nc}(j)\}} \quad & E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} (U(c_{t+s}^{nc}(j)) - V(F_{t+s}^{nc}, h_{t+s}^{nc}(j))) \\ \text{s.a} \quad & \tau_{t+s}^{nc} w_{t+s}^{nc} h_{t+s}^{nc}(j) + \frac{N_{t+s-1}^{nc}}{N_{t+s}^{nc}} \left((1 + r_{t+s-1}) - \frac{F_{t+s}^{nc}}{F_{t+s-1}^{nc}} \right) a_{t+s-1}^{nc}(j) \geq c_{t+s}^{nc}(j) \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias de primer orden, expresadas en unidades de trabajador efectivo son:

$$V_h(1, h_t^{nc}(j)) = U_c \left(\frac{c_t^{nc}(j)}{F_t^{nc}} \right) \tau_t^{nc} \frac{w_t^{nc}}{F_t^{nc}} \quad (4)$$

$$\frac{a_t^{nc}(j)}{F_t^{nc}} = \frac{a_{t-1}^{nc}(j)}{F_{t-1}^{nc}} \quad (5)$$

$$\frac{c_t^{nc}(j)}{F_t^{nc}} = \tau_t^{nc} \frac{w_t^{nc}}{F_t^{nc}} h_t^{nc}(j) + \frac{N_{t-1}^{nc}}{N_t^{nc}} \frac{F_{t-1}^{nc}}{F_t^{nc}} \left((1 + r_{t-1}) - \frac{F_t^{nc}}{F_{t-1}^{nc}} \right) \frac{a_{t-1}^{nc}(j)}{F_{t-1}^{nc}} \quad (6)$$

y la condición (4) representa la oferta por horas de trabajo no calificado.

3.4. Agregación de la oferta de trabajo

La riqueza real neta inicial ajustada por productividad resume las diferencias iniciales entre los agentes. El supuesto clave es que los hogares calificados tienen más riqueza inicial que los hogares no calificados. Se define la distribución de la proporción de la

población, que depende del nivel de riqueza inicial neta ajustada como

$$f_0 \left(\frac{a_0}{F_0} \right)$$

que representa la proporción de población que tiene un nivel de riqueza inicial menor o igual que $\frac{a_0}{F_0}$. Se supone que $f \left(\frac{a_0}{F_0} \right)$ es una medida de probabilidad bien definida, continua, y además que la riqueza inicial de los trabajadores calificados se distribuye en el intervalo $\left[\frac{\bar{a}_0}{F_0}, \infty \right)$ y que la riqueza de los trabajadores no calificados se distribuye en el intervalo $\left(-\infty, \frac{\bar{a}_0}{F_0} \right]$, donde $\frac{\bar{a}_0}{F_0}$ representa el nivel de riqueza inicial del trabajador que es indiferente entre ser calificado y no calificado en el momento cero.

Como las decisiones de educación son exógenas en el modelo, se utiliza esta distribución de riqueza inicial para determinar la proporción inicial de trabajadores en cada sector, y para agregar las ofertas laborales de los diferentes hogares de acuerdo con esta proporción. Cada hogar es indexado de acuerdo con su nivel inicial de riqueza e identificado como “calificado” o “no calificado”.

A partir de esta división se puede obtener entonces la distribución de población en cada sector

$$f_0^c(i) \quad f_0^{nc}(j)$$

que representa la proporción de habitantes de cada sector (respecto al total de hogares) con un nivel de activos netos reales menores a $\frac{a_0^c(i)}{F_0^c}$ y $\frac{a_0^{nc}(j)}{F_0^{nc}}$ respectivamente.

La distribución de población de cada sector evoluciona de acuerdo con la siguiente regla

$$f_t^c(i) = f_0^c(i) \prod_{s=1}^t \left(\frac{1 + n_{s-1}^c}{1 + n_s} \right) \quad f_t^{nc}(j) = f_0^{nc}(j) \prod_{s=1}^t \left(\frac{1 + n_{s-1}^{nc}}{1 + n_s} \right) \quad (7)$$

siendo n_s la tasa de crecimiento de la población total en el período s .

Implícito está el supuesto que la distribución de riqueza dentro de cada sector es homogénea y no se altera durante el período de análisis. Por lo tanto hay choques exógenos que hacen que la distribución de riqueza del sector calificado sea invariante.

Se utiliza esta aproximación porque en los datos no se dispone de una distribución de riqueza para cada trimestre, y el problema de evolución dinámica de la distribución de activos es algo que supera el alcance de este trabajo.

En este caso simplificado se tiene que la oferta promedio de horas en los dos sectores

de la economía está dada por:

$$H_t^c = \frac{N_t}{N_t^c} \int_{\frac{\bar{a}_0}{F_0}}^{\infty} h_t^c \left(\frac{a_{t-1}^c(i)}{F_{t-1}^c} \right) f_t^c(i) di \quad (8)$$

$$H_t^{nc} = \frac{N_t}{N_t^{nc}} \int_{-\infty}^{\frac{\bar{a}_0}{F_0}} h_t^{nc} \left(\frac{a_{t-1}^{nc}(j)}{F_{t-1}^{nc}} \right) f_t^{nc}(j) dj \quad (9)$$

y la oferta promedio de horas en toda la economía es

$$H_t = \int_{\frac{\bar{a}_0}{F_0}}^{\infty} h_t^c \left(\frac{a_{t-1}^c(i)}{F_{t-1}^c} \right) f_t^c(i) di + \int_{-\infty}^{\frac{\bar{a}_0}{F_0}} h_t^{nc} \left(\frac{a_{t-1}^{nc}(j)}{F_{t-1}^{nc}} \right) f_t^{nc}(j) dj \quad (10)$$

3.5. Forma funcional y elasticidad de Frisch

La elasticidad de Frisch de la oferta laboral captura la elasticidad-salario efectivo de las horas trabajadas, manteniendo constante la utilidad marginal del consumo. Esta elasticidad mide el efecto sustitución que un cambio en el salario efectivo recibido genera en la oferta laboral.

En el modelo presentado en las subsecciones anteriores, para ambos sectores de la economía se tiene que la oferta de trabajo está determinada por la condición

$$V_h(1, h_t) = U_c \left(\frac{c_t}{F_t} \right) \frac{\tau_t w_t}{F_t}$$

A partir de esta condición podemos llegar a que la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo está dada por

$$e_t^{frisch} = \frac{V_h(1, h_t)}{V_{hh}(1, h_t) h_t} \Big|_{U_c \left(\frac{c_t}{F_t} \right) = cte}$$

En este trabajo se utilizan las siguientes formas funcionales para $U(\cdot)$ y para $V(\cdot)$:

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad V(F_t, h_t) = F_t^{1-\sigma} \frac{h_t^{1+\eta}}{1+\eta}$$

$$\sigma > 0 \quad \eta > 0$$

Estas preferencias cumplen con los supuestos técnicos solicitados. En particular, es homogénea de grado $1 - \sigma$ en el consumo y el progreso técnico.

Bajo las formas funcionales escogidas la elasticidad Frisch es constante

$$e_t^{frisch} = \frac{1}{\eta}$$

y es igual para los individuos calificados y los no calificados. Este supuesto no es muy restrictivo, dado que la elasticidad ingreso de la oferta laboral puede variar entre los dos grupos, y teniendo en cuenta la significativa diferencia en el ingreso entre grupos, se ve que esta modelación es realmente bastante general. Es decir, la elasticidad ingreso de la oferta laboral es variable y diferente entre los sectores calificado y no calificado.

Una menor elasticidad Frisch representa un mayor deseo de suavizar la senda de ocio a lo largo del tiempo. En ese caso la oferta de horas de trabajo tiende a reaccionar menos ante cambios en el salario, porque el efecto de sustitución intertemporal es relativamente pequeño.

3.6. Modelo log-linearizado

El modelo presentado en las subsecciones anteriores puede log-linearizarse para facilitar el proceso de estimación. Se omiten los términos de segundo orden en la aproximación, y con ello no son necesarios supuestos adicionales sobre los conjuntos de información o las expectativas. Además al log-linearizar no hay que pedir propiedades de linealidad multiplicativa a la utilidad marginal del consumo. Todas las variables están expresadas en términos de trabajador efectivo en su respectivo sector. La derivación de las ecuaciones log-linearizadas puede encontrarse en el Apéndice B.

Este paso es necesario por varias razones:

- Es posible obtener una expresión para el consumo presente en términos del ingreso esperado futuro traído a valor presente sin hacer mayores supuestos sobre la función de utilidad. Esta expresión es necesaria porque en los datos de la Encuesta Continua de Hogares no existe información sobre el consumo de los individuos, pero la expresión de oferta laboral depende completamente del consumo presente.
- Al obtener las ofertas de horas de trabajo log-linearizadas se facilita la manipulación algebraica y la posterior estimación econométrica.
- Permite una modelación sencilla y lineal de las expectativas.

En la log-linearización se omiten los índices i y j para simplificar la notación. Debe aclararse, sin embargo, que las ofertas laborales derivadas son para el hogar calificado i y para el hogar no calificado j .

El primer objetivo es encontrar una expresión para el consumo presente que dependa de variables diferentes al consumo.

La ecuación de Euler linearizada se puede iterar de forma tal que

$$-\sigma \hat{c}_t^c = -\sigma E_t \hat{c}_{t+s}^c + E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} - \sigma \hat{G}_{t-1+k}^c \right\}$$

de donde se obtiene que

$$E_t \hat{c}_{t+s}^c = \hat{c}_t^c + \frac{1}{\sigma} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} - \sigma \hat{G}_{t-1+k}^c \right\}$$

siendo $\hat{R}_t \approx r_t - r$, $\hat{G}_t^c \approx g_t^c - g^c$ y $\hat{c}_t^c = \ln\left(\frac{c_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{c^c}{F^c}\right)$.

Esto junto con la restricción intertemporal del hogar calificado

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left(\frac{c^c}{F^c} E_t \hat{c}_{t+s}^c + \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t \left(\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c \right) \\ &+ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^{s-1} \frac{a^c}{F^c} E_t \left(-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} \right) \\ &+ \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c \end{aligned}$$

siendo $\hat{h}_t^c = \ln(h_t^c) - \ln(h^c)$, $\hat{a}_t^c = \ln\left(\frac{a_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{a^c}{F^c}\right)$, $\hat{\vartheta}_t = \ln\left(\frac{\vartheta_t}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{\vartheta}{F^c}\right)$, $\hat{w}_t^c = \ln\left(\frac{w_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{w^c}{F^c}\right)$ y $\hat{N}_t^c \approx n_t^c - n^c$, permite obtener una expresión para el consumo presente en términos de ingresos futuros esperados y del nivel de activos presente

$$\begin{aligned} \frac{(1+r)}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)} \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t \left(\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c \right) \right. \\ &+ \frac{a^c}{F^c} E_t \left(-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} \right) \\ &\left. - \frac{c^c}{F^c} \frac{1}{\sigma} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} - \sigma \hat{G}_{t-1+k}^c \right\} - \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right] \\ &+ \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c \end{aligned}$$

La Ecuación de oferta laboral (1) puede log-linearizarse:

$$\eta \hat{h}_t^c = -\sigma \hat{c}_t^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)$$

y utilizando la expresión hallada para el consumo se obtiene una expresión explícita para

\hat{h}_t^c :

$$\begin{aligned}
& \left(\eta + \sigma \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) \frac{c^c}{F^c}} \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c \right) \hat{h}_t^c \\
= & -\sigma \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) \frac{c^c}{F^c}} \left(\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) + \frac{a^c}{F^c} (-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1}) \right) \\
& -\sigma \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t (\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c) \right. \\
& + \frac{a^c}{F^c} E_t (-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1}) \\
& \left. - \frac{1}{\sigma} \frac{c^c}{F^c} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} - \sigma \hat{G}_{t-1+k}^c \right\} - \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{v}_{t+s} \right] \\
& -\sigma \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{\frac{c^c}{F^c} (1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

Para caracterizar a los hogares en el sector no calificado es suficiente con log-linearizar la restricción presupuestaria (6) y la Ecuación de oferta laboral (4), y sustituyendo el consumo de la restricción presupuestal en la oferta laboral se llega a

$$\begin{aligned}
\left(\eta + \sigma \frac{1}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} \right) \hat{h}_t^{nc} &= \frac{-\sigma}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \left(\tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc}) + \frac{(1+r) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{R}_{t-1} - \hat{G}_{t-1}^{nc}) \right) \\
& - \frac{\sigma}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \frac{(r-g^{nc}) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{a}_{t-1}^{nc} - \hat{N}_{t-1}^{nc}) + (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc}) \quad (11)
\end{aligned}$$

siendo $\hat{h}_t^{nc} = \ln(h_t^{nc}) - \ln(h^{nc})$, $\hat{w}_t^{nc} = \ln\left(\frac{w_t^{nc}}{F_t^{nc}}\right) - \ln\left(\frac{w^{nc}}{F^{nc}}\right)$ y $\hat{a}_t^{nc} = \ln\left(\frac{a_t^{nc}}{F_t^{nc}}\right) - \ln\left(\frac{a^{nc}}{F^{nc}}\right)$.

3.7. Formación de expectativas

La oferta de horas de trabajo de los hogares calificados está expresada en términos del valor esperado de variables futuras como el ingreso, el crecimiento poblacional y el crecimiento de la productividad. Para poder obtener una expresión contrastable empíricamente, y dada la ausencia de datos sobre expectativas, es necesario modelar explícitamente la formación de creencias de los agentes. Se utiliza el enfoque más simple posible de expectativas racionales.

Para una variable cualquiera x_t los agentes creen que la variable evoluciona de acuerdo con el proceso

$$\ln x_{t+m} = \rho^x \ln x_{t+m-1} + (1 - \rho^x) \ln x + \epsilon_{t+m}^x$$

donde x es el valor de largo plazo de la variable.

Es decir, para las variables futuras los agentes realizan un promedio ponderado entre

el valor del período anterior de la variable y su valor de largo plazo, generando entonces una formación de expectativas híbrida, con un componente que mira al pasado reciente y un componente que mira al futuro.

En términos de variables log-linearizadas esta formación de expectativas es

$$\hat{x}_{t+m} = \rho^x \hat{x}_{t+m-1} + \epsilon_{t+m}^x$$

Entonces, suponiendo $(\forall s \geq m) (E_t(\epsilon_{t+s}^x) = 0)$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+m+s} &= (\rho^x)^s \hat{x}_{t+m} + \sum_{k=0}^s (\rho^x)^{s-k} \epsilon_{t+m+k}^x \\ E_{t+m}(\hat{x}_{t+m+s}) &= (\rho^x)^s \hat{x}_{t+m} \end{aligned}$$

Por facilidad se define el ingreso laboral neto de impuestos y costos fijos

$$y_t^c := \tau_t^c w_t^c h_t^c - \vartheta_t$$

de donde

$$\frac{y_t^c}{F^c} \hat{y}_t^c = \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c \left(\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c + \hat{h}_t^c \right) - \frac{\vartheta}{F^c} \hat{\vartheta}_t$$

Ahora, si se supone que \hat{y}_t^c sigue un proceso autorregresivo de ajuste de expectativas se tiene:

$$E_t \hat{y}_{t+s}^c = (\rho^y)^s \hat{y}_t^c$$

También se supone un proceso similar para las expectativas de \hat{R}_{t+s} , \hat{N}_{t+s}^c , \hat{G}_{t+s}^c . Entonces se puede obtener la siguiente expresión para la oferta laboral (véase Apéndice B):

$$\begin{aligned}
& \left(\eta + \sigma \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c \right) \hat{h}_t^c \\
= & -\sigma \varsigma \left(\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) + \frac{a^c}{F^c} \left(-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1} \right) - \frac{\vartheta}{F} \hat{\vartheta}_t \right) \\
& + \sigma \varsigma \left(\varphi^g \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{G}_t^c}{\rho^g} + \varphi^n \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{N}_t^c}{\rho^n} - \varphi^y \frac{y^c}{F^c} \hat{y}_t^c - \varphi^r \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{R}_t}{\rho^r} \right) \\
& + \frac{c^c}{F^c} \varsigma \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{\varsigma(1+r) \frac{c^c}{F^c}} - \varphi^r \right) \frac{\hat{R}_t}{1-\rho^r} \\
& - \frac{c^c}{F^c} \sigma \varsigma \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{\varsigma(1+r) \frac{c^c}{F^c}} - \varphi^g \right) \frac{\hat{G}_t^c}{1-\rho^g} \\
& - \frac{\sigma \varsigma}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) \tag{12}
\end{aligned}$$

siendo $\varsigma = \frac{(1+r)-(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) \frac{c^c}{F^c}}$ y $\varphi^i = \frac{(1+n^c)(1+g^c)\rho^i}{(1+r)-(1+n^c)(1+g^c)\rho^i}$ para $i \in \{y, n, g, r\}$.

Esta es una expresión lineal explícita para \hat{h}_t^c en términos de los parámetros profundos del modelo, $\hat{\tau}_t^c$, \hat{w}_t^c y \hat{a}_{t-1}^c . Esta condición es contrastable empíricamente.

4. Datos y calibración

Como se mostró en la sección 2 tanto el salario promedio como las horas ofrecidas promedio permiten identificar diferencias relevantes entre la población calificada y la no calificada. Sin embargo, las series utilizadas para la estimación de la elasticidad de Frisch deben ser coherentes con el modelo planteado y ser la contraparte empírica del concepto teórico, papel que no cumplen los promedios simples calculados previamente. A continuación se presenta cómo fueron construidas las series de salarios, horas ofrecidas y tasa de interés y la distribución de riqueza coherentes con el modelo, y cómo a partir de estos datos fueron calibrados los parámetros del modelo.

En el caso del salario, las series a utilizar son las del salario representativo por hora real de los calificados y de los no calificados, definido de la siguiente forma:

$$w_t^j = \sum_{i \in S_j} w_{i,t} \kappa_i \tag{13}$$

siendo $j \in \{c, nc\}$, $w_{i,t}$ el salario real promedio para el nivel educativo i en el trimestre t , S_j el conjunto de niveles educativos pertenecientes al sector j y κ_i la participación de

estado estacionario del nivel educativo i en su correspondiente sector j ³.

El salario representativo para cada sector consiste entonces en un promedio ponderado del salario real de cada nivel educativo perteneciente a ese sector. Un ejemplo permite ver una propiedad deseable que cumple esta forma de construir la serie de salarios, que otra opción como el promedio simple violaría: robustez ante movimientos dentro de cada sector. Considere el caso en que entran al mercado individuos con los niveles más altos de educación, y con los salarios más altos entre todos los individuos calificados. Suponga que estos individuos adicionales ofrecen las mismas horas de trabajo promedio que se ofrecían en el sector calificado un trimestre anterior, y que el salario calificado no ha cambiado para ningún nivel educativo. Entonces, por el simple hecho de tener una recomposición dentro del sector calificado, el salario promedio sería más alto, porque hay más individuos con ingresos superiores. Sin embargo, el salario para cada nivel educativo se mantuvo inalterado. En cambio el salario calculado como un promedio ponderado se mantiene constante, porque la ponderación es fija y se mantuvo constante el salario promedio dentro de cada nivel educativo.

En el Gráfico 6 se presentan las series de salarios reales representativos para los dos sectores. La escala se ajustó de tal forma que el salario de los individuos no calificados tiene promedio uno.

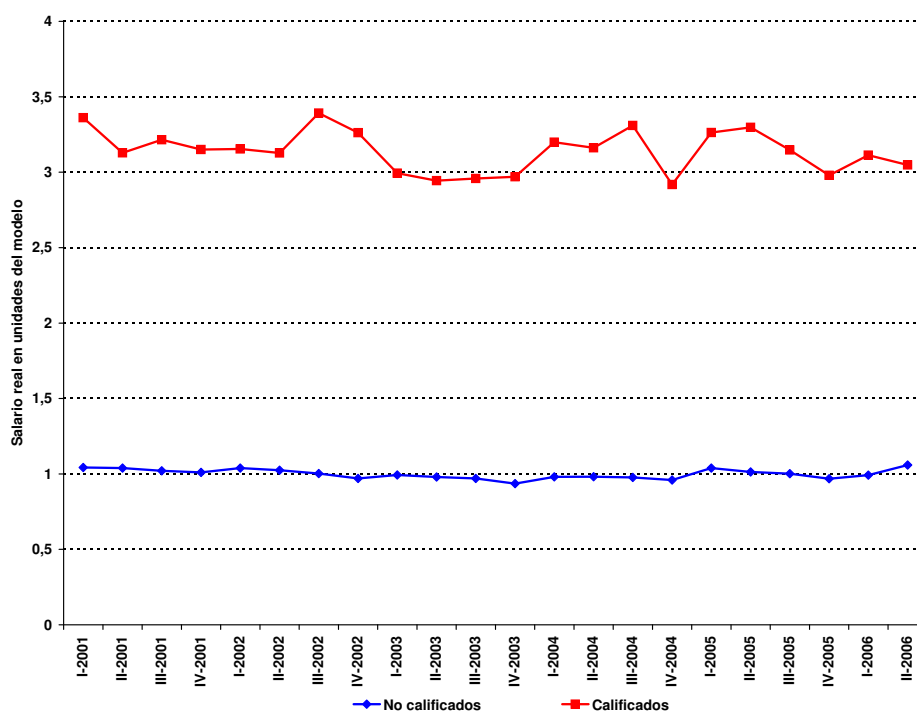
Para la construcción de la serie de horas consistente con el modelo hay que tener en cuenta que h_t representa en el modelo la fracción de la dotación total de tiempo (l) que cada individuo del hogar le dedica en promedio al mercado laboral. De esta forma h_t para un hogar dado se construiría como el número total de horas que ofrece el hogar, dividido entre el producto del número de integrantes por el tiempo que cada uno tiene disponible. A nivel agregado las horas representativas se contruyeron a partir de la siguiente regla:

$$h_t^j = \frac{1}{7 \times 24} \times \frac{\sum_{i \in S_j} h_{i,t} N_{i,t}}{\sum_{i \in S_j} \bar{N}_i} \quad (14)$$

siendo $h_{i,t}$ las horas semanales promedio ofrecidas en el momento t por los individuos con nivel de educación i , $N_{i,t}$ el número de personas en el nivel educativo i para el período t , calculado a partir de los factores de expansión asociados a cada individuo presente en la encuesta y ajustado por el crecimiento de la población, y \bar{N}_i su respectivo nivel de estado estacionario, calculado como el promedio en la muestra disponible y también ajustado por crecimiento de la población. Al utilizarse horas semanales, debe realizarse el ajuste por el total de horas disponibles a la semana, 7×24 .

³La participación de estado estacionario fue aproximada como la participación promedio del período de estudio.

Gráfico 6: Salario real representativo

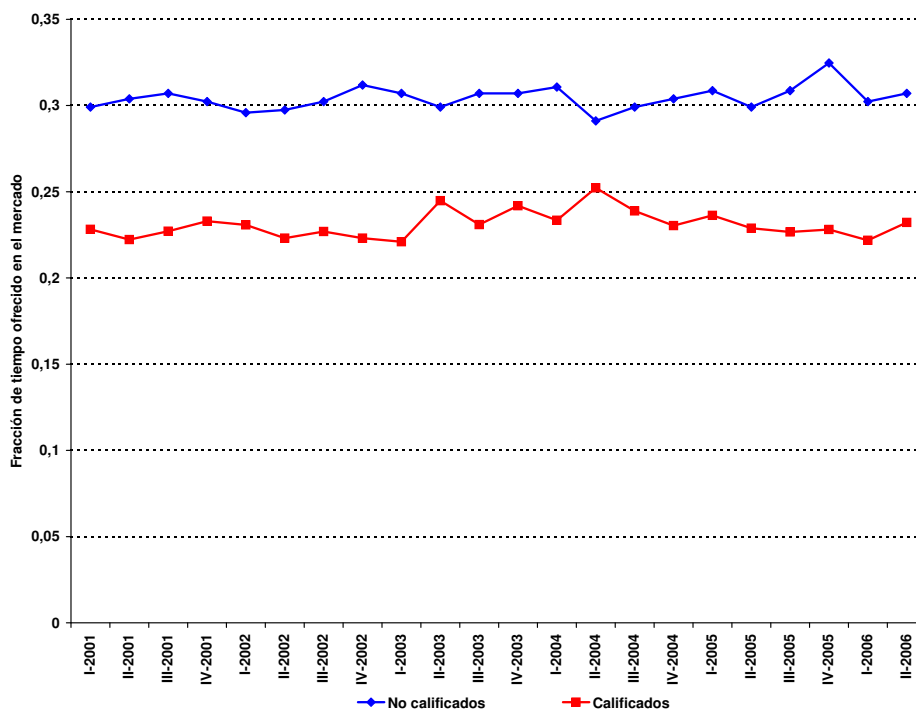


Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

En síntesis las horas representativas son el total de horas trabajadas en cada sector, dividido por el tamaño representativo y su dotación de tiempo. Nuevamente, un ejemplo puede permitir entender mejor la relevancia de esta definición y por qué es preferida a un promedio simple. Suponga que ingresa al mercado un grupo de individuos que ofrecen un número de horas inferior al promedio que existía previamente, y que todo lo demás se mantiene constante. En ese caso, a pesar de que el número de horas ofrecidas aumentó, el promedio simple es menor. En cambio, al utilizar las horas calculadas bajo la regla (14), las horas promedio representativas aumentan. Este punto sustenta el hecho de que la elasticidad de Frisch estimada en este artículo captura tanto el margen extensivo como el intensivo, pues incorpora los cambios en la oferta laboral debido a movimientos del promedio de horas de los trabajadores, pero también cambios debidos a la entrada y salida de éstos del mercado laboral. En el Gráfico 7 se presentan las series de la fracción de tiempo representativo ofrecido para los dos sectores.

La serie de tasa de interés a utilizar es el promedio entre una tasa activa y una tasa

Gráfico 7: Fracción de tiempo representativo ofrecido en el mercado



Fuente: ECH (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).
Cálculos de los autores.

pasiva. La primera es la tasa activa del Banco de la República⁴ y la segunda es la tasa de rendimientos de los Certificados de Deposito a Término (CDT), ambas trimestrales. Estas tasas de interés son deflactadas utilizando la inflación del Índice de Precios al Consumidor (IPC) calculado por el DANE.

Finalmente, para poder contrastar empíricamente la oferta laboral obtenida del modelo microfundamentado, debe construirse una distribución de riqueza y activos de la economía colombiana. Teniendo en cuenta que los activos son un acervo, donde el flujo correspondiente son los ingresos netos de los hogares, se procede a asociar la distribución de la riqueza, que es una variable no observada, con la distribución del ingreso del estado estacionario.

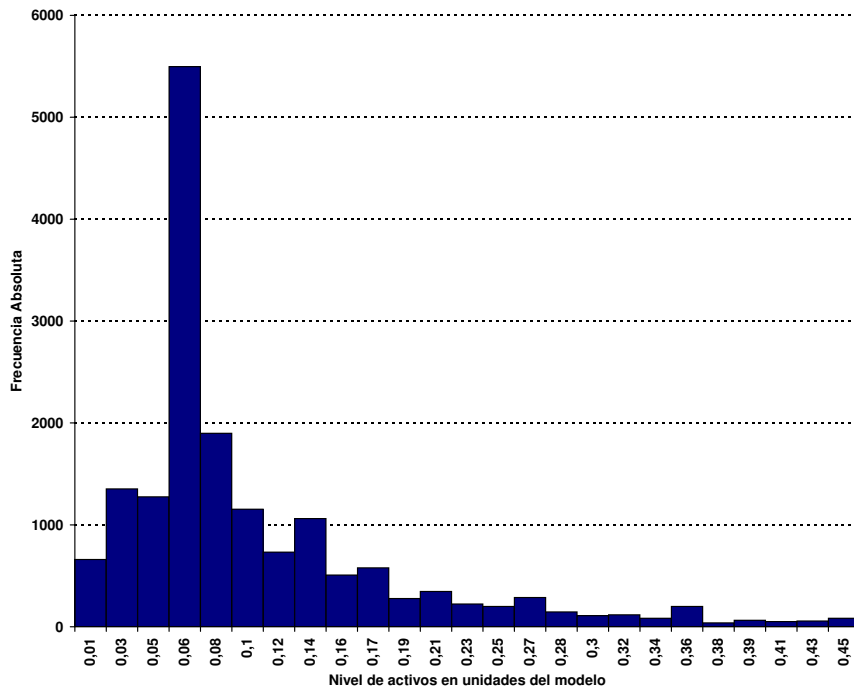
Para poder hacer esta asociación se tienen los siguientes supuestos:

⁴La tasa activa del Banco de la República es calculada como el promedio ponderado por monto de las tasas de crédito de: consumo, preferencial, ordinario y tesorería para los días hábiles de cada mes. Debido a la alta rotación del crédito de tesorería, su ponderación se estableció como la quinta parte de su desembolso diario.

- Las diferencias en los ingresos de los hogares son relativamente estables en el tiempo.
- Los gastos de los hogares son aproximadamente una proporción constante de sus ingresos.

Entonces la distribución de riqueza puede ser aproximada a partir de la distribución de ingresos de un año típico o cercano a lo que sería el estado estacionario. En este artículo la distribución de activos se obtuvo a partir de la distribución de ingresos (laborales y no laborales) del segundo trimestre del año 2004. El nivel promedio de los activos respecto al salario se construyó a partir de los retornos de los activos en ese período, suponiendo que éstos responden a la tasa de interés construida anteriormente. La información del retorno de sus activos fue obtenida de la ECH.

Gráfico 8: Distribución de activos en unidades del modelo



Se dispone de 17823 observaciones para construir la distribución, pero en este gráfico se muestran únicamente los 17000 individuos con menores activos.

Fuente: Cálculos de los autores.

La distribución de activos, truncada para mostrar únicamente los 17000 individuos con menores activos de 17823 observaciones, es presentada en el Gráfico 8. La gran mayoría de los individuos tienen niveles bajos de activos. El punto de corte entre individuos no

calificados y no calificados en esta distribución es $\bar{a} = 0,0654$.

Por otra parte, se supone que los costos fijos de mantener un nivel de educación superior fueron invariantes en el período de estudio e iguales al valor de estado estacionario. En ese caso, $\hat{v}_t = 0$ para todos los períodos. Este supuesto se hace porque no se dispone de información sobre los costos fijos de mantener un nivel determinado de capital humano. Finalmente, las tasas de crecimiento de la población calificada y no calificada se suponen iguales a la tasa de crecimiento de la población total, obtenida del DANE.

4.1. Calibración

En este apartado se explica cómo se asignaron valores a los parámetros del modelo, utilizando los datos construidos previamente.

Las horas y salarios de estado estacionario para cada sector y la tasa de interés de estado estacionario se aproximaron con sus promedios en la muestra, estandarizando el salario de los individuos no calificados en uno. Las tasas impositivas no se incluyen pues los salarios que registra la Encuesta Continua de Hogares son después de impuestos. Sin embargo, el modelo teórico presentado en la sección 3 permitiría un estudio profundo de los efectos de los impuestos sobre la oferta laboral, si datos separados de salarios e impuestos estuviesen disponibles.

La tasa de crecimiento de la tecnología se calibró como la tasa de crecimiento promedio del salario real para todos los trabajadores.

El nivel de activos de estado estacionario de los calificados y no calificados se obtuvo a partir de los retornos de sus activos en el segundo trimestre de 2004 y la tasa de interés vigente ese período. La escala que tienen los activos es relativa a la estandarización de salarios mencionada anteriormente.

Los niveles de consumo de estado estacionario se fijaron como una proporción de los ingresos laborales, 80 % para los no calificados y 60 % para los calificados, lo que da que en promedio la proporción consumo/ingreso laboral es de 74,4 %. Estamos considerando hogares que son trabajadores y no capitalistas: de la ECH se obtiene que la fracción promedio de ingreso salarial respecto al ingreso total de los trabajadores es 87,72 %. Entonces estos valores de estado estacionario para el consumo hacen que la proporción consumo/ingreso total sea de 65,25 %, muy cercana a la razón promedio consumo hogares/PIB en Colombia desde el primer trimestre de 2000 hasta el tercer trimestre de 2008 (DANE), que es 66,41 %.

La Encuesta de Ingresos y Gastos llevada a cabo por el DANE aporta evidencia indicando que los hogares con menores ingresos gastan una proporción mayor de su ingreso en consumo que los hogares con ingresos mayores, lo que justifica la calibración utilizada.

Cuadro 1: Parámetros calibrados

Parámetro	Descripción	Valor
h^c	Estado estac. horas calificados (fracción)	0,252
h^{nc}	Estado estac. horas no calificados (fracción)	0,309
$g^c = g^{nc} = g$	Estado estac. crecimiento trimest. productividad	$-0,251 \times 10^{-3}$
c^c	Estado estac. consumo calificado	0,48
c^{nc}	Estado estac. consumo no calificado	0,25
$n^c = n^{nc} = n$	Estado estac. crecimiento trimest. población	$0,304 \times 10^{-2}$
$\rho^x = \rho^y = \rho^n = \rho^g$	Persistencia de las expectativas	0,70
w^c	Estado estac. salario calificado estandarizado	3,03
w^{nc}	Estado estac. salario no calificado estandarizado	1,00
a^c	Estado estac. activos estandarizado calificado	0,129
a^{nc}	Estado estac. activos estandarizado no calificado	$0,82 \times 10^{-2}$
r	Promedio tasa de interés real trimestral	0,138

Finalmente la tasa de crecimiento de la población trimestral es la reportada por el DANE para el total nacional y los coeficientes de persistencia de las expectativas son de 0,7. El Cuadro 1 resume el resultado de la calibración.

5. Metodología de estimación

En la sección 3 se presentó y resolvió un modelo microfundamentado que permite obtener la oferta de horas del sector calificado y no calificado (Ecuaciones (11) y (12)). Se busca contrastar empíricamente las condiciones del modelo con los datos construidos en la sección 4.

Para ello es conveniente agregar las decisiones de los hogares de cada sector. Note que el modelo fue resuelto log-linealmente y la integral que agrega las horas de trabajo (Ecuaciones (8) y (9)) de los diferentes sectores no fue log-linearizada. Se hace uso de la definición:

$$\begin{aligned} h_t^c &= h^c \exp(\hat{h}_t^c) \\ h_t^{nc} &= h^{nc} \exp(\hat{h}_t^{nc}) \end{aligned}$$

para poder encontrar las horas agregadas ofrecidas en la economía modelo.

La oferta promedio de horas en los dos sectores de la economía está dada por las

Ecuaciones (8) y (9), que por facilidad se vuelven a mostrar aquí:

$$H_t^c = \frac{N_t}{N_t^c} \int_{\frac{\bar{a}_0}{F_0}}^{\infty} h^c \exp\left(\hat{h}_t^c(i)\right) f_t^c(i) di$$

$$H_t^{nc} = \frac{N_t}{N_t^{nc}} \int_{-\infty}^{\frac{\bar{a}_0}{F_0}} h^{nc} \exp\left(\hat{h}_t^{nc}(j)\right) f_t^{nc}(j) dj$$

De los datos se tiene las horas promedio trabajadas en cada sector. La estimación busca que las horas predichas por el modelo se ajusten a las horas reportadas por el DANE. Estas dos ecuaciones de oferta agregadas por sector son las ecuaciones a estimar, valores teóricos predichos por un modelo microfundamentado.

Deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos para estimar la elasticidad de Frisch a partir del modelo:

- Al disponer tan sólo de dos momentos teóricos, es claro que no todos los parámetros del modelo pueden ser estimados. Por ello se utilizan los valores calibrados en la sección 4.
- Las funciones a contrastar empíricamente son integrales. Debe escogerse un método de integración numérica que se complemente adecuadamente con la estimación econométrica.
- Finalmente se debe escoger el método econométrico más adecuado para obtener la estimación de la elasticidad de Frisch.

5.1. Integración numérica y estimación: *bootstrapping*

Las integrales que definen las horas promedio trabajadas obtenidas del modelo pueden verse como valores esperados condicionados de la distribución de riqueza de la población. Estos valores esperados pueden aproximarse muestralmente utilizando los estimadores usuales (promedio aritmético, por ejemplo). Sin embargo puede ser problemático estimar los parámetros profundos del modelo partiendo de una muestra reducida de la distribución de riqueza inicial de la población. Una posible solución a este problema es el método de *bootstrapping*.

El *bootstrap* es un método de simulación Monte Carlo para el cual no se hacen supuestos paramétricos (en general) acerca de la población que generó la muestra aleatoria. Se parte del hecho que la muestra es un estimativo de la población. Para ello se utiliza la distribución empírica \hat{F} que se obtiene de los datos. Para tratar de replicar la distribución poblacional se realiza un re-muestreo con reemplazamiento partiendo de la muestra

original. Esto permite obtener muchas muestras que, bajo ciertos supuestos, pueden pensarse como provenientes de la misma población subyacente. Y con múltiples muestras pueden evaluarse momentos de la distribución, confiando en los teoremas estadísticos de convergencia. Esto genera resultados más cercanos a los valores poblacionales que buscan obtenerse.

Cada observación x_i tiene probabilidad $1/n$ de ser seleccionada en una nueva muestra tomada de \hat{F} , suponiendo que la muestra tiene n datos. Al utilizar \hat{F} como pseudo-población, se re-muestra con reemplazamiento de la muestra original $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. La nueva muestra obtenida se denota $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_r^*)$ con $r \leq n$ el tamaño de la nueva muestra. A partir de las nuevas muestras obtenidas pueden evaluarse, para cada muestra, el momento estadístico de interés, y con todas las muestras se obtiene una distribución por *bootstrapping* del momento estadístico evaluado.

En particular, se aplica este método para evaluar la integral que define las horas promedio en el modelo teórico.

La economía (el DANE) nos provee del vector de datos

$$\Gamma_t = (w_t^c, w_t^{nc}, \tau_t^c, \tau_t^{nc}, R_t, \vartheta_t, N_t^c, N_t^{nc}, G_t^c, G_t^{nc})$$

para $T \in \mathbb{N}$ períodos. Dado un estado estacionario se obtiene el vector

$$\hat{\Gamma}_t = (\hat{w}_t^c, \hat{w}_t^{nc}, \hat{\tau}_t^c, \hat{\tau}_t^{nc}, \hat{R}_t, \hat{\vartheta}_t, \hat{N}_t^c, \hat{N}_t^{nc}, \hat{G}_t^c, \hat{G}_t^{nc})$$

de desviaciones respecto al estado estacionario.

Se toma una muestra aleatoria de activos a partir de la distribución poblacional f_0 : se obtiene $\mathbf{a} = \left(\frac{a_1}{F_0}, \dots, \frac{a_n}{F_0}\right)$, niveles de activos netos efectivos muestreados de la distribución y la proporción de población asociada. Estos son los datos que se conocen.

Se obtienen $K \in \mathbb{N}$ muestras de tamaño $n \in \mathbb{N}$ de la distribución, $\mathbf{a}^{k*} = \left(\frac{a_1^{k*}}{F_0}, \dots, \frac{a_n^{k*}}{F_0}\right)$, $1 \leq k \leq K$ al hacer re-muestreo uniforme con reemplazamiento.

Dado $\hat{\Gamma}_t$ se calcula

$$\begin{aligned} h_{t,j}^{nc,k} &= h^{nc} \exp\left(\hat{h}_t^{nc} \left(\hat{a}_j^k\right)\right) & \text{si } a_j^k \leq \bar{a} \\ h_{t,j}^{c,k} &= h^c \exp\left(\hat{h}_t^c \left(\hat{a}_j^k\right)\right) & \text{si } a_j^k > \bar{a} \end{aligned}$$

que dependen de σ , η y otros parámetros, siendo \bar{a} el umbral de activos efectivos que diferencia a los individuos no calificados de los calificados.

Se quieren calcular las horas promedio para cada re-muestra k

$$h_t^{nc,k} = \frac{1}{n^{nc,k}} \sum_{j=1}^n h_{t,j}^{nc,k}$$

$$h_t^{c,k} = \frac{1}{n^{c,k}} \sum_{j=1}^n h_{t,j}^{c,k}$$

siendo $n^{nc,k}$ el número de índices j para los cuales $a_j^k \leq \bar{a}$ y $n^{c,k} = n - n^{nc,k}$.

Con esta información se tiene que las horas promedio por sector que arroja el modelo son

$$H_t^{nc,mod} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_t^{nc,k} \quad H_t^{c,mod} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_t^{c,k}$$

De esta forma se obtiene por *bootstrapping* una estimación de las horas promedio por sector que predice el modelo teórico, dados valores de σ , η y otros parámetros. Como el objetivo es estimar η y σ , debe buscarse un estimador de estos parámetros de forma tal que estas horas promedio teóricas se ajusten adecuadamente a las horas observadas. Este problema final es el de estimación econométrica.

5.2. Estimación econométrica

El método más natural para estimar parámetros profundos provenientes de modelos teóricos parece ser el GMM propuesto por primera vez en economía por Hansen y Sargent (1979).

Los dos momentos a utilizar para realizar la estimación de los parámetros η y σ que determinan la elasticidad de Frisch y la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo se construyen a partir de las horas promedio de los calificados y las horas promedios de los no calificados en cada momento del tiempo, dadas por las Ecuaciones (8) y (9) en sus versiones log-linerizadas y con la formación de expectativas descrita en la sección 3.

Se define a $H_t^{nc,DANE}$ y $H_t^{c,DANE}$ como las horas ofrecidas promedio de los calificados y no calificados muestrales y a v_t^{nc} y v_t^c como sus desviaciones de los valores teóricos en el período t :

$$v_t^{nc} = H_t^{nc,DANE} - H_t^{nc,mod}$$

$$v_t^c = H_t^{c,DANE} - H_t^{c,mod}$$

De esta forma los momentos a utilizar en la estimación son:

$$E_t(v_t^{nc}) = 0$$

$$E_t(v_t^c) = 0$$

y la función objetivo a minimizar para realizar la estimación por el método generalizado de momentos es

$$L = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v_t^{nc} \right)^2 + \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v_t^c \right)^2$$

siendo $T \in \mathbb{N}$ el número de períodos disponibles en la muestra.

En el caso que sólo se estime el parámetro η la función objetivo es la misma, pero fijando el parámetro σ en algún valor preestablecido.

Para todos los ejercicios realizados en este artículo se tiene que el número de períodos es $T = 22$, el número de niveles de activos escogidos en cada iteración es $n = 1000$ y se tomaron $K = 1000$ re-muestras.

6. Resultados

Con los datos y la metodología descrita en las secciones anteriores se estimaron de forma conjunta los parámetros η y σ , que representan el inverso multiplicativo de la elasticidad de Frisch y el coeficiente de aversión relativa al riesgo. El Cuadro 2 presenta las estimaciones puntuales, los intervalos de confianza al 90%. El Gráfico 9 presenta la distribución del estimador para la elasticidad de Frisch⁵.

Cuadro 2: Resultados de la estimación conjunta

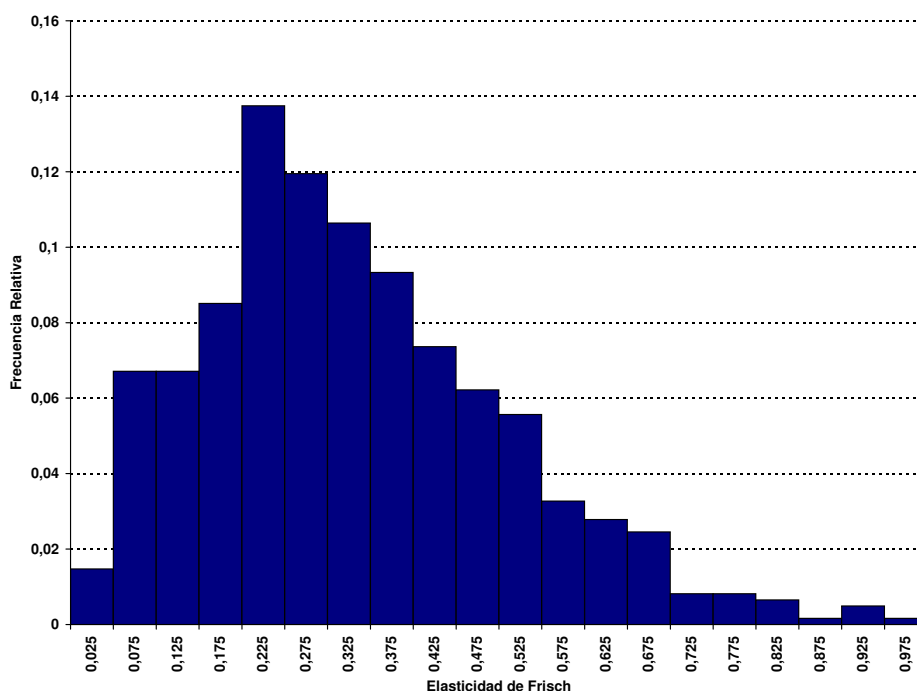
$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	Elast. Sust. Intertemp. ($\frac{1}{\hat{\sigma}}$)	I.C 90%	Elast. Frisch ($\frac{1}{\hat{\eta}}$)	I.C 90%
2,35	3,19	0,42	0,24 – 0,71	0,31	0,09 – 0,65

Fuente: Cálculos de los autores.

Las estimaciones de la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo son significativamente menores que uno. El Gráfico 9 aproxima la función de distribución muestral del estimador, y sugiere que se trata de una densidad unimodal y concentrada alrededor del valor obtenido para la estimación puntual.

⁵Se construyeron los intervalos de confianza y la distribución aproximada de los estimadores a partir del método de *bootstrapping* tomando 1000 submuestras de tamaño 15 con reemplazamiento.

Gráfico 9: Distribución por *bootstrapping* de la elasticidad de Frisch



Fuente: Cálculos de los autores.

Se encuentra entonces una elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo inelástica con un valor de 0,31. Un aumento (disminución) de 3% en el salario real generaría a lo más un aumento (caída) de 1% en la oferta agregada de trabajo. Este sería el efecto máximo pues la elasticidad de Frisch solo captura el efecto sustitución, y faltaría tener en cuenta el efecto ingreso. La teoría económica permite suponer que ante un aumento (disminución) del salario, el efecto ingreso es negativo (positivo) sobre las horas ofrecidas. Por consiguiente la oferta de trabajo agregada en Colombia no reacciona muy fuerte a movimientos del salario. Es importante resaltar en este punto que los resultados permiten capturar el movimiento en la oferta de trabajo debido únicamente a movimientos en el salario, pero la decisión de la oferta de horas de los hogares depende de otros factores adicionales, como pueden ser los ingresos no laborales.

Los valores encontrados para la elasticidad de Frisch están en el rango de lo encontrado por la literatura para otros países. Por ejemplo, la estimación de Felices y Tinsley (2006) para el Reino Unido es de 0,1, Hall (2006) encuentra un valor de 0,35, cercano al obtenido para Colombia, y Ziliak y Kniesner (2005) obtienen un valor de 0,5. El resultado obtenido en este trabajo también está dentro del rango de valores adoptado por algunos modelos de

equilibrio general dinámicos y estocásticos. Por ejemplo, el modelo SIGMA de la Reserva Federal tiene una elasticidad de Frisch calibrada en 0,20 (Erceg, Guerrieri y Gust (2006)). Respecto al valor estimado para la elasticidad de sustitución intertemporal, se encuentra que es muy similar a los valores reportados en la calibración presentada por Iregui y Melo (2009) para Colombia, suponiendo un porcentaje de la población con restricciones de liquidez superiores al 50 %.

Finalmente se realizó un ejercicio de estimación condicionado para la elasticidad de Frisch: se fijó el coeficiente de aversión relativa al riesgo (σ) en valores estándar utilizados en la literatura y se estimó la elasticidad de Frisch. Fijando el valor $\sigma = 2$ se obtiene una elasticidad de Frisch de 0,34; al fijar $\sigma = 3$ se obtiene una elasticidad de Frisch de 0,22; y fijando $\sigma = 5$ se obtiene que la elasticidad de Frisch es 0,10. Así pareciera existir una relación monótona entre el valor de σ fijado y la elasticidad de Frisch estimada.

7. Conclusiones

En este artículo se abordó el estudio del mecanismo de transmisión de la política monetaria al producto a través de los salarios reales y la oferta de trabajo. Argumentando que un factor determinante en el *trade-off* inflación producto es la elasticidad de la oferta de trabajo, se presentó un modelo teórico que permite tener una estimación plausible de esta elasticidad. El modelo planteado incorpora de forma explícita características propias del mercado laboral colombiano, entre ellas la segmentación encontrada entre trabajadores calificados y no calificados y las restricciones en el acceso al sistema financiero. Utilizando el método generalizado de momentos, a partir del modelo se estima la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo, con datos trimestrales disponibles desde el año 2001 hasta el año 2006. Se construyeron series de salarios representativos y de horas ofrecidas al mercado, utilizando una aproximación diferente a la encontrada en la literatura en general, que utiliza el número de horas trabajadas. La estimación puntual arrojó una elasticidad de Frisch de 0,31 y una elasticidad de sustitución intertemporal de 0,42. Adicionalmente se encontró que la elasticidad de Frisch es significativamente menor que uno, de donde se concluye que la oferta de trabajo es inelástica.

De esta forma se encontró para Colombia una oferta de trabajo que responde a un aumento de 3 % en el salario real con un incremento en la oferta de 1 % si se sólo se considera el efecto de sustitución intertemporal. Y si se supone que el ocio es un bien normal, entonces el efecto ingreso de este aumento en salarios sería negativo, de forma tal que la respuesta de la oferta sería aún menor. La magnitud del efecto ingreso depende del estado de la economía y de las condiciones que enfrenta cada individuo (nivel de

calificación, restricciones de liquidez, su nivel de activos etc.) y el modelo incorpora este hecho.

Dada la relación entre el producto y la inflación mencionada previamente, el valor estimado de la elasticidad de Frisch sugiere que en Colombia existe un *trade-off* importante y significativo entre el producto y la inflación. Entonces uno de los costos de estabilizar la inflación en el corto plazo en términos de producto se da a través del mercado de trabajo, y de forma más particular, de la oferta de trabajo.

Referencias

- AMARAL, PEDRO S. y QUINTIN, ERWAN: «A competitive model of the informal sector». *Journal of Monetary Economics*, 2006, **53(7)**, pp. 1541–1553.
- ARANGO, LUIS EDUARDO; POSADA, CARLOS ESTEBAN y URIBE, JOSÉ DARÍO: «Cambios en la estructura de los salarios urbanos en Colombia 1984-2000». *Lecturas de Economía, Universidad de Antioquia*, 2005, **63**.
- BENIGNO, PIERPAOLO y RICCI, LUCA ANTONIO: «The Inflation-Unemployment Trade-Off at Low Inflation». *Nber working papers*, National Bureau of Economic Research, Inc, 2008.
- BLUNDELL, RICHARD y MACURDY, THOMAS: «Labor supply: A review of alternative approaches». En: O. Ashenfelter y D. Card (Eds.), *Handbook of Labor Economics*, volumen 3. Elsevier, 1999.
- COGLEY, TIMOTHY y SARGENT, THOMAS J.: «The conquest of US inflation: Learning and robustness to model uncertainty». *Review of Economic Dynamics*, 2005, **8(2)**, pp. 528–563.
- CÁRDENAS, MAURICIO y ESCOBAR, ANDRÉS: «Determinants of Savings in Colombia 1925-1994». *Red de centros de investigación*, Banco Interamericano de Desarrollo, 1997.
- DOMEIJ, DAVID y FLODEN, MARTIN: «The Labor-Supply Elasticity and Borrowing Constraints: Why Estimates are Biased». *Review of Economic Dynamics*, 2006, **9(2)**, pp. 242–262.
- ERCEG, CHRISTOPHER J.; GUERRIERI, LUCA y GUST, CHRISTOPHER: «SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis». *International Journal of Central Banking*, 2006, **2(1)**.
- EVANS, PAUL y KARRAS, GEORGIOS: «Liquidity Constraints and the Substitutability between Private and Government Consumption: The Role of Military and Non-military Spending». *Economic Inquiry*, 1998, **36(2)**, pp. 203–14.
- EVERS, MICHIEL; MOOIJ, RUUD y VUUREN, DANIEL: «The Wage Elasticity of Labour Supply: A Synthesis of Empirical Estimates». *De Economist*, 2008, **156(1)**, pp. 25–43.
- FELICES, GUILLERMO y TINSLEY, DAVID: «Intertemporal substitution and household production in labour supply». *Bank of England working papers*, Bank of England, 2006.

- GOURIO, FRANCOIS y NOUAL, PIERRE-ALEXANDRE: «The Marginal Worker and the Aggregate Elasticity of Labor Supply». *2006 meeting papers*, Society for Economic Dynamics, 2006.
- HALL, ROBERT E.: «Sources and Mechanisms of Cyclical Fluctuations in the Labor Market», 2006. Mimeo, Stanford University.
- HANSEN, GARY D.: «Indivisible labor and the business cycle». *Journal of Monetary Economics*, 1985, **16(3)**, pp. 309–327.
- HANSEN, LARS PETER y SARGENT, THOMAS J.: «Formulating and estimating dynamic linear rational expectations models». *Working papers*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1979.
- IMROHORUGLU, AYSE: «Cost of Business Cycles with Indivisibilities and Liquidity Constraints». *Journal of Political Economy*, 1989, **97(6)**, pp. 1364–83.
- IREGUI, ANA MARÍA y MELO, LIGIA ALBA: «La transmisión de la política monetaria sobre el consumo en presencia de restricciones de liquidez». *Borradores de economía*, Banco de la Republica de Colombia, 2009.
- JEANNE, OLIVIER: «Generating real persistent effects of monetary shocks: How much nominal rigidity do we really need?» *European Economic Review*, 1998, **42(6)**, pp. 1009–1032.
- KIMBALL, MILES S. y SHAPIRO, MATTHEW D.: «Labor Supply: Are the Income and Substitution Effects Both Large or Both Small?» *Nber working papers*, National Bureau of Economic Research, Inc, 2008.
- KURODA, SACHIKO y YAMAMOTO, ISAMU: «Estimating Frisch Labor Supply Elasticity in Japan». *Imes discussion paper series*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2007.
- LÓPEZ, HUGO: «Características y determinantes de la oferta laboral colombiana y su relación con la dinámica del desempleo». En: Miguel Urrutia (Ed.), *Empleo y Economía*, Banco de la República, 2001.
- MACURDY, THOMAS E: «An Empirical Model of Labor Supply in a Life-Cycle Setting». *Journal of Political Economy*, 1981, **89(6)**, pp. 1059–85.

- PARRA, JUAN CARLOS: «Hechos Estilizados de la Economía Colombiana: Fundamentos Empíricos para la Construcción y Evaluación de un Modelo DSGE». *Borradores de economía*, Banco de la República, 2008.
- PISTAFERRI, LUIGI: «Anticipated and Unanticipated Wage Changes, Wage Risk, and Intertemporal Labor Supply». *Journal of Labor Economics*, 2003, **21(3)**, pp. 729–728.
- PRESCOTT, EDWARD C.: «Theory ahead of business cycle measurement». *Staff report*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1986.
- RAMÍREZ-HASSAN, ANDRÉS: «Una función de producción agregada para la economía colombiana: características e interacción entre el trabajo calificado, el trabajo no calificado y el capital, 1994-2005.» *Revista ECOS de Economía* 26, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, 2008.
- RIASCOS, ÁLVARO y PRADA, JUAN D.: «Economic Consequences of Informality in a Credit Constrained Economy», 2007. Mimeo, Banco de la República.
- ROBBINS, DONALD J.; SALINAS, DANIEL y MANCO, ARACELI: «La Elasticidad de la Oferta Laboral Femenina al Salario y Otros Determinantes - Evidencia para Colombia con Estimativas de Cohortes Sintéticos», 2007. Mimeo, Universidad de Antioquia.
- SARGENT, THOMAS J.: *The Conquest of American Inflation*. Princeton University Press, 2001.
- SÁNCHEZ, FABIO y NÚÑEZ, JAIRO: «Educación y salarios relativos en Colombia: 1976-1995. Determinantes, evolución e implicaciones para la distribución del ingreso». *Archivos de Macroeconomía* 74, Departamento Nacional de Planeación, 1998.
- ZILIAK, JAMES P. y KNIESNER, THOMAS J.: «The Effect of Income Taxation on Consumption and Labor Supply». *Journal of Labor Economics*, 2005, **23(4)**, pp. 769–796.

A. Modelo no lineal

En este apéndice se obtienen matemáticamente las ecuaciones fundamentales del modelo.

Las preferencias están representadas por una función de utilidad instantánea separable que es igual para todos los habitantes de la economía:

$$U(c_t) - V(F_t, h_t)$$

Para asegurar la existencia de una senda de crecimiento balanceado debe suponerse que el consumo y el progreso técnico son homogéneos de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ en la función de utilidad: para cualquier $k \geq 0$

$$U(kc_t) - V(kF_t, h_t) = k^\alpha (U(c_t) - V(F_t, h_t))$$

de donde se obtiene (derivando y haciendo uso de la regla de la cadena):

$$\begin{aligned} kU_c(kc_t) &= k^\alpha U_c(c_t) \\ V_h(kF_t, h_t) &= k^\alpha V_h(F_t, h_t) \end{aligned}$$

y por lo tanto, para cualquier $b \in \mathbb{R}$

$$U_c(c_t) - bV_h(F_t, h_t) = k^{1-\alpha} \left(U_c(kc_t) - \frac{b}{k} V_h(kF_t, h_t) \right)$$

Esa condición es indispensable para asegurar la existencia de un estado estacionario (en unidades de trabajador efectivo) para este modelo. Considere $k = \frac{1}{F_t}$. Entonces, para cualquier $b \in \mathbb{R}$

$$(U_c(c_t) + bV_h(F_t, h_t)) F_t^{1-\alpha} = U_c\left(\frac{c_t}{F_t}\right) - bF_t V_h(1, h_t)$$

Los problemas de los hogares (calificados y no calificados) se resuelven en unidades por habitante, porque el hogar está interesado en la utilidad del habitante promedio.

A.1. Hogar en el sector calificado

El hogar calificado i enfrenta el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t^c(i), h_t^c(i), a_t^c(i)\}} \quad & E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} (U(c_{t+s}^c(i)) - V(F_{t+s}^c, h_{t+s}^c(i))) \\ \text{s.a} \quad & \tau_{t+s}^c w_{t+s}^c h_{t+s}^c(i) + \frac{N_{t+s-1}^c}{N_{t+s}^c} (1 + r_{t+s-1}) a_{t+s-1}^c(i) \\ & \geq c_{t+s}^c(i) + a_{t+s}^c(i) + \vartheta_{t+s} \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden para el hogar calificado i son, en unidades por trabajador:

$$\begin{aligned} E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} U_c(c_{t+s}^c(i)) &= E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} \lambda_{t+s}^c(i) \\ E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} V_h(F_{t+s}^c, h_{t+s}^c(i)) &= E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} \lambda_{t+s}^c(i) \tau_{t+s}^c w_{t+s}^c \\ E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^c}{N_t^c} \lambda_{t+s}^c(i) &= E_t \beta^{s+1} \frac{N_{t+s+1}^c}{N_t^c} \frac{N_{t+s}^c}{N_{t+s+1}^c} (1 + r_{t+s}) \lambda_{t+s+1}^c(i) \\ E_t c_{t+s}^c(i) + E_t a_{t+s}^c(i) + E_t \vartheta_{t+s} &= E_t \tau_{t+s}^c w_{t+s}^c h_{t+s}^c(i) + E_t \frac{N_{t+s-1}^c}{N_{t+s}^c} (1 + r_{t+s-1}) a_{t+s-1}^c(i) \end{aligned}$$

donde $\lambda_{t+s}^c(i)$ es el multiplicador de Lagrange asociado al hogar i .

Al ser expresadas en unidades efectivas (dividiendo por la productividad del sector calificado) y haciendo $s = 0$ se obtienen las condiciones (1), (2) y (3).

Es conveniente notar que en estado estacionario la tasa de interés real está relacionada con el factor de descuento β y con el crecimiento de la productividad del sector calificado de estado estacionario g^c por

$$\begin{aligned} U_c(c_{t+s}) &= \beta (1 + r_{t+s}) U_c(c_{t+s+1}) \\ &= \beta (1 + r_{t+s}) U_c((1 + g^c) c_{t+s}) \\ U_c(c_{t+s}) &= \beta (1 + r_{t+s}) (1 + g^c)^{\alpha-1} U_c(c_{t+s}) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(1 + g^c)^{1-\alpha}}{\beta} = 1 + r$$

A.2. Hogar en el sector no calificado

El hogar j en el sector no calificado enfrenta el siguiente problema

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t^{nc}(j), h_t^{nc}(j)\}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} (U(c_{t+s}^{nc}) - V(F_{t+s}^{nc}, h_{t+s}^{nc})) \\ \text{s.a} \quad & \tau_{t+s}^{nc} w_{t+s}^{nc} h_{t+s}^{nc} + \frac{N_{t+s-1}^{nc}}{N_{t+s}^{nc}} \left((1 + r_{t+s-1}) - \frac{F_{t+s}^{nc}}{F_{t+s-1}^{nc}} \right) a_{t+s-1}^{nc}(j) \geq c_{t+s}^{nc} \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son, expresadas en términos por trabajador:

$$\begin{aligned} E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} U_c(c_{t+s}^{nc}(j)) &= E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} \lambda_{t+s}^{nc}(j) \\ E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} V_h(F_{t+s}^{nc}, h_{t+s}^{nc}(j)) &= E_t \beta^s \frac{N_{t+s}^{nc}}{N_t^{nc}} \lambda_{t+s}^{nc}(j) \tau_{t+s}^{nc} w_{t+s}^{nc} \\ \frac{a_{t+s}^{nc}(j)}{F_{t+s}^{nc}} &= \frac{a_{t+s-1}^{nc}(j)}{F_{t+s-1}^{nc}} \\ E_t c_{t+s}^{nc}(j) &= E_t \tau_{t+s}^{nc} w_{t+s}^{nc} h_{t+s}^{nc}(j) \\ &+ E_t \frac{N_{t+s-1}^{nc}}{N_{t+s}^{nc}} \left((1 + r_{t+s-1}) - \frac{F_{t+s}^{nc}}{F_{t+s-1}^{nc}} \right) a_{t+s-1}^{nc}(j) \end{aligned}$$

donde $\lambda_{t+s}^{nc}(j)$ es el multiplicador de Lagrange asociado al hogar j .

Al ser expresadas en unidades efectivas (dividiendo por la productividad del sector no calificado) se obtienen las condiciones (4), (5) y (6).

A.3. Elasticidad de Frisch

Suponiendo que la oferta es $h_t = h\left(\frac{\tau_t w_t}{F_t}, \frac{c_t}{F_t}\right)$, interesa hallar la elasticidad salario efectivo después de impuestos de la oferta, es decir

$$e_t = \frac{dh_t}{d\left(\frac{\tau_t w_t}{F_t}\right)} \frac{\frac{\tau_t w_t}{F_t}}{h_t}$$

Derivando implícitamente la condición de primer orden respecto al salario efectivo

$$V_h(1, h_t) = U_c\left(\frac{c_t}{F_t}\right) \frac{\tau_t w_t}{F_t}$$

y suponiendo que el consumo se mantiene constante ante cambios marginales en el salario efectivo (para mantener constante la utilidad marginal del consumo, gracias a la

separabilidad aditiva de las preferencias) se tiene

$$\frac{dh_t}{d\left(\frac{\tau_t w_t}{F_t}\right)} = \frac{U_c\left(\frac{c_t}{F_t}\right)}{V_{hh}(1, h_t)} = \frac{V_h(1, h_t)}{V_{hh}(1, h_t)} \frac{1}{\frac{\tau_t w_t}{F_t}} = \frac{V_h(1, h_t)}{V_{hh}(1, h_t)} h_t \frac{\tau_t w_t}{F_t}$$

de donde se concluye que la elasticidad Frisch del trabajo está dada por

$$e_t^{frisch} = \frac{V_h(1, h_t)}{V_{hh}(1, h_t) h_t} \Big|_{U_c\left(\frac{c_t}{F_t}\right)=cte}$$

Aplicando esta fórmula a las formas funcionales

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad V(F_t, h_t) = F_t^{1-\sigma} \frac{h_t^{1+\eta}}{1+\eta}$$

$$\sigma > 0 \quad \eta > 0$$

se obtiene que $e_t^{frisch} = \frac{1}{\eta}$.

B. Modelo log-linearizado

Todas las variables están expresadas en términos de trabajador efectivo en su respectivo sector.

En la log-linearización se omiten los índices i y j para simplificar la notación. Debe aclararse, sin embargo, que las ofertas laborales derivadas en este apéndice son para el hogar calificado i y para el hogar no calificado j .

B.1. Hogar en el sector calificado

La versión log-linearizada de la Ecuación de Euler (2) es:

$$U_c\left(\frac{c_t^c}{F_t^c}\right) = E_t \beta \left(\frac{F_{t+1}^c}{F_t^c}\right)^{\alpha-1} U_c\left(\frac{c_{t+1}^c}{F_{t+1}^c}\right) (1+r_t)$$

$$U_c\left(\frac{c^c}{F^c} e^{\hat{c}_t^c}\right) = E_t \beta (1+g^c)^{\alpha-1} e^{(\alpha-1)\hat{G}_t^c} U_c\left(\frac{c^c}{F^c} e^{\hat{c}_{t+1}^c}\right) (1+r) e^{\hat{R}_t}$$

$$U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right) + U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c = \beta (1+g^c)^{\alpha-1} U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right) (1+r) + \beta (1+g^c)^{\alpha-1} U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) E_t (1+r) \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_{t+1}^c$$

$$+ \beta (1+g_t^c)^{\alpha-1} U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right) (1+r) \hat{R}_t + \beta (1+g^c)^{\alpha-1} U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right) (1+r) (\alpha-1) \hat{G}_t^c$$

$$\frac{U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c}}{U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right)} \hat{c}_t^c = \frac{U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c}}{U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right)} E_t \hat{c}_{t+1}^c + \hat{R}_t + (\alpha-1) \hat{G}_t^c$$

siendo $\hat{R}_t \approx r_t - r$, $\hat{G}_t^c \approx g_t^c - g^c$ y $\hat{c}_t^c = \ln\left(\frac{c_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{c^c}{F^c}\right)$

La versión log-linearizada de la restricción de presupuesto (3) es:

$$\begin{aligned} \frac{c_t^c}{F_t^c} + \frac{a_t^c}{F_t^c} + \frac{\vartheta_t}{F_t^c} &= \tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} h_t^c + \frac{N_{t-1}^c}{N_t^c} \frac{F_{t-1}^c}{F_t^c} (1+r_{t-1}) \frac{a_{t-1}^c}{F_{t-1}^c} \\ \frac{c^c}{F^c} e^{\hat{c}_t^c} + \frac{a^c}{F^c} e^{\hat{a}_t^c} + \frac{\vartheta}{F^c} e^{\hat{\vartheta}_t} &= \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c e^{\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c + \hat{h}_t^c} + \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} e^{-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1} + \hat{a}_{t-1}^c} \\ \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c + \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_t^c + \frac{\vartheta}{F^c} \hat{\vartheta}_t &= \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c + \hat{h}_t^c) + \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} (-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1} + \hat{a}_{t-1}^c) \end{aligned}$$

siendo $\hat{h}_t^c = \ln(h_t^c) - \ln(h^c)$, $\hat{a}_t^c = \ln\left(\frac{a_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{a^c}{F^c}\right)$, $\hat{\vartheta}_t = \ln\left(\frac{\vartheta_t}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{\vartheta}{F^c}\right)$, $\hat{w}_t^c = \ln\left(\frac{w_t^c}{F_t^c}\right) - \ln\left(\frac{w^c}{F^c}\right)$, $\hat{N}_t^c \approx n_t^c - n^c$.

La ecuación de Euler linearizada se puede iterar de forma tal que

$$\frac{U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c}}{U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right)} \hat{c}_t^c = \frac{U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c}}{U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right)} E_t \hat{c}_{t+s}^c + E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} + (\alpha - 1) \hat{G}_{t-1+k}^c \right\}$$

de donde se obtiene que

$$E_t \hat{c}_{t+s}^c = \hat{c}_t^c - \frac{U_c\left(\frac{c^c}{F^c}\right)}{U_{cc}\left(\frac{c^c}{F^c}\right) \frac{c^c}{F^c}} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} + (\alpha - 1) \hat{G}_{t-1+k}^c \right\}$$

Considere la restricción presupuestaria para el período $t + s$

$$\begin{aligned} &\frac{c^c}{F^c} E_t \hat{c}_{t+s}^c + \frac{a^c}{F^c} E_t \hat{a}_{t+s}^c + \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \\ &= \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t (\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c) + \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} E_t (-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} + \hat{a}_{t+s-1}^c) \\ &\quad \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left(\frac{c^c}{F^c} E_t \hat{c}_{t+s}^c + \frac{a^c}{F^c} E_t \hat{a}_{t+s}^c + \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right) \\ &= \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t (\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c) + \\ &\quad \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^{s-1} \frac{a^c}{F^c} E_t (-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} + \hat{a}_{t+s-1}^c) \end{aligned}$$

y sumando sobre $s \in \mathbb{N}$ y utilizando la condición de No-Ponzi:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left(\frac{c^c}{F^c} E_t \hat{c}_{t+s}^c + \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t (\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c) + \\ &\quad \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^{s-1} \frac{a^c}{F^c} E_t (-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1}) + \\ &\quad \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c \end{aligned}$$

Entonces se puede obtener:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left(\frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c - \frac{U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)}{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} + (\alpha-1) \hat{G}_{t-1+k}^c \right\} + \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right) \\
= & \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t \left(\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c \right) + \\
& \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^{s-1} \frac{a^c}{F^c} E_t \left(-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} \right) + \\
& \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{(1+r)}{(1+r)-(1+n^c)(1+g^c)} \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t \left(\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c \right) + \frac{a^c}{F^c} E_t \left(-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)}{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} + (\alpha-1) \hat{G}_{t-1+k}^c \right\} - \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right] + \frac{(1+r)}{(1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c
\end{aligned}$$

La Ecuación de oferta laboral (1) puede log-linearizarse:

$$\begin{aligned}
V_h(1, h_t^c) &= U_c \left(\frac{c_t^c}{F_t^c} \right) \tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} \\
V_h \left(h^c e^{\hat{h}_t^c} \right) &= U_c \left(\frac{c^c}{F^c} e^{\hat{c}_t^c} \right) \tau^c \frac{w^c}{F^c} e^{\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c} \\
V_{hh}(h^c) h^c \hat{h}_t^c &= U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \tau^c \frac{w^c}{F^c} \frac{c^c}{F^c} \hat{c}_t^c + U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \tau^c \frac{w^c}{F^c} (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) \\
\frac{V_{hh}(h^c) h^c}{V_h(h^c)} \hat{h}_t^c &= \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}}{u_C \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \hat{c}_t^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

y utilizando la expresión hallada para el consumo:

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{hh}(h^c) h^c}{V_h(h^c)} \hat{h}_t^c \\
= & \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}}{U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t \left(\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c \right) \right. \\
& \left. + \frac{a^c}{F^c} E_t \left(-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)}{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} E_t \sum_{k=1}^s \left\{ \hat{R}_{t-1+k} + (\alpha-1) \hat{G}_{t-1+k}^c \right\} - \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right] \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{\frac{c^c}{F^c} (1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{V_{hh}(h^c) h^c}{V_h(h^c)} - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}} \frac{\tau^c w^c}{F^c} h^c \right) \hat{h}_t^c \\
= & \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{c_C \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}} \left(\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) + \frac{a^c}{F^c} (-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1}) \right) \\
& \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c E_t (\hat{\tau}_{t+s}^c + \hat{w}_{t+s}^c + \hat{h}_{t+s}^c) \right. \\
& + \frac{a^c}{F^c} E_t (-\hat{N}_{t+s-1}^c - \hat{G}_{t+s-1}^c + \hat{R}_{t+s-1}) \\
& \left. + \frac{U_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)}{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} E_t \sum_{k=1}^s \{ \hat{R}_{t-1+k}^c + (\alpha-1) \hat{G}_{t-1+k}^c \} - \frac{\vartheta}{F^c} E_t \hat{\vartheta}_{t+s} \right] \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c}} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

se obtiene una expresión explícita para \hat{h}_t^c .

B.2. Hogares en el sector no calificado

Para caracterizar a los hogares en el sector no calificado es suficiente con log-linearizar la restricción presupuestaria (6) y la Ecuación de oferta laboral (4). La restricción presupuestaria es:

$$\begin{aligned}
\frac{c_t^{nc}}{F_t^{nc}} &= \tau_t^{nc} \frac{w_t^{nc}}{F_t^{nc}} h_t^{nc} + \frac{N_{t-1}^{nc}}{N_t^{nc}} \frac{F_{t-1}^{nc}}{F_t^{nc}} \left(\frac{P_{t-1}}{P_t} (1+i_{t-1}) - \frac{F_t^{nc}}{F_{t-1}^{nc}} \right) \frac{a_{t-1}^{nc}}{F_{t-1}^{nc}} \\
\frac{c_t^{nc}}{F_t^{nc}} e^{\hat{c}_t^{nc}} &= \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} e^{\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc} + \hat{h}_t^{nc}} + \frac{(1+r) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} e^{\hat{R}_{t-1} + \hat{a}_{t-1}^{nc} - \hat{N}_{t-1}^{nc} - \hat{G}_{t-1}^{nc}} \\
&\quad - \frac{\frac{a^{nc}}{F^{nc}} e^{\hat{a}_{t-1}^{nc} - \hat{N}_{t-1}^{nc}}}{(1+n^{nc})} \\
\frac{c_t^{nc}}{F_t^{nc}} \hat{c}_t^{nc} &= \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc} + \hat{h}_t^{nc}) + \frac{(1+r) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{R}_{t-1} - \hat{G}_{t-1}^{nc}) \\
&\quad + \frac{(r-g^{nc}) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{a}_{t-1}^{nc} - \hat{N}_{t-1}^{nc})
\end{aligned}$$

siendo $\hat{h}_t^{nc} = \ln(h_t^{nc}) - \ln(h^{nc})$, $\hat{w}_t^{nc} = \ln\left(\frac{w_t^{nc}}{F_t^{nc}}\right) - \ln\left(\frac{w^{nc}}{F^{nc}}\right)$ y $\hat{a}_t^{nc} = \ln\left(\frac{a_t^{nc}}{F_t^{nc}}\right) - \ln\left(\frac{a^{nc}}{F^{nc}}\right)$.

La oferta laboral del sector no calificado es:

$$\begin{aligned}
V_h(1, h_t^{nc}) &= U_c \left(\frac{c_t^{nc}}{F^{nc}} \right) \tau_t^{nc} \frac{w_t^{nc}}{F^{nc}} \\
V_h(h^{nc} e^{\hat{h}_t^{nc}}) &= U_c \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} e^{\hat{c}_t^{nc}} \right) \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} e^{\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc}} \\
V_{hh}(h^{nc}) h^{nc} \hat{h}_t^{nc} &= U_{cc} \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} \frac{c^{nc}}{F^{nc}} \hat{c}_t^{nc} + U_c \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc}) \\
\frac{V_{hh}(h^{nc}) h^{nc}}{V_h(h^{nc})} \hat{h}_t^{nc} &= \frac{U_{cc} \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \frac{c^{nc}}{F^{nc}}}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \hat{c}_t^{nc} + (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc})
\end{aligned}$$

y sustituyendo el consumo de la restricción presupuestal se llega a:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{V_{hh}(h^{nc}) h^{nc}}{V_h(h^{nc})} - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \frac{c^{nc}}{F^{nc}}}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \frac{1}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} \right) \hat{h}_t^{nc} \\
= &\frac{U_{cc} \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \frac{c^{nc}}{F^{nc}}}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \frac{1}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \left(\tau^{nc} \frac{w^{nc}}{F^{nc}} h^{nc} (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc}) + \frac{(1+r) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{R}_{t-1} - \hat{G}_{t-1}^{nc}) \right) \\
&+ \frac{U_{cc} \left(\frac{c^{nc}}{F^{nc}} \right) \frac{c^{nc}}{F^{nc}}}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right)} \frac{1}{\frac{c^{nc}}{F^{nc}}} \left(\frac{(r-g^{nc}) \frac{a^{nc}}{F^{nc}}}{(1+n^{nc})(1+g^{nc})} (\hat{a}_{t-1}^{nc} - \hat{N}_{t-1}^{nc}) \right) \\
&+ (\hat{\tau}_t^{nc} + \hat{w}_t^{nc})
\end{aligned}$$

B.3. Formación de expectativas

Por facilidad se define

$$y_t^c := \tau_t^c w_t^c h_t^c - \vartheta_t$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{y_t^c}{F_t} &= \tau_t^c \frac{w_t^c}{F_t^c} h_t^c - \frac{\vartheta_t}{F_t^c} \\
\frac{y^c}{F^c} \hat{y}_t^c &= \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c + \hat{h}_t^c) - \frac{\vartheta}{F^c} \hat{\vartheta}_t
\end{aligned}$$

Ahora, si se supone que \hat{y}_t^c sigue un proceso autorregresivo de ajuste de expectativas tenemos:

$$E_t \hat{y}_{t+s} = (\rho^y)^s \hat{y}_t$$

También puede suponerse un proceso similar para las expectativas de \hat{R}_{t+s} , \hat{N}_{t+s}^c , \hat{G}_{t+s}^c .

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{V_{hh}(h^c) h^c}{V_h(h^c)} - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \right) \hat{h}_t^c \\
= & \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \left(\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) + \frac{a^c}{F^c} (-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1}) - \frac{\vartheta}{F} \hat{\vartheta}_t \right) \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \frac{y^c}{F^c} (\rho^y)^s \hat{y}_t^c \\
& - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \frac{a^c}{F^c} (\rho^n)^{s-1} \hat{N}_t^c \\
& - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \frac{a^c}{F^c} (\rho^g)^{s-1} \hat{G}_t^c \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \frac{a^c}{F^c} (\rho^r)^{s-1} \hat{R}_t \\
& + \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \right)^s \left[\sum_{k=1}^s (\rho^r)^{k-1} \hat{R}_t + (\alpha-1) \sum_{k=1}^s (\rho^r)^{k-1} \hat{G}_t^c \right] \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

de donde se tiene, por propiedades de las series geométricas

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{V_{hh}(h^c) h^c}{V_h(h^c)} - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \right) \hat{h}_t^c \\
= & \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \left(\tau^c \frac{w^c}{F^c} h^c (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c) + \frac{a^c}{F^c} (-\hat{N}_{t-1}^c - \hat{G}_{t-1}^c + \hat{R}_{t-1}) - \frac{\vartheta}{F} \hat{\vartheta}_t \right) \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^y}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^y} \frac{y^c}{F^c} \hat{y}_t^c \\
& - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^n}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^n} \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{N}_t^c}{\rho^n} \\
& - \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^g}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^g} \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{G}_t^c}{\rho^g} \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) (1+r) \frac{c^c}{F^c}} \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^r}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^r} \frac{a^c}{F^c} \frac{\hat{R}_t}{\rho^r} \\
& + \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)} - \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^r}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^r} \right) \frac{\hat{R}_t}{1 - \rho^r} \\
& + \frac{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{(1+r)} \left(\frac{(1+n^c)(1+g^c)}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c)} - \frac{(1+n^c)(1+g^c) \rho^g}{(1+r) - (1+n^c)(1+g^c) \rho^g} \right) \frac{(\alpha-1) \hat{G}_t^c}{1 - \rho^g} \\
& + \frac{U_{cc} \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+r) - (1+n^c)(1+g^c)}{u_c \left(\frac{c^c}{F^c} \right) \frac{c^c}{F^c} (1+n^c)(1+g^c)} \frac{a^c}{F^c} \hat{a}_{t-1}^c + (\hat{\tau}_t^c + \hat{w}_t^c)
\end{aligned}$$

Esa es una expresión lineal explícita para \hat{h}_t^c en términos de los parámetros profundos del modelo, $\hat{\tau}_t^c$, \hat{w}_t^c y \hat{a}_{t-1}^c y variables exógenas.