



## RELACIÓN ENTRE VARIABLES MACRO Y LA CURVA DE RENDIMIENTOS\*

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA  
(lmelevel@banrep.gov.co)  
GIOVANNI ALFONSO CASTRO LANCHEROS♣  
(gcastrla@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

**RESÚMEN.** Este documento analiza la relación entre algunos fundamentales de la economía colombiana y la estructura a término de las tasas de interés para el periodo mensual comprendido entre enero de 2003 y diciembre de 2009. Para tal efecto, se caracteriza la curva de rendimientos a través de tres factores latentes utilizando una reparametrización de Nelson y Siegel [1987] y se estima un modelo VAR entre estos factores y las variables macroeconómicas consideradas. Este modelo es representado en notación de estado espacio y su estimación se realiza de forma conjunta utilizando el método de máxima verosimilitud.

Los resultados indican que hay una relación bidireccional entre los factores de la curva de rendimientos y las variables macro incorporadas en el modelo. Sin embargo, se observa una causalidad (en el sentido de Granger) más fuerte de las variables macroeconómicas hacia la curva que en el sentido contrario.

*Palabras claves.* Curva de rendimientos, modelos VAR, modelo de factores, curva de Nelson y Siegel, modelos de estado espacio.

*Códigos de clasificación JEL.* E43, E44, C50.

---

\* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Los autores agradecen al departamento de operaciones y desarrollo de mercados de la SG-MR del Banco de la República por proporcionar la base de datos. También agradecen los comentarios y sugerencias de Luis E. Arango, Pamela Cardozo, Juan S. Rojas, José V. Romero y en especial a Munir Jalil por sus aportes a una versión preliminar de este documento.

♣ Asistente de investigación.

## 1. INTRODUCCIÓN

La estructura a término de la tasa de interés es un mecanismo de transmisión importante de la política monetaria a la inflación y al producto. En este sentido, la curva de rendimientos es una herramienta útil para el Banco Central y los agentes que participan en el mercado, pues provee información relevante sobre las expectativas de dichas variables.

Recientemente, han aparecido numerosos trabajos en los que se relaciona el comportamiento de ciertas variables macroeconómicas con los factores no observables que describen de la curva de rendimientos. Estos modelos pueden brindar información relevante sobre cómo estas variables macro afectan la determinación de la estructura a término y viceversa. La mayoría de estos trabajos incorpora relaciones unidireccionales, de las variables macroeconómicas a los factores de la curva o en el sentido contrario; sin embargo, sólo algunos permiten un mecanismo de retroalimentación en el sistema.

En este contexto, los modelos se pueden clasificar de diferentes formas, una de ellas es entre aquellos en los que se impone una restricción de no arbitraje en cada momento del tiempo, y los de equilibrio, en los que se incorpora la dinámica de la tasa instantánea. En el último caso, los rendimientos a otros plazos son obtenidos haciendo supuestos sobre la prima por riesgo.

Imponer restricciones de no arbitraje garantiza que la dinámica de la curva sea consistente (Piazzesi [2009]). Bajo este esquema es posible separar la prima por el riesgo de las expectativas de las tasas futuras de corto plazo. Adicionalmente, el número de parámetros es menor que en modelos sin restricciones.

Por otro lado, los modelos de equilibrio tienen aún menor cantidad de parámetros y más restricciones que aquellos en los que existe ausencia de arbitraje. Por consiguiente, se podría esperar que los modelos de no arbitraje tengan un mejor desempeño que los de equilibrio dentro de muestra y que lo contrario sea cierto fuera de muestra. Sin embargo, ambas aproximaciones presentan algunos problemas: los modelos de no arbitraje no incorporan directamente la dinámica de la curva y, en la práctica se observa que los de equilibrio han mostrado un desempeño pobre en los pronósticos fuera de muestra (Diebold et al. [2006], Duffee [2002] y Brousseau [2002]).

Además, dependiendo de la forma en que se introducen las variables macroeconómicas, los modelos pueden generar resultados sustancialmente diferentes. Estas variables se pueden incluir expresando la estructura macroeconómica a través de un modelamiento consistente con las expectativas a largo plazo sobre la inflación. Otra forma de hacerlo es usar una representación no estructural de la macroeconomía. Si bien esta última es

robusta estadísticamente, se critica la falta de contenido económico en comparación con la primera aproximación.

Entre los trabajos que realizan estos tipos de análisis, el de Ang y Piazzesi [2003] supone una representación no estructural de la economía de Estados Unidos en la que no hay una relación bidireccional entre la curva y las variables macro. Al imponer una restricción de no arbitraje encuentran una respuesta muy fuerte de la curva de los bonos del tesoro a choques en la macroeconomía. Hördahl et al. [2006] proponen una representación estructural de la economía alemana imponiendo una restricción de no arbitraje. Estos autores encuentran mejoras en el pronóstico de la curva al incorporar las variables macro. Sin embargo, la información de la curva no mejora las predicciones de las variables macroeconómicas.

Rudebusch y Wu [2008] permiten retroalimentación bidireccional entre los factores de la curva y las variables macroeconómicas en un modelo sin restricciones de no arbitraje con especificación estructural de la economía de Estados Unidos. En este caso, las expectativas de inflación que se extraen de la curva juegan un papel limitado pero estadísticamente significativo en la determinación del producto y la inflación. Otra metodología en la que no se imponen restricciones de no arbitraje, en un mecanismo sin retroalimentación entre los factores de la estructura a término y las variables de la macroeconomía, es la propuesta de Evans y Marshall [2007] para EE.UU. En este documento los autores encuentran evidencia de que las variables macroeconómicas tienen un efecto significativo sobre los factores de la curva, en particular sobre el nivel.

Para el caso colombiano existen algunos documentos que proponen diversos métodos de estimación de la curva de rendimientos (Arango et al. [2003], Julio et al. [2002], Vásquez y Melo [2005], Santana [2008]). Respecto a los trabajos que relacionan la estructura a término con fundamentales macroeconómicos, Bautista et al. [2007] estiman un modelo que no impone restricciones de no arbitraje siguiendo a Diebold y Li [2006]. Posteriormente, analiza relaciones no estructurales entre los factores estimados de la curva y algunas variables macroeconómicas. Este documento no realiza una estimación conjunta del sistema ni considera retroalimentación entre los factores que caracterizan la curva y las variables macro. Mayorga [2007] estima un modelo no estructural sin restricciones de no arbitraje basado en la metodología propuesta por Diebold et al. [2006]. Sin embargo, este autor no realiza una estimación conjunta del modelo; la estimación se lleva a cabo en dos etapas. Primero, obtiene los factores de la curva utilizando la metodología de Diebold y Li [2006] y luego estima un VAR para estudiar la interacción entre los factores de la estructura a término y las series macroeconómicas.

Arango y Arosemena [2003] proponen un modelo con estructura económica en el que la estructura a término corresponde al *spread* de las tasas de interés. Estos autores únicamente buscan relaciones entre la pendiente de la estructura y las expectativas de inflación. Con una estrategia similar, Arango y Flórez [2004] y Arango et al. [2005] analizan relaciones entre la información de la estructura a término, los diferenciales de inflación y las expectativas de la actividad económica.

El enfoque que utiliza este documento no incorpora explícitamente un modelo de equilibrio económico, ni corresponde a una representación estructural. Adicionalmente, no se imponen restricciones de no arbitraje, pues como se comentó anteriormente, los modelos que suponen no arbitraje no siempre describen bien la dinámica de la curva a través del tiempo. Además, en un mercado con muy baja liquidez como el colombiano ésta restricción puede ser violada.

Como lo muestra Bolder [2006], una clase de modelos en los que no se imponen restricciones de no arbitraje y que muestran un buen desempeño dentro y fuera de muestra es el modelo de factores dinámicos desarrollado en Diebold y Li [2006]. Si bien esta clase de modelos no impone dichas restricciones, esto puede ser justificado por la falta de liquidez en algunos mercados. Además, su estimación no es tan complicada pues no se presentan las dificultades que existen al imponer tales restricciones.

La estimación de los factores de la curva de rendimientos desarrollada en este documento sigue la metodología de Diebold y Li [2006] en la que la dinámica de la curva es explicada por tres factores latentes: nivel, pendiente y curvatura. Adicionalmente, para estudiar el mecanismo de retroalimentación de estos factores con la macroeconomía se utiliza la metodología de Diebold et al. [2006]. Este último modelo es estimado de forma conjunta utilizando un modelo de estado espacio, donde la ecuación de transición corresponde a un proceso VAR(2).

Este documento está dividido en cuatro secciones, siendo la introducción la primera de ellas. En la sección dos se describen las metodologías que van a ser utilizadas para estimar y analizar la relación entre la estructura a término y las variables macroeconómicas. En la sección tres se presentan los resultados de la estimación para los datos colombianos para el periodo comprendido entre enero de 2003 y diciembre de 2009. Finalmente, en la sección cuatro se muestran algunos comentarios finales.

## 2. MODELOS DE FACTORES DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS

Como se mencionó en la sección anterior existen varias formas de modelar la curva de rendimientos, una de ellas es a través de modelos de factores latentes. En estos modelos la curva es explicada por un pequeño número de factores usualmente relacionados con el nivel, pendiente y curvatura de la curva.

**2.1. Modelo de Nelson y Siegel.** Nelson y Siegel [1987] propusieron la siguiente factorización para explicar la curva de rendimientos:

$$y(\tau) = b_1 + b_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \right) + b_3 e^{-\lambda \tau} \quad (2.1)$$

donde  $y(\tau)$  es el rendimiento de los títulos con vencimiento  $\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, N$ ,  $b_1, b_2, b_3$  y  $\lambda > 0$  son parámetros. Bajo esta estructura los factores pueden ser interpretados como sigue:  $b_1$  es el factor de largo plazo (nivel),  $b_2 - b_3$  es el factor de corto plazo (pendiente) y  $b_3$  es el factor de mediano plazo (curvatura).

Este modelo es muy útil debido a la interpretabilidad de los factores y a que la curva estimada tiene varias propiedades deseables: (1) permite representar diferentes formas de la curva; (2) la volatilidad del tramo corto de la curva es mayor que la del tramo largo y (3) su comportamiento asintótico es adecuado puesto que para vencimientos muy grandes el modelo produce resultados acotados.

**2.2. Modelo de Diebold y Li.** Diebold y Li [2006] proponen reparametrizar la aproximación de Nelson y Siegel de la siguiente forma:

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \quad (2.2)$$

donde  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$  y  $\beta_{3t}$  corresponden a factores latentes.  $\beta_{1t}$  es el factor de largo plazo ( $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{1t}$ ) y determina el nivel de la curva.  $\beta_{2t}$  está relacionado con el negativo de la pendiente de la curva y se puede interpretar como el factor de corto plazo ( $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = -\beta_{2t}$ ). La curvatura de la curva está relacionada con  $\beta_{3t}$  y se puede tomar como el factor de mediano plazo. En el Gráfico 2.1 se observa el comportamiento de los ponderadores de los tres factores a medida que aumenta el vencimiento.<sup>1</sup>

Esta parametrización tiene dos ventajas sobre la metodología de Nelson y Siegel: primero, la interpretación es más directa puesto que cada factor es representado por un único coeficiente; y segundo, presentan una menor multicolinealidad.

Diebold y Li [2006] proponen estimar el nivel, pendiente y curvatura de la curva de rendimientos a través de las estimaciones de los parámetros  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$  y  $\beta_{3t}$  de la ecuación (2.2).<sup>2</sup>

<sup>1</sup>En esta gráfica se utiliza  $\lambda_t = 0,185$  que corresponde al valor estimado para los datos utilizados en este documento.

<sup>2</sup>Debido a las no linealidades se puede hacer uso de la metodología de mínimos cuadrados no lineales como método de estimación (NLS).

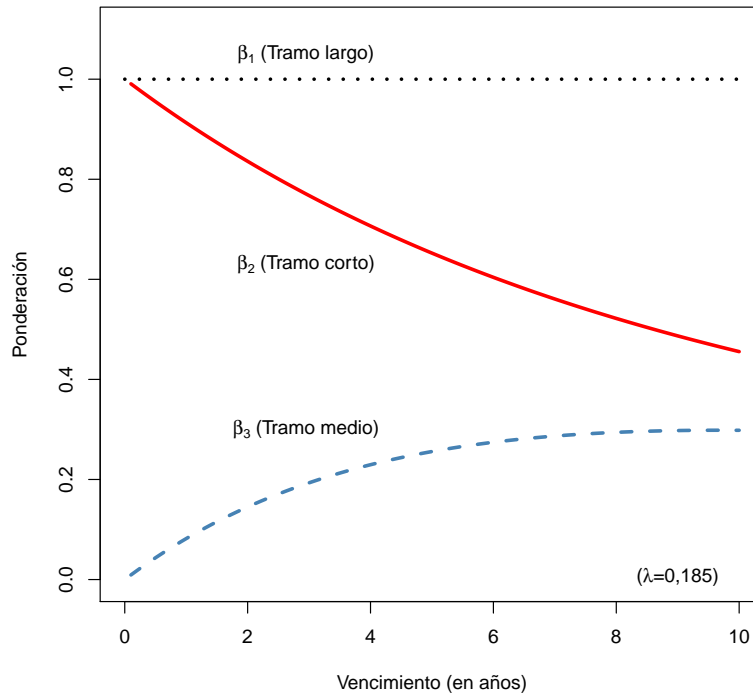


GRÁFICO 2.1. Ponderadores de los factores de la curva de rendimientos según la representación de Diebold y Li [2006]

Para simplificar el problema de estimación estos autores sugieren utilizar  $\hat{\lambda}$  constante en el tiempo.<sup>3</sup> La ventaja de esta estrategia es que al condicionar por este parámetro se obtienen estimaciones menos volátiles y adicionalmente, desaparece la no linealidad. Por lo tanto, en este caso se pueden utilizar métodos de estimación lineales.

**2.3. Modelo de Diebold, Rudebusch y Aruba.** Diebold et al. [2006] proponen un modelo que supone que el vector de factores latentes de la curva de rendimientos sigue un proceso VAR(1). Bajo este supuesto, el modelo puede ser escrito en forma de estado espacio y su estimación puede realizarse por el método de máxima verosimilitud utilizando el filtro de Kalman. El modelo puede escribirse como:

<sup>3</sup>Por ejemplo, se puede utilizar  $\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\lambda}_t$ , donde  $\hat{\lambda}_t$  corresponde a la estimación NLS en el periodo  $t$ .

$$\mathbf{y}_t = H\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mathbf{0}, R) \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = F\boldsymbol{\beta}_{t-1} + \boldsymbol{\nu}_t, \quad \boldsymbol{\nu}_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mathbf{0}, Q) \quad (2.4)$$

Donde:

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{pmatrix}$$

$F$  es una matriz de coeficientes de dimensión  $3 \times 3$ ,  $Q$  es una matriz  $3 \times 3$  y  $R$  es una matriz diagonal  $N \times N$ , siendo  $N$  el número de vencimientos considerados. Este modelo es equivalente al de Diebold y Li [2006] con  $\lambda$  constante agregando una ecuación dinámica sobre los factores.

Con el propósito de encontrar posibles relaciones entre estos factores y un conjunto de fundamentales que capturan la dinámica básica macroeconómica, Diebold et al. [2006] proponen incluir  $k$  variables macro ( $w_{1t}, \dots, w_{kt}$ ) dentro del vector de estado. Este modelo es descrito por las ecuaciones (2.3) y (2.4), donde:

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \\ w_{1t} \\ \vdots \\ w_{kt} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Las dimensiones de las matrices  $F$ ,  $Q$  y  $R$  deben ser modificadas de tal forma que el sistema sea conformable.

### 3. EJERCICIO EMPÍRICO

**3.1. Datos.** Los datos utilizados para el cálculo de la curva de rendimientos fueron las tasas de negociación de los TES clase B registrados en el Sistema Electrónico de Negociación (SEN) y en el Mercado Electrónico Colombiano (MEC). Basados en las estimaciones de la curva cero cupón, a partir de la metodología de Nelson y Siegel [1987],<sup>4</sup> se obtuvieron los rendimientos para 17 vencimientos: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60,

<sup>4</sup>Estos datos fueron proporcionados por el Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados de la SG-MR del Banco de la República.



72, 84, 96, 108 y 120 meses.

Como fundamentales se utilizaron las siguientes variables de la economía colombiana:<sup>5</sup> la tasa interbancaria (TIB), el índice de bonos de mercados emergentes de Colombia (EMBI), el índice de precios al consumidor (IPC)<sup>6</sup> y la brecha del producto interno bruto (BPIB). La muestra utilizada en el análisis es de frecuencia mensual para el periodo comprendido entre enero de 2003 y diciembre de 2009.<sup>7</sup>

La brecha del producto fue calculada a partir del filtro de Hodrick y Prescott [1980, 1997], utilizando el PIB mensual obtenido con la metodología de desagregación temporal de Santos-Silva y Cardoso [2001]<sup>8</sup>. En este procedimiento se usa el Índice de Producción Real de la industria manufacturera como variable indicadora mensual. El IPC y el producto fueron ajustados estacionalmente utilizando el procedimiento Tramo-Seats de Gómez y Maravall [1996] y Caporello y Maravall [2004].

**3.2. Metodología.** En este trabajo se realizan dos tipos de estimaciones de la relación entre los factores que determinan la curva de rendimientos y las variables de la economía colombiana mencionadas en la sección 3.1, siguiendo las metodologías de Diebold y Li [2006] y Diebold et al. [2006]. De ahora en adelante estas metodologías serán notadas como DL y DRA, respectivamente. En el primer caso se realiza el siguiente procedimiento:

- i) Estimación de los parámetros de la ecuación (2.2) por métodos no lineales para cada periodo de la muestra.
- ii) Estimación de la ecuación (2.2) condicionada a  $\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\lambda}_t$ , donde  $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_T\}$  son obtenidos en el paso anterior. En esta etapa se obtienen estimaciones del nivel ( $\hat{\beta}_{1t}$ ), pendiente ( $-\hat{\beta}_{2t}$ ) y curvatura ( $\hat{\beta}_{3t}$ ) de la curva.

En el segundo caso se incorporan las variables macro y se estima el modelo en una sola etapa utilizando la representación de estado espacio descrita en las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5). En este sistema la ecuación de transición describe un proceso VAR(1). Sin embargo, en nuestro caso con base en criterios de información se identificó un VAR(2). Por lo tanto, la ecuación (2.4) debe ser reemplazada por la ecuación:

$$\beta_t = F_1\beta_{t-1} + F_2\beta_{t-2} + \nu_t \quad \nu_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\mathbf{0}, Q) \quad (3.1)$$

<sup>5</sup>La selección de las variables macroeconómicas es consistente con la literatura que relaciona los factores de la curva con fundamentales macroeconómicos. Una revisión de documentos sobre este tema se muestra en Anexo A.

<sup>6</sup>Tanto el EMBI como el IPC son utilizados en variaciones anuales,  $\nabla^{12}EMBI_t$  y  $\pi_t$ , respectivamente.

<sup>7</sup>En el caso de las variables de frecuencia diaria se tomaron promedios mensuales.

<sup>8</sup>Un resumen de metodologías de desagregación temporal se encuentra en Hurtado y Melo [2009]

Reescribiendo la ecuación (3.1) en términos de un proceso VAR(1) sobre el vector de estado  $(\beta'_t, \beta'_{t-1})'$ , el modelo de estado espacio para la metodología de DRA para este caso está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{y}_t = H \begin{pmatrix} \beta_t \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mathbf{0}, R) \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_t \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{t-1} \\ \beta_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_t \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\nu}_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mathbf{0}, Q) \quad (3.3)$$

Donde  $\mathbf{y}_t$ ,  $H$  y  $\beta_t$  están especificados en (2.5). Es importante notar que el bloque de ceros de la matriz  $H$  debe ser de dimensión  $N \times (2k + 3)$ . En este caso, el número de vencimientos  $N$  es 17 y el número de variables macro  $k$  es 4 y corresponden a la TIB, la inflación, la brecha del producto y el EMBI. Las matrices  $Q$  y  $R$  corresponden a las descritas en el modelo de DRA como se muestra en la sección 2.3.

**3.3. Resultados.** En esta sección se muestran los resultados de las estimaciones de las metodologías DL y DRA descritas en la sección 3.2 aplicadas al caso colombiano.<sup>9</sup>

*3.3.1. Comparación de los factores estimados de la curva con los factores empíricos y variables macro.* Una vez estimados los dos modelos a partir de las metodologías descritas anteriormente, se comparan los tres factores estimados de la curva de rendimientos con factores empíricos y con algunas variables macroeconómicas.

Los factores empíricos hacen referencia a diferentes tramos de la curva de rendimientos. El factor nivel está relacionado con el tramo largo de la curva y por lo tanto, se puede asociar con  $y(120)$ <sup>10</sup> como *proxy* empírica. A su vez, el factor pendiente está asociado con el comportamiento del tramo corto de la curva y su *proxy* empírica puede definirse como  $y(3) - y(120)$ . Por último, la *proxy* empírica para el factor curvatura, relacionada con el tramo medio, se puede representar como  $2y(24) - y(3) - y(120)$ .<sup>11</sup>

Algunos trabajos que analizan la curva de rendimientos usualmente asocian ciertas variables macroeconómicas a los factores de la curva. En el caso de Diebold et al. [2006] encuentran una fuerte relación entre el factor nivel y la inflación y entre el factor pendiente y la utilización de capacidad instalada. Rudebusch y Wu [2008] y Diebold et al. [2006] interpretan el factor nivel como las expectativas de inflación. Respecto a la pendiente,

<sup>9</sup>En el Anexo C se muestran diferentes pruebas de especificación sobre los residuales de predicción del modelo DRA. Estos resultados indican que no existen indicios de mala especificación del modelo.

<sup>10</sup> $y(120)$  corresponde a la tasa de rendimiento de los bonos con vencimiento en 120 meses.

<sup>11</sup>Este tipo de interpretaciones se puede verificar en el Gráfico 2.1.

Rudebusch y Wu [2008] interpretan este factor como una tasa de política monetaria.

Los Gráficos B.1, B.2 y B.3 del Anexo B presentan las estimaciones del nivel, pendiente y curvatura de la curva de rendimientos obtenidas por los métodos DL y DRA al igual que las *proxies* empíricas de estos factores. En general, las estimaciones de los factores de la curva por las dos metodologías son muy similares y tienen una dinámica muy parecida a las de sus *proxies* empíricas.

En los Gráficos 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran las estimaciones del nivel y pendiente obtenidas por la metodología DL, sus *proxies* empíricas y algunas variables macro. Se puede observar que existe una relación evidente entre el nivel y la inflación. Igualmente, existe una clara relación entre la pendiente y dos series: la brecha del producto y la tasa interbancaria. Estos resultados son similares a los encontrados por Diebold et al. [2006] y Rudebusch y Wu [2008] para otros mercados. Finalmente, en el Gráfico 3.4 se puede observar una relación significativa entre la pendiente estimada y el EMBI. Sin embargo, ésta sólo es clara al inicio y final de muestra.

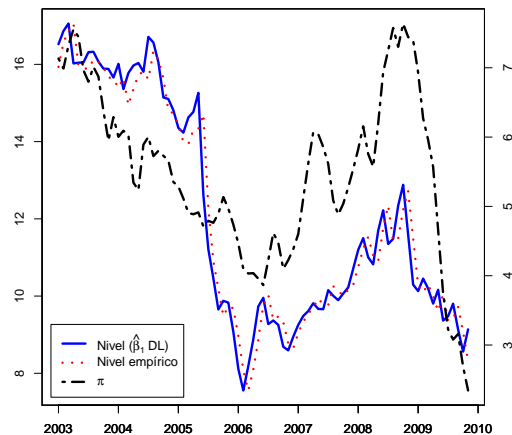


GRÁFICO 3.1. Nivel de la curva de rendimientos (eje izquierdo), su *proxy* empírica (eje izquierdo) y la inflación (eje derecho). El nivel empírico es calculado como  $y(120)$ .

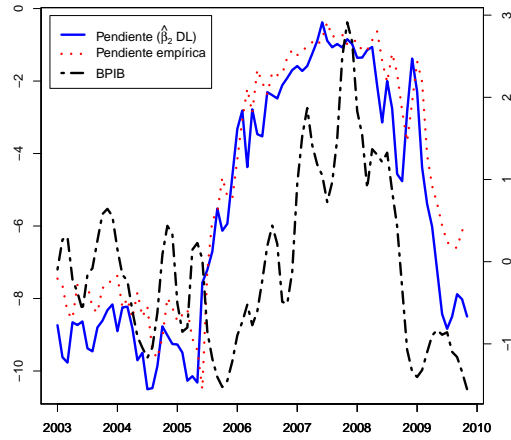


GRÁFICO 3.2. Pendiente de la curva de rendimientos (eje izquierdo), su *proxy* empírica (eje izquierdo) y la brecha del producto (eje derecho). La pendiente empírica se calcula como  $y(3) - y(120)$ .

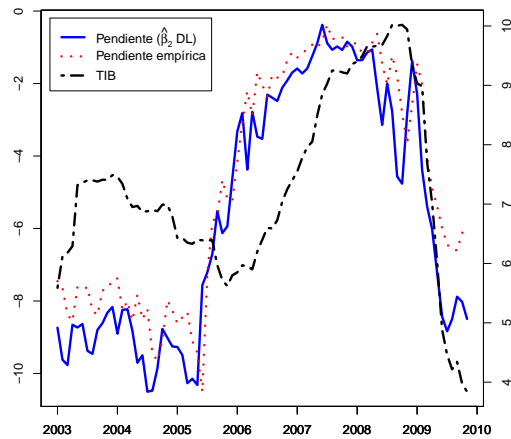


GRÁFICO 3.3. Pendiente de la curva de rendimientos (eje izquierdo), su *proxy* empírica (eje izquierdo) y la TIB (eje derecho). La pendiente empírica se calcula como  $y(3) - y(120)$ .

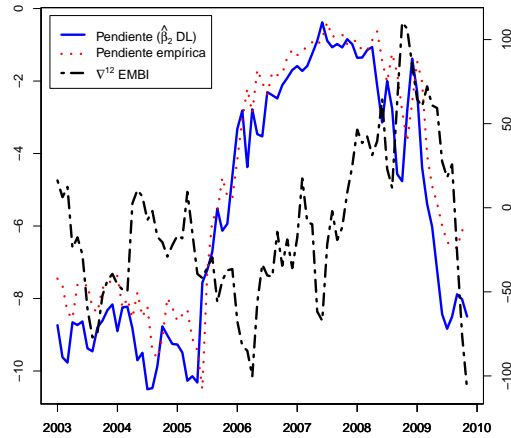


GRÁFICO 3.4. Pendiente de la curva de rendimientos (eje izquierdo), su *proxy* empírica (eje izquierdo) y variaciones anuales del EMBI (eje derecho). La pendiente empírica se calcula como  $y(3) - y(120)$ .

3.3.2. *Funciones Impulso Respuesta.* La dinámica del sistema estimado mediante la metodología DRA es analizada utilizando funciones de impulso respuesta con intervalos de confianza del 95 %<sup>12</sup>. Este análisis es expuesto en el Gráfico 3.5.<sup>13</sup>

Las respuestas de las variables macro a choques en los factores de la curva son similares a las de otros modelos (Diebold et al. [2006], Rudebusch y Wu [2008]). Un choque en la pendiente provoca un incremento en la tasa interbancaria. Esto podría explicarse por la posible anticipación de los participantes del mercado de bonos a las acciones de la autoridad monetaria. Respecto a otros choques, se observa una respuesta no significativa de la inflación, la TIB, la brecha del producto y al EMBI a un choque en el nivel.

Con relación a las respuestas de las variables de la curva a choques en las variables macro, el nivel no tiene una respuesta significativa cuando el choque es dado por variables macro diferentes al EMBI. Un choque al EMBI hace que el factor de la curva asociado al nivel aumente y el asociado a la pendiente caiga en los primeros periodos después del impacto. Esto podría interpretarse como una respuesta del mercado a un incremento en el riesgo país. Adicionalmente, la curvatura responde de manera negativa a un choque en la TIB.

<sup>12</sup>Estos intervalos fueron calculados utilizando metodologías asintóticas.

<sup>13</sup>La identificación de los choques se realizó utilizando el método de Cholesky usando el siguiente orden de exogeneidad contemporánea (de mayor a menor): nivel, pendiente, curvatura, brecha del producto, inflación, TIB y  $\nabla^{12}$ EMBI.

Este comportamiento es consistente con el ajuste de las tasas medias y largas cuando se incrementa la tasa interbancaria.

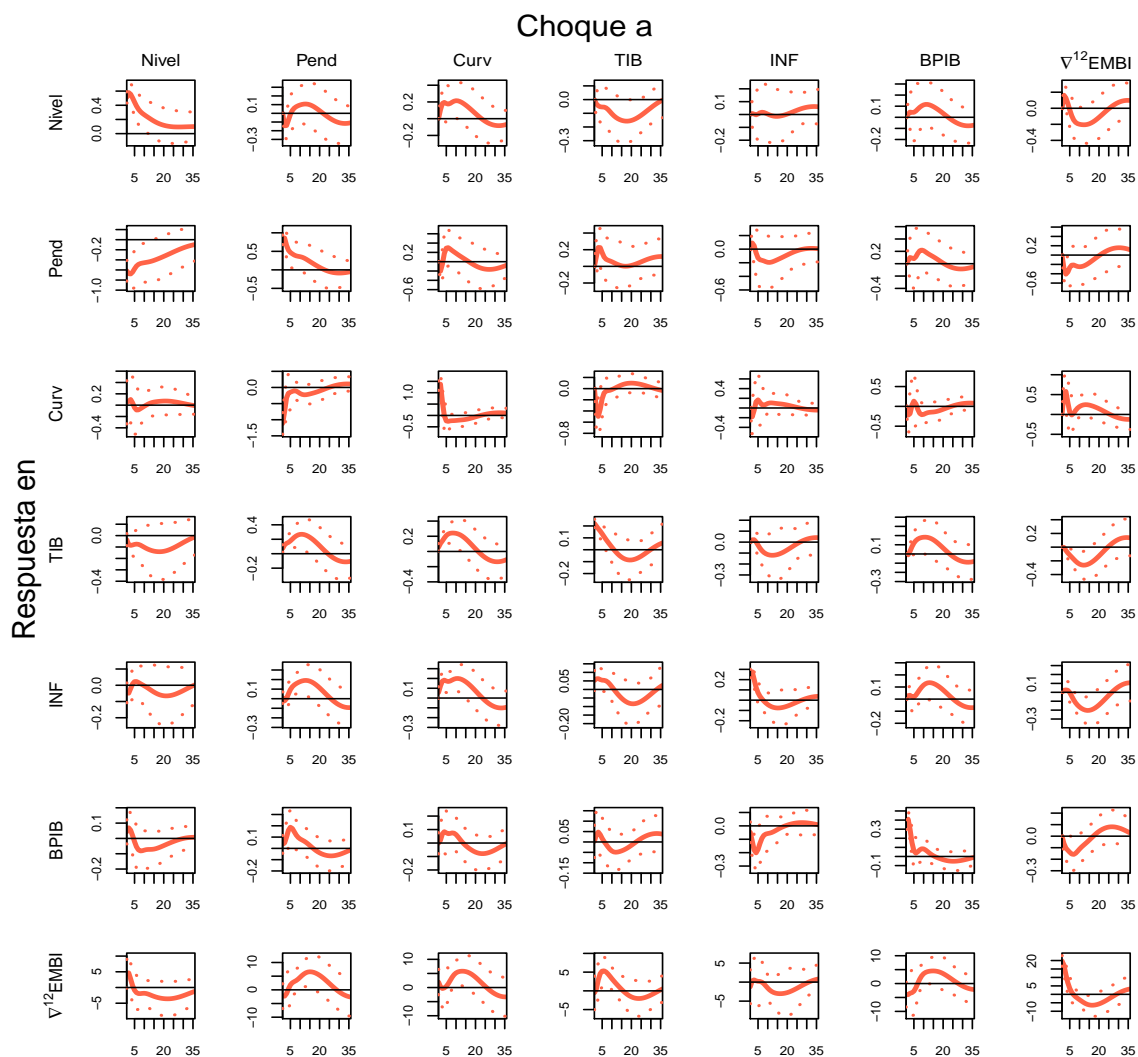


GRÁFICO 3.5. Funciones de impulso respuesta del modelo DRA con intervalos de confianza del 95 %.

Las respuestas de las variables macro a choques en estas series en la mayoría de los casos no son significativas. Sin embargo, se observa que ante un incremento en la brecha del PIB se tiene un aumento en la tasa de interés, esto podría explicarse por las presiones inflacionarias que generarían un sobrecalentamiento de la economía por lo que el banco

central tendría que reaccionar con una política contraccionista.

La dinámica de los factores de la curva a choques en ellos mismos, en general, no produce resultados significativos para la mayoría de los elementos fuera de la diagonal. Es decir, para choques en un factor y respuestas en otros. Sin embargo, se observa que la pendiente responde negativamente a un choque en el nivel.

3.3.3. *Interacción entre los factores de la curva y las variables macro.* Para probar la causalidad en sentido de Granger e instantánea entre los factores de la curva de rendimientos y las variables macro se partitionaron las matrices  $F_1$ ,  $F_2$  y  $Q$  de la ecuación (3.1) de acuerdo a bloques asociados a estos dos grupos de series de la siguiente forma:

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_{11,1} & F_{12,1} \\ F_{21,1} & F_{22,1} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} F_{11,2} & F_{12,2} \\ F_{21,2} & F_{22,2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Para establecer si las variables macro no causan en el sentido de Granger a los factores de la curva se debe contrastar la hipótesis nula  $F_{12,1} = F_{12,2} = 0$ . De forma similar, la hipótesis nula de no causalidad de los factores a las variables macro es  $F_{21,1} = F_{21,2} = 0$ . En el caso de la causalidad instantánea entre estos dos grupos de variables la hipótesis nula es  $Q_{12} = 0$ .

	Causalidad en sentido de Granger		Causalidad instantánea
	No Macro a Curva	No Curva a Macro	
Hipótesis nula	$F_{12,1} = F_{12,2} = 0$	$F_{21,1} = F_{21,2} = 0$	$Q_{12} = 0$
No. de restricciones	24	24	12
Estadística	2,683	1,817	19,158
Valor-P	< 0,001	0,011	0,085

TABLA 3.1. Pruebas de causalidad entre los factores de la curva de rendimientos y las variables macro para el modelo DRA.

Los resultados de las pruebas de causalidad se presentan en la Tabla 3.1. Éstos muestran que hay causalidad en sentido de Granger de las variables macro a los factores de la curva de rendimientos y viceversa, con un nivel de significancia del 5%. Por otro lado, la causalidad instantánea es rechazada con un nivel de significancia del 5% pero no con el 10%. Estos resultados indican que, en la muestra utilizada, existe evidencia de una relación bidireccional entre los factores que determinan la curva de rendimientos y las variables macroeconómicas consideradas. Sin embargo, hay mayor evidencia de la relación

de las variables macro hacia la curva que en el sentido contrario.<sup>14</sup>

**3.4. Ejercicios de Robustez.** En esta sección fueron realizadas dos estimaciones adicionales del modelo DRA para analizar su robustez. La primera tiene como objetivo analizar la estabilidad de los parámetros del modelo; mientras que la segunda pretende analizar el impacto del ordenamiento de las variables del vector de estado en la identificación los choques en el análisis de impulso respuesta.

Para verificar la estabilidad de los parámetros del modelo se estimó el sistema descrito por las ecuaciones (3.2) y (3.3) permitiendo que el parámetro de decaimiento temporal,  $\lambda_t$ , cambie en el tiempo de acuerdo a una caminata aleatoria.<sup>15</sup> Es importante notar que  $\lambda_t$  es el generador de la no linealidad en los modelos analizados y gobierna la relación entre los factores de la curva y los rendimientos. Por esta razón, cuando éste varía en el tiempo la matriz de ponderadores  $H$  también lo hace. Los detalles de este modelo junto con los resultados del análisis de impulso respuesta (Gráfico D.1) se muestran en el Anexo D.1. En general, los resultados son bastante similares a los obtenidos con el modelo DRA descrito en la sección 3.2.

Dado que en el análisis de impulso respuesta se utilizó la descomposición de Cholesky para identificar los choques, es necesario establecer un orden de exogeneidad contemporánea de las variables. Para verificar si el orden utilizado afecta los resultados de este análisis se estimó un modelo donde la matriz  $Q$  es diagonal. Los nuevos resultados del análisis de impulso respuesta y de las pruebas de causalidad son muy similares a los del modelo DRA inicial (Gráfico D.2 y Tabla D.2 del Anexo D.2).

#### 4. COMENTARIOS FINALES

En este documento se estima un modelo que relaciona el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos cero cupón con la tasa interbancaria, la inflación, la brecha del producto y el índice de mercados emergentes. Este modelo sigue la metodología empleada por Diebold et al. [2006].

Los resultados de la estimación muestran evidencia a favor de una relación bidireccional entre los factores de la estructura a término y las variables macroeconómicas consideradas. Sin embargo, la evidencia sugiere que la relación de las variables macro a la curva de rendimientos es más fuerte que en el sentido contrario. Este último resultado está basado

<sup>14</sup>Es importante notar que la causalidad de Granger de los factores de la curva hacia las variables macro es rechazada al utilizar un nivel de significancia del 1 %. Adicionalmente, en el modelo DRA con  $\lambda_t$  cambiante, descrito en la sección 3.4, esta misma prueba es rechazada a cualquier nivel de significancia usual (Tabla D.1).

<sup>15</sup>En este caso, la dinámica del vector de estado corresponde a un proceso VAR(1).



en las pruebas de causalidad de Granger realizadas tanto para el modelo estimado en el documento como en los ejercicios de robustez realizados.

En particular, se encuentran resultados que sugieren que un choque en la pendiente produce una respuesta positiva en la tasa interbancaria. Esto podría explicarse por la posible anticipación de los participantes del mercado de bonos a las acciones de la autoridad monetaria. Además, un choque en la brecha del PIB hace que la tasa de intervención sea mayor de tal forma que la autoridad de política monetaria estaría reaccionando a presiones inflacionarias.

## REFERENCIAS

- ANG, A., y M. PIAZZESI (2003): "A no arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables," *Journal of Monetary Economics*, 50, 745–787.
- ARANGO, L. E., y A. M. AROSEMENA (2003): "El tramo corto de la estructura plazo como predictor de expectativas de inflación en Colombia," Borradores de Economía 264, Banco de la Republica de Colombia.
- ARANGO, L. E., y L. A. FLÓREZ (2004): "Expectativas de actividad económica en Colombia y estructura a plazo: un poco mas de evidencia," Borradores de Economía 302, Banco de la Republica de Colombia.
- ARANGO, L. E., L. A. FLÓREZ, y A. M. AROSEMENA (2005): "El tramo corto de la estructura plazo como predictor de expectativas de actividad económica en Colombia," *Cuadernos de Economía*, 42, 79 – 101.
- ARANGO, L. E., L. F. MELO, y D. M. VASQUÉZ (2003): "Estimación de la estructura a plazo de las tasas de Interés en Colombia," *Coyuntura Económica, Fedesarrollo*, 33(1), 51–76.
- BAUTISTA, R., A. RIASCOS, y N. SUÁREZ (2007): "La aplicación de un modelo de factores a las curvas de rendimiento del mercado de deuda pública colombiano," Galeras de Administración 14, Universidad de los Andes, Facultad de Administración.
- BERNADELL, C., J. COCHE, y K. NYHOLM (2005): "Yield curve prediction for the strategic investor," Working Paper Series 472, European Central Bank.
- BOLDER, D. J. (2006): "Modelling Term-Structure Dynamics for Risk Management: A Practitioner's Perspective," Working Papers 06-48, Bank of Canada.
- BROUSSEAU, V. (2002): "The functional form of yield curves," Working Paper 148, European Central Bank.
- CAPORELLO, G., y A. MARAVALL (2004): *Program TSW, Reference Manual*, Banco de España.
- DIEBOLD, F. X., y C. LI (2006): "Forecasting the term structure of government bond yields," *Journal of Econometrics*, 130(2), 337–364.
- DIEBOLD, F. X., G. D. RUDEBUSCH, y B. S. ARUOBA (2006): "The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach," *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 309–338.
- DUFFEE, G. (2002): "Term premia and interest rate forecasts in affine models," *Journal of Finance*, 57, 405–443.
- EVANS, C. L., y D. A. MARSHALL (2007): "Economic Determinants of the Nominal Treasury Yield Curve," *Journal of Monetary Economics*, 54(7), 1986–2000.
- GÓMEZ, V., y A. MARAVALL (1996): "Programs TRAMO and SEATS," Documento de Trabajo 9628, Banco de España.
- HODRICK, R. J., y E. C. PRESCOTT (1980): "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation," discussion paper 451, Carnegie Mellon University.
- (1997): "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation," *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1), 1–16.

- HÖRDAHL, P., O. TRISTANI, Y D. VESTIN (2006): "A joint econometric model of macroeconomic and term-structure dynamics," *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 405–444.
- HURTADO, J. L., Y L. F. MELO (2009): "Una metodología multivariada de desagregación temporal," Borradores de Economía 586, Banco de la República de Colombia.
- JULIO, J., S. MERA, Y A. REVÉIZ (2002): "La Curva Spot (cero cupón), estimación con Splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos," Borradores de Economía 213, Banco de la República de Colombia.
- MAYORGA, W. (2007): "The Yield Curve and Macroeconomics Factors in Emerging Economics: The Colombian Case," Tesis de maestría, University of York.
- MORALES, M. (2008): "The real yield curve and macroeconomic factors in the Chilean economy," *Applied Economics*.
- NELSON, C. R., Y A. F. SIEGEL (1987): "Parsimonious modelling of yield curves," *Journal of Business*, 60, 473–489.
- PIAZZESI, M. (2009): "Affine Term Structure Models," in *Handbook of Financial Econometrics*, pp. 691–776. North-Holland.
- REPPA, Z. (2009): "A joint macroeconomic-yield curve model for Hungary," MNB Working Papers 2009/1, Magyar Nemzeti Bank (The Central Bank of Hungary).
- RUDEBUSCH, G., Y T. WU (2008): "A macro-finance model of the term structure, monetary policy and the economy," *Economic Journal*, 118(530).
- SANTANA, J. C. (2008): "La curva de rendimientos: una revisión metodológica y nuevas aproximaciones de estimación," *Cuadernos de Economía*, pp. 71–113.
- SANTOS-SILVA, J., Y F. CARDOSO (2001): "The Chow-Lin method using dynamic models," *Economic Modelling*, 18, 269–280.
- VÁSQUEZ, D. M., Y L. F. MELO (2005): "Estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas," *Revista de Economía del Rosario*, 8(1), 1–23.

ANEXO A. VARIABLES UTILIZADAS EN TRABAJOS QUE RELACIONAN FACTORES DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS Y VARIABLES MACROECONÓMICAS

Autor	Título	Variables
Bernadell et al. [2005]	Yield Curve Prediction for the Strategic Investor	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Variación anual del PIB.</li> <li>▪ Inflación mensual en variaciones anuales.</li> </ul>
Diebold et al. [2006]	The Macroeconomy and the Yield Curve: A dynamic Latent Factor Approach	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Variación mensual de la utilización de la capacidad instalada.</li> <li>▪ Inflación mensual en variaciones anuales.</li> <li>▪ Tasa de interés de fondos federales.</li> </ul>
Bautista et al. [2007]	La aplicación de un modelo de factores a las curva de rendimiento del mercado de deuda pública colombiano	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ IPR en niveles</li> <li>▪ Inflación mensual en variaciones anuales.</li> <li>▪ Inflación esperada a 12 meses.</li> </ul>
Evans y Marshall [2007]	Economic Determinants of the Nominal Treasury Yield Curve	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Logaritmo de la producción industrial mensual.</li> <li>▪ Logaritmo del gasto en consumo personal mensual.</li> <li>▪ Tasa de interés de fondos federales.</li> </ul>
Mayorga [2007]	The Yield Curve and Macroeconomics Factors in Emerging Economics: The Colombian Case	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Crecimiento anual del índice de utilización de capacidad.</li> <li>▪ Inflación anual medida como desviaciones de su potencial (filtro de Hodrick y Prescott [1980, 1997]).</li> <li>▪ Tasa de intervención del Banco Central.</li> <li>▪ Primera diferencia de la tasa de cambio.</li> </ul>

(Continúa)

<b>(Continuación)</b>		
Autor	Título	Variables
Morales [2008]	The Real Yield Curve and Macroeconomic Factors in the Chilean Economy	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Brecha del producto.</li> <li>▪ Inflación mensual en variaciones anuales.</li> <li>▪ Tasa de interés objetivo del Banco Central.</li> </ul>
Rudebusch y Wu [2008]	A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Inflación mensual en variaciones anuales (centrada).</li> <li>▪ Utilización de capacidad instalada (centrada).</li> </ul>
Reppa [2009]	A Joint Macroeconomic-Yield Curve Model for Hungary	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Componente cíclico del producto (filtro de Hodrick y Prescott [1980, 1997])</li> <li>▪ Inflación <i>CORE</i> mensual en variaciones anuales.</li> <li>▪ Variación mensual de la tasa de cambio.</li> </ul>

TABLA A.1. Variables utilizadas en trabajos que relacionan factores de la curva y variables macro

## ANEXO B. COMPARACIÓN DE ESTIMACIONES

En esta sección se comparan estimaciones de los factores de la curva de rendimientos obtenidas por los métodos DL y DRA (sección 3.2) junto con sus *proxies* empíricas.

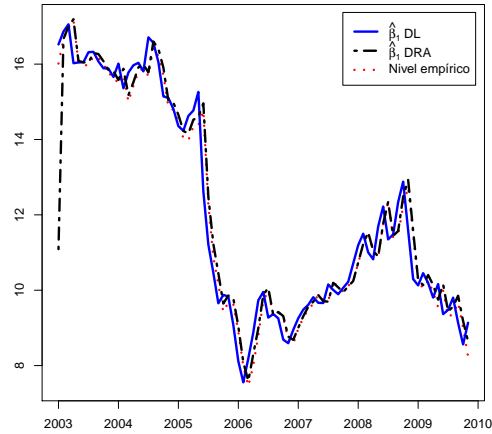


GRÁFICO B.1. Nivel de la curva de rendimientos estimado a través de las metodologías de DL y DRA y su *proxy* empírica ( $y(120)$ ).

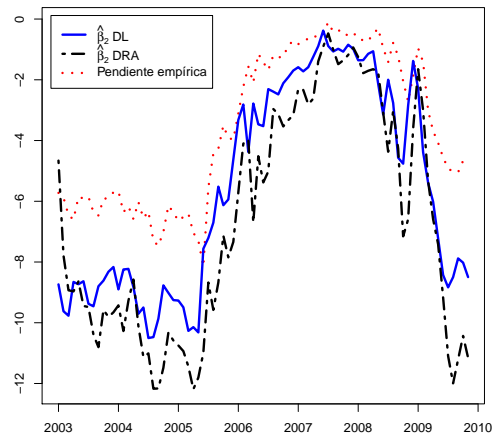


GRÁFICO B.2. Pendiente de la curva de rendimientos estimada a través de las metodologías de DL y DRA y su *proxy* empírica ( $y(3) - y(120)$ ).

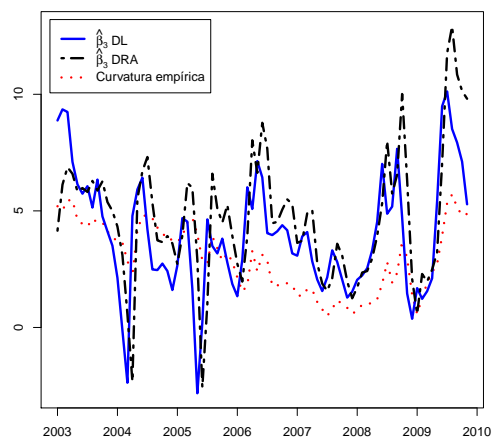


GRÁFICO B.3. Curvatura de la curva de rendimientos estimada a través de las metodologías de DL y DRA y su *proxy* empírica  $(2y(24) - y(120) - y(3))$ .

## ANEXO C. PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO DEL MODELO DRA

A continuación se presentan algunas pruebas de verificación de supuestos sobre los residuales del modelo DRA estimado en la sección 3.3. En C.1 y C.2 se muestran los gráficos cuantil-cuantil y los *Cusum* cuadráticos, respectivamente.

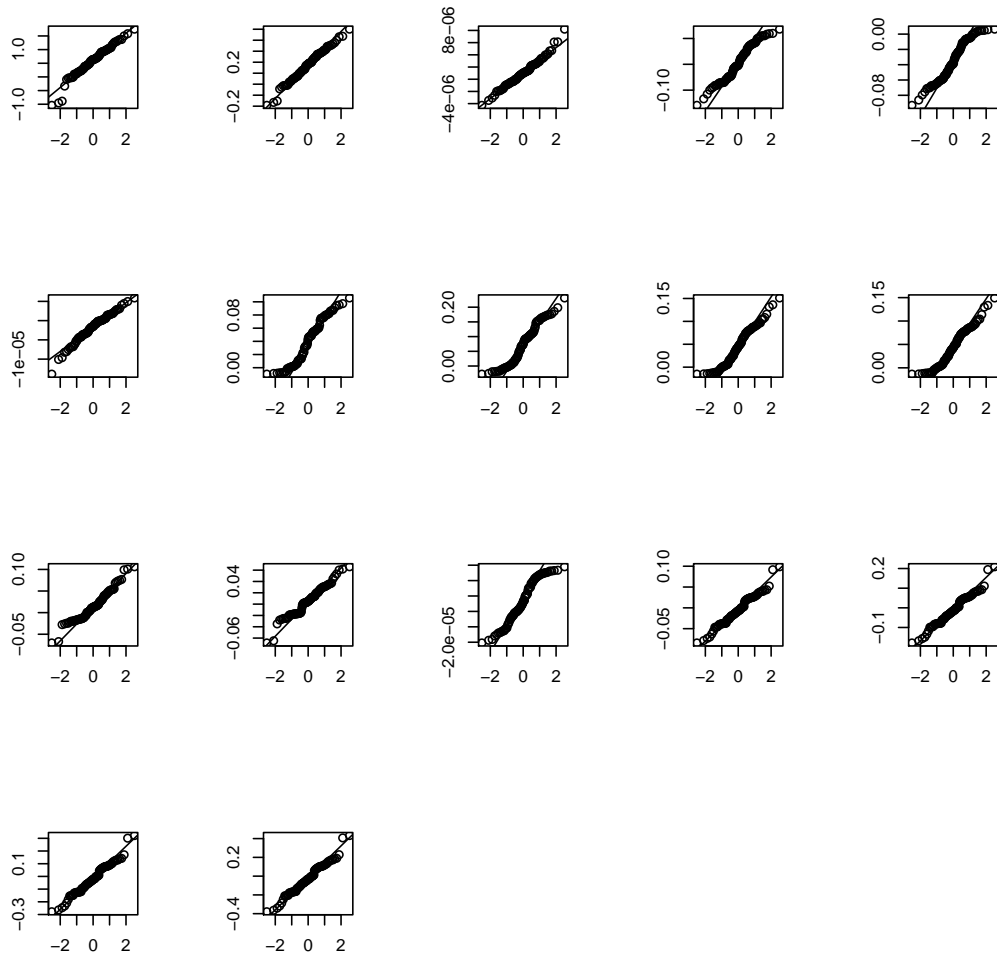


GRÁFICO C.1. Gráficos cuantil-cuantil de los errores de pronóstico del modelo DRA.



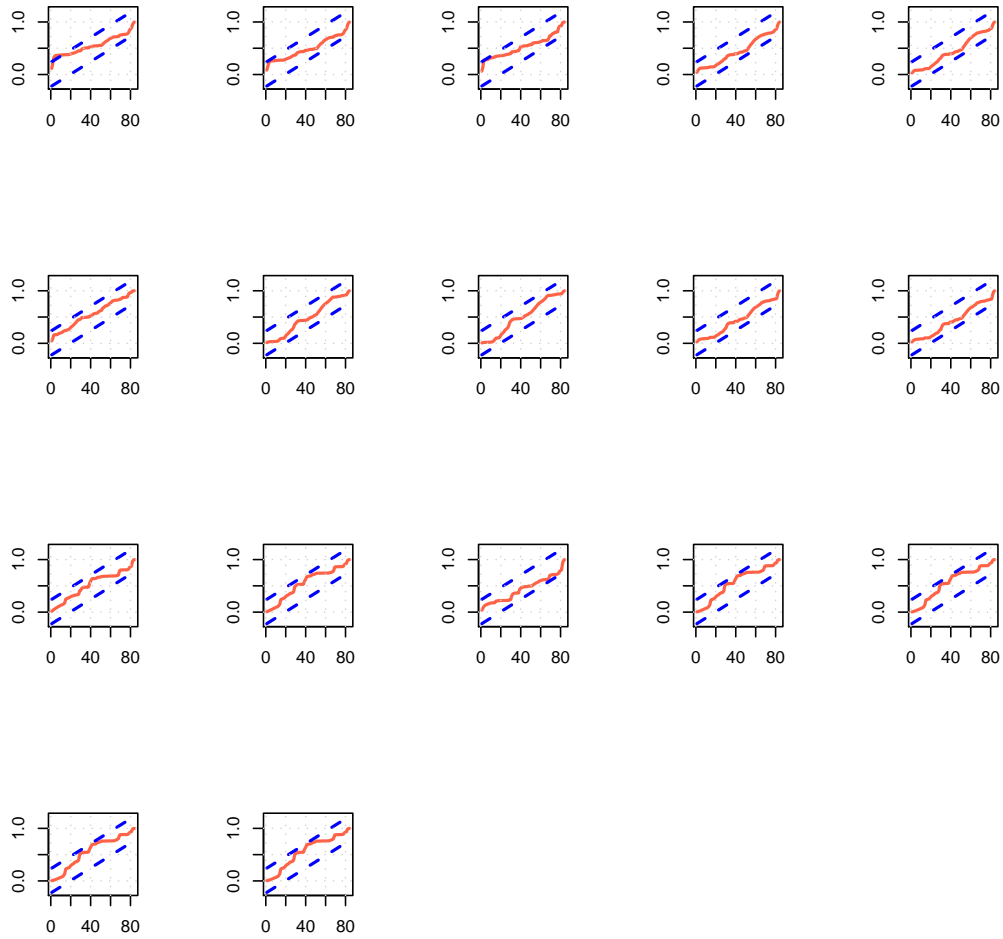


GRÁFICO C.2. *Cusum* cuadráticos de los errores de pronóstico del modelo DRA. Las líneas punteadas corresponden a intervalos de confianza del 99 %.

## ANEXO D. MODELOS UTILIZADOS EN LOS EJERCICIOS DE ROBUSTEZ

En esta sección se presentan algunos detalles y resultados de la estimación de los modelos mencionados en la sección 3.4, que son utilizados como ejercicios de robustez.

**D.1. Modelo DRA con  $\lambda_t$  cambiante.** En este modelo la dinámica de  $\lambda_t$  está dada por una camina aleatoria. Teniendo en cuenta esta característica y las ecuaciones (2.3) y (2.4), el modelo de estado espacio es el siguiente:

$$\mathbf{y}_t = H(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, TIB_t, \pi_t, BPIB_t, \nabla^{12}EMBI_t, \lambda_t)' + \mathbf{e}_t$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \\ TIB_t \\ \pi_t \\ BPIB_t \\ \nabla^{12}EMBI_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \mathbf{0}_3 \\ F_{21} & F_{22} & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}'_3 & \mathbf{0}'_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \beta_{3,t-1} \\ TIB_{t-1} \\ \pi_{t-1} \\ BPIB_{t-1} \\ \nabla^{12}EMBI_{t-1} \\ \lambda_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{v}_t$$

donde  $\mathbf{y}_t$ ,  $H$ ,  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{v}_t$  están especificados en (2.5) y  $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)'$ ,  $\mathbf{0}_4 = (0, 0, 0, 0)'$ . Es importante notar que en este caso el bloque de ceros de la matriz  $H$  es de dimensión  $N \times (k + 1)$ , con  $N = 17$  y  $k = 4$ .

En cuanto a los resultados de estimación de este modelo, en el Gráfico D.1 se muestran las funciones de impulso respuesta y se comparan con las del modelo DRA inicial. Las pruebas de causalidad de Granger e instantánea son presentadas en la Tabla D.1.

	Causalidad en sentido de Granger		Causalidad instantánea
	No Macro a Curva	No Curva a Macro	
Hipótesis nula	$F_{12,1} = F_{12,2} = 0$	$F_{21,1} = F_{21,2} = 0$	$Q_{12} = 0$
No. de restricciones	24	24	12
Estadística	8,100	1,314	88,380
Valor-P	< 0,001	0,207	< 0,001

TABLA D.1. Pruebas de causalidad entre los factores de la curva de rendimientos y las variables macro para el modelo DRA con  $\lambda_t$  cambiante.

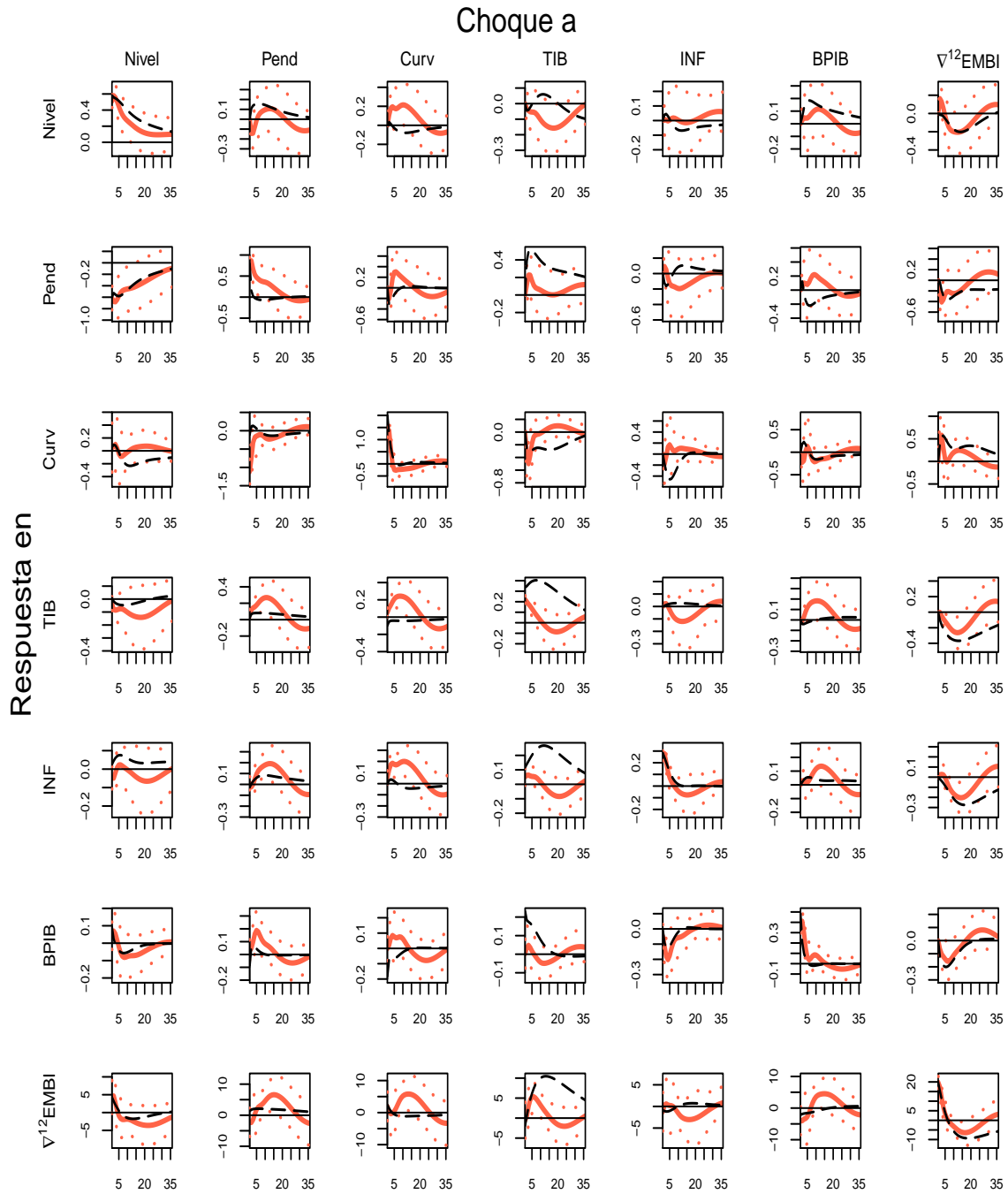


GRÁFICO D.1. Funciones impulso respuesta del modelo DRA con  $\lambda_t$  cambiante. La línea discontinua y la continua corresponden al impulso respuesta del modelo con  $\lambda_t$  cambiante y al del modelo DRA, respectivamente. Los intervalos de confianza del 95 %, en líneas punteadas, son extraídos del modelo DRA.

**D.2. Modelo DRA con  $Q$  diagonal.** Con el objetivo de examinar el impacto del ordenamiento específico de las variables en los resultados del análisis de impulso respuesta al seguir la metodología de Cholesky, se estimó un modelo donde la matriz  $Q$ , descrita en la sección 3.2, es diagonal. Las funciones de impulso respuesta y las pruebas de causalidad son presentadas en la Gráfico D.2 y Tabla D.2, respectivamente.

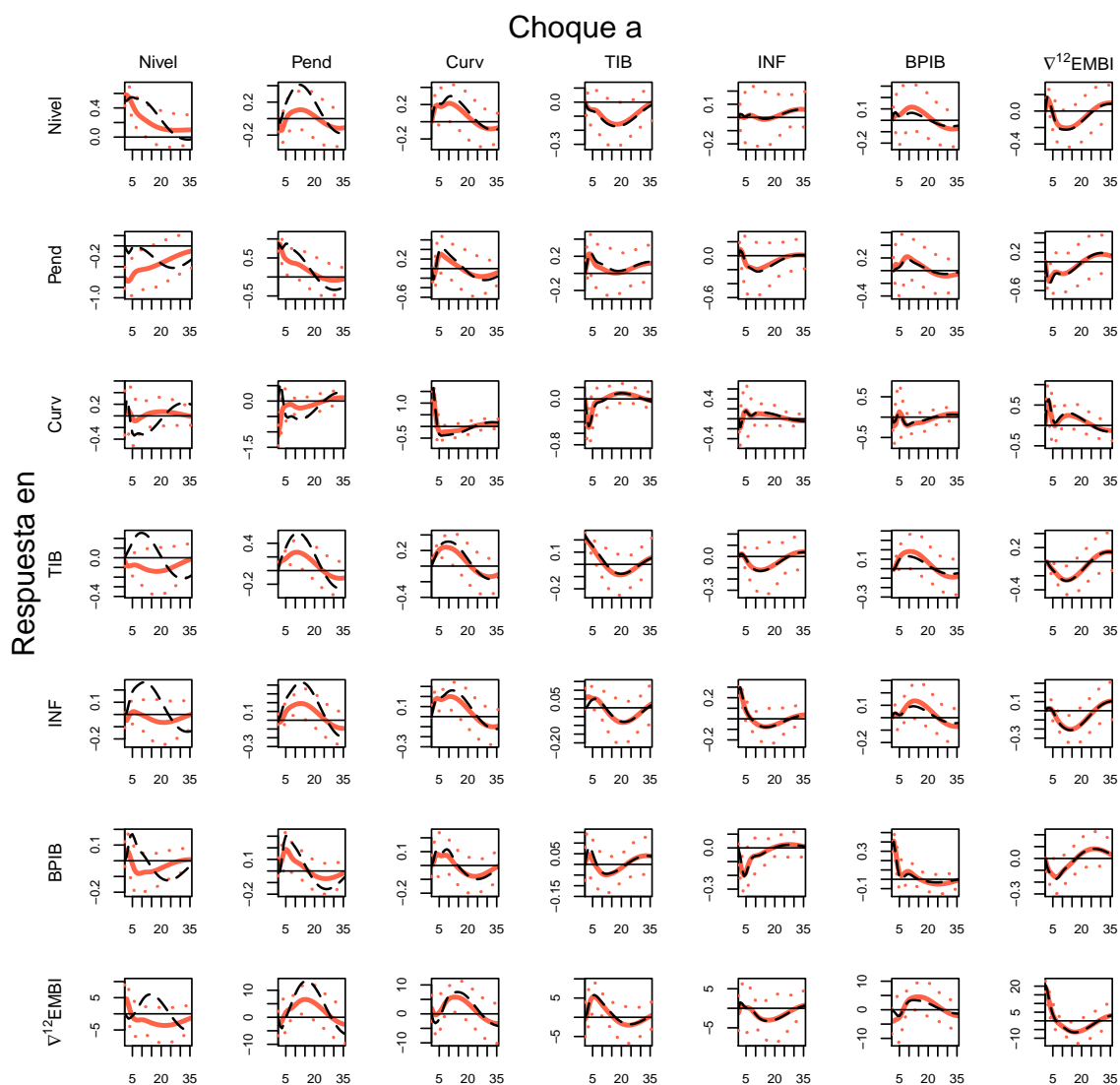


GRÁFICO D.2. Funciones impulso respuesta del modelo DRA con  $Q$  diagonal. La línea discontinua y la continua corresponden al impulso respuesta del modelo con  $Q$  diagonal y al del modelo DRA, respectivamente. Los intervalos de confianza del 95 %, en líneas punteadas, son extraídos del modelo DRA.

	No Macro a Curva	No Curva a Macro
Hipótesis nula	$F_{12,1} = F_{12,2} = 0$	$F_{21,1} = F_{21,2} = 0$
No. de restricciones	24	24
Estadística	2,298	2,142
Valor-P	< 0,001	0,001

TABLA D.2. Pruebas de causalidad de Granger entre los factores de la curva de rendimientos y las variables macro para el modelo DRA con  $Q$  diagonal.